Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 3–15

УДК 517.5+517.9
DOI 10.23671/VNC.2018.2.14713

О СЮРЪЕКТИВНОСТИ ОПЕРАТОРА СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ В ОБЛАСТИ ФУНКЦИЙ ЗАДАННОГО РОСТА

А. В. Абанин, Т. М. Андреева

Посвящается 65-летию
Анатолия Георгиевича Кусраева

Аннотация. В работе рассматриваются (DFS)-пространства голоморфных функций в ограниченной выпуклой области G комплексной плоскости $\mathbb{C}$, имеющих заданный рост, определяемый некоторой последовательностью весов, удовлетворяющих ряду общих естественных условий. При этих условиях изучается задача о непрерывности и сюръективности операторов свертки, действующих из $H(G+K)$ в (на) $H(G)$, где K — фиксированный компакт в $\mathbb{C}$. Решение данной задачи получено в терминах преобразования Лапласа линейного функционала, определяющего оператор (его называют символом оператора свертки). Для пространств общего вида установлен функциональный критерий сюръективности оператора свертки из $H(G+K)$ на $H(G)$. Для пространств функций экспоненциально-степенного роста максимального и нормального типов получены достаточные условия на поведение символа, при которых соответствующий ему оператор сюръективен. Эти условия формулируются в терминах оценок снизу для модуля символа. Кроме того, показано, что эти же условия являются необходимыми для сюръективности всех операторов свертки из $H(G+K)$ на $H(G)$, когда G пробегает совокупность всех ограниченных выпуклых областей в $\mathbb{C}$. Таким образом, получен критерий сюръективности операторов свертки в пространствах функций экспоненциально-степенного роста на классе всех ограниченных выпуклых областей в $\mathbb{C}$. Ранее подобные результаты были известны лишь для конкретного пространства голоморфных в выпуклых ограниченных областях функций полиномиального роста.

Ключевые слова: весовое пространство, голоморфная функция, оператор свертки, сюръективность, пространство экспоненциально-степенного роста.

Пусть G — выпуклая ограниченная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, $H(G)$ — пространство всех функций, голоморфных в G, а $\mathscr{V}=(v_n)_{n=1}^{\infty}$ — возрастающая по n последовательность непрерывных в G функций. Последовательность $\mathscr{V}$ задает пространство $\mathscr{V}H(G) := \bigcup_{n=1}^{\infty} H_{v_n}(G)$ с естественной топологией внутреннего индуктивного предела банаховых пространств

$$H_{v_n}(G) := \left\{ f \in H(G) :\ \|f\|_{v_n} := \sup_{z\in G} \frac{|f(z)|}{e^{v_n(z)}} < \infty \right\}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Основная цель настоящей работы — изучение задачи о сюръективности оператора свертки $\mu* : \mathscr{V}H(G+K) \to \mathscr{V}H(G)$, где K — выпуклый компакт в $\mathbb{C}$, а μ — аналитический функционал с носителем в K. В «безвесовой» ситуации, когда рассматриваются пространства $H(G+K)$ и $H(G)$ всех голоморфных на $G+K$ и G функций, данная задача исследована достаточно полно, причем не только для областей G, но и для компактов и для подмножеств и, как следствие, пространств гораздо более общей структуры (подробный обзор имеется в книге [1], см. также [2]). Что касается весовых пространств, то здесь главным образом изучались пространства Фреше (см. статью [3] и библиографию в ней). При этом применялась традиционная техника, заключающаяся в переходе к двойственной проблеме деления на символ оператора в сопряженном пространстве целых функций определенного роста. Принципиально эта схема не меняется и для пространств индуктивного типа. Однако на пути ее реализации имеется существенная трудность, которая заключается в необходимости построения целых функций, удовлетворяющих бесконечному числу оценок сверху и одновременно близким оценкам снизу на заданной последовательности точек, уходящих в бесконечность. По-видимому, впервые такие построения были осуществлены в [4–6] при исследовании операторов свертки в пространстве $A^{-\infty}(G)$ аналитических в G функций полиномиального роста вблизи ее границы ∂G. Отметим, что $A^{-\infty}(G)$ совпадает с $\mathscr{V}H(G)$ при $\mathscr{V} = \left(n\ln\frac{1}{d(\lambda)}\right)_{n=1}^{\infty}$, где $d(\lambda)$ — расстояние от $\lambda \in G$ до ∂G. Важную роль при этом играют аналоги теоремы Хёрмандера о разрешимости неоднородного уравнения Коши — Римана в классах функций, удовлетворяющих системе оценок. Впервые такие аналоги были установлены О. В. Епифановым [7] (см. также [8]). Нам неизвестны другие пространства вида $\mathscr{V}H(G)$, кроме $A^{-\infty}(G)$, для которых имелись бы результаты, подобные установленным в [4–6]. Опираясь на полученное [9] описание сопряженного с $\mathscr{V}H(G)$ пространства и методы из [5], в настоящей работе для пространств $\mathscr{V}H(G)$ общего вида получены необходимые и (отдельно) достаточные условия, а для пространств экспоненциально-степенного роста — критерии сюръективности операторов свертки. Подробные обоснования результатов будут приводиться лишь в тех случаях, когда имеются существенные отличия от [5].

1. Сюръективность оператора свертки для весовых последовательностей общего вида

Всюду в данной работе будем рассматривать весовую последовательность $\mathscr{V} = (v_n)_{n=1}^{\infty}$, у которой $v_n(\lambda) := \varphi_n\left(\ln\frac{1}{d(\lambda)}\right)$, $n \in \mathbb{N}$, и последовательность $\Phi = (\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ неотрицательных выпуклых монотонно возрастающих функций на $(t_0, +\infty)$ $(t_0 \geqslant 0)$ удовлетворяет условиям:

(c1) $(\forall\, j \in \mathbb{N})\ \varphi_{j+1}(t) \geqslant \varphi_j(t) + t,\ t \geqslant t_0$;

(c2) $(\forall\, j \in \mathbb{N})(\forall\, \alpha)(\exists\, s = s(j,\alpha))\ \ \varphi_j(t+\alpha) \leqslant \varphi_{j+1}(t) + s,\ t \geqslant t_0$;

(c3) $(\forall\, j \in \mathbb{N})(\exists\, p_j > 0)\ \ \varphi_j(t) \leqslant e^{p_j t} + \delta_j$, где δ_j — постоянные величины.

Отметим, что эти условия аналогичны использованным в [10] для двойственного проективного случая, когда вместо убывающей по j последовательности $(\varphi_j)_{j=1}^{\infty}$ берется возрастающая. С целью технических упрощений в доказательствах будем считать без ограничения общности, что $t_0 = 0$ и что область G содержит начало координат.

В [9, теорема 1] было установлено, что преобразование Лапласа устанавливает топологический изоморфизм из $(\mathscr{V}H(G))'$ на пространство Фреше

$$\mathscr{V}H_G := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) :\ |f|_n := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)| \cdot e^{v_n^*(|z|)}}{e^{H_G(z)}} < \infty\ \ (\forall\, n \in \mathbb{N}) \right\},$$

где $H_G(z) = \sup_{\lambda\in G} \operatorname{Re}\lambda z$ — опорная функция области G и

$$v_n^*(|z|) := \inf\nolimits_{0<t\leqslant 1} \left[|z|t + \varphi_n\left(\ln\frac{1}{t}\right) \right].$$

Отметим, что в силу условий, наложенных на последовательность Φ, $\mathscr{V}H(G)$ является (DFS)-, а $\mathscr{V}H_G$ — (FS)-пространством.

Пусть μ — аналитический функционал в $\mathbb{C}$ с носителем в K, где K — некоторое выпуклое компактное подмножество комплексной плоскости. Тогда оператор свертки

$$\mu* : f \longmapsto \mu_w(f(z+w))$$

непрерывно отображает $H(G+K)$ в $H(G)$, а преобразование Лапласа $\hat{\mu}(\zeta) := \mu_z(e^{z\zeta})$, $\zeta \in \mathbb{C}$, $z \in G$, функционала μ представляет собой целую функцию экспоненциального типа такую, что $|\hat{\mu}(\zeta)| = O\left(e^{H_K(\zeta)+\varepsilon|\zeta|}\right)$ в $\mathbb{C}$ для любого $\varepsilon > 0$. Следующее предложение содержит необходимые и достаточные условия на функционал μ (точнее, на его преобразование Лапласа), при которых порождаемый им оператор свертки действует из пространства $\mathscr{V}H(G+K)$ в пространство $\mathscr{V}H(G)$. Будем использовать следующее обозначение:

$$\mathscr{V}H_K^\infty := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ (\forall\, n \in \mathbb{N})\ (\exists\, m \in \mathbb{N}) \ \sup_{\zeta \in \mathbb{C}} \frac{|f(\zeta)|}{e^{H_K(\zeta)+v_m^*(|\zeta|)-v_n^*(|\zeta|)}} < \infty \right\}.$$

Предложение 1. *Вложение $\mu*\mathscr{V}H(G+K) \subseteq \mathscr{V}H(G)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\hat{\mu} \in \mathscr{V}H_K^\infty$. Более того, для любого нетривиального функционала μ с $\hat{\mu} \in \mathscr{V}H_K^\infty$ справедливы следующие утверждения:*

(i) *оператор свертки $\mu* : \mathscr{V}H(G+K) \to \mathscr{V}H(G)$ непрерывен и обладает плотным образом;*

(ii) *оператор умножения $\Lambda_{\hat{\mu}} : f \in \mathscr{V}H_G \longmapsto \hat{\mu}f \in \mathscr{V}H_{G+K}$ сопряжен оператору свертки.*

$\lhd$ Доказательство проводится по стандартной схеме (см. [5, предложение 2.1]), возможность реализации которой основана на следующей двусторонней оценке норм экспонент (см. [9, лемма 1]):

$$e^{-s_n} \cdot e^{H_G(z)-v_{n+1}^*(|z|)} \leqslant \|e^{\lambda z}\|_n \leqslant e^{s_n} \cdot e^{H_G(z)-v_n^*(|z|)}, \quad z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

где постоянная s_n зависит только от номера n. $\rhd$

Из предложения 1 за счет соображений двойственности получаем

Теорема 1. *Пусть μ — нетривиальный аналитический функционал и $\hat{\mu} \in \mathscr{V}H_K^\infty$. Оператор свертки $\mu* : \mathscr{V}H(G+K) \to \mathscr{V}H(G)$ сюръективен тогда и только тогда, когда образ оператора умножения $\Lambda_{\hat{\mu}}(\mathscr{V}H_G)$ замкнут в $\mathscr{V}H_{G+K}$.*

Прежде чем продолжить, напомним, что целая функция g называется *мультипликатором* из $\mathscr{V}H_G$ в $\mathscr{V}H_{G+K}$, если $g \cdot f \in \mathscr{V}H_{G+K}$ для любого $f \in \mathscr{V}H_G$. Символом $\mathscr{M}\mathscr{V}_{G,G+K}$ обозначим совокупность всех мультипликаторов из $\mathscr{V}H_G$ в $\mathscr{V}H_{G+K}$. Из предложения 1 следует, что $\mathscr{V}H_K \subseteq \mathscr{M}\mathscr{V}_{G,G+K}$. Наша ближайшая цель — установить, что на самом деле имеет место равенство $\mathscr{V}H_K = \mathscr{M}\mathscr{V}_{G,G+K}$. Оно имеет важное значение в исследовании операторов свертки и ряда других вопросов. Чтобы его доказать, нам потребуется дополнительная подготовка.

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения:*

a) *при любом $n \in \mathbb{N}$*

$$v_n^*(|z|) = o(|z|) \quad \textit{при}\ \ z \to \infty;$$

b) *существует такое $\alpha_0 > 0$, что при некоторых постоянных α_n*

$$v_{n+2}^*(|z|) - v_n^*(|z|) \geqslant \alpha_0 \ln(1+|z|) - \alpha_n \quad \textit{при всех}\ \ z \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}.$$

$\lhd$ a) В силу условия (c3) при больших $|z|$ выполняется

$$v_n^*(|z|) = \inf_{0<t\leqslant 1}\left[|z|t + \varphi_n\left(\ln\frac{1}{t}\right)\right] \leqslant \inf_{0<t\leqslant 1}\left(|z|t + \frac{1}{t^{p_n}} + \delta_n\right)$$
$$= \left(p^{\frac{1}{p_n+1}} + p^{-\frac{p_n}{p_n+1}}\right)|z|^{\frac{p_n}{p_n+1}} + \delta_n,$$

откуда следует требуемое.

b) Это утверждение следует из [10, лемма 6]. $\rhd$

Введем в рассмотрение банаховы пространства целых функций

$$E_n := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) :\ |f|_n := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|\cdot e^{v_n^*(|z|)}}{e^{H_G(z)}} < \infty,\ n\in\mathbb{N}\right\},$$

и заметим, что $\mathscr{V}H_G = \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$.

Лемма 2. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ имеется такое $m \in \mathbb{N}$, что пространство $\mathscr{V}H_G$ плотно в E_m по норме $|\cdot|_n$ пространства E_n.*

$\lhd$ Возьмем натуральное s_0 настолько большим, чтобы $s_0\alpha_0 \geqslant 1$, где α_0 — постоянная из утверждения b) леммы 1, и покажем, что $m = n + 2s_0 + 1$ удовлетворяет требованиям леммы.

Пусть $f \in E_m$. Образуем по ней функции $f_\gamma(z) := f(\gamma z)$, $0 < \gamma < 1$. Учитывая, что область G содержит начало координат, имеем

$$H_G(z) \geqslant H_G(\gamma z) + (1-\gamma)r|z| \quad \text{при всех } z \in \mathbb{C},$$

где $r := \min\{H_G(z) :\ |z| = 1\}$. Поэтому

$$|f(\gamma z)| \leqslant |f|_m\, e^{H_G(\gamma z) - v_m^*(\gamma|z|)} \leqslant |f|_m\, e^{H_G(\gamma z)} \leqslant |f|_m\, e^{H_G(z)-(1-\gamma)r|z|}.$$

Отсюда и из утверждения a) леммы 1 получаем, что $f(\gamma z) \in \mathscr{V}H_G$ при любом $\gamma \in (0,1)$.

Для завершения доказательства остается установить, что f_γ сходится к f в E_n при $\gamma \to 1$.

Положим $R := \max\{H_G(z) : |z| = 1\}$ и заметим, что $|H_G(z) - H_G(\zeta)| \leqslant R|z|$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Поэтому $H(z+\zeta) \leqslant H_G(z) + R$ при всех $z \in \mathbb{C}$ и $|\zeta| \leqslant 1$. Далее, в силу условия (c2) имеется такое $c > 0$, что $v_{m-1}^*(|z|) \leqslant v_m^*(|z|-1) + c$ при всех $z \in \mathbb{C}$. Из приведенных оценок следует, что при всех $z \in \mathbb{C}$ и $|\zeta| \leqslant 1$

$$|f(z+\zeta)| \leqslant |f|_m\, e^{H_G(z+\zeta) - v_m^*(|z+\zeta|)} \leqslant |f|_m\, e^{H_G(z)+R-v_m^*(|z|-1)} \leqslant C|f|_m\, e^{H_G(z)-v_{m-1}^*(|z|)},$$

где $C := e^{R+c}$. Применив интегральную формулу Коши, заключаем, что при всех $z \in \mathbb{C}$

$$|f'(z)| \leqslant \max_{|\zeta|\leqslant 1} |f(z+\zeta)| \leqslant C|f|_m\, e^{H_G(z)-v_{m-1}^*(|z|)}.$$

Использовав еще то, что $f(z) - f_\gamma(z) = \int_{\gamma z}^{z} f'(t)\,dt$, при всех $z \in \mathbb{C}$ имеем

$$|f(z) - f_\gamma(z)| \leqslant C(1-\gamma)|f|_m|z|e^{H_G(z)-v_{m-1}^*(|z|)} = C(1-\gamma)|f|_m|z|e^{H_G(z)-v_{n+2s_0}^*(|z|)}.$$

Воспользовавшись утверждением b) леммы 1 s_0 раз, заключаем, что при некотором $D \geqslant C$ и всех $z \in \mathbb{C}$ имеют место оценки

$$|f(z) - f_\gamma(z)| \leqslant D(1-\gamma)|f|_m|z|e^{H_G(z)-v_n^*(|z|)-s_0\alpha_0\ln(1+|z|)} \leqslant D(1-\gamma)|f|_m|z|e^{H_G(z)-v_n^*(|z|)}.$$

Отсюда вытекает

$$|f - f_\gamma|_n \leqslant D(1-\gamma)|f|_m \to 0 \quad \text{при } \gamma \to 1,$$

что завершает доказательство. $\rhd$

Замечание 1. В процессе доказательства леммы 2 было установлено, что для любого $n \in \mathbb{N}$ имеется такая постоянная $C_n > 0$, что

$$\sup_{|\zeta|\leqslant 1} (H_G(z+\zeta) - v_n^*(|z+\zeta|)) + s_0\alpha_0 \ln(1+|z|) \leqslant H_G(z) - v_{n+s_0\alpha_0}^*(|z|) + C_n \quad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

Так как $s_0\alpha_0 \geqslant 1$, то отсюда следует, что

$$\sup_{|\zeta|\leqslant 1} (H_G(z+\zeta) - v_n^*(|z+\zeta|)) + \ln(1+|z|) \leqslant H_G(z) - v_{n+s_0\alpha_0}^*(|z|) + C_n \quad (\forall\, z \in \mathbb{C},\ \forall\, n \in \mathbb{N}). \quad (2)$$

Предложение 2. *Для любой ограниченной выпуклой области G комплексной плоскости и для любого выпуклого компактного множества K выполняется*

$$\mathscr{M}\mathscr{V}_{G,G+K} = \mathscr{V}H_K^\infty. \quad (3)$$

$\lhd$ Напомним, что пространство Фреше $\mathscr{V}H_G$ задается последовательностью весов $u_n(z) := H_G(z) - v_n^*(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, и соответствующей ей убывающей по вложению последовательностью банаховых пространств $(E_n)_{n=1}^\infty$. Для таких последовательностей прямое использование общих результатов из [11] об описании мультипликаторов в весовых пространствах Фреше невозможно, так как мы не можем гарантировать, что определяющие $\mathscr{V}H_G$ веса u_n субгармоничны в $\mathbb{C}$. В связи с этим заметим, что из оценки (1) следует, что

$$u_{n+1}(z) - s_n \leqslant \sup_{\zeta\in G}(\operatorname{Re} z\zeta - v_n(\zeta)) \leqslant u_n(z) + s_n \quad (\forall\, z \in \mathbb{C},\ \forall\, n \in \mathbb{N}). \quad (4)$$

Положим $w_n(z) := \sup\{\operatorname{Re} z\zeta - v_n(\zeta) : \zeta \in G\}$. Как верхние огибающие семейств гармонических функций $\{\operatorname{Re} z\zeta - v_n(\zeta) : \zeta \in G\}$, функции w_n субгармоничны в $\mathbb{C}$. При этом неравенства (4) влекут

$$E_n \hookrightarrow H_{w_n}(\mathbb{C}) \hookrightarrow E_{n+1} \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}). \quad (5)$$

Поэтому $\mathscr{V}H_G = \bigcap_{n=1}^\infty H_{w_n}(\mathbb{C})$ и, кроме того, из леммы 2, вложений (5) и оценок (2) и (4) следует, что выполнены такие условия:

1) для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $m \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathscr{V}H_G$ плотно в $H_{w_m}(\mathbb{C})$ по норме пространства $H_{w_n}(\mathbb{C})$;

2) для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $C_n > 0$ такое, что

$$\sup_{|\zeta|\leqslant 1} w_n(z+\zeta) + \ln(1+|z|) \leqslant w_{n+s_0\alpha_0-1}(z) + C_n \quad (\forall\, z \in \mathbb{C}).$$

Таким образом, для $\mathscr{V}H_G = \bigcap_{n=1}^\infty H_{w_n}(\mathbb{C})$ выполнены все предположения предложения 5.3 из [11], в соответствии с которым $\mathscr{M}\mathscr{V}_{G,G+K}$ совпадает с пространством тех целых функций g, для которых для любого $m \in \mathbb{N}$ существует номер $n = n(g)$ такой, что

$$|g(z)| = O\left(\exp\left(H_{G+K}(z) - v_m^*(z) - w_n(z)\right)\right) \quad \text{в } \mathbb{C}.$$

Еще раз использовав (5), заключаем, что последнее условие равносильно тому, что для любого $m \in \mathbb{N}$ существует такой номер $n = n(g)$, что

$$|g(z)| = O\left(\exp\left(H_K(z) - v_m^*(z) + v_n^*(z)\right)\right) \text{ в } \mathbb{C}.$$

Другими словами, выполняется требуемое равенство (3). $\rhd$

Напомним, что нетривиальный мультипликатор g из $\mathscr{V}H_G$ в $\mathscr{V}H_{G+K}$ называется *делителем* из $\mathscr{V}H_{G+K}$ в $\mathscr{V}H_G$, если для него имеет место теорема деления, т. е. импликация

$$f \in \mathscr{V}H_{G+K} \text{ и } \frac{f}{g} \in H(\mathbb{C}) \quad \Longrightarrow \quad \frac{f}{g} \in \mathscr{V}H_G.$$

Множество всех делителей из $\mathscr{V}H_{G+K}$ в $\mathscr{V}H_G$ будем обозначать $\mathscr{D}\mathscr{V}_{G+K,G}$. В соответствии с предложением 2 $\mathscr{D}_{G+K,G} \subseteq \mathscr{M}\mathscr{V}_{G+K,G}$.

Следующая теорема доказывается стандартным методом (см., например, [5, предложение 2.8 и теорема 2.9]) на основании теоремы 1 и предложения 2.

Теорема 2. *Пусть μ — аналитический функционал и $\hat{\mu} \in \mathscr{V}H_K^\infty$. Рассмотрим следующие утверждения:*

(i) *оператор свертки $\mu * : \mathscr{V}H(G+K) \to \mathscr{V}H(G)$ является сюръективным;*

(ii) *для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $m \in \mathbb{N}$ и $C > 0$ такие, что*

$$\sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{e^{H_G(z) - v_n^*(|z|)}} \leqslant C \sup_{z \in \mathbb{C}} \frac{|\hat{\mu}(z)||f(z)|}{e^{H_{G+K}(z) - v_m^*(|z|)}} \quad (\forall\, f \in \mathscr{V}H_G);$$

(iii) $\hat{\mu} \in \mathscr{D}\mathscr{V}_{G+K,G}$.

Тогда (iii)$\Rightarrow$(ii)$\Leftrightarrow$(i).

Во всех известных на сегодняшний день результатах, подобных теореме 2, для конкретных весовых шкал имеет место эквивалентность условий (ii) и (iii). Однако, для общих классов весов при этом используются достаточно жесткие ограничения (см., например, [3]), которые не выполняются для рассматриваемых нами пространств. В связи с этим в следующем разделе мы рассмотрим одну из наиболее важных весовых шкал пространств, исследуемых в настоящей работе, — шкалу пространств экспоненциально-степенного роста.

2. Критерии сюръективности в терминах регулярности роста аналитического символа

В данном разделе будут рассмотрены пространства $\mathscr{V}H(G)$ экспоненциально-степенного роста максимального и нормального типов. Поскольку доказательства результатов проводятся по одной схеме и различаются лишь техническими деталями, мы проведем подробное изложение только для первого типа.

2.1. Критерии сюръективности операторов свертки в пространствах максимального типа. Пространства $\mathscr{V}H(G)$ экспоненциально-степенного роста максимального типа задаются весовыми последовательностями $\mathscr{V} = (v_n)_{n=1}^\infty$ с $v_n(\lambda) := n(d(\lambda))^{-\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$, где $0 < \alpha < 1$. Как отмечено в [9], в этом случае двойственное пространство $\mathscr{V}H_G$ может быть описано следующим образом:

$$\mathscr{V}H_G := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ |f|_n := \sup_{\zeta \in \mathbb{C}} \frac{|f(\zeta)|}{e^{H_G(\zeta) - n|\zeta|^{\alpha_*}}} < \infty \ \ (\forall\, n \in \mathbb{N}) \right\},$$

где $\alpha_* := \frac{\alpha}{\alpha+1}$. Отсюда, в частности, следует, что пространство мультипликаторов из $\mathscr{V}H_G$ в $\mathscr{V}H_{G+K}$ в данном случае имеет вид

$$\mathscr{V}H_K^\infty := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : \ (\exists\, n \in \mathbb{N}) \ \sup_{\zeta \in \mathbb{C}} \frac{|f(\zeta)|}{e^{H_K(\zeta)+n|\zeta|^{\alpha_*}}} < \infty \right\}.$$

Сначала мы приведем достаточные условия на нетривиальный мультипликатор из $\mathscr{V}H_K^\infty$, при которых он является делителем из $\mathscr{V}H_{G+K}$ в $\mathscr{V}H_G$. Затем покажем, что на классе всех областей G эти условия также и необходимы. В качестве следствия отсюда будет получен критерий сюръективности оператора свертки на классе всех выпуклых ограниченных областей.

Пусть $\varphi(\zeta)$ — целая функция экспоненциального типа. Ее (радиальный) индикатор определяется по формуле $h_\varphi(\zeta) := \limsup_{r\to\infty} \frac{\log|\varphi(r\zeta)|}{r}$, $\zeta \in \mathbb{C}$. Будем говорить, что φ *удовлетворяет условию* (S^{α_*}), если существуют $s, N > 0$ такие, что для каждого $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta| > N$ найдется $\zeta' \in \mathbb{C}$ с $|\zeta' - \zeta| < |\zeta|^{\alpha_*}$, для которого

$$\log|\varphi(\zeta')| \geqslant h_\varphi(\zeta) - s|\zeta|^{\alpha_*}. \tag{6}$$

Заметим, что это требование строго сильнее, чем условие вполне регулярности роста целой функции в классическом смысле Левина — Пфлюгера.

Докажем, что для целых функций экспоненциального типа с индикаторами, совпадающими с H_K, условия (S^{α_*}) достаточно для справедливости теоремы деления в классах $\mathscr{V}H(G)$. Условимся обозначать через $B(z, r)$ круг радиуса r с центром в точке z. Как и прежде, для множества $M \subset \mathbb{C}$ полагаем $R_M := \sup_{z\in M}|z|$. Для доказательства нам потребуется также следующий известный факт (см. [12, лемма 3.1]).

Лемма 3. *Пусть функции Φ, F и $G = \frac{F}{\Phi}$ голоморфны к круге $B(0,R)$. Если в $B(0,R)$ выполняются неравенства $|\Phi(w)| \leqslant A$ и $|F(w)| \leqslant B$, то*

$$|G(w)| \leqslant B A^{\frac{2|w|}{R-|w|}} |\Phi(0)|^{-\frac{R+|w|}{R-|w|}}, \quad w \in B(0,R).$$

Предложение 3. *Пусть $\mathscr{V} = \big(n(d(\lambda))^{-\alpha}\big)_{n=1}^\infty$. Предположим, что $\varphi \in \mathscr{V}H_K^\infty$, $h_\varphi = H_K$ и φ удовлетворяет условию (S^{α_*}). Тогда $\varphi \in \mathscr{D}\mathscr{V}_{G+K,G}$.*

$\lhd$ Пусть $s, N > 0$ — постоянные из условия (6) для функции φ. Для каждого $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta| > N$ возьмем ζ', как в условии (6). Заметим, что в таком случае для всех точек $\zeta'' \in B(\zeta', 2|\zeta|^{\alpha_*})$ верно неравенство $|\zeta'' - \zeta| < 3|\zeta|^{\alpha_*}$.

Ясно, что без ограничения общности можно считать, что $N \geqslant 6^{\frac{1}{1-\alpha_*}}$. Тогда для всех $\zeta'' \in B\left(\zeta', 2|\zeta|^{\alpha_*}\right)$ справедлива оценка

$$\frac{1}{2}|\zeta| \leqslant |\zeta''| \leqslant 4|\zeta|. \tag{7}$$

Поскольку $\varphi \in \mathscr{V}H_K^\infty$, то имеются $k_0 \in \mathbb{N}$ и $A > 0$ такие, что

$$\ln|\varphi(w)| \leqslant A + H_K(w) + k_0|w|^{\alpha_*}, \quad w \in \mathbb{C}. \tag{8}$$

Пусть функция $f \in \mathscr{V}H_{G+K}$ такова, что $\frac{f}{\varphi} \in H(\mathbb{C})$. По определению $\mathscr{V}H_{G+K}$ для любого $n \in \mathbb{N}$ существует $B > 0$ такое, что

$$\ln|f(w)| \leqslant B + H_{G+K}(w) - n|w|^{\alpha_*}, \quad w \in \mathbb{C}. \tag{9}$$

Поэтому, учитывая (7) и (9), имеем

$$\begin{aligned}&\sup_{\zeta''\in B(\zeta',2|\zeta|^{\alpha_*})}\ln|f(\zeta'')|\\ &\leqslant B+\sup_{|\zeta''-\zeta|\leqslant 3|\zeta|^{\alpha_*}}\big(H_{G+K}(\zeta'')-n|\zeta''|^{\alpha_*}\big)\\ &\leqslant B+H_{G+K}(\zeta)+\big(3R_{G+K}-n2^{-\alpha_*}\big)\,|\zeta|^{\alpha_*}.\end{aligned}\tag{10}$$

Аналогично в силу (8) получаем

$$\sup_{\zeta''\in B(\zeta',2|\zeta|^{\alpha_*})}\ln|\varphi(\zeta'')|\leqslant A+H_K(\zeta)+\big(3R_K+4^{\alpha_*}k_0\big)|\zeta|^{\alpha_*}.\tag{11}$$

Теперь все необходимое для применения леммы 3 готово. Применив ее к $R:=2|\zeta|^{\alpha_*}$, $\Phi(w):=\varphi(\zeta'+w)$ и $F(w):=f(\zeta'+w)$ и использовав неравенства (10), (11) и условие (S^{α_*}) на функцию φ, для $w=\zeta-\zeta'$ имеем

$$\begin{aligned}\ln\left|\frac{f(\zeta)}{\varphi(\zeta)}\right|&\leqslant B+H_{G+K}(\zeta)+\big(3R_{G+K}-n2^{-\alpha_*}\big)\,|\zeta|^{\alpha_*}\\ &+\frac{2|\zeta-\zeta'|}{2|\zeta|^{\alpha_*}-|\zeta-\zeta'|}\left(A+H_K(\zeta)+(3R_K+4^{\alpha_*}k_0)\,|\zeta|^{\alpha_*}\right)-\frac{2|\zeta|^{\alpha_*}+|\zeta-\zeta'|}{2|\zeta|^{\alpha_*}-|\zeta-\zeta'|}\left(H_K(\zeta)-s|\zeta|^{\alpha_*}\right)\\ &\leqslant B+2A+H_G(\zeta)-\big(n2^{-\alpha_*}-3R_{G+K}-2k_04^{\alpha_*}-6R_K-3s\big)\,|\zeta|^{\alpha_*}.\end{aligned}$$

В силу произвольности n отсюда следует, что $\frac{f}{\varphi}\in\mathscr{V}H_G$, и предложение доказано. ▷

Из теоремы 2 и предложения 3 вытекает непосредственно

Предложение 4. *Пусть $\mathscr{V}=(n(d(\lambda))^{-\alpha})_{n=1}^{\infty}$ и μ — аналитический функционал, для которого $\hat\mu\in\mathscr{V}H_K^\infty$ и $h_{\hat\mu}=H_K$. Если $\hat\mu$ удовлетворяет условию (S^{α_*}), то оператор свертки $\mu*:\mathscr{V}H(G+K)\to\mathscr{V}H(G)$ является сюръективным.*

Теперь докажем, что условие (S^{α_*}) является и необходимым для того, чтобы для любой ограниченной выпуклой области G оператор свертки действовал сюръективно из $\mathscr{V}H(G+K)$ в $\mathscr{V}H(G)$. Следующая лемма содержит эквивалентную переформулировку условия (S^{α_*}) и доказывается тем же методом, что и лемма 3.7 в [5].

Лемма 4. *Пусть $\mathscr{V}=(n(d(\lambda))^{-\alpha})_{n=1}^{\infty}$. Функция $g\in\mathscr{V}H_K^\infty$ с индикатором H_K удовлетворяет условию (S^{α_*}) тогда и только тогда, когда существуют числа $s,j\in\mathbb{N}$, $N>0$ такие, что для любой точки a единичной окружности*

$$\sup_{|w-a|\leqslant jt^{-\frac{1}{\alpha+1}}}\ln|g(tw)|\geqslant tH_K(a)-s\,t^{\alpha_*}\quad(\forall\,t\geqslant N).\tag{12}$$

Лемма 5. *Пусть $\mathscr{V}=(n(d(\lambda))^{-\alpha})_{n=1}^{\infty}$. Пусть, далее, $g\in\mathscr{V}H_K^\infty$ удовлетворяет условию (ii) теоремы 2 для любого ограниченного выпуклого многоугольника $G\subset\mathbb{C}$. Тогда индикатор h_g этой функции совпадает с H_K и g удовлетворяет условию (S^{α_*}).*

◁ Заметим, что из условия (ii) теоремы 2 для g следует существование чисел $m\in\mathbb{N}$, $M>0$ таких, что

$$\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|f(z)|}{e^{H_G(z)}}\leqslant M\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|g(z)|\cdot|f(z)|}{e^{H_G(z)+H_K(z)-m|z|^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}}}\quad(\forall\,f\in\mathscr{V}H_G).\tag{13}$$

Будем рассуждать от противного и предположим, что индикатор h_g функции g не совпадает с H_K или совпадает с H_K, но при этом сама функция g не удовлетворяет условию (S^{α_*}). Из леммы 4 следует, что в обоих случаях функция g не удовлетворяет тогда и условию (12). Поэтому существуют точка $a \in S$ и последовательность $(t_j)_{j=1}^{\infty}$ с $t_j \geqslant 1$ ($j \in \mathbb{N}$), $t_j \to \infty$ при $j \to \infty$ такие, что

$$\sup_{|w-a|\leqslant j t_j^{-\frac{1}{\alpha+1}}} |g(t_j w)| \leqslant t_j H_K(a) - j^2 t_j^{\alpha_*} \quad (\forall\, j \in \mathbb{N}). \tag{14}$$

Без ограничения общности можно считать, что $t_j \geqslant j^{\alpha+2}$ при всех $j \in \mathbb{N}$.

Как и выше, $R_K := \max_{z\in K} |z|$. Положим $z_j := t_j a$, $r_j := j|z_j|^{\alpha_*} = j t_j^{\alpha_*}$ и заметим, что для w из круга $|w - z_j| \leqslant r_j$ верно $\frac{2}{3}|w| \leqslant t_j \leqslant 2|w|$. В этих обозначениях (14) равносильно тому, что для всех w из круга $|w - z_j| \leqslant r_j$

$$\ln|g(w)| \leqslant H_K(z_j) - j^2 t_j^{\alpha_*}.$$

Заметив, что для тех же w

$$|w| \leqslant \frac{3}{2}|t_j| \quad \text{и} \quad H_K(z_j) \leqslant H_K(w) + r_j R_K = H_K(w) + j t_j^{\alpha_*} R_K,$$

заключаем, что при всех j, начиная с некоторого j_0,

$$\ln|g(w)| \leqslant H_K(w) + j t_j^{\alpha_*} R_K - j^2 t_j^{\alpha_*} \leqslant H_K(w) - \frac{j^2}{3}|w|^{\alpha_*}, \quad |w - z_j| \leqslant r_j. \tag{15}$$

Нам потребуется также глобальная оценка g, которая следует из того, что g принадлежит $\mathscr{V} H_K^{\infty}$. В соответствии с этим, при некотором $p > 0$

$$\ln|g(w)| \leqslant H_K(w) + p|w|^{\alpha_*} + p, \quad w \in \mathbb{C}. \tag{16}$$

Пусть теперь G — произвольный ограниченный выпуклый многоугольник. Зафиксируем числовую последовательность $(q_j)_{j=1}^{\infty}$ с $\frac{1}{2} \leqslant q_j \uparrow 1$. Применив те же соображения, что и в доказательстве [5, лемма 3.8], и воспользовавшись леммой 1 из [13], построим последовательности таких целых функций f_j и точек ζ_j с $|\zeta_j - z_j| \leqslant \frac{r_j}{2}$, что при некоторой постоянной $A > 0$ и всех $j \in \mathbb{N}$ имеют место следующие оценки:

$$\ln|f_j(\zeta_j)| \geqslant q_j H_G(\zeta_j) + \frac{\varepsilon_0}{8} j |\zeta_j|^{\alpha_*}, \tag{17}$$

$$\ln|f_j(z)| \leqslant q_j H_G(z) + (2R_G j + 1)|z|^{\alpha_*} + A, \quad |z - z_j| \leqslant \frac{r_j}{2}, \tag{18}$$

$$\ln|f_j(z)| \leqslant q_j H_G(z) + |z|^{\alpha_*} + A, \quad |z - z_j| > \frac{r_j}{2}. \tag{19}$$

Из (15) и (18) следует, что если $|z - z_j| \leqslant \frac{r_j}{2}$, то

$$\ln|g(z) f_j(z)| \leqslant H_G(z) + H_K(z) - \frac{j^2}{4}|z|^{\alpha_*} + A.$$

Поэтому при всех $j > 2\sqrt{m}$

$$\sup_{|z-z_j|\leqslant \frac{r_j}{2}} \frac{|g(z)| \cdot |f_j(z)|}{e^{H_G(z) + H_K(z) - m|z|^{\alpha_*}}} \leqslant e^A.$$

Далее, в силу (16) и (19) при $|z - z_j| > \frac{r_j}{2}$ имеем

$$\ln|g(z)f_j(z)| \leqslant H_G(z) + H_K(z) + (p+1)|z|^{\alpha_*} - (1-q_j)R_G|z| + A.$$

Несложные вычисления показывают, что тогда для всех $j \in \mathbb{N}$

$$\sup_{|z-z_j|>\frac{r_j}{2}} \frac{|g(z)|\cdot|f_j(z)|}{e^{H_G(z)+H_K(z)-m|z|^{\alpha_*}}} \leqslant e^A \sup_{s\geqslant 0} e^{(m+p+1)s^{\alpha_*}-(1-q_j)R_G s} \leqslant e^{A+\frac{C}{(1-q_j)^\alpha}},$$

где $C := \frac{\alpha^\alpha}{(\alpha+1)^{\alpha+1}} \frac{(m+p+1)^{\alpha+1}}{R_G^\alpha}$.

Из приведенных оценок следует, что при всех $j > 2\sqrt{m}$

$$A_j := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|g(z)|\cdot|f_j(z)|}{e^{H_G(z)+H_K(z)-m|z|^{\alpha_*}}} \leqslant e^{A+\frac{C}{(1-q_j)^\alpha}}. \tag{20}$$

Из (18) и (19) непосредственно вытекает, что $f_j \in \mathscr{V}H_G$, $j \in \mathbb{N}$. Кроме того, из (17) следует, что

$$B_j := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f_j(z)|}{e^{H_G(z)}} \geqslant \frac{|f_j(\zeta_j)|}{e^{H_G(\zeta_j)}} \geqslant e^{\frac{\varepsilon_0}{8} j|\zeta_j|^{\alpha_*}-(1-q_j)R_G|\zeta_j|}.$$

Возьмем $q_j = 1 - \frac{\varepsilon_0}{16R_G} j|\zeta_j|^{-\frac{1}{\alpha+1}}$. Тогда

$$B_j \geqslant e^{\left(\frac{\varepsilon_0}{16}\right)^{\alpha+1} \frac{1}{R_G^\alpha} \frac{j^{\alpha+1}}{(1-q_j)^\alpha}}. \tag{21}$$

Заметим, что в силу нашего выбора $t_j \geqslant j^{\alpha+2}$ при всех $j \in \mathbb{N}$. Поэтому $|\zeta_j| \geqslant \frac{1}{2} j^{\alpha+2}$ и, следовательно, $q_j \to 1$ при $j \to \infty$. А тогда из (20) и (21) получаем, что $\frac{B_j}{A_j} \to \infty$ при $j \to \infty$, что противоречит (13). $\rhd$

Из предложения 4, теоремы 2 и леммы 5 следует такой критерий сюръективности операторов свертки для пространств $\mathscr{V}H(G)$ экспоненциально-степенного роста максимального типа.

Теорема 3. *Пусть* $\mathscr{V} = (n(d(\lambda))^{-\alpha})_{n=1}^\infty$, μ *— аналитический функционал в* $\mathbb{C}$ *с носителем в выпуклом компактном множестве* K *и* $\hat{\mu} \in \mathscr{V}H_K^\infty$. *Следующие два условия эквивалентны:*

1) *оператор* $\mu* : \mathscr{V}H(G+K) \to \mathscr{V}H(G)$ *сюръективен для любой выпуклой ограниченной области* G*;*

2) $h_{\hat{\mu}} = H_K$ *и* $\hat{\mu}$ *удовлетворяет условию* (S^{α_*}).

2.2. Критерии сюръективности операторов свертки в пространствах нормального типа. Пространства $\mathscr{V}H(G)$ экспоненциально-степенного роста нормального типа задаются весовыми последовательностями $\mathscr{V} = (v_n)_{n=1}^\infty$ с $v_n(\lambda) := \left(1 - \frac{1}{n}\right)(d(\lambda))^{-\alpha}$, $n \geqslant 2$. Здесь и ниже по-прежнему $0 < \alpha < 1$ и $\alpha_* := \frac{\alpha}{\alpha+1}$. В данном случае пространство мультипликаторов из $\mathscr{V}H_G$ в $\mathscr{V}H_{G+K}$ имеет вид

$$\mathscr{V}H_K^\infty := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) :\ \sup_{\zeta\in\mathbb{C}} \frac{|f(\zeta)|}{e^{H_K(\zeta)+\varepsilon|\zeta|^{\alpha_*}}} < \infty \ \ (\forall\, \varepsilon > 0) \right\}.$$

А условие регулярности роста символа, обеспечивающее сюръективность операторов свертки в пространствах данного типа, формулируется следующим образом.

Будем говорить, что целая $\varphi(\zeta)$ экспоненциального типа удовлетворяет условию $(S_0^{\alpha_*})$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют $N > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для каждой точки $\zeta \in \mathbb{C}$ с $|\zeta| > N$ найдется точка $\zeta' \in \mathbb{C}$ с $|\zeta' - \zeta| < \delta|\zeta|^{\alpha_*}$, для которой

$$\ln|\varphi(\zeta')| \geqslant h_\varphi(\zeta) - \varepsilon|\zeta|^{\alpha_*}.$$

Приведем формулировки аналогов основных результатов предыдущего пункта для пространств экспоненциально-степенного роста нормального типа.

Предложение 5. *Пусть* $\mathscr{V} = \big((1-\frac{1}{n})(d(\lambda))^{-\alpha}\big)_{n=2}^{\infty}$ *и* μ *— аналитический функционал, для которого* $\hat\mu \in \mathscr{V}H_K^\infty$ *и* $h_{\hat\mu} = H_K$. *Если* $\hat\mu$ *удовлетворяет условию* $(S_0^{\alpha_*})$, *то оператор свертки* $\mu* : \mathscr{V}H(G+K) \to \mathscr{V}H(G)$ *является сюръективным.*

Теорема 4. *Пусть* $\mathscr{V} = \big((1-\frac{1}{n})(d(\lambda))^{-\alpha}\big)_{n=2}^{\infty}$, μ *— аналитический функционал в* $\mathbb{C}$ *с носителем в выпуклом компактном множестве* K *и* $\hat\mu \in \mathscr{V}H_K^\infty$. *Следующие два условия эквивалентны:*

1) *оператор* $\mu* : \mathscr{V}H(G+K) \to \mathscr{V}H(G)$ *сюръективен для любой выпуклой ограниченной области* G;

2) $h_{\hat\mu} = H_K$ *и* $\hat\mu$ *удовлетворяет условию* $(S_0^{\alpha_*})$.

Литература

1. *Коробейник Ю. Ф.* О разрешимости в комплексной области некоторых классов линейных операторных уравнений.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2009.—251 с.
2. *Melikhov S. N., Momm S.* Analytic solutions of convolution equations on convex sets with an obstacle in the boundary // Math. Scand.—2000.—Vol. 86, № 2.—P. 293–319.
3. *Momm S.* A division problem in the space of entire functions of exponential type // Ark. Mat.—1994.—Vol. 32, № 1.—P. 213–236. DOI: 10.1007/BF02559529.
4. *Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Khoi.* Surjectivity criteria for convolution operators in $A^{-\infty}$ // C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I.—2010.—Vol. 348, № 5–6.—P. 253–256. DOI: 10.1016/j.crma.2010.01.015.
5. *Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Khoi.* Convolution operators in $A^{-\infty}$ for convex domains // Ark. Mat.—2012.—Vol. 50, № 1.—P. 1–22. DOI: 10.1007/s11512-011-0146-4.
6. *Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Khoi.* Extension of solutions of convolution equations in spaces of holomorphic functions with polynomial growth in convex domains // Bull. Sci. Math.—2012.—Vol. 136, № 1.—P. 96–110. DOI: 10.1016/j.bulsci.2011.06.002.
7. *Епифанов О. В.* О разрешимости неоднородного уравнения Коши — Римана в классах функций, ограниченных с весом и системой весов // Мат. заметки.—1992.—Т. 51, № 1.—С. 83–92.
8. *Полякова Д. А.* О разрешимости неоднородного уравнения Коши — Римана в проективных весовых пространствах // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 58, № 1.—С. 185–198.
9. *Андреева Т. М.* Описание сопряженных для весовых пространств голоморфных функций заданного роста в выпуклых ограниченных областях // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—2018.—№ 1.—С. 4–9.
10. *Напалков В. В.* Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1987.—Т. 51, № 2.—С. 287–305.
11. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Continuation of holomorphic functions and some of its applications // Studia Math.—2010.—Vol. 200, № 3.—P. 279–295. DOI: 10.4064/sm200-3-5.
12. *Hörmander L.* On the range of convolution operators // Ann. Math.—1962.—Vol. 76, № 1.—P. 148–170. DOI: 10.2307/1970269.
13. *Абанин А. В.* Густые пространства и аналитические мультипликаторы // Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки.—1994.—№ 4.—С. 3–10.

Статья поступила 13 декабря 2017 г.

Абанин Александр Васильевич
Южный федеральный университет,
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
заведующий кафедрой математического анализа;

Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
заведующий отделом математического анализа
E-mail: `avabanin@sfedu.ru`
http://orcid.org//0000-0003-4507-4508

Андреева Татьяна Михайловна
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
младший научный сотрудник отдела математического анализа
E-mail: `metzi@yandex.ru`
http://orcid.org//0000-0002-6449-0294

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 2, P. 3–15

ON THE SURJECTIVITY OF THE CONVOLUTION OPERATOR IN SPACES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS OF A PRESCRIBED GROWTH

Abanin A. V.[1,2], Andreeva T. M.[2]
[1] Southern Federal University;
[2] Southern Mathematical Institute — the Affiliate of VSC RAS

Abstract. We consider the weighted (DFS)-spaces of holomorphic functions in a bounded convex domain G of the complex plane $\mathbb{C}$ having a prescribed growth given by some sequence of weights satisfying several general and natural conditions. Under these conditions the problem of the continuity and surjectivity of a convolution operator from $H(G+K)$ into (onto) $H(G)$ is studied. Here K is a fixed compact subset in $\mathbb{C}$. We answer the problem in terms of the Laplace transformation of the linear functional that determines the convolution operator (it is called the symbol of the convolution operator). In spaces of a general type we obtain a functional criterion for a convolution operator to be surjective from $H(G+K)$ onto $H(G)$. In the particular case of spaces of exponential-power growth of the maximal and normal types we establish some sufficient conditions on the symbol's behaviour for the corresponding convolution operator to be surjective. These conditions are stated in terms of some lower estimates of the symbol. In addition, we show that these conditions are necessary for the convolution operator to be surjective for all bounded convex domains G in $\mathbb{C}$. In fact, we obtain a criterion for a surjective convolution operator in spaces of holomorphic functions of exponential-power growth on the class of all bounded convex domains in $\mathbb{C}$. Similar previous results were available for only the particular space of holomorphic functions having the polynomial growth in bounded convex domains.

Keywords: weighted spaces, holomorphic functions, convolution operator, surjectivity, spaces of exponential-power growth.

References

1. *Korobeinik Yu. F. O razreshimosti v kompleksnoy oblasti nekotorykh klassov lineynykh operatornykh uravneniy* [*On the Solvability of Certain Classes of Linear Operator Equations in a Complex Domain*], Rostov-na-Donu, Yuzhnyi Federalnyi Universitet, 2009, 251 p. (in Russian).
2. *Melikhov S. N., Momm S.* Analytic Solutions of Convolution Equations on Convex Sets with an Obstacle in the Boundary, *Math. Scand.*, 2000, vol. 86, no. 2, pp. 293–319.

3. *Momm S.* A Division Problem in the Space of Entire Functions of Exponential Type, *Ark. Mat.*, 1994, vol. 32, no. 1, pp. 213–236. DOI: 10.1007/BF02559529.
4. *Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Khoi.* Surjectivity Criteria for Convolution Operators in $A^{-\infty}$, *C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 2010, vol. 348, no. 5–6, pp. 253–256. DOI: 10.1016/j.crma.2010.01.015.
5. *Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Khoi.* Convolution Operators in $A^{-\infty}$ for Convex Domains, *Ark. Mat.*, 2012, vol. 50, no. 1, pp. 1–22. DOI: 10.1007/s11512-011-0146-4.
6. *Abanin A. V., Ishimura R., Le Hai Khoi.* Extension of Solutions of Convolution Equations in Spaces of Holomorphic Functions with Polynomial Growth in Convex Domains, *Bull. Sci. Math.*, 2012, vol. 136, no. 1, pp. 96–110. DOI: 10.1016/j.bulsci.2011.06.002.
7. *Epifanov O. V.* On Solvability of the Nonhomogeneous Cauchy–Riemann Equation in Classes of Functions that are Bounded with Weights or Systems of Weights, *Math. Notes*, 1992, vol. 51, no. 1, pp. 54–60. DOI: 10.1007/BF01229435.
8. *Polyakova D. A.* Solvability of Inhomogeneous Cauchy–Riemann Equation in Projective Weighted Spaces, *Siberian Math. J.*, 2017, vol. 58, no. 1, pp. 142–152. DOI: 10.1134/S0037446617010189.
9. *Andreeva T. M.* Duals for Weighted Spaces of Holomorphic Functions of Prescribed Growth in Bounded Convex Domains, *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki* [*Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Sev.-Kavk. Reg. Estestv. Nauki*], 2018, no. 1, pp. 4–9 (in Russian).
10. *Napalkov V. V.* Spaces of Analytic Functions of Prescribed Growth Near the Boundary, *Math. USSR-Izv.*, 1988, vol. 30, no. 2, pp. 263–281. DOI: 10.1070/IM1988v030n02ABEH001008.
11. *Abanin A. V., Pham Trong Tien.* Continuation of Holomorphic Functions with Growth Conditions and Some of its Applications, *Studia Math.*, 2010, vol. 200, no. 3, pp. 279–295. DOI: 10.4064/sm200-3-5.
12. *Hörmander L.* On the Range of Convolution Operators, *Ann. of Math.*, 1962, vol. 76, no. 1, pp. 148–170. DOI: 10.2307/1970269.
13. *Abanin A. V.* Thick Spaces and Analytic Multipliers, *Izvestiya vuzov. Severo-Kavkazskiy region. Estestvennye nauki* [*Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Sev.-Kavk. Reg. Estestv. Nauki*], 1994, no. 4, pp. 3–10 (in Russian).

Received December 13, 2017

Alexander V. Abanin
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova Street, Rostov-on-Don 344090, Russia

Southern Mathematical Institute — the Affiliate of VSC RAS
22 Marcus Street, Vladikavkaz, 362027, Russia
E-mail: abanin@math.rsu.ru
http://orcid.org//0000-0003-4507-4508

Tatiana M. Andreeva
Southern Mathematical Institute — the Affiliate of VSC RAS
22 Marcus Street, Vladikavkaz 362027, Russia
E-mail: metzi@yandex.ru
http://orcid.org//0000-0002-6449-0294