Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 80–85

УДК 512.54
DOI 10.23671/VNC.2018.2.14724

О БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУППАХ ФРОБЕНИУСА[1]

Д. В. Лыткина, В. Д. Мазуров, А. Х. Журтов

К 65-летию Анатолия Георгиевича Кусраева

Аннотация. В работе исследуется строение периодической группы, удовлетворяющей следующим условиям: (F_1) Группа G является полупрямым произведением подгруппы F на подгруппу H; (F_2) H действует свободно на F относительно сопряжения в G, т. е. $f^h = f$ для элементов $f \in F$, $h \in H$ только в случаях $f = 1$ или $h = 1$. Иными словами, H действует на F как группа регулярных автоморфизмов. (F_3) Порядок любого элемента $g \in G$ вида $g = fh$, где $f \in F$, $1 \neq h \in H$, равен порядку h; иными словами, любой нетривиальный элемент из H индуцирует при сопряжении в G расщепляющий автоморфизм подгруппы F. (F_4) Подгруппа H порождается элементами порядка 3. В частности, показывается, что ранг любого главного фактора группы G внутри F не превосходит четырех. Если G — конечная группа Фробениуса, то условие (F_3) — следствие условий (F_1) и (F_2). Для бесконечных групп с условиями (F_1) и (F_2) условие (F_3) может не выполняться, и группой Фробениуса мы будем называть группу, для которой выполнены все три условия (F_1)–(F_3). Основной результат статьи дает описание периодических групп Фробениуса, обладающих свойством (F_4).

Ключевые слова: периодическая группа, группа Фробениуса, свободное действие, расщепляющий автоморфизм.

1. Введение

В работе исследуется строение периодических групп, удовлетворяющих следующим условиям:

(F_1) Группа G является полупрямым произведением подгруппы F на подгруппу H, где

(F_2) H действует свободно на F относительно сопряжения в G, т. е. $f^h = f$ для элементов $f \in F$, $h \in H$ только в случаях $f = 1$ или $h = 1$. Иными словами, H действует на F как группа регулярных автоморфизмов.

(F_3) Порядок любого элемента $g \in G$ вида $g = fh$, где $f \in F$, $1 \neq h \in H$, равен порядку h; иными словами, любой нетривиальный элемент из H индуцирует при сопряжении в G расщепляющий автоморфизм подгруппы F.

(F_4) Подгруппа H порождается элементами порядка 3.

Если G — конечная группа, то условие (F_3) — следствие условий (F_1) и (F_2) и группа G является группой Фробениуса. Для бесконечных групп с условиями (F_1) и (F_2) условие (F_3) может не выполняться, и группой Фробениуса мы будем называть группу, для которой выполнены все три условия (F_1)–(F_3).

[1] Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.1., проект № 0314-2016-001.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема. *Пусть G — периодическая группа, удовлетворяющая условиям (F_1)–(F_4). Тогда*

1. *Подгруппа H конечна, и либо $H \simeq SL_2(p)$, где $p = 3$ или $p = 5$, либо H циклическая порядка 3.*

2. *Если $H = \langle h \rangle$ — циклическая группа порядка 3, то F нильпотентна ступени 2 (т. е. $[[f_1, f_2], f_3] = 1$ для всех $f_1, f_2, f_3 \in F$) и любой главный фактор C группы G внутри F является элементарной абелевой группой порядка p или p^2 для некоторого простого $p \neq 3$.*

3. *Если $H \simeq SL_2(3)$, то F абелева и каждый главный фактор C группы G внутри F является элементарной абелевой группой порядка p^2 для некоторого простого числа $p > 3$.*

4. *Если $H \simeq SL_2(5)$, то F абелева и любой главный фактор группы G внутри F является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа $p > 5$.*

При этом, если p^2-1 делится на 5, то размерность C как $HGF(p)$-модуля равна двум, в противном случае размерность C равна 4.

Определение 1. Пусть F, F_1, F_2 — нормальные подгруппы группы G и F_2 — собственная подгруппа в F_1. Факторгруппа $V = F_1/F_2$ называется *главным фактором* группы G, если любая нормальная подгруппа F_3 группы G, содержащаяся в F_1 и содержащая F_2, совпадает с F_1 или F_2. Если при этом $F_1 \leqslant F$, то V называется *главным фактором группы G внутри F*.

Определение 2. Пусть группа H действует на группе F. Это действие называется *свободным*, если образ f^h элемента $f \in F$ под действием $h \in H$ совпадает с f, только если $f = 1$ или $h = 1$. Другими словами, H действует на F как группа регулярных автоморфизмов.

Определение 3. Автоморфизм a конечного порядка $n \neq 1$ группы F называется *расщепляющим автоморфизмом*, если $f \cdot f^a \cdot \dots \cdot f^{a^{n-1}} = 1$ для любого элемента $f \in F$.

Определение 4. В настоящей работе *группой Фробениуса* G называется полупрямое произведение $G = F \leftthreetimes H$ нетривиальных групп F и H, для которых выполнены следующие условия:

(а) H действует свободно на F;

(б) любой отличный от единицы элемент $h \in H$ конечного порядка действует на F как расщепляющий автоморфизм.

Группа F в этом случае называется *ядром*, а H — *дополнением* группы Фробениуса G.

Для конечных групп F и H это определение эквивалентно обычному определению группы Фробениуса; для бесконечных групп часто используются другие определения, не эквивалентные этому.

2. Предварительные результаты

Лемма 1. *Пусть конечная группа H действует свободно на абелевой группе F. Тогда:*

(а) *Естественное полупрямое произведение $G = F \leftthreetimes H$ является группой Фробениуса с ядром F и дополнением H.*

(б) *Если группа F периодическая, то любой главный фактор V группы G внутри F является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа p, взаимно простого с $|H|$, и H действует свободно и неприводимо на V при сопряжении в G.*

$\lhd$ (а): Нужно только проверить условие (F_3) из определения группы Фробениуса.

Пусть $g = fh$, где $f \in F$, $1 \neq h \in H$, и порядок h равен n. Тогда

$$(fh)^n = fh \cdot fh \cdot fh \cdots fh = f \cdot hfh^{-1}h^2fh^{-2}h \cdots fh = ff^{h^{n-1}}f^{h^{n-2}} \cdots f^h$$

и

$$((fh)^n)^h = f^h f^{h^n} f^{h^{n-1}} \cdots f^{h^2} = (fh)^n$$

в силу коммутативности F. Так как h действует на F без неподвижных точек, то $(fh)^n = 1$.

(б) Пусть F_1/F_2 — главный фактор G внутри F. Можно считать, что $F_1 = F$ и $F_2 \neq 1$. Из коммутативности F и конечности H вытекает, что $V = F/F_2$ — конечная элементарная абелева p-группа для некоторого простого числа p. Если $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n$ — минимальный набор порождающих группы V, $V_0 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ — множество некоторых прообразов элементов $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$ в F, то $V_1 = \langle V_0^H \rangle$ — конечно порожденная H-инвариантная подгруппа в F и группа $V_1/V_1 \cap F_2$ изоморфна как H-модуль группе V. Поэтому можно считать, что F конечно порождена. Так как группа F по условию периодическая, то она конечна, и G — группа Фробениуса. Для этого случая справедливость заключения леммы хорошо известна. $\rhd$

Лемма 2. *Пусть нетривиальная периодическая группа G, порожденная элементами порядка 3, действует свободно на нетривиальной абелевой группе. Тогда G конечна и изморфна либо $SL_2(5)$, либо $SL_2(3)$, либо циклической группе порядка 3.*

$\lhd$ Лемма является частным случаем теоремы 1 из [1]. $\rhd$

Лемма 3 [2]**.** *Нетривиальная группа X, допускающая расщепляющий автоморфизм порядка 3, нильпотентна ступени, не превосходящей числа 3, и порядок каждого нетривиального элемента из третьего члена нижнего центрального ряда группы X равен 3.*

Лемма 4. *Пусть G — группа Фробениуса, порожденная элементами порядка 3. Тогда либо дополнение Фробениуса H группы G является циклической группой порядка 3 и при этом ядро F группы G нильпотентно ступени 1 или 2, либо ядро H изоморфно $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$ и F — абелева группа.*

$\lhd$ Пусть F — ядро Фробениуса группы G, h — элемент порядка 3 из H. Тогда h индуцирует в F при сопряжении в G расщепляющий автоморфизм. По лемме 3 F нильпотентна и период третьего члена $F_3 = [F, F, F]$ нижнего центрального ряда группы F равен 3. Так как h при сопряжении в G индуцирует в F_3 регулярный автоморфизм, то $F_3 = 1$, т. е. ступень нильпотентности F не превосходит двух. Подгруппа H действует свободно на центре Z группы F, и по лемме 2 H удовлетворяет заключению леммы. Если H содержит элемент t порядка 2, то $ff^t = 1$ для любого элемента $f \in F$, поэтому $f^t = f^{-1}$, откуда вытекает коммутативность F. $\rhd$

Лемма 5. *Пусть конечная группа H действует на модуле V над полем P, характеристика которого не делит $|H|$. Это действие является свободным тогда и только тогда, когда для любой циклической подгруппы $A \leqslant H$ простого порядка верно равенство*

$$s = \sum_{a \in A} \chi(a) = 0,$$

где χ — характер представления H на V.

$\lhd$ Доказательство тривиально, поскольку $s/|H|$ равно размерности пространства неподвижных точек подгруппы A в V. $\rhd$

Лемма 6. *Пусть $H = SL_2(3)$ (соответственно, $H = SL_2(5)$) и P — поле, характеристика которого не делит $|H|$. Тогда существует единственный с точностью до подобия* *(и алгебраической сопряженности) (абсолютно) неприводимый HP-модуль V, на котором H действует свободно. При этом $\dim(V) = 2$ и значения характера V на элементах H лежат в поле P (соответственно, в поле $P(\lambda)$, где λ — корень полинома $x^2 + x - 1$).*

$\lhd$ Доказательство вытекает из леммы 6 и соответствующих вычислений таблицы характеров групп $SL_2(3)$ и $SL_2(5)$, доступных в GAP [3] с помощью команд:

```
H:=SL(2,3); (соответственно, H:=SL(2,5);) C:=CharacterTable(C);
Display(C);
```

Таблица 1

Характеры $SL_2(3)$

	$1a$	$2a$	$4a$	$3a$	$6a$	$3b$	$6b$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	1	1	1	ε	ε	ε^2	ε^2
χ_3	1	1	1	ε^2	ε^2	ε	ε
χ_4	3	3	-1	.	.	.	.
χ_5	2	-2	.	-1	1	-1	1
χ_6	2	-2	.	$-\varepsilon$	ε	$-\varepsilon^2$	ε^2
χ_7	2	-2	.	$-\varepsilon^2$	ε^2	$-\varepsilon$	ε

Здесь ε — корень полинома $x^2 + x + 1$.

Таблица 2

Характеры $SL_2(5)$

	$1a$	$10a$	$10b$	$2a$	$5a$	$5b$	$3a$	$6a$	$4a$
χ_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
χ_2	2	σ	σ^*	-2	$-\sigma$	$-\sigma^*$	-1	1	.
χ_3	2	σ^*	σ	-2	$-\sigma^*$	$-\sigma$	-1	1	.
χ_4	3	σ^*	σ	3	σ^*	σ	.	.	-1
χ_5	3	σ	σ^*	3	σ	σ^*	.	.	-1
χ_6	4	-1	-1	4	-1	-1	1	1	.
χ_7	4	1	1	-4	-1	-1	1	-1	.
χ_8	5	.	.	5	.	.	-1	-1	1
χ_9	6	-1	-1	-6	1	1	.	.	.

Здесь σ и σ^* — различные корни полинома $x^2 + x - 1$.

Для $SL_2(3)$ искомым модулем является модуль, соответствующий характеру χ_5. Значения этого характера лежат в P.

Для $SL_2(5)$ искомым модулем является один из модулей, соответствующих характерам χ_2 и χ_3 (они алгебраически сопряжены). Значения его характера лежат в поле $P(\varepsilon + \varepsilon^{-1})$, где ε — примитивный корень пятой степени из единицы, т. е. корень полинома

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^2\left(x^2 + x + 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = x^2\left(\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{x}\right) - 1\right).$$

Поскольку $\varepsilon + \varepsilon^{-1} \neq 0$, то $\varepsilon + \varepsilon^{-1}$ — корень полинома $x^2 + x - 1$. $\rhd$

Лемма 7. *Пусть χ — характер абсолютно неприводимого представления X конечной группы над полем простой характеристики p. Тогда X эквивалентно некоторому представлению над полем $GF(p)(\chi)$.*

$\lhd$ Доказательство вытекает из [4, следствие 9.23]. $\rhd$

3. Доказательство теоремы

Пусть $G = F \leftthreetimes H$ — группа, удовлетворяющая условиям теоремы. По лемме 4 либо $|H| = 3$ и F — нильпотентная группа ступени 1 или 2, либо $H \simeq SL_2(3)$ или $H \simeq SL_2(5)$ и F абелева. В любом случае по лемме 1 H действует свободно на любом главном факторе V группы G внутри F, и этот фактор является элементарной абелевой p-группой для некоторого простого числа p, взаимно простого с $|H|$.

Если $H = \langle h \rangle$ — циклическая группа порядка 3 и $v \in V$, то $vv^h v^{h^2} = 1$, откуда $v^{h^2} \in \langle v, v^h \rangle$ и V — группа порядка p или p^2. В этом случае теорема доказана.

Пусть $H \simeq SL_2(3)$. Тогда V — неприводимый H-модуль, на котором H действует свободно. По леммам 6 и 7 размерность V равна 2, и в этом случае теорема доказана.

Пусть $H \simeq SL_2(5)$. По леммам 6 и 7 размерность V равна двум, если корни полинома $x^2 + x - 1$ лежат в $GF(p)$, и равна четырем в противном случае. Если ε — примитивный корень степени 5 из единицы, то, как показано выше, $\varepsilon + \varepsilon^{-1}$ — корень полинома $x^2 + x - 1$, и поэтому $\varepsilon + \varepsilon^{-1} \in GF(p)$ тогда и только тогда, когда $\varepsilon \in GF(p^2)$, т. е. когда 5 — делитель числа $p^2 - 1$. Это доказывает теорему.

Литература

1. *Мазуров В. Д.* Обобщение теоремы Цассенхауза // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, № 1.—С. 40–52.
2. *Журтов А. Х.* О регулярных автоморфизмах порядка 3 и парах Фробениуса // Сиб. мат. журн.—2000.—Т. 41, № 2.—С. 329–338.
3. GAP: Groups, algorithms, and programming.—http://www/gap-system.org.
4. *Isaacs I. M.* Character theory of finite groups.—Providence (R. I.): American Math. Soc. Chelsea Publ., 2006.—304 p.

Статья поступила 19 января 2018 г.

Мазуров Виктор Данилович
Институт математики им. Соболева СО РАН
главный научный сотрудник лаборатории теории групп
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4
E-mail: mazurov@math.nsc.ru

Журтов Арчил Хазешович
Кабардино-Балкарский государственный университет
РОССИЯ, 360004, г. Нальчик, ул. Чернышевского, 173
профессор кафедры алгебры и дифференциальных уравнений
E-mail: zhurtov_a@mail.ru

Лыткина Дарья Викторовна
Сибирский гос. ун-т телекоммуникаций и информатики
РОССИЯ, 630102, Новосибирск, ул. Кирова, 86,
профессор кафедры высшей математики

Новосибирский государственный университет
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2
доцент кафедры алгебры и математической логики
E-mail: daria.lytkin@gmail.com

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 2, P. 80–85

ON INFINITE FROBENIUS GROUPS

Mazurov V. D.[1], Zhurtov A. K.[2], Lytkina D. V.[3,4]

[1] Sobolev Institute of Mathematics; [2] Kabardino-Balkar State University;
[3] Siberian State University of Telecommunications and Information Sciences;
[4] Novosibirsk State University

Abstract. We study the structure of a periodic group G satisfying the following conditions: (F_1) The group G is a semidirect product of a subgroup F by a subgroup H; (F_2) H acts freely on F with respect to conjugation in G, i. e. for $f \in F$, $h \in H$ the equality $f^h = f$ holds only for the cases $f = 1$ or $h = 1$. In other words H acts on F as the group of regular automorphisms. (F_3) The order of every element $g \in G$ of the form $g = fh$ with $f \in F$ and $1 \neq h \in H$ is equal to the order of h; in other words, every non-trivial element of H induces with respect to conjugation in G a splitting automorphism of the subgroup F. (F_4) The subgroup H is generated by elements of order 3. In particular, we show that the rank of every principal factor of the group G within F is at most four. If G is a finite Frobenius group, then the conditions (F_1) and (F_2) imply (F_3). For infinite groups with (F_1) and (F_2) the condition (F_3) may be false, and we say that a group is Frobenius if all three conditions (F_1)–(F_3) are satisfied. The main result of the paper gives a description of a periodic Frobenius groups with the property (F_4).

Key words: periodic group, Frobenius group, free action, splitting automorphism.

References

1. *Mazurov V. D.* A Generalization of a Theorem of Zassenhaus, *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal* [Vladikavkaz Math. J.], 2008, vol. 10, no. 1, pp. 40–52 (in Russian).
2. *Zhurtov A. Kh.* On Regular Automorphisms of Order 3 and Frobenius Pairs, *Siberian Math. J.*, 2000, vol. 41, no. 2, pp. 268–275. DOI: 10.1007/BF02674596.
3. *GAP: Groups, Algorithms, and Programming*, http://www/gap-system.org.
4. *Isaacs I. M. Character Theory of Finite Groups*, Providence (R. I.), American Math. Soc. Chelsea Publ., 2006, 304 p.

Received January 19, 2018

Viktor D. Mazurov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug av., Novosibirsk 630090, Russia
E-mail: `mazurov@math.nsc.ru`

Archil Kh. Zhurtov
Kabardino-Balkar State University,
173 Chernyshevskogo st., Nalchik 360004, Russia
E-mail: `zhurtov_a@mail.ru`

Daria V. Lytkina
Siberian State University of Telecommunications
and Information Sciences,
86 Kirova st., Novosibirsk 630102, Russia
Novosibirsk State University,
2 Pirogova st., Novosibirsk 630090, Russia
E-mail: `daria.lytkin@gmail.com`
http://orcid.org//0000-0003-3028-8490