Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 2, С. 62–68

УДК 512.6
DOI 10.23671/VNC.2018.2.14722

О ЦИКЛИЧЕСКИХ ПОДГРУППАХ ПОЛНОЙ ЛИНЕЙНОЙ ГРУППЫ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ НАД ПОЛЕМ НУЛЕВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

У. М. Пачев, М. М. Исакова

К 65-летию Анатолия Георгиевича Кусраева

Аннотация. В работе с помощью понятия спектра матрицы дается явный вид элементов любой циклической подгруппы полной линейной группы $GL_3(F)$ третьей степени над полем F нулевой характеристики. В отличие от итерационных методов возведения матриц в степень каждый элемент циклической подгруппы $\langle M \rangle$ группы $GL_3(F)$ выражен в виде линейной комбинации матриц M^0, M, M^2, коэффициенты которых вычисляются через определители третьего порядка, составленные из некоторых степеней собственных значений матрицы M. По существу мы предлагаем новый подход, основанный на одном свойстве характеристических корней многочлена от матрицы. Отметим также, что излагаемый метод предполагает заранее известными собственные значения матрицы. Это требование, например, всегда выполняется для матриц треугольного вида, при этом вопрос об отыскании собственных значений матриц, которому посвящена довольно обширная литература, в нашу задачу не входит. Наконец, опираясь на результат о явном виде элементов любой циклической подгруппы группы $GL_3(F)$, выводится также формула для числа циклических подгрупп простого порядка p полной линейной группы $GL_3(K^{(p)})$ над p-круговым полем $K^{(p)}$ нулевой характеристики, что представляет самостоятельный интерес в теории бесконечных групп.

Ключевые слова: полная линейная группа, спектр матрицы, диагонализируемая матрица, n-круговое поле, алгебраическое замыкание поля.

В работе дается явный вид любого элемента каждой циклической подгруппы полной линейной группы $GL_3(F)$ третьей степени над произвольным полем F нулевой характеристики. При этом, опираясь на такой результат, в группе $GL_3(F)$ над полем F одного специального вида выделяются некоторые конечные циклические подгруппы. Первые исследования циклических подгрупп полной линейной группы $GL_n(F)$ над полем F при $n = 2$ и $n = 3$ по спектру ее матриц были начаты в [1, 2].

Как и в работе [3] мы даем усиление результатов из [2], относящихся только к случаю алгебраически замкнутого поля. При этом мы используем несколько иной подход, основанный на свойствах характеристических корней многочлена от матрицы (см. [4, с. 60], [5, с. 65]).

Следующий результат, основанный на свойствах спектра многочленной матрицы, позволяет вычислять любой элемент циклической подгруппы полной линейной группы $GL_3(F)$ в случае $\operatorname{char} F = 0$ (предварительное сообщение дано в [6]). Отметим, что вычисление высоких степеней матрицы используется при определении наибольшего по модулю собственного значения матрицы (см. [7, с. 354–355]).

Теорема 1. *Если α, β, γ — характеристические корни матрицы $M \in GL_3(F)$, то циклическая подгруппа $\langle M \rangle$, порожденная матрицей M над полем F нулевой характеристики, определяется равенствами:*

1)
$$M^n = \frac{\Delta_1}{w} M^2 + \frac{\Delta_2}{w} M + \frac{\Delta_3}{w} M^0,$$

при различных α, β, γ;

$$w = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix},$$

Δ_i — определитель, полученный заменой i-го столбца определителя w столбцом

$${}^t(\alpha^n, \beta^n, \gamma^n);$$

2)
$$M^n = -\frac{\Delta_1}{(\alpha-\beta)^2} M^2 - \frac{\Delta_2}{(\alpha-\beta)^2} M - \frac{\Delta_3}{(\alpha-\beta)^2} M^0,$$

где α — двукратный корень; β — простой корень; Δ_i — определитель, полученный заменой i-го столбца определителя

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ \beta^2 & \beta & 1 \end{vmatrix}$$

столбцом ${}^t(\alpha^n, n\alpha^{n-1}, \beta^n)$;

3)
$$M^n = \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2}M^2 + \left(2n - n^2\right)\alpha^{n-1}M + \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\alpha^n M^0,$$

где α — трехкратный характеристический корень матрицы M.

$\lhd$ 1): Пусть $M \in GL_3(F)$ и α, β, γ — различные характеристические корни матрицы M, вообще говоря, принадлежащие кубическому расширению поля F. По теореме Гамильтона — Кэли (см., например, [5, с. 120]) и по формулам Виета при $n = 3$, справедливым и для многочленов над любым полем F имеем

$$M^3 = (\alpha + \beta + \gamma) M^2 - (\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma) M + \alpha\beta\gamma M^0. \tag{1}$$

Из равенства (1) следует, что M^4 тоже можно выразить через M^2, M и M^0, умножая для этого обе части (1) на M и заменяя появляющуюся в левой части матрицу M^3 правой частью (1), и вообще, повторяя последовательно этот процесс нужное число раз, мы получим равенство

$$M^n = p_n M^2 + q_n M + r_n M^0, \tag{2}$$

при некоторых $p_n, q_n, r_n \in F$, $n \geqslant 3$, $M^0 = E$ — единичная матрица третьего порядка.

Пусть λ — собственное значение матрицы M. Тогда, как известно (см., например, [5, с. 61]), если $f(M)$ — многочлен от матрицы M, то собственное значение матрицы $f(M)$ равно $f(\lambda)$. Поэтому ввиду (2) элементы $p_n\lambda^2 + q_n\lambda + r_n$ и λ^n являются собственными значениями матрицы M^n.

Тогда, учитывая, что α^n, β^n, γ^n — собственные значения матрицы M^n получаем систему уравнений

$$\begin{cases} p_n\alpha^2 + q_n\alpha + r_n = \alpha^n, \\ p_n\beta^2 + q_n\beta + r_n = \beta^n, \\ p_n\gamma^2 + q_n\gamma + r_n = \gamma^n. \end{cases} \tag{3}$$

Определитель этой системы

$$w = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ \beta^2 & \beta & 1 \\ \gamma^2 & \gamma & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)(\beta-\gamma) \neq 0$$

— есть определитель Вандермонда третьего порядка. Решая систему (3) по правилу Крамера, находим коэффициенты p_n, q_n, r_n:

$$p_n = \frac{\Delta_1}{w}, \quad q_n = \frac{\Delta_2}{w}, \quad r_n = \frac{\Delta_3}{w},$$

где

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \alpha^n & \alpha & 1 \\ \beta^n & \beta & 1 \\ \gamma^n & \gamma & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha^n & 1 \\ \beta^2 & \beta^n & 1 \\ \gamma^2 & \gamma^n & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & \alpha^n \\ \beta^2 & \beta & \beta^n \\ \gamma^2 & \gamma & \gamma^n \end{vmatrix},$$

тем самым п. 1 доказан.

2): Случай двукратного корня. Пусть α, β, γ — характеристические корни матрицы M, причем α — двукратный, β — простой корень и, значит, $\gamma = \alpha$.

Пусть M удовлетворяет уравнению (2). Тогда рассматриваем многочлен

$$f(x) = x^n - p_n x^2 - q_n x - r_n. \tag{4}$$

Так как α — двукратный корень этого многочлена, то он является также корнем производной многочлена $f(x)$, т. е.

$$n\alpha^{n-1} - 2p_n\alpha - q_n = 0.$$

Тогда получаем систему

$$\begin{cases} p_n\alpha^2 + q_n\alpha + r_n = \alpha^n, \\ 2p_n\alpha + q_n = n\alpha^{n-1}, \\ p_n\beta^2 + q_n\beta + r_n = \beta^n. \end{cases}$$

Так как по условию $\alpha \neq \beta$, то определитель этой системы $-(\alpha-\beta)^2 \neq 0$, и решая относительно p_n, q_n, r_n по правилу Крамера, получаем

$$p_n = -\frac{\Delta_1}{(\alpha-\beta)^2}, \quad q_n = -\frac{\Delta_2}{(\alpha-\beta)^2}, \quad r_n = -\frac{\Delta_3}{(\alpha-\beta)^2},$$

где Δ_i — определитель, полученный заменой i-го столбца определителя

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & 1 \\ 2\alpha & 1 & 0 \\ \beta^2 & \beta & 1 \end{vmatrix}$$

столбцом ${}^t(\alpha^n, n\alpha^{n-1}, \beta^n)$ и тем самым формула для M^n в рассматриваемом случае доказана.

3): Случай трехкратного характеристического корня: $\alpha = \beta = \gamma$. Тогда корень α является корнем многочлена (4) и его первой и второй производной. Поэтому для коэффициентов равенства (2) получаем

$$p_n = \frac{n(n-1)}{2}\,\alpha^{n-2}, \quad q_n = \left(2n - n^2\right)\alpha^{n-1}, \quad r_n = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)\,\alpha^n. \ \triangleright$$

Доказанная теорема 1 позволяет исследовать вопрос о конечных циклических подгруппах полной линейной группы $GL_3\left(K^{(n)}\right)$ над n-круговым полем $K^{(n)}$ являющемся полем разложения двучлена $x^n - 1$ над полем K нулевой характеристики (свойства таких полей изложены в [8, с. 84]). Обозначим через $E^{(n)}$ множество корней многочлена $x^n - 1$. Введем также обозначение $N_3\left(K^{(n)}\right)$ для числа циклических подгрупп порядка n в группе $GL_3\left(K^{(n)}\right)$. Тогда имеет место следующая

Теорема 2. *Для любого простого числа p количество циклических подгрупп порядка p, порождаемых диагонализируемыми матрицами в полной линейной группе $GL_3\left(K^{(p)}\right)$ над p — круговым полем $K^{(p)}$ нулевой характеристики задается формулой*

$$N_3\left(K^{(p)}\right) = p^2 + p + 1.$$

$\lhd$ Сначала будем рассматривать случай матриц с простым спектром, т. е. пусть матрица $M \in GL_3\left(K^{(p)}\right)$ имеет различные характеристические корни α, β, γ, принадлежащие, вообще говоря, алгебраическому замыканию поля $K^{(p)}$. Построим циклическую подгруппу $\langle M\rangle < GL_3\left(K^{(p)}\right)$ простого порядка p, порожденную матрицей M. Для этого в теореме 1 положим $n = p$ и потребуем, чтобы $|\langle M\rangle| = p$, $M^p = E$, $M^k \neq E$ при $1 \leqslant k \leqslant p$, где E — единичная матрица третьего порядка.

В силу теоремы 1 это требование равносильно тому, что

$$\Delta_1 = 0, \quad \Delta_2 = 0, \quad \Delta_3 = w. \tag{5}$$

При этом заметим, что для получения равенства $M^p = E$ другое требование $\frac{\Delta_1}{w}M^2 + \frac{\Delta_2}{w}M = 0$, где 0 — нулевая матрица, не будет иметь места.

Тогда в силу теоремы 1 имеем систему уравнений

$$\begin{vmatrix} \alpha^n & \alpha & 1 \\ \beta^n & \beta & 1 \\ \gamma^n & \gamma & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha^n & 1 \\ \beta^2 & \beta^n & 1 \\ \gamma^2 & \gamma^n & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & \alpha^n \\ \beta^2 & \beta & \beta^n \\ \gamma^2 & \gamma & \gamma^n \end{vmatrix} = w. \tag{6}$$

Решив эту систему относительно α^n, β^n, γ^n, получим $\alpha^n = \beta^n = \gamma^n$. Подставляя их в третье равенство системы (6), будем иметь $\begin{vmatrix} \alpha^2 & \alpha & \alpha^n \\ \beta^2 & \beta & \alpha^n \\ \gamma^2 & \gamma & \alpha^n \end{vmatrix} = w$, откуда $\alpha^n = 1$, но тогда и $\beta^n = 1$, $\gamma^n = 1$, и значит, $\alpha, \beta, \gamma \in K^{(p)}$, точнее α, β, $\gamma \in E^{(p)}$. Но так как матрица M по условию имеет простой спектр, то над алгебраическом замыкании поля $K^{(p)}$ она приводится к диагональному виду. Поэтому не нарушая общности рассуждений можно считать $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$, где $\alpha, \beta, \gamma \in E^{(p)}$.

Рассмотрим теперь случай матрицы M, имеющей двукратный характеристический корень α и простой корень β, пока считая их принадлежащими алгебраическому замыканию поля $K^{(p)}$. Поскольку любую матрицу над алгебраически замкнутым полем можно привести к треугольному виду, то сразу можем считать, что $M = \begin{pmatrix} \alpha & x & y \\ 0 & \alpha & z \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$, где x, y, z — некоторые элементы из алгебраического замыкания поля $K^{(p)}$. Тогда имеем

$$M^p = \begin{pmatrix} \alpha^p & p\alpha^{p-1}x & \frac{\alpha^p - \beta^p}{\alpha - \beta}y \\ 0 & \alpha^p & \frac{\alpha^p - \beta^p}{\alpha - \beta}z \\ 0 & 0 & \beta^p \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Требуя теперь, чтобы $M^p = E$, будем иметь, что $p\alpha^{p-1}x = 0$, откуда $x = 0$, поскольку поле $K^{(p)}$ имеет нулевую характеристику.

Учитывая еще при этом, что $\alpha^p = \beta^p = 1$, получаем $M^p = E$, где $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & y \\ 0 & \alpha & z \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Если $y = 0$, $z = 0$ то $M^p = E$ и $M = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ и значит, циклические подгруппы порядка p, порождаемые такими матрицами будут включены в конечную совокупность из $N_3\left(K^{(p)}\right)$ циклических подгрупп группы $GL_3\left(K^{(p)}\right)$.

В случае трехкратного характеристического корня α (7) будет иметь вид

$$M^p = \begin{pmatrix} \alpha^p & 0 & p\alpha^{p-1}y \\ 0 & \alpha^p & p\alpha^{p-1}z \\ 0 & 0 & \alpha^p \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица M будет порождающим элементом циклической подгруппы порядка p, только тогда, когда $\alpha^p = 1$ и $y = 0$, $z = 0$, т. е. $\alpha \in E^{(p)}$.

Таким образом, нами установлено, что порождающая матрица $M \neq E$ циклической подгруппы порядка p группы $GL_3\left(K^{(p)}\right)$ должна иметь диагональный вид, причем ее диагональные элементы принадлежат $E^{(p)}$.

Перейдем теперь к подсчету числа циклических подгрупп порядка p в $GL_3\left(K^{(p)}\right)$. Количество всевозможных матриц M указанных видов равно числу размещений с повторениями $\overline{A}_p^3 = p^3$. Выберем произвольную матрицу M_1, порождающую циклическую подгруппу $\langle M_1 \rangle$ порядка p в группе $GL_3\left(K^{(p)}\right)$. Строим вторую циклическую подгруппу $\langle M_2 \rangle$ порядка p в $GL_3\left(K^{(p)}\right)$ так, чтобы $\langle M_1 \rangle \cap \langle M_2 \rangle = \{E\}$. Продолжая этот процесс, на последнем шаге строим циклическую подгруппу $\langle M_s \rangle$, где $s = N_3\left(K^{(p)}\right)$, при этом каждой циклической подгруппе $\langle M_i \rangle$ взаимно однозначно сопоставляется упорядоченный набор трех элементов из $E^{(p)}$, вообще говоря, с повторениями таких элементов. Так как в этих циклических подгруппах имеется только один общий элемент E, повторяющийся p раз, то из общего количества матриц, входящих во все циклические подгруппы нужно исключить $N_3\left(K^{(p)}\right) - 1$ единичных матриц E и в результате получим p^3 матриц. Поэтому имеем $pN_3\left(K^{(p)}\right) - \left(N_3\left(K^{(p)}\right) - 1\right) = p^3$, откуда $N_3\left(K^{(n)}\right) = p^2 + p + 1$. $\rhd$

Литература

1. *Пачев У. М., Шокуев В. Н.* Циклические подгруппы группы $GL_2(F)$ // Изв. КБНЦ РАН.—2001.—Т. 7, № 2.—С. 72–74.
2. *Шокуев В. Н.* Циклические подгруппы группы $GL_3(F)$ // Изв. КБНЦ РАН.—2001.—Т. 7, № 2.—С. 75–77.
3. *Жемухова М. З., Пачев У. М.* Циклические подгруппы полной линейной группы второй степени над полем нулевой характеристикой // Владикавк. мат. журн.—2011.—Т. 13, № 3.—С. 17–21.
4. *Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А.* Матрицы и вычисления.—М.: Наука, 1984.—320 с.
5. *Ланкастер П.* Теория матриц.—М.: Наука, 1973.—280 с.
6. *Пачев У. М.* Циклические подгруппы группы $GL_3(F)$ над полем нулевой характеристики // Материалы Междунар. научной конф. «Актуальные проблемы прикладной математики и физики» (Нальчик–Терскол, 17–21 мая 2017 г.).—Нальчик: Изд-во ИПМА КБНЦ РАН, 2017.—С. 167–168.
7. *Фаддеев Д. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры.—М.: Физматгиз, 1963.—736 с.
8. *Лидл Р., Нидеррайтер Г.* Конечные поля. Т. 1.—М.: Мир, 1988.—430 с.
9. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру.—М.: Наука, 1977.—497 с.

Статья поступила 2 февраля 2018 г.

Пачев Урусби Мухамедович
Кабардино-Балкарский государственный университет
РОССИЯ, 360000, Нальчик, ул. Чернышевского, д. 173
профессор кафедры алгебры и дифференц. уравнений
E-mail: urusbi@rambler.ru

Исакова Мариана Малиловна
Кабардино-Балкарский государственный университет,
РОССИЯ, 360000, Нальчик, ул. Чернышевского, д. 173
доцент кафедры алгебры и дифференц. уравнений
E-mail: isakova2206@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 2, P. 62–68

ON CYCLIC SUBGROUPS OF A FULL LINEAR GROUP OF THIRD DEGREE OVER A FIELD OF ZERO CHARACTERISTIC

Pachev U. M.[1], Isakova M. M.[1]

[1] Kabardino Balkarian State University

Abstract. In this paper, using the concept of the spectrum of a matrix, we give an explicit form for the elements of any cyclic subgroup in the full linear group $GL_3(F)$ of the third degree over the field F of characteristic zero. In contrast to iterative methods, each element of the cyclic subgroup $\langle M\rangle$ of the group $GL_3(F)$ is a linear combination of M^0, M, M^2, with coefficients easily computed using determinants of the third order, composed by certain powers of the eigenvalues of the matrix M. In fact, we offer a new approach based on a property of the characteristic roots of the polynomial of the matrix. Note also that we present a method that involves the previously known eigenvalues of the matrix. Finally, basing on the results about the explicit form of the elements of any cyclic subgroup of the group $GL_3(F)$ we derive a formula for the cyclic subgroups of prime order p of linear group $GL_3(K^{(p)})$ over a circular field $K^{(p)}$ of characteristic zero that is of interest in their own right in the theory of infinite groups.

Key words: complete linear group, cyclic subgroups, spectrum of a matrix, diagonalizable matrix, n-circular field, algebraic closure of a field.

References

1. *Pachev U. M., Shokuev V. N.* Cyclic Subgroups of the Group $GL_2(F)$. *Izv. KBNTs RAN* [Izvestia KBSC of RAS], 2001, vol. 7, no. 2, pp. 72–74 (in Russian).
2. *Shokuev V. N.* Cyclic Subgroups of the Group $GL_3(F)$. *Izv. KBNTs RAN* [Izvestia KBSC of RAS], 2001, vol. 7, no. 2, pp. 75–77 (in Russian).
3. *Zhemuhova M. Z., Pachev U. M.* Cyclic Subgroups of Second Degree Full Linear Group Over a Field of the Zero Characteristic. *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal* [Vladikavkaz Math. J.], 2011, vol. 13, no. 3, pp. 17–21 (in Russian).
4. *Voevodin V. V., Kuznecov Ju. A. Matricy i vychislenija* [Matrices and Calculations], Moscow, Nauka, 1984 (in Russian).
5. *Lancaster P. Teorija matric* [Theory of Matrices], Moscow, Nauka, 1973 (in Russian).
6. *Pachev U. M.* Cyclic Subgroups of the Group $GL_3(F)$ over a Field of Characteristic Zero. *Materialy Mezhdunar. nauchnoj konf. «Aktual'nye problemy prikladnoj matematiki i fiziki»* [Proceedings of the International Scientific Conference «Actual Problems of Applied Mathematics and Physics»], Nalchik, Izd-vo IPMA KBNC RAN, 2017, pp. 167–168 (in Russian).
7. *Faddeev D. K., Faddeeva V. N. Vychislitel'nye metody linejnoj algebry* [Computational Methods of Linear Algebra], Moscow, Fizmatgiz, 1963 (in Russian).
8. *Lidl R., Niederreiter H. Konechnye polja* [Finite Fields], vol. 1, Moscow, Mir, 1988 (in Russian).
9. *Kostrikin I. Vvedenie v algebru* [Introduction to Algebra], Moscow, Nauka, 1977 (in Russian).

Received February 2, 2018

Urusbi M. Pachev
Kabardino Balkarian State University,
173 Chrnyshevskogo Str., Nalchik 360004, Russia
E-mail: `urusbi@rambler.ru`

Mariana M. Isakova
Kabardino Balkarian State University,
173 Chrnyshevskogo Str., Nalchik 360004, Russia
E-mail: `isakova2206@mail.ru`