Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 1, С. 21–29

УДК **517.98**

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ИДЕАЛЬНЫХ F-ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

А. А. Алимов, В. И. Чилин

Посвящается памяти профессора
Иномжона Гуламджановича Ганиева

Известно, что на любой коммутативной алгебре фон Неймана $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu)$ каждое дифференцирование тождественно равно нулю. В то же время, на коммутативной алгебре $\mathscr{L}_0(\Omega,\mu)$ всех комплексных измеримых функций, заданных на неатомическом пространстве с мерой (Ω,μ), всегда существуют ненулевые дифференцирования. При этом каждое дифференцирование на $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu)$, принимающее значения в нормированном идеальном подпространстве $X \subset \mathscr{L}_0(\Omega,\mu)$, обязательно является нулевым. Аналогичный факт остается верным и для квазинормированных идеальных подпространств $X \subset \mathscr{L}_0(\Omega,\mu)$.
Естественно возникает вопрос о существовании ненулевых дифференцирований, определенных на $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu)$, со значениями в F-нормируемом идеальном пространстве $X \subset \mathscr{L}_0(\Omega,\mu)$, т. е. идеальном пространстве, снабженном монотонной F-нормой. Мы даем необходимые и достаточные условия для полных F-нормируемых идеальных пространств X, обеспечивающие наличие ненулевых дифференцирований $\delta : \mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu) \to X$. В частности, показано, что в случае порядковой полунепрерывности F-нормы $\|\cdot\|_X$ каждое дифференцирование $\delta : \mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu) \to (X, \|\cdot\|_X)$ является нулевым. В то же время, наличие неатомического идемпотента $0 \neq e \in X$, $\mu(e) < \infty$, для которого топология сходимости по мере в $e \cdot X$ совпадает с топологией, порожденной F-нормой, обеспечивает существование ненулевого дифференцирования из $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu)$ в X. Примерами таких F-нормируемых идеальных пространств служат алгебры $\mathscr{L}_0(\Omega,\mu)$ для неатомических измеримых пространств (Ω,μ), наделенные F-нормой $\|f\|_\Omega = \int_\Omega \frac{|f|}{1+|f|}\,d\mu$. Для таких F-пространств имеется не менее континуума попарно различных ненулевых дифференцирований из $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu)$ в $(\mathscr{L}_0(\Omega,\mu), \|\cdot\|_\Omega)$.

DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11393.

Ключевые слова: дифференцирование, идеальное пространство, F-норма.

1. Введение

Известно, что любое дифференцирование на C^*-алгебре $\mathscr{B}$ всегда непрерывно по норме [11, 4.1.3], и в случае, когда алгебра $\mathscr{B}$ коммутативна, на ней нет ненулевых дифференцирований. В частности, для коммутативных алгебр фон Неймана $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ всех комплексных существенно ограниченных измеримых функций, заданных на измеримом пространстве с мерой $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$, любое дифференцирование на $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ тождественно равно нулю. В то же время, на коммутативных $*$-алгебрах $\mathscr{L}_0(\Omega,\mathscr{A},\mu)$ всех комплексных измеримых функций, заданных на неатомическом пространстве с мерой $(\Omega,\mathscr{A},\mu)$, существует не менее континуума попарно различных ненулевых дифференцирований [1, 2].

В случае коммутативных AW^*-алгебр $\mathscr{B} = C(Q(\nabla), \mathbb{C})$ критерием существования ненулевых дифференцирований $\delta\colon \mathscr{B} \to C_\infty(Q(\nabla), \mathbb{C})$ служит отсутствие свойства σ-дистрибутивности у полной булевой алгебры ∇ всех проекторов из $\mathscr{B}$ [9] (здесь $Q(\nabla)$ — стоуновский компакт, отвечающий полной булевой алгебре ∇ и $C(Q(\nabla), \mathbb{C})$ (соответственно, $C_\infty(Q(\nabla), \mathbb{C})$) — комплексификация алгебры $C(Q(\nabla), \mathbb{R})$ всех непрерывных действительных функций $f : Q(\nabla) \to \mathbb{R}$ (соответственно, комплексификация алгебры всех непрерывных функций $f : Q(\nabla) \to [-\infty, +\infty]$, принимающих значения $\pm\infty$ лишь на нигде не плотных множествах)).

Следующим шагом в изучении свойств дифференцирований, заданных на алгебре $\mathscr{L}_\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ и принимающих значения в алгебре $\mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, стало исследование существования ненулевых дифференцирований, у которых область значений содержится в нормируемых идеальных подпространствах (НИП) $X \subset \mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$. В работе [5] доказано, что любое такое дифференцирование обязательно является нулевым. Затем в работе [3] аналогичный результат был получен уже для квазинормируемых идеальных подпространств $X \subset \mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$.

Каждое квазинормируемое пространство является метризуемым топологическим векторным пространством, имеющим ограниченную окрестность нуля (см., например, [7, гл. 1, § 3]). В то же время имеются важные примеры идеальных подпространств $X \subseteq \mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ с метризуемой векторной топологией, не имеющих ограниченную окрестность нуля. Таковыми, в частности, являются F-нормируемые идеальные подпространства в $\mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, т. е. идеальные пространства, снабженные монотонной F-нормой. Примерами таких пространств служат сами алгебры $\mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, наделенные F-нормой $\|f\|_\Omega = \int_\Omega \frac{|f|}{1+|f|}\, d\mu$, порождающей топологию сходимости по мере [7, гл. 2, § 2], а также алгебры log-интегрируемых измеримых функций

$$\mathscr{L}_{\log}(\Omega, \mathscr{A}, \mu) = \left\{ f \in \mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu) : \int \log(1 + |f|)\, d\mu < \infty \right\}$$

с F-нормой $\|f\|_{\log} = \int_\Omega \log(1 + |f|) d\mu$ [6]. Это означает, что в случае неатомического пространства с мерой $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ существуют ненулевые дифференцирования, заданные на алгебре $\mathscr{L}_\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ и принимающие значения в F-нормируемом идеальным подпространстве $(\mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu), \|\cdot\|_\Omega)$ [1]. Как уже выше упоминалось, для таких пространств с мерой и НИП $X \subset \mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ уже не существует ненулевых дифференцирований $\delta : \mathscr{L}_\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \to X$.

Вопрос о нахождении критерия для существования ненулевых дифференцирований, определенных на $\mathscr{L}_\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ и принимающих значения в F-нормируемых идеальных пространствах, до сих пор оставался открытым. В настоящей работе устанавливаются необходимые и достаточные условия для полных F-нормируемых идеальных пространств $X \subset \mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, обеспечивающие наличие ненулевых дифференцирований $\delta : \mathscr{L}_\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu) \to X$.

2. Предварительные сведения

Пусть $\mathbb{K}$ — поле комплексных чисел $\mathbb{C}$ либо действительных чисел $\mathbb{R}$. Пусть $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ — *Магарамское пространство с мерой*, т. е. $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ есть такое пространство с мерой, что

(i) μ — счетно аддитивная функция, определенная на σ-алгебре $\mathscr{A}$ подмножеств множества Ω со значениями в расширенной полупрямой $[0; \infty]$;

(ii) если $F \subset E \in \mathscr{A}$ и $\mu(E) = 0$, то $F \in \mathscr{A}$;

(iii) для любого множества $E \in \mathscr{A}$ ненулевой меры существует такое множество $F \in \mathscr{A}$, что $F \subset E$ и $0 < \mu(F) < \infty$;

(iv) булева алгебра ∇_μ всех классов μ-почти всюду равных множеств из $\mathscr{A}$ порядково полна.

В этом случае полная булева алгебра ∇_μ имеет разделяющее семейство конечных вполне аддитивных мер (такие булевы алгебры называются *мультинормированными* [8, 1.2.10]). В мультинормированной булевой алгебре ∇_μ всегда существует разбиение $\{e_i\}_{i\in I}$ единицы $\mathbf{1}$, для которого каждая булева алгебра $e_i \cdot \nabla_\mu = \{g \in \nabla_\mu : g \leqslant e_i\}$ имеет строго положительную конечную счетно аддитивную меру, $i \in I$ [8, 1.2.1].

Обозначим через $\mathscr{L}_0(\mathbb{K}) = \mathscr{L}_0(\mathbb{K})(\nabla_\mu) = \mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)(\mathbb{K})$ $*$-алгебру всех классов эквивалентности равных μ-почти всюду комплексных (действительных) функций, определенных на $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, а через $\mathscr{L}_\infty(\mathbb{K}) = \mathscr{L}_\infty(\mathbb{K})(\nabla_\mu) = \mathscr{L}_\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)(\mathbb{K})$ — коммутативную банахову $*$-алгебру всех комплексных (действительных) существенно ограниченных измеримых функций, заданных на $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, снабженную равномерной нормой. Ясно, что самосопряженная часть $\mathscr{L}_0^h(\mathbb{C}) = \{f \in \mathscr{L}_0(\mathbb{C}) : f = \overline{f}\}$ $*$-алгебры $\mathscr{L}_0(\mathbb{C})$ (соответственно, $\mathscr{L}_\infty^h(\mathbb{C}) = \mathscr{L}_\infty(\mathbb{C}) \cap \mathscr{L}_0^h(\mathbb{C})$) совпадает с $\mathscr{L}_0(\mathbb{R})$ (соответственно, с $\mathscr{L}_\infty(\mathbb{R})$). При этом булева алгебра ∇_μ отождествляется с полной булевой алгеброй всех идемпотентов в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$.

При естественном определении частичного порядка в $\mathscr{L}_0(\mathbb{R})$ алгебра $\mathscr{L}_0(\mathbb{R})$ является расширенной порядково полной векторной решеткой [8, 1.4.2]. Для любого элемента $f \in \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ определим его носитель с помощью равенства

$$s(f) = \mathbf{1} - \sup\big\{e \in \nabla_\mu : e \cdot f = 0\big\}.$$

Ясно, что $s(f) \in \nabla_\mu$ и $s(q) = q$ для любого $q \in \nabla_\mu$. Кроме того, идемпотент $q \in \nabla_\mu$ является носителем для $f \in \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ в том и только в том случае, когда $q \cdot f = f$, и из равенств $e \cdot f = f$, $e \in \nabla_\mu$, следует, что $e \geqslant q$.

Для произвольного непустого подмножества $M \subset \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ его носитель $s(M)$ определяется равенством $s(M) = \sup\{s(f) \colon f \in M\}$.

Ненулевое линейное подпространство X в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ называется идеальным пространством (сокращенно ИП), если из $f \in X$, $g \in \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ и неравенства $|g| \leqslant |f|$ следует, что $g \in X$. Если X — ИП в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ и $s(X) = \mathbf{1}$, то X называют фундаментальным идеальным пространством в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$.

Нетрудно видеть, что ненулевое линейное подпространство X в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ является идеальным пространством тогда и только тогда, когда $\mathscr{L}_\infty \cdot X = X$.

Пусть X — произвольное линейное пространство над полем $\mathbb{K}$. Функция $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ называется F-нормой, если верны следующие свойства:

(i) $\|x\| > 0$ для всех $x \neq 0$;

(ii) $\|\alpha x\| \leqslant \|x\|$ для всех $x \in X$ и всех скаляров $\alpha \in \mathbb{K}$ с $|\alpha| \leqslant 1$;

(iii) $\lim_{\alpha \to 0} \|\alpha x\| = 0$ для всех $x \in X$;

(iv) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ для всех $x, y \in X$.

Если $\|\cdot\|$ есть F-норма на X, то функция $d(x, y) = \|x - y\|$ определяет трансляционно инвариантную метрику на линейном пространстве X, порождающую метрическую топологию на X, относительно которой X есть топологическое линейное пространство (см., например, [7, гл. 1, § 2]). Если $(X, \|\cdot\|)$ является полным метрическим пространством, то пара $(X, \|\cdot\|)$ называется F-пространством.

Говорят, что F-норма $\|\cdot\|$ на идеальном пространстве $X \subseteq \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ монотонна, если из соотношений $f, g \in X$, $|g| \leqslant |f|$ следует, что $\|g\| \leqslant \|f\|$. F-нормированным идеальным пространством (идеальным F-пространством) в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ называется идеальное пространство в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, снабженное монотонной F-нормой (соответственно, полной монотонной F-нормой).

3. Дифференцирования на $\mathscr{L}_\infty$ со значениями в F-нормированных идеальных пространствах

Линейный оператор $\delta : \mathscr{L}_\infty \to \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ называется *дифференцированием*, если

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y) \quad \text{при всех} \quad x, y \in \mathscr{L}_\infty.$$

Носитель дифференцирования δ есть идемпотент $s(\delta) = \sup\{s(\delta(f)) : f \in \mathscr{L}_\infty\}$. В случае, когда образ дифференцирования δ содержится в идеальном пространстве X, всегда верно неравенство $s(\delta) \leqslant s(X)$ (ср. [5, теорема 3.4]).

Отметим также, что из [1, § 2, предложение 2.3] вытекает справедливость следующих равенств: $\delta(e) = 0$ и $\delta(e \cdot f) = e \cdot \delta(f)$ для любых $e \in \nabla_\mu$, $f \in \mathscr{L}_\infty$.

Следующая теорема дает необходимое и достаточное условие для существования ненулевых дифференцирований из $\mathscr{L}_\infty$ в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ (см. [1, 9]).

Теорема 3.1. *Для булевой алгебры ∇_μ следующие условия эквивалентны:*
(i) *существует ненулевое дифференцирование из $\mathscr{L}_\infty$ в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$;*
(ii) *мультинормируемая булева алгебра ∇_μ не является атомической.*

Следует заметить, что существуют фундаментальные идеальные пространства X в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, не совпадающие с $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, для которых имеются ненулевые дифференцирования $\delta : \mathscr{L}_\infty \to \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ с образом, лежащим в X (см. [5, пример 5.1]).

Пусть e — ненулевой идемпотент из алгебры $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, т. е. $e \in \nabla_\mu$. Будем говорить, что ИП X в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ является *e-расширенным*, если $e \cdot X = e \cdot \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$. В этом случае всегда справедливо включение $e \in X$. В ситуации, когда булева алгебра ∇_μ является непрерывной, т. е. не имеет атомов, идеальное пространство $X = \mathscr{L}_\infty$ не является e-расширенным для любого ненулевого $e \in \nabla_\mu$.

Согласно [5, теорема 3.3], имеет место следующее утверждение:

Утверждение 3.2. *Если X — ИП в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ и $\delta\colon \mathscr{L}_\infty \to \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ — ненулевое дифференцирование с образом $\delta(\mathscr{L}_\infty)$, лежащим в X, то $s(\delta) \cdot X = s(\delta) \cdot \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$.*

Из теоремы 3.1 и утверждения 3.2 вытекает

Следствие 3.3. *Пусть X — идеальное пространство в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$. Если существует ненулевое дифференцирование $\delta\colon \mathscr{L}_\infty \to X$, то X является $s(\delta)$-расширенным, при этом булева алгебра $s(\delta) \cdot \nabla_\mu$ не является атомической.*

$\lhd$ Согласно утверждению 3.2 имеем, что $s(\delta) \cdot X = s(\delta) \cdot \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, в частности, $e := s(\delta) \in X$. Ясно, что сужение δ_e дифференцирования δ на $e \cdot \mathscr{L}_\infty = \mathscr{L}_\infty(e \cdot \nabla_\mu)$ есть ненулевое дифференцирование со значениями в $e \cdot X = e \cdot \mathscr{L}_0(\mathbb{K}) = \mathscr{L}_0(\mathbb{K})(e \cdot \nabla_\mu)$. В силу теоремы 3.1 булева алгебра $e \cdot \nabla_\mu$ не является атомической. $\rhd$

Обозначим через ν меру Лебега на отрезке $[0, 1]$ и через $\mathscr{A}_\nu$ — σ-алгебру всех измеримых по Лебегу подмножеств из $[0, 1]$. Пусть ∇_ν — полная булева алгебра всех классов ν-почти всюду равных множеств из $\mathscr{A}_\nu$. Если ∇_μ — непрерывная булева алгебра (т. е. не имеет атомов), то в силу [4, гл. 2, следствие 7.6] существуют такие ненулевой элемент $e \in \nabla_\mu$, $\mu(e) = 1$, правильная булева подалгебра $\nabla_0(e)$ в булевой алгебре $e \cdot \nabla_\mu$ и изоморфизм φ из булевой алгебры ∇_ν на булеву алгебру $\nabla_0(e)$, что $\mu(\varphi(g)) = \nu(g)$ для всех $g \in \nabla_\nu$ (напомним, что булева подалгебра $\nabla_0(e)$ в булевой алгебре $e \cdot \nabla_\mu$ называется *правильной*, если точные верхние и нижние грани любого подмножества из $\nabla_0(e)$ одинаковые в $\nabla_0(e)$ и в $e \cdot \nabla_\mu$).

Заметим, что в случае, когда ∇_μ — неатомическая булева алгебра, всегда существует такой ненулевой элемент $e \in \nabla_\mu$, что булева алгебра $e \cdot \nabla_\mu$ непрерывна [12, гл. 3, § 2, теорема 8]. Это означает, что для любой неатомической булевой алгебры ∇_μ всегда найдутся такие ненулевой элемент $e \in \nabla_\mu$ и правильная булева подалгебра ∇_0 в булевой алгебре $e \cdot \nabla_\mu$, что $e \cdot \nabla_\mu$ есть непрерывная булева алгебра, а булева подалгебра ∇_0 изоморфна булевой алгебре ∇_ν.

Пусть $0 \neq e \in \nabla_\mu$ и ∇_0 — правильная булева подалгебра в булевой алгебре $e \cdot \nabla_\mu$. Обозначим через $\mathscr{S}(\mathbb{K})(\nabla_0)$ множество всех тех $f \in \mathscr{L}_0(\mathbb{K})(e \cdot \nabla_\mu)$, для которых спектральные идемпотенты $\{\operatorname{Re} f \leqslant \lambda\}$, $\{\operatorname{Im} f \leqslant \lambda\}$ принадлежат ∇_0 для всех $\lambda \in \mathbb{R}$. Известно, что $\mathscr{S}(\mathbb{K})(\nabla_0)$ есть $*$-подалгебра в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})(e \cdot \nabla_\mu)$ и $\mathscr{S}(\mathbb{K})(\nabla_0) = \mathscr{L}_0(\mathbb{K})(\nabla_0)$.

Следствие 3.4. *Если X — идеальное пространство в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ и $\delta\colon \mathscr{L}_\infty \to \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ — ненулевое дифференцирование с образом, лежащим в X, то существуют такие ненулевой идемпотент $e \in X$ и правильная булева подалгебра ∇_0 в булевой алгебре $e \cdot \nabla_\mu$, что $e \cdot \nabla_\mu$ есть непрерывная булева алгебра, $\mathscr{S}(\mathbb{K})(\nabla_0) = \mathscr{L}_0(\mathbb{K})(\nabla_0) \subseteq X$ и $*$-алгебра $\mathscr{S}(\mathbb{K})(\nabla_0)$ $*$-изоморфна $*$-алгебре $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})(\nabla_\nu)$.*

$\lhd$ Доказательство вытекает из следствия 3.3. $\rhd$

С помощью следствия 3.3 устанавливается также следующее достаточное условие, обеспечивающее отсутствие ненулевых дифференцирований на $\mathscr{L}_\infty(\mathbb{K})$, принимающих значения в F-нормированных идеальных пространствах.

Теорема 3.5. *Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ — F-нормированное идеальное пространство в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, в котором $\|n \cdot f\|_X \uparrow \infty$ при $n \to \infty$ для каждого $0 < f \in X$. Тогда любое дифференцирование $\delta\colon \mathscr{L}_\infty \to X$ является нулевым.*

$\lhd$ Предположим, что существует ненулевое дифференцирование $\delta\colon \mathscr{L}_\infty \to X$. В силу следствия 3.3 найдется такой ненулевой идемпотент $e \in X$, что ИП X e-расширенно и булева алгебра $e \cdot \nabla_\mu$ не является атомической, в частности, существует счетное дизъюнктное разбиение $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ идемпотента e, для которого $e_n \neq 0$ при всех n. Используя сходимость $\|k \cdot e_n\|_X \uparrow \infty$ при $k \to \infty$, выберем номер k_n так, чтобы $\|k_n \cdot e_n\|_X > n$. Так как $e \cdot X = e \cdot \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, то найдется такое $0 < f \in e \cdot \mathscr{L}_0(\mathbb{K}) \subseteq X$, для которого $e_n \cdot f = k_n \cdot e_n$. Имеем

$$n < \|k_n \cdot e_n\|_X = \|e_n \cdot f\|_X \leqslant \|f\|_X$$

для всех натуральных чисел n, что невозможно. Из полученного противоречия вытекает отсутствие дифференцирований $\delta\colon \mathscr{L}_\infty \to X$. $\rhd$

Дадим иллюстрацию к теореме 3.5 на примере F-нормированного идеального пространства log-интегрируемых измеримых функций

$$\mathscr{L}_{\log}(\Omega, \mathscr{A}, \mu) = \left\{ f \in \mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu) : \int \log(1 + |f|)\, d\mu < \infty \right\}$$

с F-нормой $\|f\|_{\log} = \int_\Omega \log(1 + |f|)\, d\mu$ [6]. Если $0 < f \in \mathscr{L}_{\log}(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, то

$$\big\|n \cdot f\big\|_{\log} = \int\limits_\Omega \log(1 + |n \cdot f|)\, d\mu \to \infty \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, в силу теоремы 3.5, любое дифференцирование $\delta\colon \mathscr{L}_\infty \to \mathscr{L}_{\log}(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ является нулевым.

В то же время, если рассмотреть F-нормированное идеальное пространство $\mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, наделенное F-нормой $\|f\|_\Omega = \int_\Omega \frac{|f|}{1+|f|}\, d\mu$, то согласно теореме 3.1, в случае атомического пространства с мерой $(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, не существуют ненулевые дифференцирования на алгебре $\mathscr{L}_\infty(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$, принимающие значения в $(\mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu), \|\cdot\|_\Omega)$. При этом $\|n\cdot f\|_\Omega = \int_\Omega \frac{|n\cdot f|}{1+|n\cdot f|}\,d\mu \leqslant 1$ для любых элементов $f \in \mathscr{L}_0(\Omega, \mathscr{A}, \mu)$ и натуральных чисел n. Это означает, что достаточное условие $\|n\cdot f\|_X \uparrow \infty$ при $n \to \infty$ для каждого $0 < f \in X$ из теоремы 3.5 не является необходимым для отсутствия ненулевых дифференцирований $\delta\colon \mathscr{L}_\infty \to \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, принимающих значения в F-нормированных идеальных пространствах.

Выделим класс F-нормированных идеальных пространств $(X, \|\cdot\|_X) \subseteq \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, для которых верна теорема 3.5. Говорят, что F-нормированное идеальное пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ имеет *порядково полунепрерывную F-норму*, если из условий

$$0 \leqslant f_n \leqslant f_{n+1}, \quad f_n \in X, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \sup_{n\geqslant 1}\|f_n\|_X < \infty$$

следует существование такого $0 \leqslant f \in X$, что $f_n \uparrow f$.

Если F-нормированное идеальное пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ имеет порядково полунепрерывную норму, $0 < f \in X$ и $\sup_{n\geqslant 1}\|n\cdot f\|_X < \infty$, то существует такое $0 \leqslant g \in X$, что $n\cdot f \uparrow g$, что влечет равенства $g = 0$ и $f = 0$. Из полученного противоречия вытекает, что любое F-нормированное идеальное пространство $(X, \|\cdot\|_X)$ с порядково полунепрерывной нормой удовлетворяет условиям теоремы 3.5. Поэтому верна следующая

Теорема 3.6. *Если $(X, \|\cdot\|_X)$ — F-нормированное идеальное пространство в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, имеющее порядково полунепрерывную F-норму, то любое дифференцирование $\delta\colon \mathscr{L}_\infty \to X$ является нулевым.*

4. Критерий существования ненулевых дифференцирований со значениями в идеальных F-пространствах

В этом разделе устанавливается основной результат настоящей работы, дающий необходимые и достаточные условия для идеальных F-пространств $X \subseteq \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, обеспечивающие существование ненулевых дифференцирований $\delta\colon \mathscr{L}_\infty \to X$.

Напомним определение (o)-топологии в частично упорядоченном множестве $(Z, \leqslant)$. Говорят, что сеть $\{z_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset Z$ *(o)-сходится* к элементу $z \in Z$ $\big($обозначение: $z_\alpha \xrightarrow{(o)} z\big)$, если существуют такие сети $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ и $\{y_\alpha\}_{\alpha\in A}$ в Z, что $x_\alpha \leqslant z_\alpha \leqslant y_\alpha$ для всех $\alpha \in A$ и $x_\alpha \uparrow z$, $y_\alpha \downarrow z$.

Сильнейшая из топологий t в Z, для которых (o)-сходимость сетей влечет их сходимость в топологии t, называется *(o)-топологией* в $(Z, \leqslant)$, которая обозначается через $t_o(Z)$. Если $Z = \mathscr{L}_0(\mathbb{R})$, $\mu(\Omega) < \infty$, то (o)-топология $t_o(\mathscr{L}_0(\mathbb{R}))$ метризуема и сходимость последовательностей в этой топологии совпадает со сходимостью по мере [7, гл. 3, § 9].

Пусть $(X, \|\cdot\|_X) \subseteq \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ — идеальное F-пространство. Обозначим через $t(X^h)$ векторную топологию в $X^h = \{f \in X : \overline{f} = f\}$, порождаемую F-нормой $\|\cdot\|_X$. Дословно повторяя доказательство теоремы VII.2.1 из [7, гл. 7, § 2], получим, что сходимость по F-норме $\|f_n - f\|_X \to 0$, $f_n, f \in X^h$, влечет существование подпоследовательности $\{f_{n_k}\}_{k=1}^\infty$, (o)-сходящейся к f. Следовательно, верно следующее сравнение топологий $t(X^h)$ и $t_o(X^h)$.

Утверждение 4.1. *Если X — идеальное F-пространство в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, то $t_o(X^h) \leqslant t(X^h)$.*

Нам понадобится следующее свойство топологии $t(X^h)$.

Утверждение 4.2. *Если $(X, \|\cdot\|_X)$ — идеальное F-пространство в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, $e \in \nabla_\mu$, то $e\cdot X^h = \{e\cdot f : f \in X^h\}$ есть $t(X^h)$-полное подпространство в X^h.*

$\lhd$ Пусть $f_n, f \in X$ и $\|f_n - f\|_X \to 0$. Тогда

$$\big\|\overline{f_n} - \overline{f}\,\big\|_X = \big\||\overline{f_n} - \overline{f}\,|\big\|_X = \big\||f_n - f|\big\|_X = \big\|f_n - f\big\|_X \to 0.$$

Это означает, что X^h есть замкнутое подмножество в $(X, \|\cdot\|_X)$, и поэтому $(X^h, \|\cdot\|_X)$ является полным метрическим пространством. Следовательно, для полноты $e \cdot X^h \subset X^h$ достаточно установить $t(X^h)$-замкнутость множества $e \cdot X^h$.

Если $e \cdot f_n = f_n \in e \cdot X^h$, $f \in X^h$ и $\|f_n - f\|_X \to 0$, то, как отмечалось выше, существует подпоследовательность $\{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, которая (o)-сходится к f. Следовательно, $f_{n_k} = e \cdot f_{n_k} \xrightarrow{(o)} e \cdot f$, что влечет равенство $f = e \cdot f$, и поэтому $f \in e \cdot X^h$. $\rhd$

Для идемпотента $e = [E] \in X \cap \nabla_\mu$, $\mu(E) < \infty$, обозначим через $t(e \cdot X^h)$ топологию в $e \cdot X^h$, индуцируемую топологией $t(X^h)$ из X^h, а через $t_\mu(e \cdot X^h)$ — топологию сходимости по мере в идеальном пространстве $e \cdot X^h$, индуцируемую из $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})(e \cdot \nabla_\mu)$.

Следующая теорема дает критерий существования ненулевых дифференцирований со значениями в идеальных F-пространствах.

Теорема 4.3. *Для идеального F-пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})$ следующие условия эквивалентны:*

(i) существует ненулевое дифференцирование из $\mathscr{L}_\infty$ в X;

(ii) существует такой ненулевой идемпотент $e = [E] \in X$, $\mu(E) < \infty$, что булева алгебра $e \cdot \nabla_\mu$ не является атомической и топология $t(e \cdot X^h)$ совпадает с топологией сходимости по мере $t_\mu(e \cdot X^h)$.

$\lhd$ $(i) \Longrightarrow (ii)$: Если существует ненулевое дифференцирование из $\mathscr{L}_\infty$ в X, то согласно следствию 3.3 найдется такой ненулевой идемпотент $e = [E] \in X$, $\mu(E) < \infty$, что $e \cdot X^h = \mathscr{L}_0(\mathbb{R})(e \cdot \nabla_\mu)$. В силу утверждения 4.1 имеем, что $t_o(e \cdot X^h) \leqslant t(e \cdot X^h)$. Поскольку $\mu(E) < \infty$, то (o)-топология $t_o(e \cdot X^h) = t_o(\mathscr{L}_0(\mathbb{R})(e \cdot \nabla_\mu)$ метризуема и сходимость последовательностей в (o)-топологии $t_o(e \cdot X^h)$ совпадает со сходимостью по мере [7, гл. 3, § 9]. Это означает, что $t_\mu(e \cdot X^h) \leqslant t(e \cdot X^h)$. Так как топологические векторные пространства $(\mathscr{L}_0(\mathbb{R})(e \cdot \nabla_\mu), \|\cdot\|_X)$ и $(\mathscr{L}_0(\mathbb{R})(e \cdot \nabla_\mu), \|\cdot\|_E)$ являются F-пространствами, то из [10, ч. 1, гл. 2, следствие 2.12 (d)] следует, что $t_\mu(e \cdot X^h) = t(e \cdot X^h)$.

$(ii) \Longrightarrow (i)$: Предположим, что существует такой ненулевой идемпотент $e = [E] \in X$, $\mu(E) < \infty$, для которого булева алгебра $e \cdot \nabla_\mu$ не является атомической и топология $t(e \cdot X^h)$ совпадает с топологией сходимости по мере $t_\mu(e \cdot X^h)$. Поскольку метризуемое топологическое векторное пространство $(e \cdot X^h, t(e \cdot X^h))$ полно (см. утверждение 4.2), то $e \cdot X^h$ есть замкнутое подпространство в $(\mathscr{L}_0(\mathbb{R})(e \cdot \nabla_\mu), t_\mu(\mathscr{L}_0(\mathbb{R})(e \cdot \nabla_\mu)))$. Осталось заметить, что $\mu(E) < \infty$, $e \cdot \nabla_\mu \subset e \cdot X^h$ и, в силу идеальности пространства $e \cdot X^h$, верно включение $\mathscr{L}_\infty(\mathbb{R})(e \cdot \nabla_\mu) \subset e \cdot X^h$. Следовательно, $t_\mu(e \cdot X^h)$-замыкание подпространства $e \cdot X^h$ содержит $t_\mu(e \cdot X^h)$-замыкание подпространства $\mathscr{L}_\infty(\mathbb{R})(e \cdot \nabla_\mu)$. Последнее замыкание совпадает с $\mathscr{L}_0(\mathbb{R})(e \cdot \nabla_\mu)$. Это означает, что $e \cdot X^h = \mathscr{L}_0(\mathbb{R})(e \cdot \nabla_\mu)$ (соответственно, $e \cdot X = \mathscr{L}_0(\mathbb{C})(e \cdot \nabla_\mu)$), т. е. идеальное F-пространство X является e-расширенным.

Так как булева алгебра $e \cdot \nabla_\mu$ не является атомической, то согласно теореме 3.1 существует ненулевое дифференцирование δ_1 из $\mathscr{L}_\infty(\mathbb{K})(e \cdot \nabla_\mu)$ со значениями в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})(e \cdot \nabla_\mu)$. Определим линейное отображение $\delta\colon \mathscr{L}_\infty(\mathbb{K}) \to \mathscr{L}_0(\mathbb{K})$, полагая $\delta(f) = \delta_1(e \cdot f)$, $f \in \mathscr{L}_\infty(\mathbb{K})$. Ясно, что δ есть ненулевое дифференцирование из $\mathscr{L}_\infty(\mathbb{K})$ в $\mathscr{L}_0(\mathbb{K})(e \cdot \nabla_\mu) \subset X$. $\rhd$

Литература

1. *Ber A. F., Chilin V. I., Sukochev F. A.* Non-trivial derivations on commutative regular algebras // Extracta Math.—2006.—Vol. 21, № 2.—P. 107–147.
2. *Ber A. F.* Derivations on commutative regular algebras // Sib. Adv. Math.—2011.—Vol. 21, № 3.—P. 161–169. DOI: 10.3103/S1055134411030011.
3. *Бер А. Ф., Левитина Г. Б., Чилин В. И.* Дифференцирования со значениями в квазинормируемых бимодулях локально измеримых операторов // Мат. тр.—2014.—Т. 17, № 1.—С. 3–18.
4. *Bennet C., Sharpley R.* Interpolation of Operators.—N. Y.: Acad. Press Inc., 1988.
5. *Левитина Г. Б., Чилин В. И.* Дифференцирования на идеалах в коммутативных AW^*-алгебрах // Мат. тр.—2013.—Т. 16, № 1.—С. 63–88.
6. *Dykema K., Sukochev F., Zanin D.* Algebras of log-integrable functions and operators.—10 Sep 2015.—11 p.—arXiv:1509.03360v1 [math.OA].
7. *Kalton N. J., Peck N. T., Roberts James W.* An F-space sampler.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.—(London Math. Soc. Lect. Note Ser.; vol. 89).
8. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.
9. *Кусраев А. Г.* Автоморфизмы и дифференцирования в расширенной комплексной f-алгебре // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 1.—С. 97–107.
10. *Рудин У.* Функциональный анализ.—М.: Мир, 1975.
11. *Sakai S.* C^*-Algebras and W^*-Algebras.—N. Y.: Springer-Verlag, 1971.
12. *Vladimirov D. A.* Boolean Algebras in Analysis.—Dordrecht: Springer, 2002.—604 p.—(Math. Appl.; vol. 540.)
13. *Vulikh B. Z.* Introduction to the theory of partially ordered spaces.—Groningen: Wolters-Noordhoff Sci. Publ. Ltd., 1967.—387 p.

Статья поступила 7 декабря 2017 г.

Алимов Акром Акбарович
Ташкентский исламский университет,
проректор, доцент кафедры естественных наук
УЗБЕКИСТАН, 100011, Ташкент, Абдулла Кодирий, 11
E-mail: `alimovakrom63@yandex.ru`

Чилин Владимир Иванович
Национальный университет Узбекистана,
профессор кафедры алгебры и функционального анализа
УЗБЕКИСТАН, 100174, Ташкент, Вузгородок
E-mail: `vladimirchil@gmail.com, chilin@ucd.uz`

DERIVATIONS WITH VALUES IN AN IDEAL F-SPACES OF MEASURABLE FUNCTIONS

Alimov A. A., Chilin V. I.

It is known that any derivation on a commutative von Neumann algebra $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu)$ is identically equal to zero. At the same time, the commutative algebra $\mathscr{L}_0(\Omega,\mu)$ of complex measurable functions defined on a non-atomic measure space (Ω,μ) admits non-zero derivations. Besides, every derivation on $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu)$ with the values in an ideal normed subspace $X \subset \mathscr{L}_0(\Omega,\mu)$ is equal to zero. The same remains true for an ideal quasi-normed subspace $X \subset \mathscr{L}_0(\Omega,\mu)$.
Naturally, there is the problem of describing the class of ideal F-normed spaces $X \subset \mathscr{L}_0(\Omega,\mu)$ for which there is a non-zero derivation on $\mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu)$ with the values in X. We give necessary and sufficient conditions for a complete ideal F-normed spaces X to be such that there is a non-zero derivation $\delta : \mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu) \to X$. In particular, it is shown that if the F-norm on X is order semicontinuous, each derivation $\delta : \mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu) \to X$ is equal to zero. At the same time, existence of a non-atomic idempotent $0 \neq e \in X$, $\mu(e) < \infty$ for which the measure topology in $e \cdot X$ coincides with the topology generated by the F-norm implies the existence of a non-zero derivation $\delta : \mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu) \to X$. Examples of such ideal F-normed spaces are algebras

$\mathscr{L}_0(\Omega,\mu)$ with non-atomic measure spaces (Ω,μ) equipped with the F-norm $\|f\|_\Omega = \int_\Omega \frac{|f|}{1+|f|}d\mu$. For such ideal F-spaces there is at least a continuum of pairwise distinct non-zero derivations $\delta : \mathscr{L}_\infty(\Omega,\mu) \to (\mathscr{L}_0(\Omega,\mu), \|\cdot\|_\Omega)$.

Key words: derivation, an ideal space, F-norm.

References

1. *Ber A. F., Chilin V. I., and Sukochev F. A.* Non-trivial derivations on commutative regular algebras. *Extracta Math.*, 2006, vol. 21, no. 2, pp. 107–147.
2. *Ber A. F.* Derivations on commutative regular algebras, *Sib. Adv. Math.*, 2011, vol. 21, no. 3, pp. 161–169. DOI: 10.3103/S1055134411030011.
3. *Ber A. F., Chilin V. I. and Levitina G. B.* Derivations with values in quasi-normed bimodules of locally measurable operators, *Sib. Adv. Math.*, 2015, vol. 25, no. 3, pp. 169–178. DOI: 10.3103/S105513441503 0025.
4. *Bennet C., Sharpley R. Interpolation of Operators.* Academic Press, Inc., 1988.
5. *Chilin V. I., Levitina G. B.* Derivations on ideals in commutative AW^*-algebras, *Sib. Adv. Math.*, 2014, vol. 24, no. 1, pp. 26–42. DOI: 10.3103/S1055134414010040.
6. *Dykema K., Sukochev F., and Zanin D. Algebras of Log-Integrable Functions and Operators.* ArXiv: 1509.03360v1 [math.OA]. 10 Sep 2015. 11 p.
7. *Kalton N. J., Peck N. T., and Roberts James W. An F-Space Sampler.* Cambridge, Cambridge University Press, 1984. London Math. Soc. Lect. Note Ser., vol. 89.
8. *Kusraev A. G. Dominated Operators.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2000. Math. and its Appl., vol. 519.
9. *Kusraev A. G.* Automorphisms and derivations on a universally complete complex f-algebra, *Siberian Mathematical Journal*, 2006, vol. 47, no. 1, pp. 77–85. DOI: 10.1007/s11202-006-0010-0.
10. *Rudin W. Functional Analysis.* New York, McGraw-Hill Book Company, 1973.
11. *Sakai S. C^*-Algebras and W^*-Algebras.* New York, Springer-Verlag, 1971.
12. *Vladimirov D. A. Boolean Algebras in Analysis.* Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2002. Math. and its Appl., vol. 540.
13. *Vulikh B. Z. Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces.* New York, Gordon and Breach, 1967.

Received 7 December, 2017

Alimov Akrom Akbarovich
Tashkent Islamic University,
Vice-Rector, Associate Professor
11 Abdulla Kodiriy Ave., Tashkent, 100011, Uzbekistan
E-mail: alimovakrom63@yandex.ru

Chilin Vladimir Ivanovich
National University of Uzbekistan, *Professor*
Vuzgorodok, Tashkent, 100011, Uzbekistan
E-mail: vladimirchil@gmail.com, chilin@ucd.uz