Владикавказский математический журнал
2017, Том 19, Выпуск 3, С. 51–58

УДК **517.9**

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА В МНОГОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ НА ПЛОСКОСТИ[1]

А. П. Солдатов

Профессору А. Б. Шабату в связи с его 80-летием

Для эллиптического уравнения $2l$ порядка, старшие коэффициенты которого постоянны, в многосвязной области с гладкой границней на плоскости рассмотрена краевая задача с нормальными производными $(k_j-1)-$ порядка, $j=1,\dots,l$, где $1\leqslant k_1<\ldots<k_l\leqslant 2l$. При $k_j=j$ она переходит в задачу Дирихле, а при $k_j=j+1$ — в задачу Неймана. В работе даны достаточное условие фредгольмовости этой задачи и формула индекса.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, краевая задача, нормальные производные, многосвязная область, гладкий контур, фредгольмовость, формула индекса.

Рассмотрим в области D на плоскости, ограниченной гладким контуром Γ, для эллиптического уравнения $2l$ порядка

$$\sum_{r=0}^{2l} a_r \frac{\partial^{2l} u}{\partial x^{2l-r}\partial y^r} + \sum_{0\leqslant r\leqslant k\leqslant 2l-1} a_{rk}(x)\frac{\partial^k u}{\partial x^{k-r}\partial y^r} = F \tag{1}$$

с постоянными старшими коэффициентами $a_r\in\mathbb{R}$ и младшими коэффициентами $a_{rk}\in C^\mu(\overline{D})$ краевую задачу

$$\left.\frac{\partial^{k_j-1}u}{\partial n^{k_j-1}}\right|_\Gamma = f_j,\quad j=1,\dots,l, \tag{2}$$

где $n=n_1+in_2$ означает единичную внешнюю нормаль и натуральные k_j подчинены условию $1\leqslant k_1<\ldots<k_l\leqslant 2l$. Как обычно, под нормальной производной $(\partial/\partial n)^r$ порядка r понимается здесь граничный оператор

$$\left(n_1\frac{\partial}{\partial x_1}+n_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)^r.$$

Аналогичный смысл имеет и граничный оператор $(\partial/\partial e)^r$ по отношению к единичному касательному вектору $e=e_1+ie_2=i(n_1+in_2)$.

При $k_j=j$ имеем задачу Дирихле, а в случае $k_j=j+1$, $1\leqslant j\leqslant l$, эту задачу естественно назвать задачей Неймана, она была изучена А. В. Бицадзе [1] для полигармонического уравнения. Для однородного уравнения (1) без младших коэффициентов задача (2) была рассмотрена в [2]. Общий случай задачи (1), (2) в классе функций

$$u\in C^{2l}(D)\cap C^{2l-1,\mu}(\overline{D}),\quad \sum_{r=0}^{2l} a_r\frac{\partial^{2l}u}{\partial x^{2l-r}\partial y^r}\in C^\mu(\overline{D}), \tag{3}$$

[1] Работа выполнена в рамках Государственного задания РФ, тема № 1.7311.2017/БЧ.

был исследован в [3]. В этой работе задача (2) была редуцирована к эквивалентной системе интегральных уравнений в классе $C^{\mu}(\Gamma)\times C^{\mu}(\overline{D})$, причем уравнения по контуру были сингулярными. Заметим, что пространство (3) зависит от старших коэффициентов уравнения (1).

В настоящей работе эти результаты распространим на случай обычного пространства $C^{2l,\mu}(\overline{D})$. В этом случае система интегральных уравнений, о которых шла речь выше, должна рассматриваться в пространстве $C^{1,\mu}(\Gamma)\times C^{\mu}(\overline{D})$, и ее исследование требует отдельного подхода. Ниже все обозначения [3] сохраняются без изменений.

В дальнейшем предполагается, что Γ принадлежит классу $C^{2l,\mu}$. В случае $l=1$ это условие несколько усилим, потребовав $\Gamma\in C^{1,\mu+\varepsilon}$ с некоторым $\varepsilon>0$. Удобно в этой связи под $C^{1,\mu+0}$ понимать обьединение классов $C^{1,\mu+\varepsilon}$ по всем $\varepsilon>0$. В частности, Γ принадлежит этому классу для всех значений l. Таким образом, функции n_1, n_2 и, значит, коэффициенты граничных дифференциальных операторов (2) принадлежат классу $C^{2l-1,\mu}(\Gamma)$. Решение уравнения (1) ищется в классе $C^{2l,\mu}(\overline{D})$, соответственно его правая часть должна принадлежать $C^{\mu}(\overline{D})$, а функции f_j в краевом условии (2) — классу $C^{2l-k_j+1,\mu}(\Gamma)$.

Пусть ν_k, $1\leqslant k\leqslant m$, — все различные корни характеристического уравнения $a_0+a_1z+\ldots+a_{2l}z^{2l}=0$ в верхней полуплоскости и l_k — кратность k-го корня, так что $\sum_k l_k=l$. С этими корнями свяжем матрицу $B\in\mathbb{C}^{2l\times l}$ следующего специального вида.

Если некоторый n-вектор $g(z)=(g_1(z),\ldots,g_n(z))$ аналитичен в окрестности точек $\nu_1,\ldots,\nu_m$, то, исходя из разбиения $l=l_1+\ldots+l_m$, можем ввести блочную $n\times l$-матрицу $W_g(\nu_1,\ldots,\nu_m)=(W_g(\nu_1),\ldots,W_g(\nu_m))$, где матрица $W_g(\nu_k)\in\mathbb{C}^{n\times l_k}$ составлена из векторов-столбцов

$$g(\nu_k),g'(\nu_k),\ldots,\frac{1}{(l_k-1)!}\,g^{(l_k-1)}(\nu_k).$$

Применяя это обозначение к $2l$-столбцу $h(z)=(1,z,\ldots,z^{2l-1})$, определим теперь $2l\times l$-матрицу B равенством $B=W_h(\nu_1,\ldots,\nu_m)$.

Заметим, что квадратная матрица $\widetilde{B}$, составленная из B и $\overline{B}$, обратима. Если $l\times 2l$-матрицу, образованную строками обратной матрицы $\widetilde{B}^{-1}$, обозначить через B^1, то вторые ее l-строк образуют комплексно сопряженную матрицу. Поэтому B и B^1 связаны соотношением $2\,\mathrm{Re}\,BB^1=\mathbb{1}$, где здесь и ниже $\mathbb{1}$ означает единичную матрицу (или единичный оператор).

С краевыми условиями (2) свяжем $l\times 2l$-матрицу $C=(C_{jk})\in C^{1,\mu}(\Gamma)$, элементы которой определяются из соотношений

$$\sum_{k=1}^{2l}C_{jk}(t)z^{k-1}=\big[e_1(t)+e_2(t)z\big]^{2l-k_j}\big[-e_2(t)+e_1(t)z\big]^{k_j-1},\quad 1\leqslant j\leqslant l, \tag{4}$$

где $e=e_1+ie_2=i(n_1+in_2)$ — единичный касательный вектор к контуру Γ. Заметим, что его направление оставляет область D слева.

Сформулируем аналог основной теоремы из [3] применительно к пространству $C^{2l,\mu}(\overline{D})$. Некоторое отличие состоит только в том, что контур Γ в рассматриваемом случае не предполагается простым.

Теорема 1. *Пусть контур Γ, ограничивающий область D, принадлежит классу $C^{2l,\mu}$ (классу $C^{2,\mu+0}$ при $l=1$) и состоит из простых контуров $\Gamma_0,\Gamma_1,\ldots,\Gamma_n$, где Γ_0 охватывает все остальные контуры.*

Тогда в предположении

$$\det[C(t)B]\neq 0,\quad t\in\Gamma, \tag{5}$$

задача (1), (2) *фредгольмова в пространстве* $C^{2l,\mu}(\overline{D})$ *и ее индекс* $\varkappa$ *дается формулой*

$$\varkappa = -\frac{1}{\pi}[\arg\det(CB)]\big|_{\Gamma} + l(2l-n), \tag{6}$$

где приращение на контуре берется в положительном направлении (т. е. в направлении, оставляющем область слева) и n *есть число связных компонент контура* Γ.

Заметим, что в случае простого контура ($n = 0$) эта теорема согласуется с теоремой 1 из [5], полученной по отношению к пространству (3).

$\lhd$ Как и в [3] в принятых предположениях гладкости относительно Γ порядки граничных интегральных операторов в (2) можно выровнять (с сохранением эквивалентности задачи).

Условимся для функции $\varphi \in C^1(\Gamma)$ под φ' понимать производную по параметру длины дуги, отсчитываемой в положительном направлении по отношению к D (т. е. в направлении, оставляющем область D слева). Тогда, очевидно, имеем равенство

$$(u^+)' = \frac{\partial u}{\partial e}\bigg|_{\Gamma},$$

здесь и ниже символ " + " указывает на граничное значение функции. К сожалению, операция дифференцирования $\varphi \to \varphi'$ не является обратимой $C^1(\Gamma) \to C(\Gamma)$. Однако как показано в [3], этим свойством обладает операция

$$\varphi \to \varphi' + \frac{1}{s(\Gamma)}\int\limits_{\Gamma} \varphi(t)\, d_1 t,$$

где $s(\Gamma)$ означает длину контура Γ и $d_1 t$ есть элемент длины дуги. Заметим, что r-ая итерация этой операции действует аналогичным образом:

$$\varphi \to \varphi^{(r)} + \frac{1}{s(\Gamma)}\int\limits_{\Gamma} \varphi(t)\, d_1 t.$$

В соответствии с этим (2) можно заменить эквивалентным краевым условием

$$\left(\frac{\partial^{k_j-1}u}{\partial n^{k_j-1}}\right)^{(2l-k_j)} + \frac{1}{s(\Gamma)}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial^{k_j-1}u}{\partial n^{k_j-1}}\, d_1 t = f_j^{(2l-k_j)} + \frac{1}{s(\Gamma)}\int\limits_{\Gamma} f_j(t)\, d_1 t, \quad 1 \leqslant j \leqslant l. \tag{7}$$

Аналогично [3] доказывается, что для $u \in C^{2l,\mu}(\overline{D})$ и $2 \leqslant k_j \leqslant 2l-1$ справедливо равенство

$$\left(\frac{\partial^{k_j-1}u}{\partial n^{k_j-1}}\right)^{(2l-k_j)} = \left[\left(\frac{\partial}{\partial e}\right)^{2l-k_j}\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{k_j-1}\right]u + \sum_{1\leqslant k+r\leqslant 2l-k_j} b_{kr}\left(\frac{\partial^{k+r}u}{\partial x^k \partial y^r}\right)^+$$

с некоторыми $b_{kr} \in C^{k_j-1,\mu}(\Gamma)$, которое при $k_1 = 1$ следует заменить на

$$(u^+)^{(2l-1)} = \frac{\partial^{2l-1}u}{\partial e^{2l-1}}\bigg|_{\Gamma} + \sum_{1\leqslant k+r\leqslant 2l-2} b_{kr}\left(\frac{\partial^{k+r}u}{\partial x^k \partial y^r}\right)^+, \quad b_{kr} \in C^{1,\mu}(\Gamma).$$

Во всех случаях краевое условие (7) можно записать в форме

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial e}\right)^{2l-k_j}\left(\frac{\partial}{\partial n}\right)^{k_j-1}\right]u+\sum b_{kr}\left(\frac{\partial^{k+r}u}{\partial x^k\partial y^r}\right)^{+}+\frac{1}{s(\Gamma)}\int\limits_{\Gamma}\frac{\partial^{k_j-1}u}{\partial n^{k_j-1}}\,d_1t=f_j^0, \tag{8}$$

где суммирование ведется по $1\leqslant k+r\leqslant 2l-2$, коэффициенты $b_{kr}\in C^{1,\mu}(\Gamma)$ и

$$f_j^0=f_j^{(2l-k_j)}+\frac{1}{s(\Gamma)}\int\limits_{\Gamma}f_j(t)\,d_1t,\quad k_j<2l.$$

При $j=l$ и $k_l=2l$ ее следует заменить на $f_l^0=f_l$. Во всех случаях вектор-функция $f^0\in C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Введем блочно-диагональную $l\times l$-матрицу J, составленную из клеток Жордана:

$$J=\operatorname{diag}(J_1,\ldots,J_m),\quad J_k=\begin{pmatrix}\nu_k & 1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \nu_k & 1 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \nu_k\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^{l_k\times l_k}.$$

С этой матрицей в дальнейшем связана операция, которая комплексному числу $z=x+iy$ ставит в соответствие $l\times l$-матрицу $z_J=x+yJ$, где x означает скалярную матрицу. В явном виде $z_J=\operatorname{diag}(z_{J_1},\ldots,z_{J_m})$, где

$$z_{J_k}=\begin{pmatrix}x+\nu_k y & y & 0 & \ldots & 0\\ 0 & x+\nu_k y & y & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \ldots & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & y\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & x+\nu_k y\end{pmatrix}.$$

Обозначим еще через P_{2l-2} класс всех многочленов $p(x,y)$ степени не выше $2l-2$, его размерность, очевидно, дается равенством $\dim P_{2l-2}=l(2l-1)$.

Совершенно аналогично [3] краевая задача (1), (8) редуцируется к эквивалентной задаче для эллиптической системы первого порядка

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}-J\frac{\partial\phi}{\partial x}+M^1\phi+\widetilde{M}^1p=f^1, \tag{9}$$

$$2\operatorname{Re}\left[(CB)\phi^+\right]+M^0\phi+\widetilde{M}^0p=f^0, \tag{10}$$

где оператор M^1 ограничен в $C^{1,\mu}(\overline{D})$, оператор M^0 компактен в $C^{1,\mu}(\Gamma)$, а линейные операторы $\widetilde{M}^1$ и $\widetilde{M}^0$ действуют соответственно из $P_{2l-2}\to C^{\mu}(\overline{D})$ и $P_{2l-2}\to C^{1,\mu}(\Gamma)$ (точное выражение всех этих операторов для дальнейшего несущественно).

Что касается комплексной l-вектор-функции f^1, то она принадлежит $C^{\mu}(\overline{D})$ и определяется равенством $f^1=(B^1_{1,2l},\ldots,B^1_{l-1,2l},B^1_{1,2l}F)$, где $B^1_{j,2l}$ представляют собой элементы последнего столбца $l\times 2l$-матрицы B^1, введенной выше. Напомним, что вещественная l-вектор-функция $f^0\in C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Как и в [3] введем интегральные операторы по области:

$$(I^1\varphi)(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_D(t-z)_J^{-1}\varphi(t)\,d_2t,\quad z\in D,$$

$$(S^1\varphi)(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_D(t-z)_J^{-2}\varphi(t)\,d_2t,\quad z\in D,$$

где $d_2 t$ означает элемент площади. Последний интеграл здесь сингулярный и понимается в соответствующем смысле. Необходимое условие существования этого интеграла:

$$\int_{\mathbb{T}} \xi_J^{-2}\, d_1\xi = 0,$$

где $\mathbb{T}$ означает единичную окружность, легко проверяется. Отметим, что в силу четности функции ξ_J^{-2} выполняется и условие

$$\int_{\mathbb{T}^+} \xi_J^{-2}\, d_1\xi = 0, \tag{11}$$

где $\mathbb{T}^+$ означает любую полуокружность.

Как показано в [4], для $\varphi \in C^\mu(\overline{D})$ функция $I^1\varphi$ непрерывно дифференцируема в области D и справедливы формулы

$$\frac{\partial(I^1\varphi)}{\partial x} = \sigma_1\varphi + S^1\varphi, \quad \frac{\partial(I^1\varphi)}{\partial y} = \sigma_2\varphi + JS^1\varphi, \tag{12}$$

с некоторыми матрицами $\sigma_k \in \mathbb{C}^{l\times l}$, связанными соотношением $\sigma_2 = J\sigma_1$. В частности,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}\right) I^1\varphi = 0. \tag{13}$$

В силу (11) к сингулярному интегральному оператору S^1 можно применить теорему 3.5.1 из [5], согласно которой этот оператор ограничен в $C^\mu(\overline{D})$. С учетом (12) отсюда следует, что оператор I^1 ограничен $C^\mu(\overline{D}) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$.

Введем далее интегральные операторы по контуру

$$(I^0\psi)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (t-z)_J^{-1}\, dt_J\psi(t), \quad z \in D,$$

где по отношению к точке $t = t_1 + it_2$ на кривой dt_J означает комплексный матричный дифференциал $dt_1 1 + dt_2 J$ и контур Γ ориентирован положительно по отношению к D, и сингулярный оператор

$$(S^0\psi)(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma (t-t_0)_J^{-1}\, dt_J\psi(t), \quad t_0 \in \Gamma.$$

Последний интеграл здесь понимается в смысле главного значения по Коши.

По терминологии [6] функция $\phi = I^0\psi$ является J-аналитичной в области D, т. е. удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} - J\frac{\partial\phi}{\partial x} = 0. \tag{14}$$

Эта система при $J = i$ переходит в классическую систему Коши — Римана. Как показано в [6], все основные факты теории аналитических функций, связанные с интегральной формулой Коши, распространяются и на решения системы (14).

Очевидно, в случае скалярной матрицы $J = i$ оператор S^0 переходит в классический сингулярный оператор Коши, который обозначим через S. Как показано в [7], разность

$S^0 - S$ является оператором, компактным в $C^{1,\mu}$. В [7] также установлено, что в предположении (4) основные результаты классической теории сингулярных операторов [8] распространяются и на оператор

$$N^0\psi = \mathrm{Re}\left[CB(\psi + S^0\psi)\right], \tag{15}$$

действующий в пространстве вещественных l-вектор-функций $\psi \in C^{1,\mu}(\Gamma)$. Здесь учтено, что в силу принятых предположение относительно гладкости контура Γ матрица-функция $C(t)$ в определении (4) принадлежит классу $C^{1,\mu+0}(\Gamma)$.

Таким образом, этот оператор фредгольмов и его индекс дается формулой

$$\mathrm{ind}\, N^0 = -\frac{1}{\pi}\big[\arg\det(CB)\big]\Big|_{\Gamma}. \tag{16}$$

При этом любое решение $\varphi \in C^{\mu}(\Gamma)$ уравнения $\mathrm{Re}[CB(\psi + S^0\psi)] = f$ с правой частью $f \in C^{1,\mu}(\Gamma)$ принадлежит $C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Согласно [5] оператор I^0 ограничен $C^{1,\mu}(\Gamma) \to C^{1,\mu}(\overline{D})$ и справедлива формула Сохоцкого — Племеля

$$2(I^0\psi)^+ = \psi + S^0\psi. \tag{17}$$

Утверждается, что любая функция $\phi \in C^{1,\mu}(\overline{D})$ единственным образом представима в виде

$$\phi = I^1\varphi^1 + I^0\varphi^0 + i\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^l \tag{18}$$

с некоторыми комплексной l-вектор-функцией $\varphi^1 \in C^{\mu}(\overline{D})$ и вещественной функцией $\varphi^0 \in C^{1,\mu}(\Gamma)$, удовлетворяющей условиям

$$\int\limits_{\Gamma_j} \varphi(t)\, d_1 t = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{19}$$

В самом деле, положим

$$\varphi^1 = \left(\frac{\partial}{\partial y} - J\frac{\partial}{\partial x}\right)\phi,$$

и пусть $\phi^0 = \phi - I^1\varphi^1$. Тогда в силу (13) функция ϕ^0 является J-аналитической в области D, т. е. удовлетворяет уравнению (14), и принадлежит классу $C^{1,\mu}(\overline{D})$. Поэтому дело сводится к представлению

$$\phi^0 = I^0\varphi^0 + i\xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^l,$$

с условиями (19) на вещественную плотность φ.

В случае пространств C^{μ} это предложение установлено в [9] (см. также [10]). Таким образом, функция φ^0 является решением уравнения $\mathrm{Re}(\psi + S^0\psi) = f$ с правой частью $f = \mathrm{Re}\,\phi^0$, которая по условию принадлежит классу $C^{1,\mu}(\Gamma)$. Как отмечено выше, в этом случае его решение φ^0 также принадлежит $C^{1,\mu}(\Gamma)$.

Пользуясь представлением (18) и формулой Сохоцкого — Племеля (17), задачу (9), (10) можем эквивалентным образом редуцировать к системе относительно набора $(\varphi^1, \varphi^0, p, \xi)$, которая определяется уравнениями

$$\varphi^1 + M^1\big(I^1\varphi^1 + I^0\varphi^0 + i\xi\big) + \widetilde{M}^1 p = f^1,$$
$$2\mathrm{Re}\left[CB(I^1\varphi^1)^+ + i\xi\right] + \mathrm{Re}\, CB\big(\varphi^0 + S^0\varphi^0\big) + M^0\big(I^1\varphi^1 + I^0\varphi^0 + i\xi\big) + \widetilde{M}^0 p = f^0,$$

подчиненной условиям (19). Введем для краткости пространство $X = P_{2l-2} \times \mathbb{R}^l$, которое согласно (8) имеет размерность

$$\dim X = l(2l-1) + l = 2l^2, \tag{20}$$

операторы

$$\begin{gathered} N^{11} = \varphi^1 + M^1 I^1 \varphi^1, \quad N^{10} = M^1 I^0, \\ N^{01}\varphi^1 = 2\operatorname{Re}\left[CB(I^1\varphi^1)^+\right] + M^0 I^1 \varphi^1, \\ N^{00}\varphi^0 = \operatorname{Re}\left[CB(\varphi^0 + S^0\varphi)\right] + M^0 I^0 \varphi^0, \end{gathered} \tag{21}$$

и, наконец, операторы

$$T^1(p,\xi) = \widetilde{M}^1 p + I^0(i\xi), \quad T^0(p,\xi) = \widetilde{M}^0 p - 2\operatorname{Im}(B)\xi + M^0(i\xi).$$

Тогда предыдущую систему можем записать в краткой форме

$$N\big(\varphi^1, \varphi^0\big) + T(p,\xi) = \big(f^1, f^0\big) \tag{22}$$

с операторными матрицами

$$N = \begin{pmatrix} N^{11} & N^{10} \\ N^{01} & N^{00} \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} T^1 \\ T^0 \end{pmatrix}.$$

Согласно (20) пространство $C^\mu(\overline{D}) \times C^{1,\mu}(\Gamma) \times X$ является расширением пространства $C^\mu(\overline{D}) \times C^{1,\mu}(\Gamma)$ на $2l^2$ измерений, поэтому на основании известных свойств фредгольмовых оператров [11] операторы (N,T) и N фредгольмово эквивалентны и их индексы связаны соотношением

$$\operatorname{ind}(N,T) = \operatorname{ind} N + 2l^2. \tag{23}$$

С другой стороны, условие (19) выделяет в пространстве $C^{1,\mu}(\Gamma)$ замкнутое подпространство коразмерности ln, поэтому из тех же соображений индекс $\varkappa$ системы (22), (19) связан с индексом оператора N соотношением

$$\varkappa = \operatorname{ind}(N,T) - ln. \tag{24}$$

Рассмотрим подробнее операторы (21). Условимся писать $N_1 \sim N_2$, если разность $N_1 - N_2$ является компактным оператором. Вспоминая, что оператор оператор M^0 компактен в $C^{1,\mu}(\Gamma)$, в обозначениях (15) можем написать

$$N^{11} \sim 1, \quad N^{10} \sim 0, \quad N^{00} \sim N^0$$

и, следовательно,

$$N \sim M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ N^{0,1} & N^0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Как отмечено выше, оператор N^0 фредгольмов и его индекс дается формулой (16). В частности, существует его регуляризатор, т. е. ограниченный в $C^{1,\mu}$ оператор R со свойством $R^0 N^0 \sim N^0 R^0 \sim 1$. Непосредственно проверяется, что оператор

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -R^0 N^{0,1} & R^0 \end{pmatrix}$$

служит регуляризатором к оператору M и, следовательно, оператор M фредгольмов. Но тогда на основании (25) N — фредгольмов оператор, а вместе с ним и исходная задача (1), (2).

Пусть $M(t)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, получается заменой N^{01} на tN^{01} в определении (25) оператора M. Те же соображения показывают, что оператор $M(t)$ также фредгольмов. Поскольку он непрерывно зависит от t, его индекс не зависит от t и, в частности, $\operatorname{ind} M = \operatorname{ind} M(0) = \operatorname{ind} N^0$. В силу (25) $\operatorname{ind} N = \operatorname{ind} N^0$, что вместе с (16) и (23), (24) завершает доказательство формулы индекса (6) и теоремы. $\rhd$

Литература

1. *Бицадзе А. В.* К задаче Неймана для гармонических функций // Докл. АН СССР.—1990.—Т. 311, № 1.—С. 11–13.
2. *Малахова Н. А., Солдатов А. П.* Об одной краевой задаче для эллиптического уравнения высокого порядка // Диф. уравнения.—2008.—Т. 44, № 8.—С. 1077–1083.
3. *Кошанов Б., Солдатов А. П.* Краевая задача с нормальными производными для эллиптического уравнения на плоскости // Диф. уравнения.—2016.—Т. 52, № 12.—С. 1666–1681.
4. *Ващенко О. В., Солдатов А. П.* Интегральное представление решений обобщенной системы Бельтрами // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та. Сер. Информатика и прикладная математика.—2006.—Вып. 6, № 1 (21).—С. 3–6.
5. *Солдатов А. П.* Сингулярные интегральные операторы и эллиптические краевые задачи // Современная математика фундаментальные направления.—2016.—Т. 63.—С. 1–179.
6. *Soldatov A. P.* Hyperanalytic functions and their applications // J. Math. Sci.—2004.—Vol. 17.—P. 1–111.
7. *Абаполова Е. А., Солдатов А. П.* К теории сингулярных интегральных уравнений на гладком контуре // Науч. ведомости Белгород. гос. ун-та.—2010.—Т. 5 (76), вып. 18.—С. 6–20.
8. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Наука, 1968.—512 с.
9. *Солдатов А. П.* Метод теории функций в краевых задачах на плоскости. I. Гладкий случай // Изв. АН СССР. Сер. Математика.—1991.—Т. 55, № 5.—С. 1070–1100.
10. *Солдатов А. П.* Задача Шварца для функций, аналитических по Дуглису // Современная математика и ее приложения.—2010.—№ 67.—С. 99–102.
11. *Пале Р.* Семинар по теореме Атьи — Зингера об индексе.—М.: Мир, 1970.

Статья поступила 6 июля 2017 г.

Солдатов Александр Павлович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет,
заведующий кафедрой математического анализа
Россия, 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85
E-mail: soldatov@bsu.edu.ru, soldatov48@gmail.com

A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR HIGHER ORDER ELLIPTIC EQUATIONS IN MANY CONNECTED DOMAIN ON THE PLANE

Soldatov A. P.

For the elliptic equation of $2l$th order with constant (and leading) coefficients boundary value a problem with normal derivatives of the (k_j-1)–order, $j = 1, \ldots, l$ considered. Here $1 \leqslant k_1 < \ldots < k_l \leqslant 2l$. When $k_j = j$ it moves to the Dirichlet problem, and when $k_j = j+1$ it corresponds to the Neumann problem. The sufficient condition of the Fredholm problem and index formula are given.

Key words: elliptic equation, boundary value problem, normal derivatives, many connected domain, smooth contour, Fredholm property, index formula.