Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 3, С. 11–20

УДК **517.968**

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЯДРОМ ГИЛЬБЕРТА И МОНОТОННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

С. Н. Асхабов

Посвящается А. Б. Шабату в связи с его 80-летием

Методом максимальных монотонных операторов в вещественных пространствах Лебега доказываются теоремы о существовании и единственности решения для различных классов нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Гильберта. Приведены следствия, иллюстрирующие полученные результаты.

Ключевые слова: нелинейное сингулярное интегро-дифференциальное уравнение, ядро Гильберта, метод максимальных монотонных операторов.

1. Введение и основные результаты

Интерес к сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям вызван их многочисленными и разнообразными приложениями в гидро и аэродинамике (уравнение Прандтля «крыла самолета»), в теории упругости и автоматического управления, в области устойчивых процессов с независимыми приращениями и др. [10]. В работах Х. М. Когана [7, 8] в связи с решением одной вариационной задачи был изучен сингулярный интегро-дифференциальный оператор с ядром Коши

$$(Tu)(x) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{u'(s)}{s-x}\,ds$$

как оператор, действующий из $L_2(-1,1)$ в $L_2(-1,1)$, с областью определения

$$D(T) = \left\{u(x):\, u(x)\in AC[-1,1],\ u(-1)=u(1)=0,\ \int\limits_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,u'^2(x)\,dx<\infty\right\},$$

где $AC[-1,1]$ — множество всех абсолютно непрерывных на отрезке $[-1,1]$ функций. В [8] доказано, что оператор T симметричен и положителен. В работе М. Шлайфа [11] для скалярного произведения (Tu,u) получено неравенство

$$(Tu,u) = \int\limits_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{\pi}\int\limits_{-1}^{1}\frac{u'(s)}{s-x}\,ds\right)u(x)\,dx \geqslant \int\limits_{-1}^{1}\frac{u^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (\forall\, u(x)\in D(T)).$$

Эти результаты допускают обобщение на случай сингулярного интегро-дифференциального оператора вида

$$(\mathbb{B}u)(x) = -\frac{b(x)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\big[b(s)u(s)\big]'}{s-x}\,ds, \qquad b(x)\in AC[-1,1],$$

рассматриваемого в пространстве Лебега $L_p(\varrho)$, $p\geqslant 2$, с весом $\varrho(x)=(1-x^2)^{-1/2}$ и областью определения $D(\mathbb{B})=\big\{u(x):\, u(x)\in AC[-1,1],\ u(\pm 1)=0,\ u'(x)\in L_{p'}(\sigma)\big\}$, где $p'=p/(p-1)$, $\sigma(x)=(1-x^2)^{(p'-1)/2}$. При этих условиях оператор $\mathbb{B}$ является симметричным и положительным, причем (см. [2])

$$\langle \mathbb{B}u,u\rangle = \int_{-1}^{1}\left(-\frac{b(x)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\big[b(s)u(s)\big]'}{s-x}\,ds\right)u(x)\,dx \geqslant \int_{-1}^{1}\frac{\big[b(x)u(x)\big]^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \quad (\forall\, u(x)\in D(\mathbb{B})).$$

В работах Л. Вольферсдорфа [10] и автора [2] установлена максимальная монотонность операторов T и $\mathbb{B}$, соответственно, и доказаны теоремы о существовании и единственности решения для различных классов нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Коши, содержащих эти операторы. Некоторые другие классы таких уравнений были ранее рассмотрены в [9].

В данной работе изучается сингулярный интегро-дифференциальный оператор с ядром Гильберта

$$(Gu)(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds$$

как оператор, действующий из пространства вещественных 2π-периодических функций $L_p(-\pi,\pi)$, $1<p<\infty$, в сопряженное с ним пространство $L_{p'}(-\pi,\pi)$, с областью определения

$$D(G)=\left\{u(x):\, u(x)\in AC[-\pi,\pi],\ u(-\pi)=u(\pi)=0,\ \int_{-\pi}^{\pi}|u'(x)|^{p'}\,dx<\infty\right\},$$

где $AC[-\pi,\pi]$ — множество всех абсолютно непрерывных на отрезке $[-\pi,\pi]$ функций.

Применяя методы теории тригонометрических рядов [3], установлено, что G является симметричным, потенциальным, строго положительным и максимальным монотонным оператором. Используя эти свойства, методом максимальных монотонных операторов [5] доказаны глобальные теоремы о существовании и единственности решения для различных классов нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Гильберта, содержащих оператор G. Приведены следствия, иллюстрирующие полученные результаты.

Всюду в работе будем придерживаться принятых в монографии [5] обозначений и определений, касающихся теории монотонных операторов. Пусть X — вещественное рефлексивное банахово пространство, X^* — сопряженное с ним пространство и оператор Λ действует из X в X^*, т. е. $\Lambda\in(X\to X^*)$. Обозначим через $\langle y,x\rangle$ значение линейного непрерывного функционала $y\in X^*$ на элементе $x\in X$. В частности, если X — гильбертово пространство $\mathbb{H}$, то $\langle y,x\rangle$ совпадает с обычным скалярным произведением (y,x), где $x,y\in\mathbb{H}$. Оператор Λ с линейной областью определения $D(\Lambda)\subset X$ называется *монотонным*, если для любых $u,v\in D(\Lambda)$ выполняется неравенство $\langle \Lambda u-\Lambda v,u-v\rangle\geqslant 0$

и строго монотонным, если $\langle \Lambda u - \Lambda v, u - v\rangle > 0$ при $u \neq v$. Монотонный оператор $\Lambda \in (D(\Lambda) \to X^*)$ называется *максимально монотонным*, если из выполнения неравенства $\langle f - \Lambda v, u - v\rangle \geqslant 0$ для любого $v \in D(\Lambda)$ следует, что $u \in D(\Lambda)$ и $\Lambda u = f$. Если Λ — линейный оператор, то определение монотонного и строго монотонного оператора совпадает с определением положительного и строго положительного оператора соответственно.

Как обычно, через $\mathbb{R}$ и $\mathbb{N}$ обозначаются множества всех действительных и натуральных чисел соответственно, а через $p' = p/(p-1)$ — сопряженное с p число.

2. Строгая положительность сингулярного интегро-дифференциального оператора с ядром Гильберта

Пусть $1 < p < \infty$ и $p' = p/(p-1)$. Обозначим через $L_p(-\pi,\pi)$ множество всех измеримых по Лебегу на отрезке $[-\pi,\pi]$ вещественных 2π-периодических функций с конечной нормой $\|u\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |u(x)|^p dx\right)^{1/p}$. Норму в сопряженном пространстве $L_{p'}(-\pi,\pi)$ обозначим через $\|\cdot\|_{p'}$. Поставим в соответствие функции $u(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ ее тригонометрический ряд Фурье

$$u(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,, \tag{1}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\,dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\cos nx\,dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)\sin nx\,dx, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

есть коэффициенты ряда Фурье функции $u(x)$.

Следуя монографии Н. К. Бари [3], определим сопряженную с $u(x)$ функцию $\overline{u}(x)$:

$$\overline{u}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{u(x+s) - u(x-s)}{2\operatorname{tg}\frac{s}{2}}\,ds.$$

Известно [3, с. 573], что сопряженная функция $\overline{u}(x)$ представима в виде

$$\overline{u}(x) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{u(s)}{2\ \operatorname{tg}\frac{s-x}{2}}\,ds = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds, \tag{3}$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши — Лебегу, и соответствующий ей тригонометрический ряд Фурье имеет вид [3, с. 568]

$$\overline{u}(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos nx - a_n \sin nx)\,, \tag{4}$$

где коэффициенты a_n и b_n определяются по формулам (2).

Рассмотрим теперь сингулярный интегральный оператор H с ядром Гильберта:

$$(Hu)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds, \tag{5}$$

где, как и выше, интеграл понимается в смысле главного значения по Коши — Лебегу. Сравнивая (3) и (5), замечаем, что $(Hu)(x) = -\overline{u}(x)$. Значит, в силу (4)

$$(Hu)(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \cos nx - a_n \sin nx\right). \tag{6}$$

Пусть $u(x) \in L_p(-\pi,\pi)$, $v(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$. Обозначим коэффициенты их рядов Фурье через a_n, b_n и c_n, d_n, соответственно. Тогда [3, с. 218] справедливо равенство Парсеваля

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(x)v(x)\,dx = \frac{a_0c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_nc_n + b_nd_n\right). \tag{7}$$

Используя равенство Парсеваля (7), с учетом соотношений (1) и (6) для любого $u(x) \in L_2(-\pi,\pi)$ получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(Hu)(x)\cdot u(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\left(b_na_n - a_nb_n\right) = 0 \ \text{ или } \ (Hu,u) = 0 \quad (\forall\, u(x) \in L_2(-\pi,\pi)), \tag{8}$$

т. е. сингулярный интегральный оператор H с ядром Гильберта является положительным в пространстве $L_2(-\pi,\pi)$, но не является строго положительным оператором, так как не удовлетворяет условию: $(Hu,u) > 0$, если $u \neq 0$.

Рассмотрим теперь в пространстве $L_p(-\pi,\pi)$, $1 < p < \infty$, сингулярный интегро-дифференциальный оператор G с ядром Гильберта

$$(Gu)\,(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(s)\,\mathrm{ctg}\,\frac{s-x}{2}\,ds,$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши — Лебегу, с областью определения

$$D(G) = \left\{u(x):\ u(x) \in AC[-\pi,\pi],\ u(-\pi) = u(\pi) = 0,\ \int_{-\pi}^{\pi}|u'(x)|^{p'}\,dx < \infty\right\},$$

где $AC[-\pi,\pi]$ — множество всех абсолютно непрерывных на отрезке $[-\pi,\pi]$ функций.

Теорема 2.1. *Пусть $1 < p < \infty$. Сингулярный интегро-дифференциальный оператор G с ядром Гильберта действует из $D(G)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$ и является строго положительным, симметричным и потенциальным, причем*

$$\langle Gu,u\rangle = \pi\sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n^2 + b_n^2\right) \quad (\forall\, u(x) \in D(G)), \tag{9}$$

где коэффициенты a_n и b_n определяются по формулам (2).

$\triangleleft$ Так как сингулярный интегральный оператор H с ядром Гильберта действует [3, с. 566] непрерывно из $L_{p'}(-\pi,\pi)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$ при любом $p' \in (1,\infty)$, то очевидно, что сингулярный интегро-дифференциальный оператор G с ядром Гильберта действует из $D(G)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$, поскольку $u'(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$.

Докажем, что оператор G является строго положительным. Пусть $u(x) \in D(G)$. Так как функция $u(x)$ абсолютно непрерывна на отрезке $[-\pi,\pi]$, то справедливо соотношение [3, с. 87]

$$u'(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n\left(b_n \cos nx - a_n \sin nx\right).$$

В силу (4) имеем

$$\overline{u'}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right). \tag{10}$$

Используя равенство (10), с учетом того, что в силу (3) $\overline{u'}(x) = (Gu)(x)$, на основании равенства Парсеваля (7) получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds\right)u(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\left(a_n^2 + b_n^2\right),$$

т. е. справедлива доказываемая формула (9). Из формулы (9) непосредственно вытекает, что оператор G является положительным, т. е. $\langle Gu, u\rangle \geqslant 0$ $(\forall\, u(x) \in D(G))$. Кроме того, из формулы (9) следует, что $\langle Gu, u\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $a_n = b_n = 0$ $(\forall\, n \in \mathbb{N})$. Но в этом случае, в силу соотношения (1), $u(x) \sim a_0/2$, т. е. $u(x) = C = \mathrm{const}$ $(\forall\, x \in [-\pi,\pi])$. Поскольку $u(-\pi) = u(\pi) = 0$, то $C = 0$ и, значит, $\langle Gu, u\rangle = 0$ лишь в случае $u(x) = 0$, т. е. G — строго положительный оператор.

Докажем теперь, что оператор G является симметричным. Пусть $u(x) \in L_p(-\pi,\pi)$, $v(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$. Обозначим коэффициенты их рядов Фурье через a_n, b_n и c_n, d_n, соответственно. Тогда, с учетом (10) и равенства $\overline{u'}(x) = (Gu)(x)$, имеем

$$(Gu)(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right), \quad (Gv)(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} n\left(c_n \cos nx + d_n \sin nx\right).$$

Поэтому в силу равенства Парсеваля (7) получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(Gu)(x)v(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n c_n + b_n d_n\right),$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u(x)(Gv)(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(a_n c_n + b_n d_n\right).$$

Значит,

$$\int_{-\pi}^{\pi}(Gu)(x)\cdot v(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}u(x)\cdot(Gv)(x)\,dx, \quad \text{т. е. } \langle Gu, v\rangle = \langle u, Gv\rangle \quad (\forall\, u(x), v(x) \in D(G)). \tag{11}$$

Из равенства (11) вытекает, что оператор G является симметричным, т. е. $G = G^*$, где G^* — сопряженный с G оператор.

Докажем, что оператор G является потенциальным. Для этого рассмотрим, следуя примеру 5.3 из [4, с. 63], квадратичный функционал $f(u) = \langle Gu, u\rangle$. Так как множество $D(G)$ плотно в пространстве $L_p(-\pi,\pi)$ при любом $p \in (1,\infty)$, $G = G^*$ и $D(G) = D(G^*)$, то [4, с. 63]

$$\mathrm{grad} f(u) = Gu + G^*u = 2\,Gu \quad \text{или} \quad Gu = \frac{1}{2}\,\mathrm{grad} f(u),$$

т. е. линейный оператор G, действующий из $D(G)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$, $p' = p/(p-1)$, является потенциальным. $\triangleright$

3. Теоремы существования и единственности в $L_p(-\pi,\pi)$

В этом пункте доказываются теоремы о существовании и единственности решения для различных классов нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с ядром Гильберта, содержащих оператор G.

Введем в рассмотрение нелинейный оператор суперпозиции (так называемый *оператор Немыцкого*). Пусть вещественнозначная функция $F(x,u)$ определена при $x \in [-\pi,\pi]$, $u \in \mathbb{R}$, имеет период 2π по x и удовлетворяет условиям Каратеодори: она измерима по x при каждом фиксированном $u \in \mathbb{R}$ и непрерывна по u почти для всех $x \in [-\pi,\pi]$. Обозначим через F оператор суперпозиции, порожденный функцией $F(x,u)$: $(Fu)(x) = F(x,u(x))$, а через $L_p^+(-\pi,\pi)$ — множество всех неотрицательных функций из $L_p(-\pi,\pi)$.

Нам понадобится следующая теорема Ф. Браудера, приведенная с доказательством в монографии [5, с. 98].

Теорема 3.1. *Пусть X — рефлексивное банахово пространство, $\Lambda \in (D(\Lambda) \to X^*)$ — радиально непрерывный максимальный монотонный оператор с линейной областью определения $D(\Lambda) \subset X$ и $A \in (X \to X^*)$ — радиально непрерывный монотонный коэрцитивный оператор. Тогда при любом $f \in X^*$ уравнение*

$$\Lambda u + Au = f \tag{12}$$

имеет решение $u \in D(\Lambda)$. Если, кроме того, оператор A является строго монотонным, то уравнение (12) *имеет точно одно решение.*

Замечание 3.1. Заметим [5, с. 143], что теорема 3.1 была сформулирована Ф. Браудером без предположений радиальной непрерывности оператора Λ и линейности области его определения $D(\Lambda)$. Достаточно, чтобы оператор Λ был линейным максимальным монотонным оператором с плотной в пространстве X областью определения $D(\Lambda)$ [6]. Легко видеть, что для единственности решения в теореме 3.1 достаточно, чтобы хотя бы один из операторов Λ или A был строго монотонным.

Теорема 3.2. *Пусть $p \geqslant 2$ и $f(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$. Если для почти всех $x \in [-\pi,\pi]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ выполняются условия*
1) $|F(x,u)| \leqslant a(x) + d_1 \cdot |u|^{p-1}$, *где* $a(x) \in L_{p'}^+(-\pi,\pi)$, $d_1 > 0$;
2) $F(x,u)$ *не убывает по* u;
3) $F(x,u) \cdot u \geqslant d_2 \cdot |u|^p - D(x)$, *где* $D(x) \in L_1^+(-\pi,\pi)$, $d_2 > 0$,

то при любых значениях параметра $\lambda > 0$ уравнение

$$\lambda \cdot F(x,u(x)) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(s)\,\mathrm{ctg}\,\frac{s-x}{2}\,ds = f(x) \tag{13}$$

имеет единственное решение $u(x) \in D(G)$.

$\lhd$ Запишем уравнение (13) в операторном виде:

$$\lambda F u + G u = f. \tag{14}$$

Из условий 1)–3) вытекает, что оператор суперпозиции F действует непрерывно из $L_p(-\pi,\pi)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$, монотонен и коэрцитивен, причем для любого $u(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ выполняются неравенства $\|Fu\|_{p'} \leqslant \|a\|_{p'} + d_1\|u\|_p^{p-1}$ и $\langle Fu, u\rangle \geqslant d_2\|u\|_p^p - \|D\|_1$.

Рассмотрим теперь сингулярный интегро-дифференциальный оператор G. По теореме 2.1 оператор G действует из $D(G)$ в $L_{p'}(-\pi,\pi)$ и является строго положительным, а значит, в силу линейности, и строго монотонным оператором. Кроме того, оператор G является максимальным монотонным оператором, так как не допускает строго монотонного расширения (ср. [10, с. 258]).

Таким образом, для операторов $G = \Lambda$ и $\lambda F = A$ выполняются все требования теоремы 3.1. Следовательно, уравнение (14), а значит и уравнение (13), имеет единственное (см. замечание 3.1) решение $u \in D(G)$. $\rhd$

Следствие 3.1. *Пусть $p \geqslant 2$ — любое четное число, $f(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$. Тогда уравнение*

$$u^{p-1}(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds = f(x)$$

имеет единственное решение $u(x) \in D(G)$.

Следующие две теоремы отличаются от теоремы 3.2 как по характеру ограничений на нелинейность, так и по структуре доказательства.

Теорема 3.3. *Пусть $p \geqslant 2$ и $f(x) \in L_p(-\pi,\pi)$. Если для почти всех $x \in [-\pi,\pi]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ выполняются условия:*
1) $|F(x,u)| \leqslant g(x) + d_3|u|^{1/(p-1)}$, *где* $g(x) \in L_p^+(-\pi,\pi)$, $d_3 > 0$;
2) $F(x,u)$ *не убывает по* u;
3) $F(x,u)\cdot u \geqslant d_4|u|^{p/(p-1)} - D(x)$, *где* $D(x) \in L_1^+(-\pi,\pi)$, $d_4 > 0$,
то при любых значениях параметра $\lambda > 0$ уравнение

$$\lambda F(x, u'(x)) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds = f(x) \tag{15}$$

имеет единственное решение $u(x) \in L_p(-\pi,\pi)$ с $u'(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$ и $u(\pm\pi) = 0$.

$\lhd$ Полагая в уравнении (15) $u'(x) = v(x)$ и учитывая, что тогда $u(x) = \int_{-\pi}^{x} v(t)\,dt + u(-\pi) = \int_{-\pi}^{x} v(t)\,dt$, приходим к операторному уравнению

$$\lambda F v + V v = f, \tag{16}$$

где $v \in L_{p'}(-\pi,\pi)$ и

$$(Vv)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{s} v(t)\,dt\right)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds = (Hu)(x).$$

Поскольку сингулярный оператор H, в силу теоремы М. Рисса [3, с. 566], действует непрерывно из $L_p(-\pi,\pi)$ в $L_p(-\pi,\pi)$, то из равенства $Vv = Hu$ вытекает, что оператор V действует из $L_{p'}(-\pi,\pi)$ в $L_p(-\pi,\pi)$, причем, в силу формулы М. Рисса перестановки регулярного и сингулярного интегралов [3, с. 568], равенства $Vv = Hu$ и равенства (9), с учетом, что $u(x) \in L_p(-\pi,\pi)$, $u'(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$ и $u(\pm\pi)=0$, имеем

$$\langle Vv, v\rangle = \langle Hu, u'\rangle = -\langle u, Hu'\rangle = \langle u, Gu\rangle = \langle Gu, u\rangle \geqslant 0 \quad (\forall\, v \in L_{p'}(-\pi,\pi)). \tag{17}$$

Итак, оператор V действует из $L_{p'}(-\pi,\pi)$ в $L_p(-\pi,\pi)$ и является строго положительным оператором, что вытекает из (17), поскольку $\langle Gu, u\rangle > 0$ при $u \neq 0$ по теореме 2.1. Кроме того, согласно следствию 1.1 из [5, с. 84] линейный монотонный оператор V является непрерывным.

Рассмотрим теперь оператор суперпозиции F. Из условий 1)–3) вытекает (см., например, [1, § 2]), что оператор F действует непрерывно из $L_{p'}(-\pi,\pi)$ в $L_p(-\pi,\pi)$, монотонен и коэрцитивен.

Таким образом, используя установленные свойства операторов V и F, получаем, что оператор $A = \lambda F + V$ действует из пространства $L_{p'}(-\pi,\pi)$ в сопряженное с ним пространство $L_p(-\pi,\pi)$ и является непрерывным, строго монотонным (как сумма монотонного и строго положительного операторов) и коэрцитивным. Следовательно, по теореме Браудера — Минти [5, с. 95] уравнение (16) имеет единственное решение $v(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$. Но тогда данное уравнение (15), в силу связи $u'(x) = v(x)$, имеет единственное решение $u(x) \in L_p(-\pi,\pi)$. $\rhd$

Следствие 3.2. *Пусть $p \geqslant 2$ — любое четное число, $f(x) \in L_p(-\pi,\pi)$. Тогда уравнение*

$$\big(u'(x)\big)^{\frac{1}{(p-1)}} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u(s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds = f(x)$$

имеет единственное решение $u(x) \in D(G)$.

Доказательство следующей теоремы, в отличие от теорем 3.2 и 3.3, основано на обращении оператора суперпозиции и установлении коэрцитивности обратного оператора.

Теорема 3.4. *Пусть $p \geqslant 2$ и $f(x) \in D(G)$. Если для почти всех $x \in [-\pi,\pi]$ и всех $u \in \mathbb{R}$ выполняются условия 1)–3) теоремы 3.3, причем в условии 2) $F(x,u)$ строго возрастает по u, то при любых значениях $\lambda \geqslant 0$ уравнение*

$$u(x) + \lambda F\left(x, -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u'(s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds\right) = f(x) \tag{18}$$

имеет единственное решение $u(x) \in D(G)$.

$\lhd$ При $\lambda = 0$ утверждение данной теоремы очевидно, поэтому считаем далее, что $\lambda > 0$. Запишем уравнение (18) в операторном виде:

$$u + \lambda FGu = f. \tag{19}$$

Введем новую неизвестную функцию $v(x)$, обозначив $f(x) - u(x) = \lambda v(x)$. Ясно, что $v(x) \in L_p(-\pi,\pi)$, $v(\pm\pi) = 0$ и $v'(x) = \lambda^{-1}\left(f'(x) - u'(x)\right) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$, т. е. $v(x) \in D(G)$. Подставив $u = f - \lambda v$ в уравнение (19), получим

$$FG(f - \lambda v) = v. \tag{20}$$

Из условий данной теоремы вытекает, что оператор суперпозиции F действует непрерывно из $L_{p'}(-\pi,\pi)$ в $L_p(-\pi,\pi)$, строго монотонен и коэрцитивен, причем для любого $u(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$ выполняются неравенства

$$\|Fu\|_p \leqslant \|g\|_p + d_3\|u\|_{p'}\,, \quad \langle Fu, u\rangle \geqslant d_4\|u\|_{p'}^{\frac{p}{p-1}} - \|D\|_1.$$

Значит, по теореме 2.2 из [5] существует обратный оператор F^{-1}, действующий из $L_p(-\pi, \pi)$ в $L_{p'}(-\pi, \pi)$ и являющийся строго монотонным, ограниченным и радиально непрерывным, поскольку для монотонных операторов понятия радиально непрерывный и деминепрерывный совпадают в силу [5, лемма 1.3]. Кроме того, оператор F^{-1} является коэрцитивным (см. [1, лемма 2.1]).

Применив оператор F^{-1} к обеим частям уравнения (20), приходим к уравнению $Gf - \lambda Gv = F^{-1}v$ или

$$F^{-1}v + \lambda Gv = Gf, \tag{21}$$

т. е. получили уравнение вида (12).

Заметим, что по теореме 2.1 $Gf \in L_{p'}(-\pi, \pi)$ и, как было установлено при доказательстве теоремы 3.2, G является максимальным монотонным оператором.

Таким образом, операторы $\lambda G = \Lambda$ и $F^{-1} = A$ удовлетворяют всем требованиям теоремы 3.1. Следовательно, уравнение (21) имеет решение $v \in D(G)$ и это решение единственно в силу строгой монотонности оператора $A = F^{-1}$. Но тогда, в силу связи $u = f - \lambda v$, уравнение (19), а значит и данное уравнение (18), имеет единственное решение $u \in D(G)$. $\triangleright$

Следствие 3.3. *Пусть $p \geqslant 2$ — любое четное число и $f(x) \in D(G)$. Тогда уравнение*

$$u(x) + \left(-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} u'(s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds\right)^{\frac{p}{p-1}} = f(x)$$

имеет единственное решение $u(x) \in D(G)$.

В заключение отметим, что при $p = 2$ теоремы 3.2–3.4 охватывают, в частности, и случай линейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения с ядром Гильберта.

Литература

1. *Асхабов С. Н.* Нелинейные сингулярные интегральные уравнения в пространствах Лебега.—Грозный: Чеченский гос. ун-т, 2013.—136 с.
2. *Асхабов С. Н.* Применение метода максимальных монотонных операторов к нелинейным сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям // Вестн. Чеченского гос. ун-та.—2015.—№ 1.—С. 7–12.
3. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды.—М.: Физматгиз, 1961.—936 с.
4. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений.—М.: Наука, 1972.—416 с.
5. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения.—М.: Мир, 1978.—336 с.
6. *Жиков В. В.* Монотонный оператор // Мат. энциклопедия. Т. 3.—М.: Советская энциклопедия, 1982.—592 с.
7. *Коган Х. М.* Об одном сингулярном интегро-дифференциальном уравнении // Успехи мат. наук.—1965.—Т. 20, вып. 3 (123).—С. 243–244.
8. *Коган Х. М.* Об одном сингулярном интегро-дифференциальном уравнении // Диф. уравнения.—1967.—Т. 3, № 2.—С. 278–293.
9. *Магомедов Г. М.* Метод монотонности в теории нелинейных сингулярных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений // Диф. уравнения.—1977.—Т. 13, № 6.—С. 1106–1112.
10. *Wolfersdorf L. V.* Monotonicity methods for nonlinear singular integral and integro-differential equations // J. Appl. Math. Mech.—1983.—Vol. 63, № 6.—P. 249–259.
11. *Schleiff M.* Untersuchungen einer linearen singularen integrodifferentialgleichung der tragflugeltheorie // Wiss. Z. Univ. Halle. Math.-Nat. Reihe.—1968.—Vol. 17.—P. 981–1000.

Статья поступила 4 июля 2017 г.

Асхабов Султан Нажмудинович
Чеченский государственный педагогический университет,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 364037, Грозный, ул. Киевская, 33;
Чеченский государственный университет,
профессор кафедры математического анализа
РОССИЯ, 364907, Грозный, ул. Шерипова, 32
E-mail: askhabov@yandex.ru

SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH HILBERT KERNEL AND MONOTONE NONLINEARITY

Askhabov S. N.

In this paper applying methods of trigonometric series we establish that the singular integro-differential operator with the Hilbert kernel $(Gu)(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u'(s)\operatorname{ctg}\frac{s-x}{2}\,ds$ with the domain $D(G) = \{u(x) : u(x)$ absolutely continuous with $u'(x) \in L_{p'}(-\pi,\pi)$ and $u(-\pi) = u(\pi) = 0\}$, where $p' = p/(p-1)$, $1 < p < \infty$, is a strictly positive, symmetric and potential. Using this result and the method of maximal monotone operators, we investigate three different classes of nonlinear singular integro-differential equations with the Hilbert kernel, containing an arbitrary parameter, in the class of 2π-periodic real functions. The solvability and uniqueness theorems, covering also the linear case, are established under transparent restrictions. In contrast to previous papers devoted to other classes of nonlinear singular integro-differential equations with the Cauchy kernel, this one is based on inverting of the superposition operator generating the nonlinearity in the equations considered, and on the proof of the coercivity of this inverse operator. The corollaries are given that illustrate the obtained results.

Keywords: nonlinear singular integro-differential equations, Hilbert kernel, method of maximal monotone operators.