Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 1, С. 69–85

УДК **517.98**

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ МЕРЕ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В КВАЗИБАНАХОВОЙ РЕШЕТКЕ[1]

А. Г. Кусраев, Б. Б. Тасоев

Светлой памяти Ганиева И. Г.

Цель настоящей статьи — дать обзор некоторых новых идей и недавних результатов в теории интегрирования скалярных функций относительно векторной меры, а также общих теорем о функциональном представлении квазибанаховых решеток. Приводится набросок чисто порядкового интеграла типа Канторовича — Райта скалярных функций относительно векторной меры, заданной на δ-кольце и принимающей значения в порядково σ-полной векторной решетке. Также представлено интегрирование типа Бартла — Данфорда — Шварца по мере, определенной на δ-кольце со значениями в квазибанаховой решетке. В контексте банаховых решеток решающую роль играют пространства интегрируемых и слабо интегрируемых функций относительно векторной меры. При решении задачи о функциональном представлении квазибанаховых решеток, подход, основанный на двойственности, не работает, но существуют два естественных кандидата для пространства слабо интегрируемых функций: максимальное квазибанахово расширение и область определения наименьшего расширения интегрального оператора. Используя эту идею, можно построить новые пространства слабо интегрируемых функций, которые играют существенную роль в задаче о функциональном представлении квазибанаховых решеток. В частности, показано, что при изучении квазибанаховых решеток, когда метод двойственности не применим, интеграл Канторовича — Райта оказывается более гибким инструментом, чем интеграл Бартла — Данфорда — Шварца.

DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11399.

Ключевые слова: квазибанахова решетка, положительная векторная мера, интеграл Канторовича — Райта, интеграл Бартла — Данфорда — Шварца, оператор интегрирования, пространство интегрируемых функций, пространство слабо интегрируемых функций.

1. Введение

В последние двадцать пять лет интегрирование по мере со значениями в банаховой решетке вызывает возрастающий интерес. Пространства интегрируемых и слабо интегрируемых скалярных функций относительно векторной меры обладают интересными порядковыми и метрическими свойствами и интенсивно изучались многими авторами. Найдены новые приложения в таких важных задачах, как функциональное представление абстрактных банаховых решеток, оптимальная область определения линейного оператора, мажорация и факторизация операторов, спектральное интегрирование и т. п., см. обзорную статью Курберы и Риккера [17], монографию Окады, Риккера и Санчеса

[1] Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-51-12064 ННИО_а.

Переса [43], недавние работы Калабуга, Дельгадо, Хуана, Санчеса Переса [12, 20–23, 27], а также указанные в них источники.

Так как многие функциональные пространства являются квазибанаховыми, естественно желание распространить векторное интегрирование на случай меры со значениями в квазибанаховой решетке. Принципиальная трудность состоит в невозможности применить соображения, основанные на двойственности, как это делается в подходах Гельфанда, Петтиса и Льюиса [37, 38]. Санчес Перес и Традасете [45] предложили вариант интеграла типа Бартла — Данфорда — Шварца, не используя двойственный подход. Существенный недостаток этого подхода в том, что в нем отсутствует аналог слабой интегрируемости, он сильно зависит от порядковой непрерывности квазинормы и предполагает, что постоянные функции интегрируемы.

В цикле работ авторов [33–35] намечены три новых подхода: во-первых, развитие «чисто порядкового» интегрирования типа Канторовича — Райта как естественного и полезного двойника «топологического» интегрирования Бартла — Данфорда — Шварца; во-вторых, построение пространства слабо интегрируемых функций с помощью порядковой конструкции, используя, например, область определения наименьшего расширения оператора интегрирования (см. Алипрантис и Бёркиншо [10, теорема 1.30]) или же максимальное квазибанахово расширение (в смысле Абрамовича [1]) пространства интегрируемых функций; в третьих, привлечение к исследованию соответствующих пространств интегрируемых и слабо интегрируемых функций идей и методов теории квазибанаховых пространств (см., Кэлтон [29, 31]).

Цель настоящей статьи — дать краткий обзор упомянутых подходов, а также некоторых недавних результатов об интегрировании по векторной мере и общих теорем о представлении порядково σ-полных векторных решеток и квазибанаховых решеток.[1] Статья организована следующим образом. В §2 приводится необходимый минимум сведений о квазибанаховых решетках. §3 содержит набросок теории интегрирования Канторовича — Райта скалярных функций относительно положительной меры со значениями в порядково σ-полной векторной решетке, определенной на δ-кольце множеств. Параллельная теория векторного интегрирования Бартла — Данфорда — Шварца представлена в §4. В §5 вводятся слабо интегрируемые функции относительно положительной векторной меры на основе конструкции наименьшего расширения оператора интегрирования. В §6 приводятся результаты о представлении порядково σ-полных векторных решеток и квазибанаховых решеток в виде векторной решетки классов эквивалентности интегрируемых или слабо интегрируемых функций по векторной мере.

Используются стандартные обозначения и терминология из теории векторных и банаховых решеток, принятые в книгах Алипрантиса и Бёркиншо [10] и Мейе-Ниберга [42]. Все векторные решетки предполагаются действительными. Знак $:=$ обозначает «равняется по определению», а $\mathbb{N}$ и $\mathbb{R}$ — множества натуральных и действительных чисел соответственно.

2. Квазибанаховы решетки

В этом параграфе представлены краткие сведения о квазибанаховых решетках, в частности, конструкция максимального квазинормированного расширения.

[1] Статья представляет собой развернутое изложение пленарного доклада, сделанного на IV международной конференции «Современные методы и проблемы теории операторов и гармонического анализа и их приложения», посвященной памяти профессора Н. К. Карапетянца (апрель 2017 г., Ростов-на-Дону).

Определение 1. *Квазинормированным пространством* принято называть пару $(X, \|\cdot\|)$, где X — вещественное или комплексное векторное пространство и $\|\cdot\|$ — квазинорма, т. е. функция из X в $\mathbb{R}$, для которой выполняются условия:

(1) $\|x\| \geqslant 0$ для всех $x \in X$ и $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ для всех $x \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$;

(3) существует $1 \leqslant C \in \mathbb{R}$ такое, что $\|x + y\| \leqslant C(\|x\| + \|y\|)$ для всех $x, y \in X$.

Если, сверх того, для некоторого $0 < p \leqslant 1$ выполняется неравенство

(4) $\|x + y\|^p \leqslant \|x\|^p + \|y\|^p$ для всех $x, y \in X$,

то $\|\cdot\|$ называют *p-нормой*, а $(X, \|\cdot\|)$ — *p-нормированным пространством.*

Наименьшая константа C в (3) называется *квазитреугольной константой*, или *квазитреугольным множителем*, или *модулем вогнутости* квазинормы.

Определение 2. Говорят, что две квазинормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ *эквивалентны*, если существует константа $A \geqslant 1$ такая, что $A^{-1}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant A\|x\|_1$ для всех $x \in X$.

Из фундаментальной теоремы Аоки — Ролевича следует, что всякая квазинорма $\|\cdot\|$ эквивалентна p-норме $\|\cdot\|$ для некоторого $0 < p \leqslant 1$ (см. Малигранда [39, теорема 1.2], Пич [8, 6.2.5]). Квазинорма $\|\cdot\|$ индуцирует метрическую топологию на X; метрику можно определить формулой $d(x, y) = \|x - y\|^p$. Именно эта топология имеется в виду, когда говорят о метрической сходимости или сходимости по квазинорме.

Определение 3. *Квазибанаховым пространством* (*p-нормированным пространством*) называют метрически полное квазинормированное (p-нормированное) пространство.

Основные результаты теории банаховых пространств такие, как теоремы об открытом отображении и замкнутом графике, справедливы в контексте квазибанаховых пространств, см. Кэлтон [31]. Имеется также вариант критерия полноты Рисса — Фишера, см. Малигранда [39, теорема 1.1].

Определение 4. Квазибанахово (квазинормированное, p-банахово) пространство $(X, \|\cdot\|)$ называется *квазибанаховой решеткой* (соответственно, квазинормированной решеткой, p-банаховой решеткой), если X одновременно является векторной решеткой и квазинорма монотонна в том смысле, что для любых $x, y \in X$ неравенство $|x| \leqslant |y|$ влечет $\|x\| \leqslant \|y\|$.

Предложение 1. *В любой квазинормированной решетке решеточные операции непрерывны по квазинорме и конус положительных элементов замкнут. Более того, если возрастающая (убывающая) сеть $(x_\alpha)_{\alpha \in A}$ сходится по квазинорме к элементу $x \in X$, то $x = \sup_{\alpha \in A} x_\alpha$ (соответственно, $x = \inf_{\alpha \in A} x_\alpha$).*

Из предложения 1 следует, что пополнение квазинормированной решетки X является квазибанаховой решеткой, содержащей X в качестве векторной подрешетки. Кроме того, имеет место порядковый аналог критерия полноты Рисса — Фишера.

Теорема 1. *Пусть $X := (X, \|\cdot\|)$ — квазинормированная решетка с квазитреугольной константой $C \geqslant 1$. Равносильны следующие утверждения:*

(1) X — квазибанахова решетка;

(2) для любой последовательности $(x_k)_{k=1}^\infty$ в X_+ такой, что $\sum_{k=1}^\infty C^k \|x_k\| < \infty$, существует $\sum_{k=1}^\infty x_k \in X$;

(3) для любой последовательности $(x_k)_{k=1}^\infty$ в X_+, для которой $\sum_{k=1}^\infty C^k \|x_k\| < \infty$, существует элемент $x \in X$ такой, что $x = o\text{-}\sum_{k=1}^\infty x_k := \sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{k=1}^n x_k$.

Напомним, что последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$ в векторной решетке X называют *равномерно сходящейся* к элементу $x \in X$, если существуют $0 < u \in X$ и последовательность действительных чисел $(\varepsilon_n)_{n=1}^{\infty}$ такие, что $\varepsilon_n \downarrow 0$ и $|x_n - x| \leqslant \varepsilon_n u$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Как и в банаховой решетке (см. [7, теорема VII.2.1]), метрическая сходимость в квазибанаховой решетке полностью определяется порядком.

Теорема 2. *Последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ в квазибанаховой решетке X сходится по квазинорме к элементу $x \in X$ тогда и только тогда, когда для всякой её подпоследовательности $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ существует подпоследовательность $(x_{n_{k_l}})_{l=1}^{\infty}$, сходящаяся равномерно к x.*

Из теоремы 2 следует, что каждый положительный оператор из квазибанаховой решетки в квазинормированную решетку непрерывен, а любые две квазинормы, превращающие векторную решетку в квазибанахову решетку, эквивалентны.

В некоторых вопросах требуется более тесная связь между квазинормой и порядком, чем монотонность, см. ниже определения 5, 6 и 7.

Определение 5. Квазибанахову решетку $(X, \|\cdot\|)$ (как и квазинорму $\|\cdot\|$) называют *порядково непрерывной*, если соотношение $x_\alpha \downarrow 0$ влечет $\|x_\alpha\| \downarrow 0$ для любой сети $(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ в X. Если в этом определении сети заменяются последовательностями, то говорят о порядковой σ-непрерывности.

Теорема 3. *Для квазибанаховой решетки X эквивалентны утверждения:*

(1) *X порядково непрерывна;*

(2) *каждая возрастающая порядково ограниченная последовательность в X_+ сходится;*

(3) *X порядково σ-полна и порядково σ-непрерывна.*

Определение 6. Говорят, что квазибанахова решетка $(X, \|\cdot\|)$ *обладает слабым свойством Фату*, если существует константа $K > 0$, называемая *слабой константой Фату*, такая, что для всякой возрастающей сети (x_α), имеющей супремум $x \in X$, выполняется соотношение $\|x\| \leqslant K \sup_\alpha \|x_\alpha\|$. Если в этом определении заменить сети последовательностями, то говорят о *слабом σ-свойстве Фату*. Если, же $K = 1$, то $\|x\| = \sup_\alpha \|x_\alpha\|$ и в этом случае говорят, что X обладает *свойством Фату* или *σ-свойством Фату*.

Определение 7. Квазинормированная решетка $(X, \|\cdot\|)$ *обладает свойством Леви* (*σ-свойством Леви*), если существует $\sup_\alpha x_\alpha$ (соответственно $\sup_n x_n$) для каждой возрастающей сети (x_α) (соответственно, последовательности (x_n)) в X_+ при условии, что $\sup_\alpha \|x_\alpha\| < \infty$ (соответственно, $\sup_n \|x_n\| < \infty$).

Каждая квазинормированная решетка со свойством Леви является порядково полной квазибанаховой решеткой со слабым свойством Фату.

В следующем определении порядково полную квазинормированную решетку X отождествляем с порядково плотным идеалом в ее универсальном пополнении X^u.

Определение 8. *Максимальным квазинормированным расширением* порядково полной квазинормированной решетки $(X, \|\cdot\|)$ называют пару $(X^\varkappa, \|\cdot\|_\varkappa)$, где

$$\|\hat{x}\|_\varkappa := \sup\big\{\|x\| : x \in X,\ 0 \leqslant x \leqslant |\hat{x}|\big\} \quad (\hat{x} \in X^u);$$
$$X^\varkappa := \{\hat{x} \in X^u : \ \|\hat{x}\|_\varkappa < \infty\}.$$

Легко видеть, что $\|\cdot\|_\varkappa : X^\varkappa \to \mathbb{R}$ — квазинорма с той же квазитреугольной константой C, что и у $\|\cdot\|$. Более того, $\|\cdot\|_\varkappa$ будет p-нормой, если такова $\|\cdot\|$.

Предложение 2. *Если X — порядково полная квазинормированная решетка, то имеют место утверждения:* (а) *$X^\varkappa$ обладает свойством Леви в том и только в том случае, когда X обладает слабым свойством Фату;* (б) *если X обладает слабым свойством Фату, то $X^\varkappa$ обладает свойствами Леви и Фату.*

Определение 9. Квазинормированную решетку X называют *интервально полной*, если каждый порядковый интервал в X полон, т. е. каждая порядково ограниченная последовательность Коши в X сходится к элементу X.

Теорема 4. *Максимальное квазинормированное расширение $(X^{\varkappa}, \|\cdot\|_{\varkappa})$ порядково полной квазинормированной решетки $(X, \|\cdot\|_X)$ со слабым σ-свойством Фату есть квазибанахова решетка тогда и только тогда, когда X интервально полна.*

Замечание 1. Выдающийся вклад в геометрическую теорию квазибанаховых пространств внес Кэлтон, см. обзоры [28, 29, 31]. В частности, систематическое изучение квазибанаховых решеток начинается с работы Кэлтона [29], см. также Куартеро и Триана [13], Шульга [51]. Максимальное нормированное расширение нормированной решетки, а также соответствующий вариант теоремы 4 принадлежат Абрамовичу [1, определение на с. 8 и теорема 3]. В этом случае теорема 4 верна без предположения о слабом σ-свойстве Фату. Нам неизвестно можно ли опустить это условие в общем случае. Максимальное квазинормированное расширение $X^{\varkappa}$ можно определить и в той ситуации, когда X не обязательно порядково полна. Полное изложение материала данного параграфа см. в [35].

3. Интеграл Канторовича — Райта

Интегрирование относительно меры со значениями в векторной решетке имеет свои корни в спектральной теории, в представлении линейных операторов с помощью интеграла по спектральной мере. Теория порядкового интеграла действительных функций относительно счетно аддитивных векторных мер со значениями в порядково полной векторной решетке была развита Канторовичем [3, 4]. Решающий вклад в эту теорию внес Райт [49, 50]. Существующая литература не очень обширна; некоторые аспекты теории отражены в книге [5, гл. 6]. В этом параграфе мы коротко приведем конструкцию и некоторые свойства интеграла Канторовича — Райта для положительных векторных мер. Подробности можно найти в [33].

Пусть X — порядково σ-полная векторная решетка, Ω — непустое множество и $\mathscr{P}(\Omega)$ — семейство всех подмножеств Ω. *Кольцом* (подмножеств Ω) называется подсемейство $\mathscr{R} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ такое, что $A \setminus B \in \mathscr{R}$ и $A \cup B \in \mathscr{R}$ для всех $A, B \in \mathscr{R}$, а *δ-кольцо* — это кольцо, замкнутое относительно счетных пересечений. Пусть $\mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$ обозначает семейство подмножеств $A \subset \Omega$ такое, что $A \cap B \in \mathscr{R}$ для всех $B \in \mathscr{R}$:

$$\mathscr{R}^{\mathrm{loc}} := \{A \in \mathscr{P}(\Omega) : A \cap B \in \mathscr{R} \text{ для всех } B \in \mathscr{R}\}. \tag{3.1}$$

Если $\mathscr{R}$ — δ-кольцо, то семейство $\mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$ является σ-алгеброй и $\mathscr{R} \subset \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$.

Определение 10. Функция $\mu : \mathscr{R} \to X_+$ называется *мерой*, если $\mu(\varnothing) = 0$ и для каждой последовательности $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ попарно непересекающихся множеств $A_n \in \mathscr{R}$ такой, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ порядково сходится к элементу $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)$; символически,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = o\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) := \bigvee_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)\right).$$

Тройку $(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ называют *пространством с векторной мерой*, если Ω — непустое множество, $\mathscr{R}$ — δ-кольцо подмножеств Ω и $\mu : \mathscr{R} \to X_+$ мера.

Определение 11. Говорят, что множество $A \in \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$ *пренебрежимо* (или, более точно, *μ-пренебрежимо*), если $\mu(B \cap A) = 0$ для всех $B \in \mathscr{R}$.

Скажем, что свойство $P(\cdot)$ выполняется для *почти всех* $\omega \in \Omega$ или *почти всюду* (коротко μ-п.в.) на Ω, если множество $\{\omega \in \Omega : P(\omega)$ не выполняется$\}$ μ-пренебрежимо. Мы можем предполагать, не ограничивая общность, что δ-кольцо $\mathscr{R}$ содержит все пренебрежимые множества и $\mu(A) = 0$ для любого пренебрежимого множества $A \in \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$. Подмножество $A \subset \Omega$ *копренебрежимо*, если $\Omega \setminus A$ пренебрежимо.

Определение 12. Функция $f : \Omega \to \mathbb{R}$ называется *$\mathscr{R}$-простой*, если она допускает представление $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$, где множества $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{R}$ попарно не пересекаются и $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ (полагаем по определению $\chi_\varnothing = 0$).

Множество $S(\mathscr{R})$ всех $\mathscr{R}$-простых функций является векторной решеткой. Для $\mathscr{R}$-простой функции $f = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$ определим интеграл $\int f d\mu$ по формуле

$$I_\mu^o(f) := \int f\, d\mu := \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k).$$

Определение 13. Будем говорить, что $\mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$-измеримая действительная функция f, определенная на копренебрежимом подмножестве Ω, *интегрируема*, если существует последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ $\mathscr{R}$-простых функций такая, что $0 \leqslant f_n \uparrow f$ μ-п.в. и $\bigvee_{n=1}^{\infty} \int f_n d\mu$ существует в X_+. В этом случае положим по определению

$$I_\mu^o(f) := \int f\, d\mu := o\text{-}\!\!\int f\, d\mu := \bigvee_{n=1}^{\infty} \int f_n\, d\mu.$$

Произвольная $\mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$-измеримая функция f *интегрируема*, если таковы f^+ и f^-. Интеграл функции f определяется формулой $I_\mu^o(f) = I_\mu^o(f^+) - I_\mu^o(f^-)$. Легко показать, что интеграл I_μ^o корректно определен, см. [33, лемма 2.10].

Обозначим через $\mathscr{L}^0(\mu) := \mathscr{L}^0(\Omega, \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}, \mu)$ множество всех действительных $\mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$-измеримых функций, определенных на копренебрежимых подмножествах Ω. Скажем, что две функции $f, g \in \mathscr{L}^0(\mu)$ эквивалентны и будем писать $f \sim g$, если $f(\omega) = g(\omega)$ для μ-почти всех $\omega \in \Omega$. Пусть $L^0(\mu) := L^0(\Omega, \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}, \mu)$ обозначает множество классов эквивалентности в $\mathscr{L}^0(\mu)$ по отношению $\sim$. Для функции $f \in \mathscr{L}^0(\mu)$ символом $\tilde{f}$ обозначается соответствующий класс эквивалентности в $L^0(\mu)$. Линейная структура и упорядочение в $L^0(\mu)$ определяются обычным образом, используя поточечные операции и отношение порядка, см. Фремлин [25, § 241].

Пусть $\mathscr{L}_o^1(\mu) := \mathscr{L}_o^1(\Omega, \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}, \mu)$ — часть $\mathscr{L}^0(\mu)$, состоящая из μ-интегрируемых функций. Символом $L_o^1(\mu) := L_o^1(\Omega, \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}, \mu)$ обозначим множество всех классов эквивалентности функций из $\mathscr{L}_o^1(\mu)$. Определим оператор $I_\mu^o : L_o^1(\mu) \to X$ по формуле $I_\mu^o(\tilde{f}) := I_\mu^o(f)$ для всех $f \in \mathscr{L}_o^1(\mu)$.

Определение 14. Говорят, что мера $\mu : \mathscr{R} \to X_+$ *локализуема*, если для любого семейства $\mathscr{A} \subset \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$ существует $B \in \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$ такой, что (i) $A \setminus B$ μ-пренебрежимо для всех $A \in \mathscr{A}$ и (ii) если $C \in \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$ и $A \setminus C$ μ-пренебрежимо для всех $A \in \mathscr{A}$, то $B \setminus C$ также μ-пренебрежимо.

Предложение 3. *Справедливы следующие утверждения:*

(1) $L^0(\mu)$ *порядково σ-полная векторная решетка;*

(2) $L_o^1(\mu)$ *порядково плотный идеал в* $L^0(\mu)$*;*

(3) $L^0(\mu)$ *порядково полна тогда и только тогда, когда мера μ локализуема.*

Теоремы о сходимости из теории интеграла Лебега также верны для интеграла Канторовича — Райта. Доказательство следующей теоремы может быть проведено рассуждениями, приведенными в [49, предложение 3.3] и [5, теорма 6.1.4].

Теорема 5. *Пусть X — порядково σ-полная векторная решетка и $\mu : \mathscr{R} \to X_+$ — мера. Тогда $L^1_o(\mu)$ порядково σ-полная векторная решетка, а I^o_μ строго положительный порядково σ-непрерывный линейный оператор из $L^1_o(\mu)$ в X.*

Замечание 2. Райт изучал в [49] интегрирование относительно σ-аддитивной меры μ со значениями в $X \cup \{\infty\}$, определенной на σ-алгебре. Если положить $\mathscr{R} := \{A \in \Sigma : \mu(A) \in X\}$, то $\mathscr{R}$ будет δ-кольцом, а ограничение μ на $\mathscr{R}$ — мерой в смысле определения 10. Интегрируемая по Райту функция будет интегрируемой в смысле определения 13, но обратное, вообще говоря, неверно.

Замечание 3. Райт в [49, теорема 4.1] установил следующий вариант теоремы Рисса о представлении: *для линейного положительного оператора T из пространства непрерывных функций $C(K)$ на компакте K в порядково полную векторную решетку X существует единственная порядково ограниченная счетно аддитивная квазирегулярная мера $\mu : Bor(K) \to X_+$ такая, что $T(f) = o\text{-}\int_K f\,d\mu$ для всех $f \in C(K)$. Квазирегулярность μ* означает, что условие регулярности $\mu(F) = \inf\{\mu(U) : U$ открыто, $F \subset U\}$ выполняется лишь для замкнутых $F \subset K$.

Замечание 4. Свойства пространства $L^1_o(\mu)$ изучены недостаточно. В [5, теорема 6.1.10] показано, что $L^1_o(\mu)$ будет порядково полной векторной решеткой, а $I^o_\mu : L^1_o(\mu) \to X$ — оператором Магарам, тогда и только тогда, когда мера $\mu : \mathscr{R} \to X$ является *наполненной* (определение см. в [5, 6.1.9] и [50, определение 3.1]). Отсюда следует, что для наполненной меры имеет место теорема Радона — Никодима [5, теорема 6.1.11 (2)], установленная Райтом в [50, теорема 4.1]; в частности, векторная решетка $L^1_o(\mu)$ решеточно изоморфна полосе $\mu^{\perp\perp}$, см. [5, 6.1.11 (3)].

Замечание 5. Еще одно важное приложение обнаружил Хейдон [26, теорема 6H]: *любая инъективная банахова решетка X линейно изометрична и решеточно изоморфна $L^1_o(\mu)$ для наполненной положительной локализуемой меры μ со значениями в порядково полном AM-пространстве с единицей, если определить норму $\|f\| := \|I^\mu_o(|f|)\|_\infty$ $(f \in L^1_o(\mu))$.* Булевозначный подход см. в [6, теорема 4.4]

4. Интеграл Бартла — Данфорда — Шварца

Бартл, Данфорд и Шварц [11] ввели интегрирование относительно σ-аддитивной векторной меры, определенной на σ-алгебре множеств со значениями в произвольном банаховом пространстве (см. монографию Данфорда и Шварца [2, гл. IV, § 10]). Позднее, Люис [37] предложил альтернативный подход, основанный на теории двойственности. В работах Люиса [38], Масани и Ниеми [40, 41] теория была распространена на векторные меры, определенные на δ-кольцах множеств. В книге Клюванека и Ноулза [32] изучалось пространство $L^1(\mu)$ для меры μ со значениями в локально выпуклом пространстве. Теория интегрирования скалярных измеримых функций относительно меры со значениями в произвольном F-пространстве была развита в работах Ролевича [44, § III.6], Турпина [47] и [48, гл. 7], Томаса [46].

В этом параграфе рассмотрим интегрирование типа Бартла — Данфорда — Шварца относительно положительной меры со значениями в квазибанаховой решетке, определенной на δ-кольце множеств. Подробное изложение имеется в работе [34], расширяющей теорию интегрирования, которую предложили Санчес Перес и Традасете в [45]. Как и в § 3, Ω — непустое множество, $\mathscr{R}$ — δ-кольцо подмножеств Ω, $\mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$ — σ-алгебра, определенная формулой (3.1), и $X := (X, \|\cdot\|)$ — квазибанахова решетка.

Определение 15. Отображение $\mu : \mathscr{R} \to X_+$ называется мерой (или τ-мерой), если $\mu(\varnothing) = 0$ и для любой последовательности $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ попарно непересекающихся множеств $A_n \in \mathscr{R}$ такой, что $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{R}$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ топологически сходится и выполняется

$$\mu\biggl(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\biggr) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{4.1}$$

Будем говорить, что $(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ — *τ-измеримое пространство*, если Ω — непустое множество, $\mathscr{R}$ — δ-кольцо подмножеств Ω, и $\mu : \mathscr{R} \to X_+$ — τ-мера. Будем опускать τ, если из контекста ясно о какой мере идет речь (ср. определение 10).

Замечание 6. Таким образом, если X — порядково σ-полная квазибанахова решетка, то σ-аддитивность меры со значениями в X имеет двоякий смысл: ряд в (4.1) либо порядково сходится в соответствии с определением 10, либо сходится топологически в соответствии с определением 15, причем сходимость безусловная ввиду положительности μ. Из предложения 1 следует, что топологическая σ-аддитивность влечет порядковую σ-аддитивность. Разумеется, если квазинорма в X порядково непрерывна, то эти два разных понятия σ-аддитивности совпадают. В этом параграфе мера понимается в соответствии с определением 15.

Определение 16. Для данной меры $\mu : \mathscr{R} \to X_+$ μ-пренебрежимые множества, векторная решетка простых функций $S(\mathscr{R})$ и интегральный оператор $I_\mu^\tau : S(\mathscr{R}) \to X$ определяются в точности так же, как и в определениях 11 и 12.

Определение 17. Скажем, что $\mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$-измеримая действительная функция f, определенная на копренебрежимом подмножестве Ω, интегрируема, если существует последовательность $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ $\mathscr{R}$-простых функций такая, что $0 \leqslant f_n \uparrow f$ μ-п.в. и существует $\lim_n \int f_n \, d\mu$ в $(X, \|\cdot\|)$. В этом случае обозначим

$$I_\mu^\tau(f) := \tau\text{-}\int f \, d\mu := \lim_n \int f_n \, d\mu.$$

Определенная μ-п. в. $\mathscr{R}^{\mathrm{loc}}$-измеримая функция f *интегрируема*, если таковы f^+ и f^-. При этом полагаем по определению $I_\mu^\tau(f) := I_\mu^\tau(f^+) - I_\mu^\tau(f^-)$.

Можно показать, что $I_\mu^\tau(f)$ корректно определен, т. е. не зависит от выбора возрастающей последовательности простых функций, сходящихся к f μ-п.в.

В контексте определения 17 множество $\mathscr{L}^0(\mu)$, отношение эквивалентности $\sim$ и порядково σ-полная векторная решетка $L^0(\mu)$ имеют тот же смысл, что и в параграфе 3. Пусть $\mathscr{L}_\tau^1(\mu)$ обозначает подмножество $\mathscr{L}^0(\mu)$, состоящее из топологически интегрируемых функций, а $L_\tau^1(\mu)$ — множество классов эквивалентности функций из $\mathscr{L}_\tau^1(\mu)$. Легко видеть, что оператор топологического интегрирования $I_\mu^\tau : \tilde{f} \mapsto \int f \, d\mu$, действующий из $L_\tau^1(\mu)$ в X, линеен и строго положителен. Последнее означает, что оператор I_μ^τ положителен и равенство $I_\mu^\tau(|\tilde{f}|) = 0$ влечет $f = 0$ μ-п.в.

Замечание 7. Пусть X — порядково σ-полная квазибанахова решетка. Зафиксируем τ-меру $\mu : \mathscr{R} \to X_+$. Если функция f интегрируема в смысле определения 17, то согласно предложению 1 f также интегрируема в смысле определения 13 и $I_\mu^\tau(f) = I_\mu^o(f)$. В то же время, для данной функции $f \in \mathscr{L}_\tau^1(\mu)$ ее классы эквивалентности в $\mathscr{L}_\tau^1(\mu)$ и $\mathscr{L}_o^1(\mu)$ совпадают. Следовательно, $L_\tau^1(\mu)$ можно считать векторной подрешеткой $L_o^1(\mu)$.

Определение 18. Пространством *топологически* интегрируемых (или, короче, *τ-интегрируемых*) функций называется векторная решетка $L_\tau^1(\mu)$, наделенная квазинормой

$$\|f\|_\tau := \|I_\mu^\tau(|f|)\|_X = \biggl\| \int |f| \, d\mu \biggr\|_X \quad \bigl(f \in L_\tau^1(\mu)\bigr).$$

Из линейности и строгой положительности I_μ^τ следует, что $\|\cdot\|_\tau$ есть квазинорма с квазитреугольной константой, не превосходящей такой же константы для $\|\cdot\|$.

Теорема 6. *Квазинормированное пространство $(L_\tau^1(\mu), \|\cdot\|_\tau)$ является супер порядково полной порядково непрерывной квазибанаховой решеткой и порядково плотным идеалом в $L^0(\mu)$. Интегральный оператор I_μ^τ из $L_\tau^1(\mu)$ в X порядково непрерывен и строго положителен.*

Определение 19. Пространством *порядково* интегрируемых (или, короче, *o-интегрируемых*) функций называется векторная решетка $L_o^1(\mu)$ с квазинормой

$$\|f\|_o := \|I_\mu^o(|f|)\|_X := \left\| \int |f|\, d\mu \right\|_X \quad \big(f \in L_o^1(\mu)\big).$$

Из линейности и строгой положительности I_μ^o следует, что $\|\cdot\|_o$ есть квазинорма с квазитреугольной константой, не превосходящей такой же константы для $\|\cdot\|$. В следующей теореме собраны некоторые важные свойства пространств $L_o^1(\mu)$ и $L_\tau^1(\mu)$.

Теорема 7. *Пусть X — порядково σ-полная квазибанахова решетка с квазитреугольной константой C. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$L_o^1(\mu)$ порядково плотный идеал в $L^0(\Omega, \mathscr{R}^{loc}, \mu)$;*

(2) *$(L_o^1(\mu), \|\cdot\|_o)$ порядково σ-полная квазибанахова решетка с квазитреугольной константой, не превосходящей C;*

(3) *если X p-нормируема для некоторого $0 < p \leqslant 1$, то и $L_o^1(\mu)$ p-нормируема;*

(4) *$(L_\tau^1(\mu), \|\cdot\|_\tau)$ порядково супер порядково полная непрерывная квазибанахова подрешетка и порядково плотный идеал в $(L_o^1(\mu), \|\cdot\|_o)$;*

(5) *если X порядково непрерывна, то $L_o^1(\mu) = L_\tau^1(\mu)$ и $I_\mu^o = I_\mu^\tau$.*

Замечание 8. Бартл, Данфорд и Шварц [11] установили вариант теоремы Рисса о представлении для линейных ограниченных операторов из $C(K)$ в банахово пространство X: *для любого слабо компактного линейного оператор $T : C(K) \to X$ существует единственная счетно аддитивная мера $\mu : Bor(K) \to X$ такая, что $Tf = I_\mu^\tau(f)$ для всех $f \in C(K)$.* Более общие результаты получены Томасом и Кэльтоном, см. [30, введение и теорема 4.3].

Замечание 9. Важное и интересное направление приложений векторного интегрирования связано с существованием оптимальной области оператора. Для оператора из некоторого класса, действующего между функциональными пространствами, максимальное пространство (*оптимальная область*), на которую может быть распространен оператор при сохранении класса и образа, часто представляется в виде $L_\tau^1(\mu)$, где μ — векторная мера, связанная с этим оператором, см. Окада, Риккер и Санчес Перес [43]. Здесь наряду с $L_\tau^1(\mu)$ полезно использовать $L_o^1(\mu)$.

5. Слабо интегрируемые функции

В контексте банаховых решеток ключевую роль играют пространства $L^1(\mu)$ и $L_w^1(\mu)$ соответственно интегрируемых и слабо интегрируемых функций относительно векторной меры μ, см. Курбера [15], Курбера и Риккер [16], Дельгадо и Хуан [21], Калабуг, Дельгадо, Хуан и Санчес Перес [12]. Пространства $L^1(\mu)$ и $L_w^1(\mu)$ служат порядково плотными идеалами в $L^0(\mu)$; более того, они банаховы, причем $L^1(\mu)$ — замкнутое подпространство $L_w^1(\mu)$ (см. Масани и Ниеми [41, теоремы 4.5, 4.7, 4.10]).

Работая с векторными решетками или квазибанаховыми решетками, определение $L^1_w(\mu)$, основанное на двойственности, более не применимо, но естественной кандидатурой на роль пространства слабо интегрируемых функций служит область определения наименьшего расширения оператора интегрирования.

Пусть E, F — векторные решетки, F порядково полна и G — порядковый идеал в E. Рассмотрим положительный оператор $S : G \to F$ и обозначим через $\hat{G}$ совокупность всех $x \in E$ таких, что множество $\{S(g) : g \in G,\, 0 \leqslant g \leqslant |x|\}$ порядково ограничено в F. Тогда $\hat{G}$ порядково плотный идеал в E и можем положить по определению

$$\hat{S}x := \sup\{Sg : g \in G,\, 0 \leqslant g \leqslant x\} := \sup\{S(g \wedge x) : g \in G\} \quad (x \in \hat{G}_+).$$

Оператор $\hat{S} : \hat{G}_+ \to F$ аддитивный и положительно однородный, следовательно, он может быть продолжен разностями на все $\hat{G}$. Полученный оператор, который обозначим снова через $\hat{S}$, продолжает S и не превосходит любого другого положительного продолжения S на $\hat{G}$.

Определение 20. Оператор $\hat{S}$ называется *наименьшим расширением*[2] S относительно E, см. [10, теорема 1.30] и [5, 3.1.3].

Введем теперь две новые квазинормированные решетки слабо интегрируемых функций. Для данной векторной меры $\mu : \mathscr{R} \to X_+$, где X — порядково полная квазибанахова решетка, применим определение 20 для $E := L^0(\mu)$, $F := X$, $G := L^1_o(\mu)$ и $S := I^o_\mu$. Обозначим теперь $\hat{I}^o_\mu := \hat{S}$ и $L^1_{ow}(\mu) := L^1_{ow}(\Omega, \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}, \mu) := \hat{G}$ и заметим, что $L^1_o(\mu) \subset L^1_{ow}(\mu) \subset L^0(\mu)$. Аналогично, обозначим через $\hat{I}^\tau_\mu$ наименьшее расширение оператора топологического интегрирования I^τ_μ, и пусть $L^1_{\tau w}(\mu) := L^1_{\tau w}(\Omega, \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}, \mu)$ — область определения $\hat{I}^\tau_\mu$.

Определение 21. Векторную решетку $L^1_{ow}(\mu)$ назовем *пространством слабо о-интегрируемых функций* относительно μ. Снабдим $L^1_{ow}(\mu)$ квазинормой

$$\|f\|_{ow} := \left\|\hat{I}^o_\mu(|f|)\right\|_X \quad \left(f \in L^1_{ow}(\mu)\right). \tag{5.1}$$

Определение 22. Пространство слабо τ-интегрируемых функций определим как векторную решетку $L^1_{\tau w}(\mu)$, наделенную квазинормой

$$\|f\|_{\tau w} := \left\|\hat{I}^\tau_\mu(|f|)\right\|_X \quad \left(f \in L^1_{\tau w}(\mu)\right). \tag{5.2}$$

В следующей теореме приведены некоторые важные свойства $L^1_{\tau w}(\mu)$ и $L^1_{ow}(\mu)$.

Теорема 8. *Пусть $X := (X, \|\cdot\|_X)$ — порядково полная квазибанахова решетка с квазитреугольной константой C. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *$L^1_{\tau w}(\mu)$ и $L^1_{ow}(\mu)$ порядково плотные идеалы в $L^0(\mu)$;*

(2) *$L^1_{\tau w}(\mu)$ и $L^1_{ow}(\mu)$ квазибанаховы решетки с квазитреугольной константой, не превосходящей C;*

(3) *если X p-нормируема для некоторого $0 < p \leqslant 1$, то таковы $L^1_{\tau w}(\mu)$ и $L^1_{ow}(\mu)$;*

(4) *$L^1_{ow}(\mu)$ порядково плотный идеал в $L^1_{\tau w}(\mu)$ и $\hat{I}^\tau_\mu \leqslant \hat{I}^o_\mu$;*

(5) *интегральный оператор $I^o_\mu : L^1_o(\mu) \to X$ порядково непрерывен тогда и только тогда, когда $L^1_{ow}(\mu) = L^1_{\tau w}(\mu)$ и $\hat{I}^o_\mu = \hat{I}^\tau_\mu$.*

[2] Очевидно, $\hat{S} \leqslant T$ для любого положительного продолжения $T : \hat{G} \to F$ оператора S на все E, см. [10, с. 27]. В то же время, $\hat{G}$ наибольший порядковый идеал в E, на который S допускает положительное продолжение, см. [5, 3.6.1 (4)].

Замечание 10. Другая возможность введения слабо интегрируемых функций связана с понятием максимального квазинормированного расширения. Пусть X — порядково полная квазинормированная решетка и $(\Omega, \mathscr{R}^{\mathrm{loc}}, \mu)$ — пространство с векторной мерой $\mu : \mathscr{R} \to X_+$, локализуемой в смысле [25]. В зависимости от контекста будем считать, что μ счетно аддитивна в смысле порядковой или метрической сходимости. Из теоремы 8 (1, 4) и предложения 3 (3) следует, что $L^0(\mu)$ служит универсальным пополнением каждой из квазибанаховых решеток $L^1_o(\mu)$ и $L^1_\tau(\mu)$. В соответствии с определением 8 можно построить максимальное квазинормированные расширения $(L^1_{o\varkappa}(\mu), \|\cdot\|_{o\varkappa})$ и $(L^1_{\tau\varkappa}(\mu), \|\cdot\|_{\tau\varkappa})$ квазинормированных решеток $L^1_o(\mu)$ и $L^1_\tau(\mu)$ соответственно. В силу теорем 4 и 6 $L^1_{\tau\varkappa}(\mu)$ — квазибанахова решетка, в то время как $L^1_{o\varkappa}(\mu)$ — квазинормированная решетка, которая метрически полна при том дополнительном предположении, что $L^1_o(\mu)$ обладает слабым σ-свойством Фату. Более того, $L^1_{\tau\varkappa}(\mu)$ обладает свойствами Фату и Леви ввиду предложения 2, так как $L^1_\tau(\mu)$ порядково непрерывна. Некоторые свойства квазинормированных решеток $L^1_{o\varkappa}(\mu)$ и $L^1_{\tau\varkappa}(\mu)$ рассмотрены в [35]. Детальное исследование этих функциональных решеток представляется весьма перспективным.

6. Представление квазибанаховых решеток

Важно знать при каких условиях произвольная квазибанахова решетка порядково изометрично квазибанаховому функциональному пространству. Различные аспекты данной проблемы изучались многими авторами. Последние достижения связаны с интегрированием по векторной мере.

В этом параграфе покажем, что порядковый интеграл позволяет установить общий результат о представлении произвольных порядково полных квазибанаховых решеток. Ниже $X := (X, \|\cdot\|)$ — порядково σ-полная квазибанахова решетка и $(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ — пространство с векторной мерой $\mu : \mathscr{R} \to X_+$.

Определение 23. Говорят, что дизъюнктное множество $\Gamma \subset X_+$ полно, если $X = \Gamma^{\perp\perp}$. Для данного полного дизъюнктного семейства ненулевых положительных элементов из X, определим X_Γ по формуле

$$X_\Gamma := \left\{ x \in X : \ (\exists\, \nu : \mathbb{N} \to \Gamma)\ |x| = \bigvee_{n=1}^{\infty} \pi_{\nu(n)}|x| \right\},$$

где π_γ — порядковый проектор в X на полосу $X_\gamma := \{\gamma\}^{\perp\perp}$.

Ясно, что X_Γ — порядково плотный идеал в X ввиду включения $\Gamma \subset X_\Gamma$. Сформулируем теперь два результата о представлении.

Теорема 9. *Пусть X — порядково σ-полная векторная решетка и Γ — полное дизъюнктное подмножество X. Тогда существует пространство с векторной мерой $(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ такое, что интегральный оператор I^o_μ является решеточным изоморфизмом из $L^1_o(\mu)$ на X_Γ. Если X порядково полна, то мера μ локализуема и наименьшее расширение $\hat{I}^o_\mu$ оператора I^o_μ относительно $L^0(\mu)$ есть решеточный изоморфизм из $L^1_{ow}(\mu)$ на X.*

Теорема 10. *Пусть X — порядково полная квазибанахова решетка. Тогда существует пространство $(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ с локализуемой мерой $\mu : \mathscr{R} \to X_+$ такое, что наименьшее расширение $\hat{I}^o_\mu$ интегрального оператора I^o_μ устанавливает изометричный решеточный изоморфизм из $L^1_{ow}(\Omega, \mathscr{R}^{loc}, \mu)$ на X. Более того, для каждого полного дизъюнктного множества $\Gamma \subset X_+$ меру μ можно выбрать так, что I^o_μ отображает $L^1_o(\Omega, \mathscr{R}^{loc}, \mu)$ на X_Γ.*

Согласно замечаниям 6 и 7, теории порядкового и топологического интегралов относительно векторной меры совпадают, когда мера принимает свои значения в порядково непрерывной квазибанаховой решетке. Ниже рассмотрим частный случай меры со значениями в порядково непрерывной части квазибанаховой решетки.

Определение 24. *Порядково непрерывной частью* X_{an} квазибанаховой решетки X называется наибольший порядково непрерывный идеал в X или, более точно, совокупность всех $x \in X$ таких, что для данной сети (x_α) в X из соотношения $|x| \geqslant x_\alpha \downarrow 0$ следует $\|x_\alpha\| \downarrow 0$. Порядково σ-непрерывная часть X_a квазибанаховой решетки X определяется аналогично, как наибольший порядково σ-непрерывный идеал в X, т. е. используя последовательности вместо сетей.

В следующем предложении собраны свойства порядково непрерывной части.

Предложение 4. *Для квазибанаховой решетки X верны утверждения:*

(1) *X_a замкнутая подрешетка X и, в частности, X_a — квазибанахова решетка;*

(2) *$X_{an} \subset X_a$, а если X порядково σ-полна, то $X_a = X_{an}$;*

(3) *если X порядково σ-полна, то для τ-измеримого пространства $(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ с X_+-значной мерой справедливы равенства*

$$[L^1_o(\Omega, \mathscr{R}^{loc}, \mu)]_a = [L^1_o(\Omega, \mathscr{R}^{loc}, \mu)]_{an} = L^1_\tau(\Omega, \mathscr{R}^{loc}, \mu).$$

Теорема 11. *Пусть X — порядково полная квазибанахова решетка, порядково непрерывная часть которой X_a порядково плотна в X. Тогда существует τ-измеримое пространство $(\Omega, \mathscr{R}, \mu)$ с локализуемой мерой $\mu : \mathscr{R} \to X_a$ такое, что интегральный оператор I^τ_μ является изометрическим решеточным изоморфизмом из $L^1_\tau(\mu)$ на X_a, а его наименьшее расширение $\hat{I}^\tau_\mu$ — изометрическим решеточным изоморфизмом из $L^1_{\tau w}(\mu)$ на X. Более того, $L^1_\tau(\mu) = L^1_o(\mu)$ и $L^1_{\tau w}(\mu) = L^1_{ow}(\mu)$, а также $I^\tau_\mu = I^o_\mu$ и $\hat{I}^\tau_\mu = \hat{I}^o_\mu$.*

Замечание 11. История теоремы 11 начинается с результата, полученного в работе Курбера [15, теорема 8]: *всякая порядково непрерывная банахова решетка со слабой порядковой единицей изометрично и решеточно изоморфна $L^1(\mu)$ для некоторой векторной меры μ, определенной на σ-алгебре.* Этот же автор в своей диссертации [14, с. 22–23] сформулировал утверждение о том, что упомянутый результат верен и для банаховой решетки без слабой порядковой единицы, но для этого необходимо распространить теорию интегрирования на векторные меры, определенных на δ-кольцах. В [14] доказательство лишь намечено; детальное обоснование приведено в работе Дельгадо и Хуана [21, теорема 5]. Обобщение в другом направлении получили Курбера и Риккер [16, теорема 2.5]: *банахова решетка с σ-свойством Фату и со слабой порядковой единицей, принадлежащей ее порядково σ-непрерывной части, представима в виде банаховой решетки $L^1_w(\mu)$ слабо интегрируемых функций по векторной мере μ, определенной на σ-алгебре.* Как установлено в работе Дельгадо и Хуана [21, теорема 10], этот результат также остается в силе, если опустить предположение о наличии слабой порядковой единицы, причем вновь приходится привлекать векторные меры определенные на δ-кольцах, см. также Дельгадо [19] и Калабуг, Дельгадо, Хуан и Санчес Перес [12]. Следующий принципиальных шаг сделали Санечес Перес и Традасете [45, теорема 4.3], распространив результат Курбера [15, теорема 8] на квазибанаховы решетки со слабой порядковой единицей. Теорема 11 завершает эту цепочку обобщений, см. [34, теорема 6.7].

Замечание 12. Теорема 11 является новым результатом даже в контексте банаховых решеток. Можно показать, что $L^1_\tau(\mu)$ совпадает с пространством $L^1(\mu)$ всех интегрируемых функций, в то время как $L^1_{\tau w}(\mu)$ содержится в пространстве $L^1_w(\mu)$ всех слабо интегрируемых функций. Если банахова решетка обладает свойствами Фату и Леви[3],

[3] Свойство Фату (σ-свойство Фату) в работах Калабуга, Дельгадо, Хуана, и Санчеса Переса (см. [12]

то $L^1_{\tau w}(\mu) = L^1_w(\mu)$ и из теоремы 11 получаем результат Калабуга, Дельгадо, Хуан и Санчеса Переса [12, § 6], а также Дельгадо и Хуана [21, теоремы 5 и 9].

Литература

1. *Абрамович Ю. А.* О максимальном нормированном расширении полуупорядоченных нормированных пространств // Изв. вузов. Математика.—1970.—Т. 3.—С. 7–17.
2. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы. Общая теория.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962.—xiv+858 с.
3. *Канторович Л. В.* Линейные операторы в полуупорядоченных пространствах // Мат. сб.—1940.—Т. 7, № 49.—С. 209–284.
4. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах—М.–Л.: Гостехиздат, 1950.
5. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
6. *Кусраев А. Г.* Булевозначный принцип переноса для инъективных банаховых решеток // Сиб. мат. журн.—2015.—Т. 56, № 5.—С. 1111–1129. DOI: 10.17377/smsh.2015.56.511.
7. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматгиз, 1961.—408 с.
8. *Пич А.* Операторные идеалы.—М.: Мир, 1982.—536 с.
9. *Abramovich Y. A., Aliprantis C. D.* Positive operators // Handbook of the Geometry of Banach Spaces.—Amsterdam: Elsevier Sci., 2001.—Vol. 1.—P. 85–122.
10. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—London etc.: Acad. Press Inc., 1985.—xvi+367 p.
11. *Bartle R. G., Dunford N., and Schwartz J.* Weak compactness and vector measures // Canad. J. Math.—1955.—Vol. 7.—P. 289–305.
12. *Calabuig J. M., Delgado O., Juan M. A., and Sánchez Pérez E. A.* On the Banach lattice structure of L^1_w of a vector measure on a δ-ring // Collect. Math.—2014.—Vol. 65.—P. 67–85.
13. *Cuartero B., Triana M. A.* (p, q)-Convexity in quasi-Banach lattices and applications // Stud. Math.—1986.—Vol. 84, № 2.—P. 113–124.
14. *Curbera G. P.* El espacio de funciones integrables respecto de una medida vectorial: Ph. D. Thesis.—Sevilla: Univ. of Sevilla, 1992.
15. *Curbera G. P.* Operators into L^1 of a vector measure and applications to Banach lattices // Math. Ann.—1992.—Vol. 293.—P. 317–330.
16. *Curbera G. P., Ricker W. J.* Banach lattices with the Fatou property and optimal domains of kernel operators // Indag. Math. (N. S.).—2006.—Vol. 17.—P. 187–204.
17. *Curbera G. P., Ricker W. J.* Vector measures, integration, applications // Positivity (Trends Math.).—Basel: Birkhäuser, 2007.—P. 127–160.
18. *Curbera G. P., Ricker W. J.* The Fatou property in p-convex Banach lattices // J. Math. Anal. Appl.—2007.—Vol. 328.—P. 287–294. DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.04.086.
19. *Delgado O.* L^1-spaces of vector measures defined on δ-rings // Arch. Math.—2005.—Vol. 84.—P. 432–443. DOI: 10.1007/s00013-005-1128-1.
20. *Delgado O.* Optimal extensions for positive order continuous operators on Banach function spaces // Glasgow Math. J.—2014.—Vol. 56.—P. 481–501. DOI: 10.1017/S0017089513000384.
21. *Delgado O., Juan M. A.* Representation of Banach lattices as L^1_w spaces of a vector measure defined on a δ-ring // Bull. Belg. Math. Soc.—2012.—Vol. 19, № 2.—P. 239–256.
22. *Delgado O., Sánchez Pérez E. A.* Strong extensions for q-summing operators acting in p-convex Banach function spaces for $1 \leqslant p \leqslant q$ // Positivity.—2016.—Vol. 20.—P. 999–1014. DOI: 10.1007/s11117-016-0397-1.
23. *Delgado O., Sánchez Pérez E. A.* Optimal extensions for pth power factorable operators // Mediterranean J. of Math.—2016.—Vol. 13.—P. 4281–4303. DOI: 10.1007/s00009-016-0745-1.
24. *Fremlin D. H.* Topological Riesz Spaces and Measure Theory.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1974.—xiv+266 p.
25. *Fremlin D. H.* Measure Theory. Vol. 2. Broad Foundation.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.—672 p.
26. *Haydon R.* Injective Banach lattices // Math. Z.—1974.—Vol. 156.—P. 19–47.
27. *Juan A. M., Sánchez Pérez E. A.* Maurey–Rosenthal domination for abstract Banach lattices // J. Ineq. and Appl.—2013.—Vol. 213, № 213.—P. 1–12.

и др.) понимается как конъюнкция свойств Фату и Леви (σ-свойств Фату и Леви) из определений 6 и 7. Здесь мы следуем Фремлину [24, определения 23A и 23I], см. также Абрамович и Алипрантис [9, определение 7].

28. *Godefroy G.* A glimpse at Nigel Kalton's work // Banach Spaces and their applications in Analysis.—Berlin: W. de Gruyter, 2007.—P. 1–35.
29. *Kalton N. J.* Convexity conditions for non-locally convex lattices // Glasgow Math. J.—1984.—Vol. 25.—P. 141–152.
30. *Kalton N. J.* Isomorphisms between spaces of vector-valued continuous functions // Proc. Edinburgh Math. Soc.—1983.—Vol. 26.—P. 29–48.
31. *Kalton N. J.* Quasi-Banach Spaces / Eds. W. B. Johnson and J. Lindenstrauss.—Amsterdam: Elsevier, 2003.—P. 1099–1130.—(Handbook of the Geometry of Banach Spaces. Vol. 2.).
32. *Kluvanek I., Knowles G.* Vector Measures and Control Systems.—North-Holland: Amsterdam, 1976.—191 p.
33. *Kusraev A. G., Tasoev B. B.* Kantorovich–Wright integration and representation of vector lattices // J. Math. Anal. Appl.—2017.—Vol. 455.—P. 554–568. DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.05.059.
34. *Kusraev A. G., Tasoev B. B.* Kantorovich–Wright integration and representation of quasi-Banach lattices // J. Math. Anal. Appl.—2018.—Vol. 462, № 1.—(В печати). DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.02.027.
35. *Kusraev A. G., Tasoev B. B.* Maximal quasi-normed extension of quasi-normed lattices // Владикавк. мат. журн.—2017.—Т. 19, № 3.—С. 41–50. DOI: 10.23671/VNC.2017.3.7111.
36. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. Vol. 2. Function Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—243 p.
37. *Lewis D. R.* Integration with respect to vector measures // Pacific J. Math.—1970.—Vol. 33.—P. 157–165.
38. *Lewis D. R.* On integration and summability in vector spaces // Illinois J. Math.—1972.—Vol. 16.—P. 294–307.
39. *Maligranda L.* Type, cotype and convexity properties of quasi-Banach spaces // Proc. of the International Symposium on Banach and Function Spaces (Oct. 2–4, 2003, Kitakyushu–Japan).—Yokohama: Yokohama Publ., 2004.—P. 83–120.
40. *Masani P. R., Niemi H.* The integration theory of Banach space valued measures and the Tonelli–Fubini theorems. I. Scalar-valued measures on δ-rings // Adv. Math.—1989.—Vol. 73.—P. 204–241.
41. *Masani P. R., Niemi H.* The integration theory of Banach space valued measures and the Tonelli–Fubini theorems. II. Pettis integration // Adv. Math.—1989.—Vol. 75.—P. 121–167.
42. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer, 1991.—xvi+395 p.
43. *Okada S., Ricker W. J., and Sánchez Pérez E. A.* Optimal domain and integral extension of operators acting in function spaces (Oper. Theory Adv. Appl.) Vol. 180.—Basel: Birkhäuser, 2008.
44. *Rolewicz S.* Metric Linear Spaces.—Warszaw: PWN-Polish Sci. Publ., 1972.—287 p.—(Math. Monogr. Vol. 56.).
45. *Sánchez Pérez E. A. and Tradacete P.* Bartle–Dunford–Schwartz integration for positive vector measures and representation of quasi-Banach lattices // J. Nonlin. and Conv. Anal.—2016.—Vol. 17, № 2.—P. 387–402.
46. *Thomas E. G. F.* Vector Integration // Quast. Math.—2012.—Vol. 35.—P. 391–416. DOI: 10.2989/16073606.2012.742230.
47. *Turpin Ph.* Intégration par rapport à une mesure à valeurs dans un espace vectoriel topologique non supposé localement convexe // Intégration vectorielle et multivoque (Colloq., Univ. Caen, Caen, 1975), Exp. № 8, Dép. Math., U. E. R. Sci.—Caen: Univ. Caen, 1975.
48. *Turpin Ph.* Convexités dans les Espaces Vectoriels Topologiques Généraux: Diss. Math.—Vol. 131.—1976.
49. *Wright J. D. M.* Stone-algebra-valued measures and integrals // Proc. London Math. Soc.—1969.—Vol. 19, № 3.—P. 107–122.
50. *Wright J. D. M.* A Radon–Nikodým theorem for Stone algebra valued measures // Trans. Amer. Math. Soc.—1969.—Vol. 139.—P. 75–94.
51. *Szulga J.* (p, r)-convex functions on vector lattices // Proc. Edinburg Math. Soc.—1994.—Vol. 37, № 2.—P. 207–226.

Статья поступила 11 декабря 2017 г.

Кусраев Анатолий Георгиевич
Владикавказский научный центр РАН, *директор*
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
Северо-Осетинский государственный университет,
заведующий кафедрой математического анализа
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
E-mail: `kusraev@smath.ru`

Тасоев Батрадз Ботазович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
научный сотрудник отдела функционального анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `tasoevbatradz@yandex.ru`

INTEGRATION FOR POSITIVE MEASURES WITH VALUES IN QUASI-BANACH LATTICES

Kusraev A. G., Tasoev B. B.

The paper aims to overview some new ideas and recent results in the theory of integration of scalar functions with respect to a vector measure, as well as general theorems on the functional representation of quasi-Banach lattices. We outline a purely order-based Kantorovich–Wright type integral of scalar functions with respect to a vector measure defined on a δ-ring and taking values in a Dedekind σ-complete vector lattice. The parallel Bartle–Dunford–Schwartz type integration with respect to a measure defined on a δ-ring with values in a quasi-Banach lattice is also presented. In the context of Banach lattices a crucial role is played by the spaces of integrable and weakly integrable functions with respect to a vector measure. Dealing with the functional representation of quasi-Banach lattices a duality based approach does not work but there are two natural candidates for a space of weakly integrable functions: maximal quasi-Banach extension and the domain of the smallest extension of the integration operator. Using this idea, one can construct new spaces of weakly integrable functions that play an essential role in the problem of the functional representation of quasi-Banach lattices. In particular, it is shown that, in studying quasi-Banach lattices, when the duality method is inapplicable, the Kantorovich–Wright integral turns out to be more flexible than t more flexible than the Bartle–Dunford–Schwartz integral.

Key words: quasi-Banach lattice, positive vector measure, Kantorovich–Wright integration, Bartle–Dunford–Schwartz integration, integration operator, space of integrable functions, space of weakly integrable functions.

References

1. *Abramovich Ju. A.* On maximal quasi-normed extension of partially ordered normed spaces. *Vestnik leningradskogo universiteta* [*Vestnik of Leningrad State University*], 1970, no. 1, pp. 7–17 (in Russian).
2. *Dunford N., Schwartz J. T. Linear Operators. Part* 1. *General Theory*, New Jersey, John Wiley and Sons Inc., 1988, 858 p.
3. *Kantorovich L. V.* Linear operators in semi-ordered spaces, *Sbornik: Mathematics*, 1940, vol. 7, no. 2, pp. 209–284.
4. *Kantorovich L. V., Vulikh B. Z., Pinsker A. G. Functional Analysis in Semi-Ordered Spaces*, Moskow, Gostehizdat, 1950, 550 p. (in Russian).
5. *Kusraev A. G. Dominated Operators.* N. Y., Springer-Science+Business Media, 2000, 451 p. DOI: 10.1007/978-94-015-9349-6.
6. *Kusraev A. G.* The boolean transfer principle for injective Banach lattices, *Siberian Mathematical Journal*, 2015, vol. 56, no. 5, pp. 888–900. DOI: 10.1134/S0037446615050110.
7. *Vulikh B. Z. Introduction to the Theory of Partially Ordered Spaces.* Noordhoff, 1967, 388 p.
8. *Pietsch A. Operator Ideals*, Amsterdam, North-Holland Publ. Comp., 1980, 451 p.
9. *Abramovich Y. A., Aliprantis C. D. Positive Operators. Handbook of the Geometry of Banach Spaces.* Amsterdam, Elsevier Science, 2001, vol. 1, pp. 85–122.
10. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators.* London etc., Acad. Press Inc., 1985, xvi+367 p.
11. *Bartle R. G., Dunford N., Schwartz J.* Weak compactness and vector measures, *Canad. J. Math.*, 1955, vol. 7, pp. 289–305.
12. *Calabuig J. M., Delgado O., Juan M. A., and Sánchez Pérez E. A.* On the Banach lattice structure of L^1_w of a vector measure on a δ-ring, *Collect. Math.*, 2014, vol. 65, pp. 67–85. DOI: 10.1007/s13348-013-0081-8.

13. *Cuartero B., Triana M. A.* (p, q)-Convexity in quasi-Banach lattices and applications, *Stud. Math.*, 1986, vol. 84, no. 2, pp. 113–124.
14. *Curbera G. P. El espacio de funciones integrables respecto de una medida vectorial: Ph. D. Thesis*, Sevilla, Univ. of Sevilla, 1992.
15. *Curbera G. P.* Operators into L^1 of a vector measure and applications to Banach lattices, *Math. Ann.*, 1992, vol. 293, pp. 317–330.
16. *Curbera G. P., Ricker W. J.* Banach lattices with the Fatou property and optimal domains of kernel operators, *Indag. Math.* (N. S.), 2006, vol. 17, pp. 187–204.
17. *Curbera G. P., Ricker W. J.* Vector measures, integration, applications, *Positivity* (*Trends Math.*), Basel, Birkhäuser, 2007, pp. 127–160.
18. *Curbera G. P., Ricker W. J.* The Fatou property in p-convex Banach lattices, *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, vol. 328, pp. 287–294. DOI: 10.1016/j.jmaa.2006.04.086
19. *Delgado O.* L^1-spaces of vector measures defined on δ-rings, *Arch. Math.*, 2005, vol. 84, pp. 432–443. DOI: 10.1007/s00013-005-1128-1.
20. *Delgado O.* Optimal extensions for positive order continuous operators on Banach function spaces, *Glasgow Math. J.*, 2014, vol. 56, pp. 481–501. DOI:10.1017/S0017089513000384.
21. *Delgado O., Juan M. A.* Representation of Banach lattices as L^1_w spaces of a vector measure defined on a δ-ring, *Bull. Belg. Math. Soc.*, 2012, vol. 19, no. 2, pp. 239–256.
22. *Delgado O., Sánchez Pérez E. A.* Strong extensions for q-summing operators acting in p-convex Banach function spaces for $1 \leqslant p \leqslant q$, *Positivity*, 2016, vol. 20, pp. 999–1014. DOI: 10.1007/s11117-016-0397-1.
23. *Delgado O., Sánchez Pérez E. A.* Optimal extensions for pth power factorable operators, *Mediterranean J. of Math.*, 2016, vol. 13, pp. 4281–4303. DOI: 10.1007/s00009-016-0745-1.
24. *Fremlin D. H. Topological Riesz Spaces and Measure Theory.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1974, xiv+266 p.
25. *Fremlin D. H. Measure Theory. Vol. 2. Broad Foundation.* Cambridge, Cambridge Univ. Press, 2001, 672 p.
26. *Haydon R.* Injective Banach lattices, *Math. Z.*, 1974., vol. 156, pp. 19–47.
27. *Juan A. M., Sánchez Pérez E. A.* Maurey–Rosenthal domination for abstract Banach lattices, *J. Ineq. and Appl.*, 2013, vol. 213, no. 213, pp. 1–12.
28. *Godefroy G.* A glimpse at Nigel Kalton's work, *Banach Spaces and Their Applications in Analysis*, Berlin, W. de Gruyter, 2007, pp. 1–35.
29. *Kalton N. J.* Convexity conditions for non-locally convex lattices, *Glasgow Math. J.*, 1984, vol. 25, pp. 141–152.
30. *Kalton N. J.* Isomorphisms between spaces of vector-valued continuous functions, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 1983, vol. 26, pp. 29–48.
31. *Kalton N. J. Quasi-Banach Spaces* / Eds. W. B. Johnson and J. Lindenstrauss. Amsterdam, Elsevier, 2003, pp. 1099–1130. (Handbook of the Geometry of Banach Spaces, vol. 2.).
32. *Kluvanek I., Knowles G. Vector Measures and Control Systems.* North-Holland, Amsterdam, 1976, 191 p.
33. *Kusraev A. G., Tasoev B. B.* Kantorovich–Wright integration and representation of vector lattices, *J. Math. Anal. Appl.*, 2017, vol. 455, pp. 554–568. DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.05.059.
34. *Kusraev A. G., Tasoev B. B.* Kantorovich–Wright integration and representation of quasi-Banach lattices, *J. Math. Anal. Appl.*, 2018, vol. 462, no. 1 (in print). DOI: 10.1016/j.jmaa.2018.02.027.
35. *Kusraev A. G., Tasoev B. B.* Maximal quasi-normed extension of quasi-normed lattices, *Vladikavkazskii matematicheskii zhurnal* [*Vladikavkaz Math. J.*], vol. 19, no. 1, pp. 41–50. DOI: 10.23671/VNC.2017.3.7111.
36. *Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces. Vol. 2. Function Spaces.* Berlin etc., Springer-Verlag, 1979, 243 p.
37. *Lewis D. R.* Integration with respect to vector measures, *Pacific J. Math.*, 1970, vol. 33, pp. 157–165.
38. *Lewis D. R.* On integration and summability in vector spaces, *Illinois J. Math.*, 1972, vol. 16, pp. 294–307.
39. *Maligranda L.* Type, cotype and convexity properties of quasi-Banach spaces, *Proc. of the International Symposium on Banach and Function Spaces* (Oct. 2–4, 2003, Kitakyushu–Japan), Yokohama, Yokohama Publ., 2004, pp. 83–120.
40. *Masani P. R., Niemi H.* The integration theory of Banach space valued measures and the Tonelli–Fubini theorems. I. Scalar-valued measures on δ-rings, *Adv. Math.*, 1989, vol. 73, pp. 204–241.
41. *Masani P. R., Niemi H.* The integration theory of Banach space valued measures and the Tonelli–Fubini theorems. II. Pettis integration, *Adv. Math.*, 1989, vol. 75, pp. 121–167.
42. *Meyer-Nieberg P. Banach Lattices.* Berlin etc., Springer, 1991, xvi+395 p.

43. *Okada S., Ricker W. J., and Sánchez Pérez E. A. Optimal domain and integral extension of operators acting in function spaces* (*Oper. Theory Adv. Appl.*), vol. 180, Basel: Birkhäuser, 2008.
44. *Rolewicz S. Metric Linear Spaces*, Warszaw, PWN-Polish Sci. Publ., 1972, 287 p. (Math. Monogr. Vol. 56).
45. *Sánchez Pérez E. A. and Tradacete P.* Bartle–Dunford–Schwartz integration for positive vector measures and representation of quasi-Banach lattices, *J. Nonlin. and Conv. Anal.*, 2016, vol. 17, no. 2, pp. 387–402.
46. *Thomas E. G. F.* Vector integration, *Quast. Math.*, 2012, vol. 35, pp. 391–416. DOI: 10.2989/16073606.2012.742230.
47. *Turpin Ph.* Intégration par rapport à une mesure à valeurs dans un espace vectoriel topologique non supposé localement convexe, *Intégration vectorielle et multivoque* (Colloq., Univ. Caen, Caen, 1975), Exp. no. 8, Dép. Math., U. E. R. Sci., Caen, Univ. Caen, 1975.
48. *Turpin Ph. Convexités dans les Espaces Vectoriels Topologiques Généraux*: Diss. Math., vol. 131, 1976.
49. *Wright J. D. M.* Stone-algebra-valued measures and integrals, *Proc. London Math. Soc.*, 1969, vol. 19, no. 3, pp. 107–122.
50. *Wright J. D. M.* A Radon–Nikodým theorem for Stone algebra valued measures, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1969, vol. 139, pp. 75–94.
51. *Szulga J.* (p, r)-convex functions on vector lattices, *Proc. Edinburg Math. Soc.*, 1994, vol. 37, no. 2, pp. 207–226.

Received 11 December, 2017

Kusraev Anatoly Georgievich
Vladikavkaz Science Center of the RAS, *Chairman*
22 Markus Street, Vladikavkaz, 362027, Russia;
North Ossetian State University,
Head of the Department of Mathematical Analysis
44–46 Vatutin Street, Vladikavkaz, 362025, Russia
E-mail: `kusraev@smath.ru`

Tasoev Batradz Botazovich
Southern Mathematical Institute — the Affiliate
of Vladikavkaz Science Center of the RAS, *Researcher*
22 Markus street, Vladikavkaz, 362027, Russia
E-mail: `tasoevbatradz@yandex.ru`