Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 1, С. 86–97

УДК **517.5**

СРЕДНЕКВАДРАТИЧНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ РЯДАМИ ФУРЬЕ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

М. Ш. Шабозов, М. С. Саидусайнов

В работе рассматривается задача среднеквадратичного приближения функций комплексного переменного, регулярных в некоторой односвязной области, $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$ рядами Фурье по ортогональным системам при наличии неотрицательной интегрируемой в $\mathscr{D}$ весовой функции $\gamma := \gamma(|z|)$, т. е. когда $f \in L_{2,\gamma} := L_2(\gamma(|z|), D)$.
Ранее В. А. Абилов, Ф. В. Абилова и М. К. Керимов в $L_{2,\gamma}$ исследовали вопросы отыскания точных оценок скорости сходимости рядов Фурье функций $f \in L_{2,\gamma}$ и доказали некоторые точные неравенства типа Джексона, вычислили значение колмогоровского n-поперечника некоторых классов функций [9]. При этом широко использовали специальный вид оператора обобщенного сдвига, благодаря которому ввели обобщенный модуль непрерывности m-го порядка и на его основе — классы функций, определяемые заданной монотонно возрастающей на $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ мажорантой.
В настоящей работе продолжается исследование указанных авторов, а именно, доказывается точное неравенство Джексона — Стечкина между величиной наилучшего приближения комплексными алгебраическими полиномами функций $f \in L_{2,\gamma}$ и L_p-нормой обобщенного модуля непрерывности. Изучаются аппроксимативные свойства классов функций, у которых L_p-норма обобщенного модуля непрерывности имеет заданную мажоранту.
При некоторых условиях на мажоранте для введенных классов функций в $L_{2,\gamma}$ вычисляются бернштейновский, гельфандовский, колмогоровский, линейный и проекционный n-поперечники. Доказывается, что все поперечники совпадают и оптимальными подпространствами являются подпространства алгебраических комплексных полиномов.

DOI: 10.23671/VNC.2018.1.11400.

Ключевые слова: весовое пространство Бергмана, обобщенный модуль непрерывности, оператор обобщенного сдвига, n-поперечники.

1. В работе рассматривается среднеквадратичное приближение функций рядами Фурье по ортогональным системам в области комплексного переменного при наличии веса. В области $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$ задана неотрицательная измеримая, не эквивалентная нулю функция $\gamma(|z|)$ такая, что существует конечный интеграл

$$\iint\limits_{\mathscr{D}} \gamma(|z|)\, d\sigma > 0,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега, а $d\sigma$ — элемент площади. Функцию $\gamma = \gamma(|z|)$, удовлетворяющую этим условиям назовем весовой функцией.

Будем рассматривать вопросы среднеквадратичных приближений суммами Фурье комплексных функций f, регулярных в односвязной области $\mathscr{D}$, принадлежащих пространству $L_{2,\gamma} := L_2(\gamma(|z|), \mathscr{D})$ с конечной нормой

$$\|f\|_{2,\gamma} := \|f\|_{L_{2,\gamma}} = \left(\iint\limits_{\mathscr{D}} \gamma(|z|)|f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty,$$

где $\gamma(|z|)$ — весовая в области $\mathscr{D}$ функция. В случае, когда область $\mathscr{D}$ есть круг $|z| \leqslant R$ $(0 < R < \infty)$ пространство $L_{2,\gamma}$ — весовое пространство Бергмана $B_{2,\gamma}$, введенное в работах [1, 2]. Экстремальные задачи аппроксимации аналитических функций и задачи вычисления значений различных n-поперечников в пространстве $B_{2,\gamma}$ рассмотрены во многих работах (см., например, [3–7] и приведенные в них библиографии).

Пусть $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ — полная ортонормированная по области $\mathscr{D}$ система комплексных функций в пространстве $L_{2,\gamma}$:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\varphi_k(z), \quad c_k(f) = \iint\limits_{(\mathscr{D})} \gamma(|z|) f(z)\overline{\varphi_k(z)}\, dz \tag{1}$$

— суть ряды Фурье функции $f \in L_{2,\gamma}$ по этой системе,

$$S_n(f; z) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f)\varphi_k(z)$$

— его частичные суммы порядка n. Пусть $\mathscr{P}_n$ — подпространство обобщенных комплексных полиномов вида

$$p_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} d_k \varphi_k(z),$$

где $d_k \in \mathbb{C}$. Тогда, как хорошо известно (см., например, [8], с. 263):

$$E_{n-1}(f) = \inf\left\{\|f - p_n\|_{2,\gamma}^2 : p_n(z) \in \mathscr{P}_n\right\} = \|f - S_n(f)\|_{2,\gamma}^2 = \sum_{k=n}^{\infty} |c_k(f)|^2, \tag{2}$$

где $c_k(f)$ — коэффициенты Фурье функции f, определенные в (1).

Рассмотрим теперь функцию

$$T(\xi, \eta; h) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi)\overline{\varphi_k(\eta)} h^k, \tag{3}$$

где $h \in (0, 1), (\xi, \eta) \in \mathscr{D} \times \mathscr{D}$, причем равенство в (3) понимается в смысле сходимости в пространстве $L_2(\mathscr{D} \times \mathscr{D}; \gamma(|\xi|)\gamma(|\eta|))$.

Сразу отметим, что в ряде частных случаев можно указать явные выражения для функции $T(\xi, \eta; h)$. Так, например, если $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$, $\gamma(|z|) = 1$, то система функций $\varphi_k(z) = \sqrt{(k+1)/\pi} z^k$, $k = 0, 1, \ldots$, является ортонормированной (см., например, [8, с. 208]). В этом случае имеем (см., например, [9])

$$T(\xi, \eta; h) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\xi)\overline{\varphi_k(\eta)} h^k = \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(\xi\bar{\eta}h)^k = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{(1 - \xi\bar{\eta}h)^2}.$$

В пространстве $L_{2,\gamma}$ рассмотрим оператор F_h:

$$F_h f(z) = \iint\limits_{\mathscr{D}} \gamma(|\zeta|) f(\zeta) T(z,\zeta;1-h)\, d\zeta, \tag{4}$$

который будем называть *оператором обобщенного сдвига*. Оператор F_h обладает следующими свойствами:
1) $F_h(f_1+f_2) = F_h(f_1) + F_h(f_2)$ $(\forall\, f_1, f_2 \in L_{2,\gamma})$;
2) $F_h(\lambda f) = \lambda F_h(f)$ $(\forall\, \lambda \in \mathbb{C})$ $(\forall\, f \in L_{2,\gamma})$;
3) $\|F_h(f)\| \leqslant \|f\|$ $(\forall\, f \in L_{2,\gamma})$;
4) $F_h \varphi_k(z) = (1-h)^n \varphi_k(z)$;
5) $\|F_h(f) - f\| \to 0,\ h \to 0+$.

При помощи оператора обобщенного сдвига F_h для произвольной функции $f \in L_{2,\gamma}$, определим конечные разности первого и высших порядков равенствами

$$\Delta_h^1 f(z) = f(z) - F_h f(z) = (\mathbb{I} - F_h) f(z),$$

$$\Delta_h^m f(z) = \Delta_h^1(\Delta_h^{m-1} f(z)) = (\mathbb{I} - F_h)^m f(z) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m}{k} F_h^{(k)} f(z),$$

где $F_h^0 f(z) = \mathbb{I} f(z) = f(z)$, $F_h^{(k)} f(z) = F_h(F_h^{(k-1)} f(z))$, $k = 1, \ldots, m$, $m \in \mathbb{N}$, $\mathbb{I}$ — единичный оператор в пространстве $L_{2,\gamma}$. Величину

$$\Omega_m(f;t)_{2,\gamma} = \sup\left\{\|\Delta_h^m f(z)\|_{2,\gamma} : \ 0 < h \leqslant t\right\} \tag{5}$$

будем называть *обобщенным модулем непрерывности m-го порядка* функции $f \in L_{2,\gamma}$.

Лемма 1. *Для произвольной функции $f \in L_{2,\gamma}$ справедливо равенство*

$$\Omega_m^2(f;t)_{2,\gamma} = \sum_{k=0}^{\infty} (1-(1-t)^k)^{2m} |c_k(f)|^2. \tag{6}$$

$\lhd$ Прежде всего, заметим, что оператор (4) с учетом (3) представим в виде

$$F_h f(z) = \iint\limits_{\mathscr{D}} \gamma(|\zeta|) f(\zeta) T(z,\zeta;1-h)\, d\zeta = \iint\limits_{\mathscr{D}} \gamma(|\zeta|) f(\zeta) \left\{\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(z)\varphi_k(\zeta)(1-h)^k\right\} d\zeta$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\iint\limits_{\mathscr{D}} \gamma(|\zeta|) f(\zeta) \varphi_k(\zeta)\, d\zeta\right) \varphi_k(z)(1-h)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\varphi_k(z)(1-h)^k,$$

используя который последовательно находим

$$\Delta_h f(z) := f(z) - F_h f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\varphi_k(z)\big(1-(1-h)^k\big).$$

Далее, последовательно применяя полученную формулу, при любом $m \in \mathbb{N}$ и $h \in (0,1)$ имеем:

$$\Delta_h^m f(z) = \Delta\big(\Delta_h^{m-1} f(z)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f)\varphi_k(z)\big(1-(1-h)^k\big)^m. \tag{7}$$

Применяя равенство Парсеваля к соотношению (7), и в силу того, что система функций $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$ в области $\mathscr{D}\subset\mathbb{C}$ является ортонормированной, запишем

$$\left\|\Delta_h^m f\right\|_{2,\gamma}^2=\sum_{k=0}^{\infty}\Big[1-(1-h)^k\Big]^{2m}\left|c_k(f)\right|^2,\ h\in(0,1),$$

откуда в силу (5) получаем (6). $\rhd$

В работе [9] доказано, что для произвольной функции $f\in L_{2,\gamma}$ при любом $t\in(0,1)$ справедлива оценка

$$E_{n-1}(f)_{2,\gamma}\leqslant\big[1-(1-t)^n\big]^{-m}\Omega_m(f;t)_{2,\gamma},\quad m,n\in\mathbb{N},\tag{8}$$

причем при каждом фиксированном n константа в правой части неравенства (8) не может быть уменьшена. В самом деле, с одной стороны, для произвольной функции $f\in L_{2,\gamma}$ имеем

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}}\frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\Omega_m(f;t)_{2,\gamma}}\leqslant\big[1-(1-t)^n\big]^{-m}.\tag{9}$$

С другой стороны, как следует из равенства (2) для функции $f_0(z)=\varphi_n(z)$, где $\varphi_n(z)$ — n-ый член ортогональной системы $\{\varphi_k(z)\}_{k=0}^{\infty}$, имеем $E_{n-1}(f_0)_{2,\gamma}=|c_n(f_0)|=1$. Для этой же функции из равенства (6) вытекает, что

$$\Omega_m(f_0;t)_{2,\gamma}=\big[1-(1-t)^n\big]^m.$$

Имеем

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}}\frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\Omega_m(f;t)_{2,\gamma}}\geqslant\frac{E_{n-1}(f_0)_{2,\gamma}}{\Omega_m(f_0;t)_{2,\gamma}}=\big[1-(1-t)^n\big]^{-m}.\tag{10}$$

Таким образом, сопоставляя неравенства (9) и (10), получаем

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}}\frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\Omega_m(f;t)_{2,\gamma}}=\frac{1}{(1-(1-t)^n)^m},\quad 0<t<1.\tag{11}$$

Полагая в (11) $t=1/n$, имеем

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}}\frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\Omega_m(f;1/n)_{2,\gamma}}=\left(1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^{-m},$$

откуда сразу вытекает соотношение

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_{2,\gamma}}\frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\Omega_m(f;1/n)_{2,\gamma}}=\big(1-e^{-1}\big)^{-m}.$$

Всюду далее под весовой функцией на отрезке $[0,h]$ будем понимать неотрицательную измеримую и суммируемую на $[0,h]$ функцию $q(t)$, не эквивалентную нулевой.

Теорема 1. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $0<p\leqslant2$, $0<h<1$, q — весовая функция на интервале $(0,h)$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}}\frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(f,t)_{2,\gamma}q(t)\,dt\right)^{1/p}}=\frac{1}{\left(\int\limits_0^h(1-(1-t)^n)^{mp}q(t)\,dt\right)^{1/p}}.\tag{12}$$

$\lhd$ Воспользуемся следующим упрощенным вариантом неравенства Минковского [10, с. 104]:

$$\left(\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}|\tilde{f}_k(t)|^2\right)^{p/2}dt\right)^{1/p}\geqslant\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^h|\tilde{f}_k(t)|^p\,dt\right)^{2/p}\right)^{1/2}, \tag{13}$$

верного при всех $0<p\leqslant 2$ и $h\in\mathbb{R}_+$. Полагая в неравенстве (13) $\tilde{f}_k=f_kq^{1/p}$, получаем

$$\left(\int\limits_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}|f_k(t)|^2\right)^{p/2}q(t)\,dt\right)^{1/p}\geqslant\left(\sum_{k=n}^{\infty}\left(\int\limits_0^h|f_k(t)|^pq(t)\,dt\right)^{2/p}\right)^{1/2}. \tag{14}$$

Используя неравенство (14), равенства (6) и (2) и учитывая очевидное соотношение

$$\inf_{k\geqslant n}\int\limits_0^h\big(1-(1-t)^k\big)^{mp}q(t)\,dt=\int\limits_0^h\big(1-(1-t)^n\big)^{mp}q(t)\,dt,$$

получаем

$$\begin{aligned}\left\{\int\limits_0^h\Omega_m^p(f,t)_{2,\gamma}q(t)\,dt\right\}^{1/p}&=\left\{\int\limits_0^h\big(\Omega_m^2(f,t)_{2,\gamma}\big)^{p/2}q(t)\,dt\right\}^{1/p}\\ &\geqslant\left\{\int_0^h\left(\sum_{k=n}^{\infty}\Big(1-(1-t)^k\Big)^{2m}|c_k(f)|^2\right)^{p/2}q(t)dt\right\}^{1/p}\\ &\geqslant\left\{\sum_{k=n}^{\infty}|c_k(f)|^2\left(\int\limits_0^h\Big(1-(1-t)^k\Big)^{mp}q(t)\,dt\right)^{2/p}\right\}^{1/2}\\ &\geqslant\left(\int\limits_0^h(1-(1-t)^n)^{mp}q(t)\,dt\right)^{1/p}\left\{\sum_{k=n}^{\infty}|c_k(f)|^2\right\}^{1/2}\\ &=\left(\int\limits_0^h(1-(1-t)^n)^{mp}q(t)\,dt\right)^{1/p}E_{n-1}(f)_{2,\gamma}.\end{aligned} \tag{15}$$

Из (15) получаем оценку сверху величины, стоящей в левой части равенства (12):

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}}\frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h\Omega_m^p(f,t)_{2,\gamma}q(t)\,dt\right)^{1/p}}\leqslant\frac{1}{\left(\int\limits_0^h(1-(1-t)^n)^{mp}q(t)\,dt\right)^{1/p}}. \tag{16}$$

Для получения оценки снизу той же величины по-прежнему полагаем $f_0(z):=\varphi_n(z)\in L_{2,\gamma}$. Поскольку для этой функции

$$E_{n-1}(f_0)_{2,\gamma}=1,\quad \Omega_m(f_0,t)_{2,\gamma}=\big(1-(1-t)^n\big)^m,\quad 0<t<1,$$

то имеем

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_0,t)_{2,\gamma}q(t)\,dt = \int\limits_0^h \bigl(1-(1-t)^n\bigr)^{mp}q(t)\,dt.$$

Следовательно,

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f,t)_{2,\gamma}q(t)dt\right)^{1/p}} \geqslant \frac{E_{n-1}(f_0)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f_0,t)_{2,\gamma}q(t)\,dt\right)^{1/p}} = \frac{1}{\left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp}q(t)\,dt\right)^{1/p}}. \tag{17}$$

Из сопоставления оценки сверху (16) и оценки снизу (17) получаем требуемое равенство (12), чем и завершаем доказательство теоремы 1. $\rhd$

Из теоремы 1 вытекают следующие утверждения:

Следствие 1. *Пусть $m,n\in\mathbb{N}$, $p=1/m$, $h\in(0,1)$, q — весовая функция на интервале $(0,h)$. Тогда справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(f,t)_{2,\gamma}q(t)\,dt\right)^m} = \left(\int\limits_0^h [1-(1-t)^n]q(t)\,dt\right)^{-m}. \tag{18}$$

В частности, из (18) при $q(t)\equiv 1$ следует равенство

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left((n+1)\int\limits_0^h \Omega_m^{1/m}(f,t)_{2,\gamma}\,dt\right)^m} = \frac{1}{\bigl\{(n+1)h-1+(1-h)^{n+1}\bigr\}^m}. \tag{19}$$

Полагая в (19) $h=1/(n+1)$, получаем

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(f,t)_{2,\gamma}\,dt\right)^m} = \left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{-m(n+1)}, \tag{20}$$

из которого, в свою очередь, следует экстремальное равенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_{2,\gamma}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left((n+1)\int\limits_0^{1/(n+1)} \Omega_m^{1/m}(f,t)_{2,\gamma}\,dt\right)^m} = e^m.$$

Следствие 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Положим $q(t)=n(1-t)^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда при любом $h\in(0,1)$ справедливо равенство*

$$\sup_{f\in L_{2,\gamma}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(n\int\limits_0^h \Omega_m^p(f,t)_{2,\gamma}(1-t)^{n-1}\,dt\right)^{1/p}} = \left\{\frac{mp+1}{[1-(1-h)^n]^{mp+1}}\right\}^{1/p}. \tag{21}$$

Из (21), в частности, при $h = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, получаем

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_{2,\gamma}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(n\int\limits_0^{1/n}\Omega_m^p(f,t)_{2,\gamma}(1-t)^{n-1}\,dt\right)^{1/p}} = \frac{(mp+1)^{1/p}}{(1-e^{-1})^{m+1/p}}. \tag{22}$$

В свою очередь, из (22) при $p = 1/m$, $m \in \mathbb{N}$, следует равенство

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{f\in L_{2,\gamma}} \frac{E_{n-1}(f)_{2,\gamma}}{\left(n\int\limits_0^{1/n}\Omega_m^{1/m}(f,t)_{2,\gamma}(1-t)^{n-1}\,dt\right)^{m}} = 2^m\left(\frac{e}{e-1}\right)^{2m}.$$

2. Приведем ряд определений и обозначений, необходимых нам для дальнейшего изложения. Пусть S — единичный шар в пространстве $L_{2,\gamma}$; $\Lambda_n \subset L_{2,\gamma}$ — n-мерное подпространство; $\Lambda^n \subset L_{2,\gamma}$ — подпространство коразмерности n; $\mathscr{L} : L_{2,\gamma} \to \Lambda_n$ — линейный непрерывный оператор; $\mathscr{L}^\perp : L_{2,\gamma} \to \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования; $\mathfrak{M}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из $L_{2,\gamma}$. Величины

$$b_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}) = \sup\big\{\sup\{\varepsilon > 0;\ \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{M}\big\} : \Lambda_{n+1} \subset L_{2,\gamma}\big\},$$

$$d_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}) = \inf\big\{\sup\big\{\inf\big\{\|f-g\|_2 : g \in \Lambda_n\big\} : f \in \mathfrak{M}\big\} : \Lambda_n \subset L_{2,\gamma}\big\},$$

$$\delta_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}) = \inf\big\{\inf\big\{\sup\big\{\|f-\mathscr{L}f\|_2 : f \in \mathfrak{M}\big\} : \mathscr{L}L_{2,\gamma} \subset \Lambda_n\big\} : \Lambda_n \subset L_{2,\gamma}\big\},$$

$$d^n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}) = \inf\big\{\sup\big\{\|f\|_{2,\gamma} : f \in \mathfrak{M}\cap\Lambda^n\big\} : \Lambda^n \subset L_{2,\gamma}\big\},$$

$$\Pi_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}) = \inf\Big\{\inf\Big\{\sup\Big\{\|f-\mathscr{L}^\perp f\|_2 : f \in \mathfrak{M}\Big\} : \mathscr{L}^\perp L_{2,\gamma} \subset \Lambda_n\Big\} : \Lambda_n \subset L_{2,\gamma}\Big\}$$

называют соответственно *бернштейновским, колмогоровским, линейным, гельфандовским, проекционным n-поперечниками* подмножества $\mathfrak{M}$ в пространстве $L_{2,\gamma}$. Известно [10, 11], что указанные n-поперечники монотонны по n и между ними в гильбертовом пространстве $L_{2,\gamma}$ выполняются соотношения:

$$b_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}) \leqslant d^n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}) \leqslant d_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}) = \delta_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}) = \Pi_n(\mathfrak{M}, L_{2,\gamma}). \tag{23}$$

Введем классы функций, вытекающие из неравенства (8) и утверждения теоремы 1. Пусть $h \in (0,1)$, $m \in \mathbb{N}$. Через $W_{2,\gamma,m}(\Phi)$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\gamma}$, обобщенный модуль непрерывности (6) которых удовлетворяет неравенству

$$\Omega_m(f,h)_{2,\gamma} \leqslant \Phi(h),$$

где Φ — неотрицательная, монотонно возрастающая функция на $[0,+\infty)$.

Через $W_pL_{2,\gamma}(\Omega_m; q, h)$ обозначим класс функций $f \in L_{2,\gamma}$, при любых $m \in \mathbb{N}$, $h \in (0,1)$ и $0 < p \leqslant 2$ удовлетворяющих условию

$$\left(\int\limits_0^h \Omega_m^p(f;t)_{2,\gamma}q(t)\,dt\right)^{1/p} \leqslant 1.$$

Теорема 2. *При любых $n, m \in \mathbb{N}$ и $h \in (0,1)$ справедливы равенства*

$$\lambda_n\big(W_{2,\gamma,m}(\Phi), L_{2,\gamma}\big) = E_{n-1}\big(W_{2,\gamma,m}(\Phi)\big) = \big[1-(1-h)^n\big]^{-m}\Phi(h), \tag{24}$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — *любой из* n-*поперечников* $b_n(\cdot)$, $d_n(\cdot)$, $d^n(\cdot)$, $\delta_n(\cdot)$, $\Pi_n(\cdot)$, *а*

$$E_{n-1}\bigl(W_{2,\gamma,m}(\Phi)\bigr) = \sup\bigl\{E_{n-1}(f)_{2,\gamma} : f \in W_{2,\gamma,m}(\Phi)\bigr\}.$$

$\lhd$ Оценка сверху всех рассматриваемых n-поперечников класса $W_{2,\gamma,m}(\Phi)$ следует из неравенства (8), поскольку

$$\begin{gathered} E_{n-1}\bigl(W_{2,\gamma,m}(\Phi)\bigr) = \sup_{f\in W_{2,\gamma,m}(\Phi)} E_{n-1}(f)_{2,\gamma} \\ \leqslant \sup_{f\in W_{2,\gamma,m}(\Phi)} \bigl\{\bigl[1-(1-h)^n\bigr]^{-m}\Omega_m(f,h)_{2,\gamma}\bigr\} \leqslant \bigl[1-(1-h)^n\bigr]^{-m}\Phi(h). \end{gathered} \tag{25}$$

Отсюда, учитывая соотношения (23) для всех перечисленных n-поперечников, получаем оценку сверху

$$\lambda_n\bigl(W_{2,\gamma,m}(\Phi)\bigr) \leqslant \bigl[1-(1-h)^n\bigr]^{-m}\Phi(h). \tag{26}$$

Для получения оценки снизу всех n-поперечников, равных правой части неравенства (26) в $(n+1)$-мерном подпространстве полиномов

$$\mathscr{P}_{n+1} = \left\{p_{n+1}(z) : p_{n+1}(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k\varphi_k(z)\right\},$$

введем в рассмотрение шар

$$S_{n+1} := \bigl\{p_{n+1}(z) \in \mathscr{P}_{n+1} : \|p_{n+1}\|_{2,\gamma} \leqslant \bigl[1-(1-h)^n\bigr]^{-m}\Phi(h)\bigr\}$$

и покажем, что шар $S_{n+1} \subset W_{2,\gamma,m}(\Phi)$. В самом деле, для произвольного $p_{n+1}(z) \in S_{n+1}$, согласно равенству (6), имеем

$$\begin{gathered} \Omega_m^2(p_{n+1};h)_{2,\gamma} = \sum_{k=0}^{n}\bigl[1-(1-h)^k\bigr]^{2m}|a_k(p_{n+1})|^2 \\ \leqslant \bigl[1-(1-h)^n\bigr]^{2m}\sum_{k=0}^{n}|a_k(p_{n+1})|^2 = \bigl[1-(1-h)^n\bigr]^{2m}\|p_{n+1}\|_{2,\gamma}^2 \\ \leqslant \bigl[1-(1-h)^n\bigr]^{2m}\bigl[1-(1-h)^n\bigr]^{-2m}\Phi^2(h) = \Phi^2(h). \end{gathered}$$

Таким образом, мы доказали, что для произвольного $p_{n+1} \subset S_{n+1}$ имеет место неравенство $\Omega_m(p_{n+1},h)_{2,\gamma} \leqslant \Phi(h)$, а это означает, что $S_{n+1} \subset W_{2,\gamma,m}(\Phi)$. Но тогда согласно определению бернштейновского n-поперечника и соотношения (23) между n-поперечниками, запишем

$$\lambda_n(W_{2,\gamma,m}(\Phi), L_{2,\gamma}) \geqslant b_n(W_{2,\gamma,m}(\Phi), L_{2,\gamma}) \geqslant b_n(S_{n+1}, L_{2,\gamma}) \geqslant \bigl[1-(1-h)^n\bigr]^{-m}\Phi(h). \tag{27}$$

Утверждение теоремы 2 вытекает из сопоставления оценки сверху (26) и оценки снизу (27). $\rhd$

Отметим, что утверждение теоремы 2 для колмогоровского n-поперечника ранее было доказано в работе [9].

Следствие 3. *В утверждении теоремы* 2 *при* $h = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, *имеет место асимптотическое равенство*

$$\lambda_n(W_{2,\gamma,m}(\Phi), L_{2,\gamma}) = \left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right]^{-m}\Phi\left(\frac{1}{n}\right) \sim \bigl(1-e^{-1}\bigr)^{-m}\Phi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Теорема 3. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $0 < p \leqslant 2$, $h \in (0,1)$, $q \geqslant 0$ — весовая функция на интервале $(0,h)$. Тогда для произвольного $n \in \mathbb{N}$ справедливы равенства*

$$\lambda_n(W_pL_{2,\gamma}(\Omega_m;q,h),L_{2,\gamma}) = E_{n-1}(W_pL_{2,\gamma}(\Omega_m;q,h)) = \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} q(t)\,dt\right)^{-1/p}, \quad (28)$$

где $\lambda_n(\cdot)$ — любой из перечисленных выше n-поперечников.

$\lhd$ Оценку сверху всех перечисленных выше n-поперечников получаем из неравенства (16), соотношения (23) и определения класса функций $W_pL_{2,\gamma}(\Omega_m;q,h)$:

$$\lambda_n\big(W_pL_{2,\gamma}(\Omega_m;q,h),L_{2,\gamma}\big) \leqslant d_n\big(W_pL_{2,\gamma}(\Omega_m;q,h),L_{2,\gamma}\big) \leqslant E_{n-1}\big(W_pL_{2,\gamma}(\Omega_m;q,h)\big) \leqslant \left(\int\limits_0^h \big(1-(1-t)^n\big)^{mp} q(t)\,dt\right)^{-1/p}. \quad (29)$$

Для получения оценок снизу на множестве $\mathscr{P}_n \cap L_{2,\gamma}$ рассмотрим шар

$$\sigma_{n+1} = \left\{ p_{n+1} \subset \mathscr{P}_{n+1} :\ \|p_{n+1}\|_{2,\gamma} \leqslant \left(\int\limits_0^h \big(1-(1-t)^n\big)^{mp} q(t)\,dt\right)^{-1/p} \right\}$$

и докажем включение $\sigma_{n+1} \subset W_pL_{2,\gamma}(\Omega_m;q,h)$.

Для произвольного полинома $p_{n+1} \subset \sigma_{n+1}$ на основании равенства (6) запишем

$$\Omega_m^2(p_{n+1};t)_{2,\gamma} = \sum_{k=0}^{n} \big(1-(1-t)^k\big)^{2m} |c_k(p_{n+1})|^2 \leqslant \big(1-(1-t)^n\big)^{2m} \sum_{k=0}^{n} |c_k(p_{n+1})|^2 = \big(1-(1-t)^n\big)^{2m} \|p_{n+1}\|_{2,\gamma}^2$$

или что то же

$$\Omega_m(p_{n+1};t)_{2,\gamma} \leqslant \big(1-(1-t)^n\big)^m \|p_{n+1}\|_{2,\gamma}. \quad (30)$$

Возводя левую и правую части неравенства (30) в степень p, умножая их на весовую функцию q и интегрируя обе части полученного таким образом неравенства по переменной t в пределах от $t=0$ до $t=h$, получаем

$$\int\limits_0^h \Omega_m^p(p_{n+1};t)_{2,\gamma} q(t)\,dt \leqslant \|p_{n+1}\|_{2,\gamma}^p \int\limits_0^h \big(1-(1-t)^n\big)^{mp} q(t)\,dt \leqslant \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} q(t)\,dt\right)^{-1} \int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} q(t)\,dt = 1,$$

и, следовательно, включение $\sigma_{n+1} \subset W_pL_{2,\gamma}(\Omega_m;q,h)$ доказано. В силу определения бернштейновского n-поперечника и соотношения (23) между n-поперечниками имеем

$$\lambda_n\big(W_pL_{2,\gamma}\big(\Omega_m;q,h\big),L_{2,\gamma}\big) \geqslant b_n\big(W_pL_{2,\gamma}\big(\Omega_m;q,h\big),L_{2,\gamma}\big) \geqslant b_n(\sigma_{n+1},L_{2,\gamma}) \geqslant \left(\int\limits_0^h (1-(1-t)^n)^{mp} q(t)\,dt\right)^{-1/p}. \quad (31)$$

Требуемое равенство (28) получаем из сопоставления оценки сверху (29) и оценки снизу (31), чем и завершаем доказательство теоремы 3. $\rhd$

Литература

1. *Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш.* Наилучшие приближения и значения поперечников некоторых классов функций в пространстве B_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ // Докл. АН.—2006.—Т. 410, № 4.—С. 461–464.
2. *Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш.* О наилучшем приближения некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана $B_{2,\gamma}$ // Докл. АН.—2007.—Т. 412, № 4.—С. 466–469. DOI 10.1134/S1064562407010279.
3. *Вакарчук С. Б., Шабозов М. Ш.* О поперечниках классов функций, аналитических в круге // Мат. сб.—2010.—Т. 201, № 8.—С. 3–22. DOI 10.4213/sm7505.
4. *Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С.* Значение n-поперечников и наилучшие линейные методы приближения некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // Изв. ТулГу. Естеств. науки.—2014.—Вып. 3.—С. 40–57.
5. *Саидусайнов М. С.* О значении поперечников и наилучших линейных методах приближения в весовом пространстве Бергмана // Изв. ТулГу. Естеств. науки.—2015.—Вып. 3.—С. 91–104.
6. *Саидусайнов М. С.* О наилучших линейных методах приближения некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // Чебышевский сб.—2016.—Т. 17, вып 1.—С. 240–253.
7. *Лангаршоев М. Р.* О наилучших линейных методах приближения и точных значениях поперечников некоторых классов аналитических функций в весовом пространстве Бергмана // Укр. мат. журн.—2015.—Т. 67, № 10.—С. 1366–1379.
8. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного.—М.–Л.: Наука, 1964.—440 с.
9. *Абилов В. А., Абилова Ф. В., Керимов М. К.* Точные оценки скорости сходимости рядов Фурье функций комплексной переменной в пространстве $L_2(D, p(z))$ // Журн. выч. математики и мат. физики.—2010.—Т. 50, № 6.—С. 999–1004.
10. *Pinkus A.* n-Widths in Approximation Theory.—Berlin–Heidelberg–N. Y.–Tokyo: Springer-Verlag, 1985.—287 p.
11. *Тихомиров В. М.* Некоторые вопросы теории приближений.—М.: МГУ, 1976.—325 с.

Статья поступила 14 января 2017 г.

Шабозов Мирганд Шабозович
Институт математики им. А. Джураева
АН Республики Таджикистан,
главный научный сотрудник
отдела теории функций и функционального анализа
ТАДЖИКИСТАН, 734063, Душанбе, ул. Айни, 299/4
E-mail: shabozov@mail.ru

Саидусайнов Муким Саидусайнович
Таджикский национальный университет,
докторант кафедры функционального
анализа и диф. уравнений
ТАДЖИКИСТАН, 734025, Душанбе, пр. Рудаки, 17
E-mail: smuqim@gmail.com

MEAN-SQUARE APPROXIMATION OF COMPLEX VARIABLE FUNCTIONS BY FOURIER SERIES IN THE WEIGHTED BERGMAN SPACE

Shabozov M. Sh., Saidusaynov M. S.

In this paper we consider the problem of mean-square approximation of functions of a complex variable by Fourier series in orthogonal system. The functions f under consideration are assumed to be regular in some simply connected domain $\mathscr{D} \subset \mathbb{C}$ and square integrable with a nonnegative weight function $\gamma := \gamma(|z|)$ which is integrable in $\mathscr{D}$, that is, when $f \in L_{2,\gamma} := L_2(\gamma(|z|), D)$.
Earlier, V. A. Abilov, F. V. Abilova and M. K. Kerimov investigated the problems of finding exact estimates of the rate of convergence of Fourier series for functions $f \in L_{2,\gamma}$ [9]. They proved some exact Jackson type inequalities and found the values of the Kolmogorov's n-width for certain classes of functions. In doing so, a special form of the shift operator was widely used to determine the generalized modulus of continuity of mth order and classes of functions defined by a given increasing in $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$ majorant.
The article continues the research of these authors, namely, the exact Jackson–Stechkin type inequality between the best approximation of a functions $f \in L_{2,\gamma}$ by algebraic complex polynomials and L_p norm of generalized module of continuity is proved; approximative properties of classes of functions are studied for which the L_p norm of the generalized modulus of continuity has a given majorant.
Under certain assumptions on the majorant,the values of Bernstein, Kolmogorov, linear, Gelfand, and projection n-widths for classes of functions in $L_{2,\gamma}$ were calculated. It was proved that all widths are coincide and an optimal subspace is the subspace of complex algebraic polynomials.

Key words: weighted Bergman space, generalized module of continuity, n-width, generalized shift operator.

References

1. *Shabozov M. Sh., Shabozov O. Sh.* Best approximation and the value of the widths of some classes of functions in the Bergman space $B_p, 1 \leqslant p \leqslant \infty$, *Doklady Akademii Nauk* [*Dokl. Akad. Nauk*], 2006, vol. 410, no. 4, pp. 461–464 (in Russian).
2. *Shabozov M. Sh., Shabozov O. Sh.* On the best approximation of some classes of analytic functions in the weighted Bergman spaces, *Doklady Akademii Nauk* [*Dokl. Akad. Nauk*], 2007, vol. 412, no. 4, pp. 466–469 (in Russian). DOI 10.1134/S1064562407010279.
3. *Vakarchuk S. B., Shabozov M. Sh.* The widths of classes of analytic functions in a disc, *Matematicheskij sbornik* [*Sbornik: Mathematics*], 2010, vol. 201, no. 8, pp. 3–22 (in Russian). DOI 10.4213/sm7505.
4. *Shabozov M. Sh., Saidusaynov M. S.* The values of n widths and best linear methods of approximation for some analytic classes functions in the weighted Bergman space, *Izvestija Tul'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvennye nauki* [*News of the Tula state university. Natural sciences*], 2014, no. 3, pp. 40–57 (in Russian).
5. *Saidusaynov M. S.* On the Values of widths and the best linear methods of approximation in the weighted Bergman space, *Izvestija Tul'skogo Gosudarstvennogo Universiteta. Estestvennye nauki* [*News of the Tula state university. Natural sciences*], 2015, no. 3, pp. 91–104 (in Russian).
6. *Saidusaynov M. S.* On the best linear method of approximation of some classes analytic functions in the weighted Bergman space, *Chebyshevskij sbornik* [*Chebyshevskii Sb.*], 2016, vol. 17, no. 1, pp. 240–253 (in Russian).
7. *Langarshoev M. R.* On the Best Linear Methods of Approximation and the Exact Values of Widths for Some Classes of Analytic Functions in the Weighted Bergman Space, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2016, vol. 67, no. 10, pp. 1537–1551. DOI 10.1007/s11253-016-1171-z.
8. *Smirnov V. I., Lebedev N. A. Konstruktivnaja teorija funkcij kompleksnogo peremennogo* [*Constructive Theory of Functions of Complex Variables*]. Nauka, Moscow, 1964, 440 p. (in Russian).
9. *Abilov V. A., Abilova F. V., Kerimov M. K.* Sharp estimates for the convergence rate of Fourier series of complex variable functions in $L_2(D, p(z))$, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2010, vol. 50, no. 6, pp. 946-950. DOI 10.1134/S0965542510060023.
10. *Pinkus A. n-Widths in Approximation Theory.* Berlin, etc., Springer-Verlag, 1985, 287 p.
11. *Tikhomirov V. M. Nekotorye voprosy teorii priblizhenij* [*Some Questions of Approximation Theory*]. Moscow, Izd. Moscow. Univ., 1976, 325 p.

Received 14 January, 2017

Shabozov Mirgand Shabozovich
Academy of Science Republic of Tajikistan,
Institute of Mathematics named after A. Juraev,
Main Research Worker of the Department
of the Theory of Functions and Functional Analysis
299/1 Ayni St., Dushanbe, 734063, Tajikistan
E-mail: shabozov@mail.ru

Saidusaynov Mukim Saidusaynovich
Tajik National University,
Doctorial Candidate of the Department
of Functional Analysis and Differential Equations
17 Rudaky avenue, Dushanbe, 734025, Tajikistan
E-mail: smuqim@gmail.com