Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 3, С. 4–20

УДК 514.76
DOI 10.23671/VNC.2018.3.17829

СВОЙСТВА ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ОБОБЩЕННЫХ МНОГООБРАЗИЙ КЕНМОЦУ

А. Абу-Салеем[1], А. Р. Рустанов[2], С. В. Харитонова[3]

[1] Университет Аль аль-Байт, Иордания, Аль Джубэйха, 25113, Аль-Мафрака;
[2] НИУ МГСУ, Институт фундаментального образования,
Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26;
[3] Оренбургский государственный университет,
Россия, 460000, Оренбург, пр. Победы, 13

E-mail: dr_ahmad57@yahoo.com, aligadzhi@yandex.ru, hcb@yandex.ru

Аннотация. Статья посвящена обобщенным многообразиям Кенмоцу, а именно исследованию их свойств интегрируемости. Исследование ведется методом присоединенных G-структур, поэтому вначале построено пространство присоединенной G-структуры почти контактных метрических многообразий. Далее определяются обобщенные многообразия Кенмоцу (короче GK-многообразия), приводится полная группа структурных уравнений таких многообразий. Определены первое, второе и третье фундаментальные тождества GK-структур. Сформулированы определения специальных обобщенных многообразий Кенмоцу (SGK-многообразий) I и II родов. В работе исследуются GK-многообразия, первое фундаментальное распределение которых вполне интегрируемо. Показано, что почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных многообразиях максимальной размерности первого распределения GK-многообразия, является приближенно келеровой. Получено локальное строение GK-многообразия с замкнутой контактной формой, приведены выражения первого и второго структурных тензоров. Также в работе вычислены компоненты тензора Нейенхейса GK-многообразия. Поскольку задание тензора Нейенхейса равносильно заданию четырех тензоров $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$, то исследуется геометрический смысл обращения в нуль этих тензоров. Получено локальное строение интегрируемой и нормальной GK-структуры. Доказано, что характеристический вектор GK-структуры не является вектором Киллинга. Основным результатом является
Теорема. *Пусть M — GK-многообразие. Тогда следующие утверждения эквивалентны:* 1) *GK-многообразие имеет замкнутую контактную форму;* 2) $F^{ab} = F_{ab} = 0$; 3) $N^{(2)}(X,Y) = 0$; 4) $N^{(3)}(X) = 0$; 5) *M — SGK-многообразие второго рода;* 6) *M — локально канонически конциркулярно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую.*

Ключевые слова: обобщенное многообразие Кенмоцу, многообразие Кенмоцу, нормальное многообразие, тензор Нейенхейса, интегрируемая структура, приближенно келерово многообразие.

Mathematical Subject Classification (2000): 58A05.

1. Введение

В 1972 г. Кенмоцу [1] ввел в рассмотрение новый класс почти контактных метрических структур, характеризуемых тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y = \langle \Phi X, Y\rangle - \eta(Y)\Phi X, \quad X, Y \in \mathscr{X}(M).$$

Структуры Кенмоцу естественно возникают в классификации Танно связных почти контактных метрических многообразий, группа автоморфизмов которых имеет максимальную размерность [2]. Они обладают рядом интересных свойств. Например, структуры Кенмоцу нормальны и интегрируемы, они не являются ни сасакиевыми структурами, ни косимплектическими структурами. Известны примеры структур Кенмоцу на нечетномерных пространствах Лобачевского кривизны (-1). Такие структуры получаются с помощью конструкции косого (*warped*) произведения $\mathbb{R} \times_f \mathbb{C}^n$ в смысле Бишопа и О'Нейла [3] комплексного евклидова пространства и вещественной прямой, где $f(t) = ce^t$. Всякое конформно-плоское многообразие Кенмоцу, а также локально-симметрическое многообразие Кенмоцу локально эквивалентно многообразию Кенмоцу такого типа [1]. Кириченко В. Ф. [4] доказал, что класс многообразий Кенмоцу совпадает с классом почти контактных метрических многообразий, получаемых из косимплектических многообразий каноническим конциркулярным преобразованием косимплектической структуры.

В своей диссертационной работе [5] Умнова С. В. изучала многообразия Кенмоцу и их обобщения. Она выделила класс почти контактных метрических многообразий, являющийся обобщением многообразий Кенмоцу и названный классом обобщенных (короче, GK-многообразия) многообразий Кенмоцу. Умнова С. В. выделяет два подкласса обобщенных многообразий Кенмоцу, названных *специальными обобщенными многообразиями Кенмоцу* (коротко, *SGK-многообразия*) I и II рода. В работе [5] доказано, что обобщенные многообразия Кенмоцу постоянной кривизны являются многообразиями Кенмоцу постоянной кривизны (-1). Кроме того, доказано, что класс SGK-многообразий II рода совпадает с классом почти контактных метрических многообразий, получаемых из точнейших косимплектических многообразий каноническим преобразованием точнейшей косимплектической структуры, а также дано локальное строение этих многообразий постоянной кривизны.

В данной статье мы изучаем свойства интегрируемости обобщенных многообразий Кенмоцу. Работа организована следующим образом. Во введении мы приводим предварительные сведения, необходимые в дальнейшем изложении, строим пространство присоединенной G-структуры. В п. 2 дано определение обобщенных многообразий Кенмоцу, приведена полная группа структурных уравнений GK-многообразий на пространстве присоединенной G-структуры, сформулировано определение SGK-многообразий I и II родов. Исследованы GK-многообразия, первое фундаментальное распределение которых вполне интегрируемо. Показано, что почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных подмногообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения обобщенного многообразия Кенмоцу, является приближенно келеровой структурой. Получено локальное строение GK-многообразия с замкнутой контактной формой, приведены аналитические выражения первого и второго структурных тензоров. В п. 3 исследуются свойства тензора Нейенхейса, получено локальное строение интегрируемой и нормальной GK-структуры. Доказано, что характеристический вектор GK-структуры не является вектором Киллинга. Также исследовано обращение в нуль тензоров $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$. Основные результаты сосредоточены в параграфах 2 и 3.

Пусть M — гладкое многообразие размерности $2n+1$, $\mathscr{X}(M)$ — C^∞-модуль гладких векторных полей на многообразии M. В дальнейшем все многообразия, тензорные поля и т. п. объекты предполагаются гладкими класса C^∞.

Определение 1.1 [6]. *Почти контактной структурой* на многообразии M называется тройка (η, ξ, Φ) тензорных полей на этом многообразии, где η — дифференциальная 1-форма, называемая *контактной формой структуры*, ξ — векторное поле, называемое *характеристическим*, Φ — эндоморфизм модуля $\mathscr{X}(M)$, называемый *структурным эндоморфизмом.* При этом

$$1)\ \eta(\xi)=1;\quad 2)\ \eta\circ\Phi=0;\quad 3)\ \Phi(\xi)=0;\quad 4)\ \Phi^2=-id+\eta\otimes\xi. \tag{1.1}$$

Если, кроме того, на M фиксирована риманова структура $g=\langle\cdot,\cdot\rangle$ такая, что

$$\langle\Phi X,\Phi Y\rangle=\langle X,Y\rangle-\eta(X)\eta(Y),\quad X,Y\in\mathscr{X}(M),$$

то четверка $(\eta,\xi,\Phi,g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$ называется *почти контактной метрической структурой* (короче, *AC-структурой*).

Многообразие, на котором фиксирована почти контактная (метрическая) структура, называется *почти контактным* (*метрическим* (*короче, AC-*)) *многообразием.*

Кососимметричный тензор $\Omega(X,Y)=\langle X,\Phi Y\rangle$, $X,Y\in\mathscr{X}(M)$, называется *фундаментальной формой AC-структуры* [6].

Пусть (η,ξ,Φ,g) — почти контактная метрическая структура на многообразии M^{2n+1}. В модуле $\mathscr{X}(M)$ внутренним образом определены два взаимно дополнительных проектора $m=\eta\otimes\xi$ и $l=id-m=-\Phi^2$ [5, 6]. Таким образом, $\mathscr{X}(M)=\mathtt{L}\oplus\mathtt{M}$, где $\mathtt{L}=\mathrm{Im}(\Phi)=\ker\eta$ — так называемое *контактное распределение*, $\dim\mathtt{L}=2n$, $\mathtt{M}=\mathrm{Im}\,m=\ker(\Phi)=L(\xi)$ — линейная оболочка характеристического вектора (причем l и m являются проекторами на подмодули $\mathtt{L}$ и $\mathtt{M}$ соответственно).

Очевидно, распределения $\mathtt{L}$ и $\mathtt{M}$ инвариантны относительно Φ и взаимно ортогональны. Очевидно также, что $\tilde\Phi^2=-id$, $\big\langle\tilde\Phi X,\tilde\Phi Y\big\rangle=\big\langle X,Y\big\rangle$, $X,Y\in\mathscr{X}(M)$, где $\tilde\Phi=\Phi|\mathtt{L}$. Следовательно, $\{\tilde\Phi_p,g_p|\mathtt{L}\}$ — эрмитова структура на пространстве $\mathtt{L}_p$.

Комплексификация $\mathscr{X}(M)^C$ модуля $\mathscr{X}(M)$ распадается в прямую сумму $\mathscr{X}(M)^C=D_\Phi^{\sqrt{-1}}\oplus D_\Phi^{-\sqrt{-1}}\oplus D_\Phi^0$ собственных подпространств структурного эндоморфизма Φ, отвечающих собственным значениям $\sqrt{-1}$, $-\sqrt{-1}$ и 0 соответственно. Причем проекторами на слагаемые этой прямой суммы будут, соответственно, эндоморфизмы [6]

$$\pi=\sigma\circ l=-\frac{1}{2}(\Phi^2+\sqrt{-1}\Phi),\quad \bar\pi=\bar\sigma\circ l=-\frac{1}{2}(-\Phi^2+\sqrt{-1}\Phi),$$

$$m=id+\Phi^2,\quad \sigma=\frac{1}{2}(id-\sqrt{-1}\Phi),\quad \bar\sigma=\frac{1}{2}(id+\sqrt{-1}\Phi).$$

Отображения $\sigma_p:\mathtt{L}_p\to D_\Phi^{\sqrt{-1}}$ и $\bar\sigma_p:\mathtt{L}_p\to D_\Phi^{-\sqrt{-1}}$ являются соответственно изоморфизмом и антиизоморфизмом эрмитовых пространств. Поэтому к каждой точке $p\in M^{2n+1}$ можно присоединить семейство реперов пространства $T_p(M)^C$ вида $(p,\epsilon_0,\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n,\epsilon_{\hat1},\ldots,\epsilon_{\hat n})$, где $\epsilon_a=\sqrt2\sigma_p(e_a)$, $\epsilon_{\hat a}=\sqrt2\bar\sigma_p(e_a)$; $\epsilon_0=\xi_p$, где $\{e_a\}$ — ортонормированный базис эрмитова пространства L_p. Такой репер называется *A-репером* [6]. Легко видеть, что матрицы компонент тензоров Φ_p и g_p в A-репере имеют вид

$$(\Phi_i^j)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\sqrt{-1}\,I_n&0\\0&0&-\sqrt{-1}\,I_n\end{pmatrix},\quad (g_{ij})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&I_n\\0&I_n&0\end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

где I_n — единичная матрица порядка n. Хорошо известно [6, 7], что совокупность таких реперов определяет G-структуру на M со структурной группой $\{1\}\times U(n)$, представленной матрицами вида $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&A&0\\0&0&A\end{pmatrix}$, где $A\in U(n)$. Эта G-структура называется *присоединенной* [6, 7].

Подчеркнем, что пространство присоединенной G-структуры состоит из комплексных реперов, т. е. реперов комплексификации соответствующих касательных пространств. Поэтому, даже имея дело с вещественными тензорами, мы, говоря об их компонентах на пространстве присоединенной G-структуры, подразумеваем компоненты комплексных расширений этих тензоров. В свою очередь, комплексный тензор является комплексным расширением вещественного тензора тогда и только тогда, когда он инвариантен относительно оператора комплексного сопряжения. Следуя общепринятой традиции, будем называть такой тензор вещественным. В частности, сумма чистого комплексного тензора и комплексно сопряженного ему тензора является вещественным тензором.

На протяжении всей работы будем подразумевать, что индексы $i, j, k, \dots$ пробегают значения от 0 до $2n$, индексы $a, d, c, d, f, g, \dots$ — значения от 1 до n, и положим $\hat{a} = a + n$, $\hat{\hat{a}} = a$, $\hat{0} = 0$. Поскольку Φ и g — тензоры типов $(1,1)$ и $(2,0)$ соответственно, их компоненты на пространстве расслоения всех реперов над M удовлетворяют уравнениям

$$d\Phi^i_j + \Phi^k_j\theta^i_k - \Phi^i_k\theta^k_j = \Phi^i_{j,k}\omega^k, \quad dg_{ij} - g_{kj}\theta^k_i - g_{ik}\theta^k_j = g_{ij,k}\theta^k, \tag{1.3}$$

где $\{\omega^i\}$, $\{\theta^i_j\}$ — компоненты форм смещения и форм римановой связности ∇ соответственно, $\Phi^i_{j,k}$, $g_{ij,k}$ — компоненты ковариантного дифференциала Φ и g в этой связности соответственно. Более того, в силу определения римановой связности $\nabla g = 0$ и, значит,

$$g_{ij,k} = 0. \tag{1.4}$$

С учетом (1.2) и (1.4) соотношения (1.3) на пространстве присоединенной G-структуры перепишутся в форме [6]

$$\Phi^a_{b,i} = 0, \quad \Phi^{\hat{a}}_{\hat{b},i} = 0, \quad \Phi^0_{0,i} = 0, \quad \theta^0_a = -\sqrt{-1}\,\Phi^0_{a,i}\omega^i, \quad \theta^0_{\hat{a}} = \sqrt{-1}\,\Phi^0_{\hat{a},i}\omega^i,$$
$$\theta^a_0 = \sqrt{-1}\,\Phi^a_{0,i}\omega^i, \quad \theta^{\hat{a}}_0 = -\sqrt{-1}\,\Phi^{\hat{a}}_{0,i}\omega^i,$$
$$\theta^a_{\hat{b}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\,\Phi^a_{\hat{b},i}\omega^i, \quad \theta^{\hat{a}}_b = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\,\Phi^a_{b,i}\omega^i, \quad \theta^0_0 = 0, \quad \theta^i_j + \theta^{\hat{j}}_{\hat{i}} = 0.$$

Кроме того, заметим, что в силу вещественности соответствующих форм и тензоров $\overline{\omega^i} = \omega^{\hat{i}}$, $\overline{\theta^i_j} = \theta^{\hat{i}}_{\hat{j}}$, $\overline{\Phi^i_{j,k}} = \Phi^{\hat{i}}_{\hat{j},\hat{k}}$, где $t \to \bar{t}$ — оператор комплексного сопряжения.

С учетом этих соотношений первая группа структурных уравнений римановой связности $d\omega^i = -\theta^i_j \wedge \omega^j$ почти контактного метрического многообразия на пространстве присоединенной G-структуры запишется в следующей форме [6]:

$$1)\ d\omega = C_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + C^{ab}\omega_a \wedge \omega_b + C^b_a\omega^a \wedge \omega_b + C_a\omega \wedge \omega^a + C^a\omega \wedge \omega_a;$$
$$2)\ d\omega^a = -\theta^a_b \wedge \omega^b + B^{ab}{}_c\omega^c \wedge \omega_b + B^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + B^a{}_b\omega \wedge \omega^b + B^{ab}\omega \wedge \omega_b;$$
$$3)\ d\omega_a = \theta^b_a \wedge \omega_b + B_{ab}{}^c\omega_c \wedge \omega^b + B_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + B_a{}^b\omega \wedge \omega_b + B_{ab}\omega \wedge \omega^b,$$

где $\omega = \pi^*(\eta)$, π — естественная проекция пространства присоединенной G-структуры на многообразие M,

$$B^{ab}{}_c = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},c}; \quad B^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{[\hat{b},\hat{c}]}; \quad B^a{}_b = \sqrt{-1}\Phi^a_{0,b};$$
$$B^{ab} = \sqrt{-1}\left(\Phi^a_{0,\hat{b}} - \frac{1}{2}\Phi^a_{\hat{b},0}\right); \quad B_{ab}{}^c = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}}; \quad B_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{[b,c]};$$
$$B_a{}^b = -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}}; \quad B_{ab} = -\sqrt{-1}\left(\Phi^{\hat{a}}_{0,b} - \frac{1}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0}\right);$$

$$C_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^0_{[a,b]}; \quad C^{ab} = \sqrt{-1}\Phi^0_{[\hat{a},\hat{b}]};$$

$$C^a_b = -\sqrt{-1}\big(\Phi^0_{\hat{a},b} + \Phi^0_{b,\hat{a}}\big) = B^a{}_b - B_b{}^a; \quad C_a = \sqrt{-1}\Phi^0_{a,0}; \quad C^a = -\sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},0}.$$

При этом

$$\overline{B^{abc}} = B_{abc}, \quad \overline{B^{ab}} = B_{ab}, \quad \overline{\theta^b_a} = -\theta^a_b.$$

Введем обозначения:

$$\begin{gathered} C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},\hat{c}}; \quad C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,c}; \\ F^{ab} = \sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},\hat{b}}; \quad F_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^0_{a,b}. \end{gathered} \tag{1.5}$$

Для тензорных компонент формы римановой связности имеют место следующие соотношения на пространстве присоединенной G-структуры [6]:

$$\begin{array}{lll} 1)\ \theta^a_{\hat{b}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},i}\omega^i; & 2)\ \theta^{\hat{a}}_b = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{b,i}\omega^i; & 3)\ \theta^a_0 = \sqrt{-1}\Phi^a_{0,i}\omega^i; \\ 4)\theta^{\hat{a}}_0 = -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{0,i}\omega^i; & 5)\ \theta^0_a = -\sqrt{-1}\Phi^0_{a,i}\omega^i; & 6)\ \theta^0_{\hat{a}} = \sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},i}\omega^i; \\ 7)\ \theta^0_0 = 0; & 8)\ \theta^i_j + \theta^{\hat{j}}_{\hat{i}} = 0; & 9)\ \theta^0_{0,i} = \theta^a_{b,i} = \theta^{\hat{a}}_{\hat{b},i} = 0. \end{array} \tag{1.6}$$

2. Обобщенные многообразия Кенмоцу

Пусть $(M^{2n+1}, \Phi, \xi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — почти контактное метрическое многообразие.

Определение 2.1 [1]. Почти контактная метрическая структура, характеризуемая тождеством

$$\nabla_X(\Phi)Y = -\eta(Y)\Phi X - \langle X, \Phi Y\rangle\,, \quad X, Y \in \mathscr{X}(M),$$

называется *структурой Кенмоцу.*

Многообразие, снабженное структурой Кенмоцу, называется *многообразием Кенмоцу.*

Положим в этом тождестве $Y = X$. Тогда получим

$$\nabla_X(\Phi)X = -\eta(X)\Phi X, \quad X \in \mathscr{X}(M).$$

В полученном тождестве сделаем замену $X \to X + Y$ (поляризация по X), тогда получим

$$\nabla_X(\Phi)Y + \nabla_Y(\Phi)X = -\eta(Y)\Phi X - \eta(X)\Phi Y, \quad X, Y \in \mathscr{X}(M). \tag{2.1}$$

Определение 2.2 [5]. Класс почти контактных метрических многообразий, характеризуемых тождеством (2.1), называется *обобщенными многообразиями Кенмоцу* (короче, GK-многообразиями).

Расписав тождество (2.1) на пространстве присоединенной G-структуры, получим следующее.

Предложение 2.1. *Компоненты ковариантного дифференциала структурного эндоморфизма на пространстве присоединенной G-структуры удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\begin{array}{lll} 1)\ \Phi^0_{0,i} = \Phi^a_{b,0} = \Phi^{\hat{a}}_{\hat{b},0} = 0; & 2)\ \Phi^0_{i,0} = \Phi^i_{0,0} = 0; & 3)\ \Phi^b_{0,a} = -\Phi^{\hat{a}}_{0,\hat{b}} = -\sqrt{-1}\delta^b_a; \\ 4)\ \Phi^{\hat{a}}_{b,\hat{c}} = \Phi^a_{\hat{b},c} = 0; & 5)\ \Phi^{\hat{a}}_{0,b} + \Phi^{\hat{a}}_{b,0} = 0; & 6)\ \Phi^a_{0,\hat{b}} + \Phi^a_{\hat{b},0} = 0; \\ 7)\ \Phi^0_{a,b} + \Phi^0_{b,a} = 0; & 8)\ \Phi^0_{\hat{a},\hat{b}} + \Phi^0_{\hat{b},\hat{a}} = 0; & 9)\ \Phi^0_{a,\hat{b}} + \Phi^0_{\hat{b},a} = 0; \\ 10)\ \Phi^{\hat{c}}_{a,b} + \Phi^{\hat{c}}_{b,a} = 0; & 11)\ \Phi^c_{\hat{a},\hat{b}} + \Phi^c_{\hat{b},\hat{a}} = 0. & \end{array} \tag{2.2}$$

С учетом предложения 2.1 первая группа структурных уравнений GK-многообразий примет вид [8]

$$\begin{aligned}
&1)\ d\omega = F_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + F^{ab}\omega_a \wedge \omega_b;\\
&2)\ d\omega^a = -\theta^a_b \wedge \omega^b + C^{abc}\omega_b \wedge \omega_c - \frac{3}{2}F^{ab}\omega \wedge \omega_b + \delta^a_b\omega \wedge \omega^b;\\
&3)\ d\omega_a = \theta^b_a \wedge \omega_b + C_{abc}\omega^b \wedge \omega^c - \frac{3}{2}F_{ab}\omega \wedge \omega^b + \delta^b_a\omega \wedge \omega_b,
\end{aligned}\tag{2.3}$$

где

$$\begin{gathered}
C^{abc} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{\hat{b},\hat{c}}; \quad C_{abc} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,c}; \quad C^{[abc]} = C^{abc}; \quad C_{[abc]} = C_{abc};\\
\overline{C^{abc}} = C_{abc}; \quad F^{ab} = \sqrt{-1}\Phi^0_{\hat{a},\hat{b}}; \quad F_{ab} = -\sqrt{-1}\Phi^0_{a,b};\\
F^{ab} + F^{ba} = 0; \quad F_{ab} + F_{ba} = 0; \quad \overline{F^{ab}} = F_{ab}.
\end{gathered}\tag{2.4}$$

Из (2.3) следует

Предложение 2.2 [5]. *Если $C^{abc} = C_{abc} = 0$ и $F^{ab} = F_{ab} = 0$, то GK-многообразие является многообразием Кенмоцу.*

Предложение 2.2 дает примеры GK-многообразий.

Стандартная процедура дифференциального продолжения первой группы структурных уравнений GK-многообразий позволяет получить следующую теорему.

Теорема 2.1. *Полная группа структурных уравнений GK-многообразий на пространстве присоединенной G-структуры имеет вид*

$$\begin{aligned}
&1)\ d\omega = F_{ab}\omega^a \wedge \omega^b + F^{ab}\omega_a \wedge \omega_b;\\
&2)\ d\omega^a = -\theta^a_b \wedge \omega^b + C^{abc}\omega_b \wedge \omega_c - \frac{3}{2}F^{ab}\omega \wedge \omega_b + \delta^a_b\omega \wedge \omega^b;\\
&3)\ d\omega_a = \theta^b_a \wedge \omega_b + C_{abc}\omega^b \wedge \omega^c - \frac{3}{2}F_{ab}\omega \wedge \omega^b + \delta^b_a\omega \wedge \omega_b;\\
&4)\ d\theta^a_b = -\theta^a_c \wedge \theta^c_b + \left(A^{ad}_{bc} - 2C^{adh}C_{hbc} - \frac{3}{2}F^{ad}F_{bc}\right)\omega^c \wedge \omega_d\\
&+\left(-\frac{1}{3}\delta^a_bF_{cd} + \frac{2}{3}\delta^a_cF_{db} + \frac{2}{3}\delta^a_dF_{bc}\right)\omega^c \wedge \omega^d + \left(\frac{1}{3}\delta^a_bF^{cd} - \frac{2}{3}\delta^c_bF^{da} - \frac{2}{3}\delta^d_bF^{ac}\right)\omega_c \wedge \omega_d;\\
&5)\ dC^{abc} + C^{dbc}\theta^a_d + C^{adc}\theta^b_d + C^{abd}\theta^c_d = C^{abcd}\omega_d - 2\delta^{[a}_dF^{bc]}\omega^d - C^{abc}\omega;\\
&6)\ dC_{abc} - C_{dbc}\theta^d_a - C_{adc}\theta^d_b - C_{abd}\theta^d_c = C_{abcd}\omega^d - 2\delta^d_{[a}F_{bc]}\omega_d - C_{abc}\omega;\\
&7)\ dF^{ab} + F^{cb}\theta^a_c + F^{ac}\theta^b_c = -2F^{ab}\omega;\\
&8)\ dF_{ab} - F_{cb}\theta^c_a - F_{ac}\theta^c_b = -2F_{ab}\omega.
\end{aligned}\tag{2.5}$$

При этом

$$A^{ad}_{[bc]} = A^{[ad]}_{bc} = 0; \quad C^{a[bcd]} = \frac{3}{2}F^{a[b}F^{cd]}; \quad F_{ad}C^{dbc} = 0;$$

и формулы комплексно сопряженные.

Продифференцировав внешним образом уравнения (2.5), получаем

$$\begin{aligned}
&1)\ dA^{ad}_{bc} + A^{hd}_{bc}\theta^a_h + A^{ah}_{bc}\theta^d_h - A^{ad}_{hc}\theta^h_b - A^{ad}_{bh}\theta^h_c = A^{ad}_{bch}\omega^h + A^{adh}_{bc}\omega_h + A^{ad}_{bc0}\omega;\\
&2)\ dC^{abcd} + C^{hbcd}\theta^a_h + C^{ahcd}\theta^b_h + C^{abhd}\theta^c_h + C^{abch}\theta^d_h = C^{abcdh}\omega_h + C^{abcd0}\omega;\\
&3)\ dC_{abcd} - C_{hbcd}\theta^h_a - C_{ahcd}\theta^h_b - C_{abhd}\theta^h_c - C_{abch}\theta^h_d = C_{abcdh}\omega^h + C_{abcd0}\omega.
\end{aligned}$$

При этом справедливы следующие тождества:

$$1)\ A^{ad}_{b[ch]}=0;\quad 2)\ A^{a[dh]}_{bc}=0;$$

$$3)\ A^{ad}_{bc0}=-2A^{ad}_{bc}-4C^{adh}C_{hbc}+F^{ad}F_{bc}-2\delta^a_bF^{dh}F_{hc}-2\delta^a_cF^{dh}F_{hb}-2\delta^d_bF^{ah}F_{hc};$$

$$4)\ \big(A^{ag}_{b[c}-2C^{agf}C_{fb[c}\big)C_{|g|dh]}=0;$$

$$5)\ \left(A^{ah}_{b[c}-\frac{3}{2}F^{ah}F_{b[c}\right)F_{|h|d]}=0;$$

$$6)\ C^{abcg}C_{gdh}=0;\quad 7)\ C^{abch}F_{hd}=0;$$

$$8)\ 2F^{ab}F_{cd}=\big(\delta^a_dF_{ch}-\delta^a_cF_{dh}\big)F^{hb}+\big(\delta^b_cF_{dh}-\delta^b_dF_{ch}\big)F^{ha};$$

$$9)\ 2F^{ab}F^{cd}=F^{ac}F^{db}+F^{ad}F^{bc}$$

и формулы комплексно сопряженные.

Тождество $F^{ad}C_{dbc}=0$ назовем *первым фундаментальным тождеством* GK-*структуры*; тождество $A^{ad}_{b[c}C_{gf]d}=2C^{adh}C_{hb[c}C_{gf]d}$ — *вторым фундаментальным тождеством*; тождество $A^{ad}_{b[c}F_{|d|g]}=\frac{3}{2}F^{ad}F_{b[c}F_{|d|g]}$ — *третьим фундаментальным тождеством*.

Определение 2.3 [5]. GK-структура называется: *специальной обобщенной структурой Кенмоцу* I *рода* (коротко, SGK-структурой I рода), если $C^{dbc}=C_{dbc}=0$; *специальной обобщенной структурой Кенмоцу* II *рода* (коротко, SGK-структурой II рода), если $F_{ad}=F^{ad}=0$.

Заметим, что из вида уравнения (2.5(1)) вытекает тождество

$$d\eta(X,Y)+d\eta(\Phi X,\Phi Y)=0,$$

а также равносильное ему тождество $d\eta(\Phi X,Y)=d\eta(X,\Phi Y)$ для любых $X,Y\in\mathscr{X}(M)$.

В самом деле,

$$(d\eta)_{ab}=d\eta(\epsilon_a,\epsilon_b)=-d\eta(\Phi\epsilon_a,\Phi\epsilon_b)=F_{ab},\quad (d\eta)_{\hat a b}=d\eta(\epsilon_{\hat a},\epsilon_b)=d\eta(\Phi\epsilon_{\hat a},\Phi\epsilon_b)=0,$$
$$(d\eta)_{a\hat b}=d\eta(\epsilon_a,\epsilon_{\hat b})=d\eta(\Phi\epsilon_a,\Phi\epsilon_{\hat b})=0,\quad (d\eta)_{\hat a\hat b}=d\eta(\epsilon_{\hat a},\epsilon_{\hat b})=-d\eta(\Phi\epsilon_{\hat a},\Phi\epsilon_{\hat b})=F^{ab},$$
$$(d\eta)_{a0}=d\eta(\epsilon_a,\xi)=-d\eta(\Phi\epsilon_a,\Phi\xi)=0,\quad (d\eta)_{\hat a0}=d\eta(\epsilon_{\hat a},\xi)=-d\eta(\Phi\epsilon_{\hat a},\Phi\xi)=0,$$
$$(d\eta)_{0a}=d\eta(\xi,\epsilon_a)=-d\eta(\Phi\xi,\Phi\epsilon_a)=0,\quad (d\eta)_(0\hat a)=d\eta(\xi,\epsilon_{\hat a})=-d\eta(\Phi\xi,\Phi\epsilon_{\hat a})=0,$$
$$(d\eta)_{00}=d\eta(\xi,\xi)=-d\eta(\Phi\xi,\Phi\xi)=0.$$

Обратно, очевидно, что выполнение этих соотношений влечет справедливость тождества $d\eta(X,Y)+d\eta(\Phi X,\Phi Y)=0$ для любых $X,Y\in\mathscr{X}(M)$.

Пусть M — GK-многообразие, первое фундаментальное распределение которого вполне интегрируемо. Дифференциальная 1-форма $\omega=\eta\circ\pi_*$, π — естественная проекция в главном расслоении реперов над многообразием M, а π_* — порожденное ей увлечение π-связных векторных полей на многообразии M, является формой Пфаффа первого фундаментального распределения, т. е. кобазисом корасределения ассоциированного с первым фундаментальным распределением `L`. По классической теореме Фробениуса вполне интегрируемость первого фундаментального распределения равносильна существованию формы θ, что $d\omega=\theta\wedge\omega$.

Теорема 2.2. *GK-многообразие, первое фундаментальное распределение которого вполне интегрируемо, является SGK-многообразием* II *рода.*

$\lhd$ Почти контактная метрическая структура является вполне интегрируемой, если $d\eta \wedge \eta = 0$. Так как $\omega = \pi^*(\eta)$, π — естественная проекция пространства присоединенной G-структуры на многообразии M, из (2.5(1)) следует, что для того чтобы первое фундаментальное распределение было вполне интегрируемо, необходимо и достаточно, чтобы слагаемые $F_{ab}\omega^a \wedge \omega^b \wedge \omega$ и $F^{ab}\omega_a \wedge \omega_b \wedge \omega$ были равны нулю. Значит, необходимо, чтобы $F_{ab} = F^{ab} = 0$. Согласно определению 2.3 GK-структура является SGK-структурой II рода. $\rhd$

Поскольку всякое SGK-многообразие II рода локально канонически концикулярно точнейше косимплектическому многообразию [5], а точнейше косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую [6], то предыдущую теорему можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 2.3. *GK-многообразие, первое фундаментальное распределение которого вполне интегрируемо, локально канонически концикулярно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую.*

Пусть M — GK-многообразие, первое фундаментальное распределение которого вполне интегрируемо. Тогда первая группа структурных уравнений такого многообразия имеет вид

$$\begin{aligned}
&1)\ d\omega = 0;\\
&2)\ d\omega^a = -\theta^a_b \wedge \omega^b + C^{abc}\omega_b \wedge \omega_c + \delta^a_b \omega \wedge \omega^b;\\
&3)\ d\omega_a = \theta^b_a \wedge \omega_b + C_{abc}\omega^b \wedge \omega^c + \delta^b_a \omega \wedge \omega_b.
\end{aligned}$$

Пусть $N \subset M$ — интегральное многообразие максимальной размерности первого фундаментального распределения GK-многообразия M. Тогда на нем естественным образом индуцируется почти эрмитова структура $(J, \tilde{g})$, где $J = \Phi|_{\mathrm{L}}$, $\tilde{g} = g|_{\mathrm{L}}$. Так как форма ω является формой Пфаффа первого фундаментального распределения, то первая группа структурных уравнений почти эрмитовой структуры на N имеет вид

$$\begin{aligned}
&1)\ d\omega = 0;\\
&2)\ d\omega^a = -\theta^a_b \wedge \omega^b + C^{abc}\omega_b \wedge \omega_c;\\
&3)\ d\omega_a = \theta^b_a \wedge \omega_b + C_{abc}\omega^b \wedge \omega^c.
\end{aligned}$$

Используя таблицу «Обобщенные классы Грея — Хервеллы» [6], получаем, что почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных подмногообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения GK-многообразия M, является приближенно келеровой структурой.

Теорема 2.4. *Почти эрмитова структура, индуцируемая на интегральных подмногообразиях максимальной размерности первого фундаментального распределения GK-многообразия M, является приближенно келеровой структурой.*

Теорема 2.5. *GK-многообразие с замкнутой контактной формой является SGK-многообразием II рода, т. е. многообразием локально канонически концикулярным произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую.*

$\lhd$ Поскольку $\omega = \omega^0 = \pi^*(\eta)$, где π — естественная проекция пространства присоединенной G-структуры на многообразии M, то из (2.5(1)) следует, что контактная форма GK-многообразия замкнута тогда и только тогда, когда $F_{ab} = F^{ab} = 0$, т. е. согласно определению 2.3, тогда и только тогда, когда многообразие является SGK-многообразием II рода. А значит, локально канонически концикулярным произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. $\rhd$

Рассмотрим системы функций на пространстве присоединенной G-структуры: 1) $C = \{C^i{}_{jk}\}$, положив $C^a{}_{\hat{b}\hat{c}} = C^{abc}$, $C^{\hat{a}}{}_{bc} = C_{abc}$, все остальные компоненты — нулевые; 2) $F = \{F^i{}_j\}$, положив $F^a{}_{\hat{b}} = F^{ab}$, $F^{\hat{a}}{}_b = F_{ab}$, все остальные компоненты F — нулевые.

По Основной теореме тензорного анализа с учетом (2.5(5))–(2.5(8)) семейства функций C и F определяют вещественные тензорные поля типа $(2,1)$ и $(1,1)$ на многообразии M, которые мы обозначим теми же символами. Назовем эти тензоры *первым* и *вторым структурными тензорами GK-структуры.*

Теорема 2.6. *Структурные тензоры GK-структуры имеют следующие выражения:*

$$1)\ C(X,Y) = -\frac{1}{2}\Phi\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X = -\frac{1}{2}\Phi^2\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2 X;$$

$$\begin{aligned}2)\ (X) &= \Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2 X = -\Phi\circ\nabla_X(\Phi)\xi - \Phi^2 X = -\nabla_X\xi - \Phi^2 X\\ &= -\Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \Phi^2 X = -\Phi\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \Phi^2 X \quad (\forall\, X,Y\in\mathscr{X}(M)).\end{aligned}$$

$\lhd$ В [8] получено аналитическое выражение первого структурного тензора

$$\begin{aligned}C(X,Y) &= \frac{1}{4}\left\{\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)\Phi^2 X - \Phi^2\circ\nabla_{\Phi^2 Y}(\Phi)\Phi X\right\}\\ &= -\frac{1}{4}\left\{\Phi\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X + \Phi^2\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2 X\right\} \quad (\forall\, X,Y\in\mathscr{X}(M)).\end{aligned} \tag{2.6}$$

Продифференцировав ковариантно равенство $\Phi^2 = -id + \eta\otimes\xi$, получим $\nabla_Y(\Phi)\Phi X + \Phi\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)X = \xi\nabla_Y(\eta)X + \eta(X)\nabla_Y\xi$. В последнем равенстве сначала сделаем замену $X\to\Phi X$, а затем на полученное тождество подействуем оператором Φ^2. Тогда получим $\Phi\circ\nabla_Y(\Phi)\Phi X = \Phi^2\circ\nabla_Y(\Phi)\Phi^2 X$. В полученном тождестве сделаем замену $Y\to\Phi Y$. Тогда

$$\Phi\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X = \Phi^2\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2 X \quad (\forall\, X,Y\in\mathscr{X}(M)). \tag{2.7}$$

С учетом (2.7) равенство (2.6) запишется в виде

$$C(X,Y) = -\frac{1}{2}\Phi\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi X = -\frac{1}{2}\Phi^2\circ\nabla_{\Phi Y}(\Phi)\Phi^2 X \quad (\forall\, X,Y\in\mathscr{X}(M)).$$

Напомним [6, 9], что третий, четвертый и пятый структурные тензоры почти контактной метрической структуры имеют следующие аналитические выражения:

$$\begin{aligned}&1)\ D(X) = -\frac{1}{2}\left\{\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \frac{1}{2}\Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi^2 X + \frac{1}{2}\Phi^2\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi X\right\};\\ &2)\ E(X) = -\frac{1}{2}\left\{\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi + \Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi\right\};\\ &3)\ F(X) = \frac{1}{2}\left\{\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi\right\} \quad (\forall\, X\in\mathscr{X}(M)).\end{aligned} \tag{2.8}$$

Применив процедуру восстановления тождества [6, 7] к равенству $\Phi^b_{0,a} = -\sqrt{-1}\delta^b_a$, получим $\Phi^2\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi = -2\Phi X$ для любого $X\in\mathscr{X}(M)$. Подействуем оператором Φ на обе части последнего равенства. Тогда $\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi + \Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi = 2\Phi^2 X$ для любого $X\in\mathscr{X}(M)$.

Поскольку третий и пятый структурные тензоры для любого $X\in\mathscr{X}(M)$ связаны соотношением $D(X) = -\frac{3}{2}F(X)$, то

$$\Phi\circ\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2\circ\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi + \Phi\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi^2 X - \Phi^2\circ\nabla_\xi(\Phi)\Phi X = 0 \quad (\forall\, X\in\mathscr{X}(M)).$$

В (2.1) положим $Y = \xi$. Тогда получим $\nabla_X(\Phi)\xi + \nabla_\xi(\Phi)X = -\Phi X$ $(\forall\, X \in \mathscr{X}(M))$.

В последнем тождестве подставим сначала $X \to \Phi X$, а затем $X \to \Phi^2 X$. Тогда получим

$$\begin{aligned} &1)\ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi + \nabla_\xi(\Phi)\Phi X = -\Phi^2 X;\\ &2)\ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi + \nabla_\xi(\Phi)\Phi^2 X = \Phi X \quad (\forall\, X \in \mathscr{X}(M)). \end{aligned} \tag{2.9}$$

На обе части равенства (2.9 (1)) подействуем оператором Φ^2, а на обе части равенства (2.9 (2)) подействуем оператором Φ. Тогда получим

$$\begin{aligned} &1)\ \Phi^2\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi + \Phi^2\nabla_\xi(\Phi)\Phi X = \Phi^2 X;\\ &2)\ \Phi\nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi + \Phi\nabla_\xi(\Phi)\Phi^2 X = \Phi^2 X \quad (\forall\, X \in \mathscr{X}(M)). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Продифференцировав ковариантно равенство $\eta \circ \Phi = 0$, получаем

$$\nabla_X(\eta)(\Phi Y) + \eta \circ \nabla_X(\Phi)Y = 0 \quad (\forall\, X, Y \in \mathscr{X}(M)). \tag{2.11}$$

В частности, если в последнем равенстве положить $Y = \xi$, то $\eta\{\nabla_X(\Phi)\xi\} = 0$ для любого $X \in \mathscr{X}(M)$.

Продифференцировав ковариантно равенство $\Phi^2 = -id + \eta \otimes \xi$, получаем

$$\nabla_X(\Phi)\Phi Y + \Phi \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)Y = \xi\nabla_X(\eta)Y + \eta(Y)\nabla_X\xi.$$

В полученном равенстве сделаем замену $Y = \xi$. Тогда с учетом тождества $\nabla_X(\eta)\xi = 0$ для любого $X \in \mathscr{X}(M)$, получим тождество

$$\Phi \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)Y = \nabla_X\xi \quad (\forall\, X \in \mathscr{X}(M)). \tag{2.12}$$

С учетом (2.10) и (2.12) для (2.8(3)) имеем

$$\begin{aligned} F(X) &= \frac{1}{2}\left\{\Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi\right\} = \frac{1}{2}\left\{\nabla_{\Phi^2 X}\xi - \Phi \circ \nabla_{\Phi X}\xi\right\}\\ &= \Phi \circ \nabla_{\Phi^2 X}(\Phi)\xi - \Phi^2 X = -\Phi \circ \nabla_X(\Phi)\xi - \Phi^2 X = -\nabla_X\xi - \Phi^2 X\\ &= -\Phi^2 \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \Phi^2 X = -\Phi \circ \nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi - \Phi^2 X \quad (\forall\, X \in \mathscr{X}(M)). \ \rhd \end{aligned}$$

3. Свойства интегрируемости GK-многообразий

Напомним [6], что компоненты тензора Нейенхейса

$$N_\Phi(X,Y) = \frac{1}{4}\{\Phi^2[X,Y] + [\Phi X, \Phi Y] - \Phi[\Phi X, Y] - \Phi[X, \Phi Y]\}$$

на пространстве присоединенной G-структуры имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} 1)\ N^0_{ab} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^0_{[a,b]};\quad 2)\ N^0_{\hat{a}b} = -N^0_{b\hat{a}} = -\frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^0_{(\hat{a},b)};\quad 3)\ N^0_{\hat{a}\hat{b}} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^0_{[\hat{a},\hat{b}]};\\ 4)\ N^a_{\hat{b}0} = -N^a_{0\hat{b}} = \frac{\sqrt{-1}}{4}\Phi^a_{\hat{b},0} - \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^a_{0,\hat{b}};\quad 5)\ N^a_{\hat{b}\hat{c}} = \sqrt{-1}\Phi^a_{[\hat{b},\hat{c}]};\\ 6)\ N^{\hat{a}}_{b0} = -N^{\hat{a}}_{0b} = \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{0,b} - \frac{\sqrt{-1}}{2}\Phi^{\hat{a}}_{b,0};\quad 7)\ N^{\hat{a}}_{bc} = -\sqrt{-1}\Phi^{\hat{a}}_{[b,c]}. \end{gathered}$$

Остальные компоненты этого тензора тождественно равны нулю.

С учетом (2.2) компоненты тензора Нейенхейса $N_\Phi(X,Y)$ GK-структуры на пространстве присоединенной G-структуры примут следующий вид:

$$\begin{array}{lll} 1)\ N^0_{ab}=\frac{1}{2}F_{ab}; & 2)\ N^0_{\hat a\hat b}=\frac{1}{2}F^{ab}; & 3)\ N^a_{\hat b0}=-N^a_{0\hat b}=\frac{3}{4}F^{ab}; \\ 4)\ N^a_{\hat b\hat c}=2C^{abc}; & 5)\ N^{\hat a}_{b0}=-N^{\hat a}_{0b}=\frac{3}{4}F_{ab}; & 6)\ N^{\hat a}_{bc}=2C_{abc}. \end{array} \tag{3.1}$$

Остальные компоненты этого тензора тождественно равны нулю.

Теорема 3.1. *Тензор Нейенхейса оператора Φ GK-структуры обладает свойствами:*

$$1)\ N_\Phi\left(\Phi^2X,\Phi^2Y\right)+N_\Phi(\Phi X,\Phi Y)=0;$$

$$2)\ N_\Phi\left(\Phi^2X,\Phi Y\right)-N_\Phi\left(\Phi X,\Phi^2Y\right)=0;$$

$$3)\ N_\Phi(X,\xi)=-\frac{1}{4}\left\{\Phi\nabla_{\Phi X}\xi+2\nabla_X\xi+\Phi^2X\right\}\quad(\forall\,X,Y\in\mathscr{X}(M)).$$

$\lhd$ 1): Применяя процедуру восстановления тождества [4, 7] к равенствам $N^0_{a\hat b}=N^c_{a\hat b}=N^{\hat c}_{a\hat b}=0$, получим тождество $N_\Phi(\Phi^2X,\Phi^2Y)+N_\Phi(\Phi X,\Phi Y)=0$ для любых $X,Y\in\mathscr{X}(M)$.

2): Сделав в последнем тождестве замену $Y\to\Phi Y$, для любых $X,Y\in\mathscr{X}(M)$ получаем тождество $N_\Phi(\Phi^2X,\Phi Y)-N_\Phi(\Phi X,\Phi^2Y)=0$.

3): Вид тензора Нейенхейса

$$N_\Phi(X,Y)=\frac{1}{4}\left\{\Phi^2[X,Y]+[\Phi X,\Phi Y]-\Phi[\Phi X,Y]-\Phi[X,\Phi Y]\right\}$$

с учетом формулы $[X,Y]=\nabla_XY-\nabla_YX$, выражающей отсутствие кручения связности, примет вид

$$N_\Phi(X,Y)=\frac{1}{4}\left\{\nabla_{\Phi X}(\Phi)Y-\nabla_{\Phi Y}(\Phi)X+\Phi\nabla_Y(\Phi)X-\Phi\nabla_X(\Phi)Y\right\}\quad(\forall\,X,Y\in\mathscr{X}(M)).$$

Отсюда

$$N_\Phi(X,\xi)=\frac{1}{4}\left\{\nabla_{\Phi X}(\Phi)\xi+\Phi\nabla_\xi(\Phi)X-\Phi\nabla_X(\Phi)\xi\right\}\quad(\forall\,X\in\mathscr{X}(M)). \tag{3.2}$$

Положим в (2.1) $Y=\xi$. Тогда $\nabla_X(\Phi)\xi+\nabla_\xi(\Phi)X=-\Phi X$ для любого $X\in\mathscr{X}(M)$. С учетом полученного равенства соотношение (3.2) примет вид

$$N_\Phi(X,\xi)=-\frac{1}{4}\left\{\Phi\nabla_{\Phi X}\xi+2\nabla_X\xi+\Phi^2X\right\}\quad(\forall\,X\in\mathscr{X}(M)).\ \rhd$$

Определение 3.1 [6]. Почти контактная метрическая структура называется *интегрируемой*, если $N_\Phi=0$.

Теорема 3.2. *Интегрируемая GK-структура является структурой Кенмоцу.*

$\lhd$ Пусть GK-структура является интегрируемой. Тогда, согласно определению 3.1, $N_\Phi=0$. Последнее равенство с учетом (3.1) равносильно соотношениям $F^{ab}=F_{ab}=0$; $C^{abc}=C_{abc}=0$. И согласно предложению 2.2 структура является структурой Кенмоцу. $\rhd$

Известно [10], что задание тензора Нейенхейса равносильно заданию четырех тензоров $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$, а именно:

$$N^{(1)}(X,Y)=N_\Phi(X,Y)+2\,d\eta(X,Y)\xi;\quad N^{(2)}(X,Y)=(\mathscr{L}_{\Phi X}\eta)(Y)-(\mathscr{L}_{\Phi Y}\eta)(X);$$
$$N^{(3)}(X)=(\mathscr{L}_\xi\Phi)(X);\quad N^{(4)}(X)=(\mathscr{L}_\xi\eta)(X)\quad(\forall\,X,Y\in\mathscr{X}(M)),$$

где $\mathscr{L}_X$ — производная Ли в направлении векторного поля X.

Вычислим компоненты этих тензоров на пространстве присоединенной G-структуры.

Учитывая, что $\omega = \omega^0 = \pi^*(\eta)$, где π — естественная проекция пространства присоединенной G-структуры на многообразие M, а также то обстоятельство, что на пространстве присоединенной G-структуры $\xi^a = \xi_a = 0$, $\xi^0 = 1$, согласно (1.1(1)) находим, что на этом пространстве

$$\begin{array}{ll} 1)\ (d\eta\otimes\xi)^a_{ij} = (d\eta\otimes\xi)^{\hat a}_{ij} = 0; & 2)\ (d\eta\otimes\xi)^0_{ab} = F_{ab}; \\ 3)\ (d\eta\otimes\xi)^0_{\hat a\hat b} = F^{ab}; & 4)\ (d\eta\otimes\xi)^0_{\hat a b} = (d\eta\otimes\xi)^0_{a\hat b} = 0; \\ 5)\ (d\eta\otimes\xi)^0_{0a} = (d\eta\otimes\xi)^0_{a0} = 0; & 6)\ (d\eta\otimes\xi)^0_{0\hat a} = (d\eta\otimes\xi)^0_{\hat a 0} = 0; \\ 7)\ (d\eta\otimes\xi)^0_{00} = 0. & \end{array} \tag{3.3}$$

С учетом соотношений (3.1) и (3.3) получаем, что на пространстве присоединенной G-структуры, тензор $N^{(1)}(X,Y) = N_\Phi(X,Y) + 2\,d\eta(X,Y)\xi$ имеет следующие компоненты:

$$\begin{array}{ll} 1)\ (N^{(1)})^0_{ab} = \frac{5}{2}F_{ab}; & 2)\ (N^{(1)})^0_{\hat a\hat b} = \frac{5}{2}F^{ab}; \\ 3)\ (N^{(1)})^a_{\hat b 0} = -(N^{(1)})^a_{0\hat b} = \frac{3}{4}F^{ab}; & 4)\ (N^{(1)})^{\hat a}_{b0} = -(N^{(1)})^{\hat a}_{0b} = \frac{3}{4}F_{ab}; \\ 5)\ (N^{(1)})^a_{\hat b\hat c} = 2C^{abc}; & 6)\ (N^{(1)})^{\hat a}_{bc} = 2C_{abc}, \end{array} \tag{3.4}$$

а остальные компоненты нулевые.

Определение 3.2 [6, 10]. Почти контактная метрическая структура называется *нормальной*, если $N_\Phi(X,Y) + 2\,d\eta(X,Y)\xi = 0$.

Понятие нормальности было введено Сасаки и Хатакеямой [11] и является одним из наиболее фундаментальных понятий контактной геометрии, тесно связанным с понятием интегрируемости структуры.

Теорема 3.3. *Нормальная GK-структура является структурой Кенмоцу, а значит, локально канонически конциркулярна косимплектической структуре.*

$\triangleleft$ Из определения 3.2 и (3.4) следует, что GK-структура является нормальной тогда и только тогда, когда $F^{ab} = F_{ab} = 0$, $C^{abc} = C_{abc} = 0$. Согласно предложению 2.2 GK-структура является Кенмоцу структурой. Поскольку структура Кенмоцу получается из косимплектической каноническим конциркулярным преобразованием, то нормальная GK-структура локально канонически конциркулярна косимплектической структуре. $\triangleright$

Из теорем 3.2 и 3.3 следует

Теорема 3.4. *Пусть $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — AC-структура. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — *интегрируемая GK-структура;*

2) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — *нормальная GK-структура;*

3) $S = (\xi, \eta, \Phi, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ — *структура Кенмоцу.*

Теперь вычислим компоненты тензора $N^{(2)}(X,Y) = (\mathscr{L}_{\Phi X}\eta)(Y) - (\mathscr{L}_{\Phi Y}\eta)(X)$, где $\mathscr{L}_X$ — производная Ли в направлении векторного поля X.

Определение 3.3 [6]. Пусть M — гладкое многообразие, X — векторное поле на M, $\{F_t\}$ — соответствующая ему локальная однопараметрическая группа диффеоморфизмов многообразия, T — тензорное поле типа (r,s) на M. *Производной Ли тензорного поля T в направлении векторного поля X* называется тензорное поле $\mathscr{L}_X T$ на M, в каждой точке $p\in M$ определяемое формулой

$$(\mathscr{L}_X T)_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left((F_{-t})_* T_{F_t(p)} - T_p\right).$$

Оператор $\mathscr{L}_X : T(M)\to T(M)$, сопоставляющий тензорному полю $T\in T(M)$ тензорное поле $\mathscr{L}_X T$, называется *оператором дифференцирования Ли в направлении векторного поля X*.

Оператор дифференцирования Ли обладает следующими свойствами [6]:

1) оператор $\mathscr{L}_X$ является дифференцированием тензорной алгебры $T(M)$ многообразия, сохраняющим тип тензоров и перестановочным с операторами свертки;

2) $\mathscr{L}_X f = X(f)$, $\forall\, f\in C^\infty(M)$;

3) $\mathscr{L}_X Y = [X,Y]$, $\forall\, X,Y\in \mathscr{X}(M)$.

Замечательным обстоятельством является то, что перечисленные свойства оператора дифференцирования Ли однозначно определяют этот оператор.

Замечание 3.1 [6]. Пусть t — произвольный тензор типа (r,s) на M. Выражение $\mathscr{L}_X(t)(X_1,\ldots,X_r,u^1,\ldots,u^s)$, будучи линейным по аргументам $X_1,\ldots,X_r$, $u^1,\ldots,u^s$, не является линейным по аргументу X.

С учетом перечисленных свойств имеем

$$\begin{gathered}\mathscr{L}_{\Phi X}(\eta(Y)) = \mathscr{L}_{\Phi X}\left(C^{(1)}_{(1)}\eta\otimes Y\right) = C^{(1)}_{(1)}\mathscr{L}_{\Phi X}(\eta\otimes Y)\\ = C^{(1)}_{(1)}\mathscr{L}_{\Phi X}(\eta)\otimes Y + C^{(1)}_{(1)}\eta\otimes\mathscr{L}\Phi X(Y) = \mathscr{L}_{\Phi X}(\eta)\otimes Y + \eta\otimes\mathscr{L}_{\Phi X}(Y),\end{gathered}$$

т. е. $\mathscr{L}_{\Phi X}(\eta(Y)) = \mathscr{L}_{\Phi X}(\eta)\otimes Y + \eta\otimes\mathscr{L}_{\Phi X}(Y)$.

С учетом тождества $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ и свойств оператора дифференцирования Ли из полученного равенства имеем

$$\begin{gathered}\mathscr{L}_{\Phi X}(\eta)(Y) = \mathscr{L}_{\Phi X}(\eta(Y)) - \eta(\mathscr{L}_{\Phi X}Y) = (\Phi X)(\eta(Y)) - \eta([\Phi X, Y])\\ = (\Phi X)(\eta(Y)) - \eta(\nabla_{\Phi X}Y) + \eta(\nabla_Y(\Phi X)) = \{(\Phi X)(\eta(Y)) - \eta(\nabla_{\Phi X}Y)\}\\ + \eta\{\nabla_Y(\Phi)X + \Phi\nabla_Y X\} = \nabla_{\Phi X}(\eta)(Y) + \eta\{\nabla_Y(\Phi)X\} + \eta\{\Phi\nabla_Y X\}\\ = \nabla_{\Phi X}(\eta)(Y) + \eta\{\nabla_Y(\Phi)X\},\end{gathered}$$

т. е.

$$\mathscr{L}_{\Phi X}(\eta)(Y) = \nabla_{\Phi X}(\eta)(Y) + \eta\{\nabla_Y(\Phi)X\}\quad (\forall\, X,Y\in\mathscr{X}(M)). \tag{3.5}$$

Рассмотрим характеристический вектор GK-многообразия. Поскольку ξ является тензором типа $(0,1)$, то его компоненты $\{\xi^i\}$ на главном расслоении $B(M)$ реперов над M удовлетворяют дифференциальным уравнениям [6]

$$d\xi^i - \xi^k\theta^i_k = \xi^i{}_{,j}\theta^j, \tag{3.6}$$

где $\{\xi^i{}_{,j}\}$ — система функций, служащая компонентами ковариантного дифференциала вектора ξ в связности ∇. Расписывая (3.6) на пространстве присоединенной G-структуры, с учетом соотношений $\xi^a = \xi^{\hat a} = 0$, $\xi^0 = 1$, и вида тензорных компонент формы римановой связности [3]:

$$1)\ \theta^a_{\hat b} = \frac{1}{2}F^{ab}\omega + C^{abc}\omega_c;\quad 2)\ \theta^{\hat a}_b = \frac{1}{2}F_{ab}\omega + C_{abc}\omega^c;$$

$$3)\ \theta^a_0 = \delta^a_b\omega^b - F^{ab}\omega_b;\quad 4)\ \theta^{\hat a}_0 = \delta^b_a\omega_b - F_{ab}\omega^b;\quad 5)\ \theta^0_a = F_{ab}\omega^b - \delta^b_a\omega_b;$$

$$6)\ \theta^0_{\hat a} = F^{ab}\omega_b - \delta^a_b\omega^b;\quad 7)\ \theta^0_0 = 0;\quad 8)\ \theta^i_j + \theta^{\hat i}_{\hat j} = 0,$$

получим

$$1)\ \xi^a_{,\hat b} = -F^{ab};\quad 2)\ \xi^{\hat a}_{,b} = -F_{ab};\quad 3)\ \xi^a_{,b} = \delta^a_b;\quad 4)\ \xi^{\hat a}_{,\hat b} = \delta^b_a,$$

а остальные компоненты нулевые.

Теорема 3.5. *Характеристический вектор ξ GK-структуры не является вектором Киллинга.*

$\lhd$ Поскольку $\delta^a_b + \delta^a_b = \xi^a_{,b} + \xi^{\hat b}_{,\hat a} = \xi_{\hat a,b} + \xi_{b,\hat a} \neq 0$, т. е. $\langle\nabla_X\xi, Y\rangle + \langle X, \nabla_Y\xi\rangle \neq 0$ для любых $X, Y \in \mathscr{X}(M)$, то ξ не является вектором Киллинга. $\rhd$

Аналогично для контактной формы GK-многообразия:

$$1)\ \eta_{a,b} = -F_{ab};\quad 2)\ \eta_{\hat a,\hat b} = -F^{ab};\quad 3)\ \eta_{a,\hat b} = \delta^b_a;\quad 4)\ \eta_{\hat a,b} = \delta^a_b, \tag{3.7}$$

а остальные компоненты нулевые.

Теорема 3.6. *Контактная форма GK-структуры не является формой Киллинга.*

Согласно соотношению (3.5) $N^{(2)}(X,Y)$ примет следующий вид:

$$N^{(2)}(X,Y) = \nabla_{\Phi X}(\eta)(Y) + \eta\{\nabla_Y(\Phi)X\} - \nabla_{\Phi Y}(\eta)(X) - \eta\{\nabla_X(\Phi)Y\}, \tag{3.8}$$

для любых $X, Y \in \mathscr{X}(M)$.

Из (3.7) следует, что $N^{(2)}(X,Y) = -N^{(2)}(Y,X)$, значит тензор $N^{(2)}(X,Y)$ кососимметричен, т. е. является 2-формой.

На пространстве присоединенной G-структуры тождество (3.8) примет вид

$$N^{(2)}_{ij} = \eta_{j,k}\Phi^k_i - \eta_{i,k}\Phi^k_j + \eta_k\Phi^k_{i,j} - \eta_k\Phi^k_{j,i}. \tag{3.9}$$

С учетом соотношений $\eta_{\hat a} = \eta_a = 0$, $\eta_0 = 1$ и вида матрицы Φ на пространстве присоединенной G-структуры (1.2), из (3.9) имеем

$$1)\ N^{(2)}_{ab} = 4\sqrt{-1}F_{ab};\quad 2)\ N^{(2)}_{\hat a\hat b} = -4\sqrt{-1}F^{ab}, \tag{3.10}$$

остальные компоненты нулевые.

Из (3.10) непосредственно следует следующая

Теорема 3.7. *На GK-многообразии $N^{(2)}(X,Y) = 0$ тогда и только тогда, когда $F^{ab} = F_{ab} = 0$.*

Из определения 2.2 и теоремы 3.7 следует

Теорема 3.8. *GK-многообразие с $N^{(2)}(X,Y) = 0$ является SGK-многообразием II рода.*

Используя локальное строение SGK-многообразия II рода [5], теорему 3.8 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3.9. *GK-многообразие с $N^{(2)}(X,Y) = 0$ локально канонически конциркулярно точнейше косимплектическому многообразию.*

Поскольку точнейше косимплектическое многообразие локально эквивалентно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую [5], то предыдущую теорему можно сформулировать так:

Теорема 3.10. *GK-многообразие с $N^{(2)}(X,Y)=0$ локально канонически конциркулярно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.*

Рассмотрим теперь тензор

$$\begin{aligned} N^{(3)}(X) &= \mathscr{L}_\xi(\Phi)(X) = \mathscr{L}_\xi(\Phi X) - \Phi\mathscr{L}_\xi X = [\xi,\Phi X] - \Phi[\xi, X] \\ &= \nabla_\xi(\Phi X) - \nabla_{\Phi X}\xi - \Phi(\nabla_\xi X - \nabla_X\xi) = \nabla_\xi(\Phi)X + \Phi\nabla_\xi X \\ &\quad - \nabla_{\Phi X}\xi - \Phi\nabla_\xi X + \Phi\nabla_X\xi = \nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_{\Phi X}\xi + \Phi\nabla_X\xi. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Таким образом, на GK-многообразии

$$N^{(3)}(X) = \nabla_\xi(\Phi)X - \nabla_{\Phi X}\xi + \Phi\nabla_X\xi \quad (\forall\, X \in \mathscr{X}(M)). \tag{3.12}$$

На пространстве присоединенной G-структуры тождество (3.12) равносильно соотношениям

$$1)\ \big(N^{(3)}\big)^a_{\hat b} = -3\sqrt{-1}F^{ab}; \quad 2)\ \big(N^{(3)}\big)^{\hat a}_b = 3\sqrt{-1}F_{ab}, \tag{3.13}$$

остальные компоненты нулевые.

Из (3.13) и определения 2.3 следует

Теорема 3.11. *На GK-многообразии $N^{(3)}(X)=0$ тогда и только тогда, когда $F^{ab}=F_{ab}=0$, т. е. когда многообразие является SGK-многообразием* II *рода.*

Используя локальное строение SGK-многообразия II рода [5], теорему 3.11 можно сформулировать следующим образом.

Теорема 3.12. *GK-многообразие с $N^{(3)}(X)=0$ локально канонически конциркулярно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую. Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.*

И, наконец, рассмотрим тензор $N^{(4)}(X) = (\mathscr{L}_\xi\eta)(X)$ для любого $X \in X$. Имеем

$$\begin{aligned} N^{(4)}(X) &= (\mathscr{L}_\xi\eta)(X) = \mathscr{L}_\xi(\eta(X)) - \eta(\mathscr{L}_\xi X) = \xi(\eta(X)) - \eta([\xi, X]) \\ &= \nabla_\xi(\eta(X)) - \eta(\nabla_\eta X) + \eta(\nabla_X\xi) = \nabla_\xi(\eta)(X) + \eta(\nabla_\xi X) - \eta(\nabla_\xi X) \\ &\quad + \eta(\nabla_X\xi) = \nabla_\xi(\eta)(X) + \eta(\nabla_X\xi) = \nabla_\xi(\eta)(X), \end{aligned}$$

т. е.

$$N^{(4)}(X) = \nabla_\xi(\eta)(X) \quad (\forall\, X \in X). \tag{3.14}$$

С учетом (3.7) тождество (3.14) на пространстве присоединенной G-структуры равносильно соотношениям $(N^{(4)})_i = 0$, т. е. $N^{(4)}(X)=0$.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема 3.13. *На GK-многообразии $N^{(4)}(X)=0$.*

Результаты теорем 2.5, 3.9–3.12 можно сформулировать в виде следующей основной теоремы.

Основная теорема. *Пусть M — GK-многообразие. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) *GK-многообразие имеет замкнутую контактную форму;*

2) $F^{ab}=F_{ab}=0$;

3) $N^{(2)}(X,Y) = 0$;

4) $N^{(3)}(X) = 0$;

5) M — SGK-*многообразие* II *рода*;

6) M — *локально канонически конциркулярно произведению приближенно келерова многообразия на вещественную прямую.*

Если многообразие односвязно, то указанные локальные эквивалентности можно выбрать глобальными.

Литература

1. *Kenmotsy K.* A class of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J.—1972.—Vol. 24, № 1.—P. 93–103. DOI: 10.2748/tmj/1178241594.
2. *Tanno S.* The automorphisms groups of almost contact Riemannian manifolds // Tohoku Math. J.—1969.—Vol. 21, № 1.—P. 21–38. DOI: 10.2748/tmj/1178243031.
3. *Bishop R. L., O'Neil B.* Manifolds of negative curvature // Trans. Amer. Math. Soc.—1965.—Vol. 145.—P. 1–50. DOI: 10.1090/s0002-9947-1969-0251664-4.
4. *Кириченко В. Ф.* О геометрии многообразий Кенмоцу // Докл. РАН.—2001.—Т. 380, № 5.—С. 585–587.
5. *Умнова С. В.* Геометрия многообразий Кенмоцу и их обобщений: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—М.: МПГУ, 2002.—88 с.
6. *Кириченко В. Ф.* Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях. 2-е изд., доп.—Одесса: Печатный дом, 2013.—458 с.
7. *Кириченко В. Ф., Рустанов А. Р.* Дифференциальная геометрия квази-сасакиевых многообразий // Мат. сб.—2002.—Т. 193, № 8.—С. 71–100.
8. *Abu-Saleem A., Rustanov A. R.* Curvature identities special generalized manifolds Kenmotsu second kind // Malaysian J. Math. Sci.—2015.—Vol. 9, № 2.—P. 187–207.
9. *Кириченко В. Ф., Дондукова Н. Н.* Контактно геодезические преобразования почти контактных метрических структур // Мат. заметки.—2006.—Т. 80, № 2.—С. 209–219.
10. *Blair D. E.* Contact Manifolds in Riemannian Geometry.—Berlin: Springer-Verlag, 1976.—148 p.—(Lecture Notes in Mathematics; Book 509.)
11. *Sasaki S., Hatakeyama J.* On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. II // Tohoku Math. J.—1961.—Vol. 13, № 2.—P. 281–294. DOI: 10.2748/tmj/1178244304.

Статья поступила 11 июля 2017 г.

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 3, P. 4–20

INTEGRABILITY PROPERTIES OF GENERALIZED KENMOTSU MANIFOLDS

Abu-Saleem A.[1], Rustanov A. R.[2], Kharitonova S. V.[3]

[1] Al al-Bayt University, P.O.Box 130040, Mafraq 25113, Jordan;
[2] National Research University (MGSU),
26 Yaroslavskoye Shosse, Moscow 129337, Russia;
[3] Orenburg State University, 13 Pobedy av., Orenburg 460000, Russia
E-mail: `dr_ahmad57@yahoo.com`, `aligadzhi@yandex.ru`, `hcb@yandex.ru`

Abstract. The article is devoted to generalized Kenmotsu manofolds, namely the study of their integrability properties. The study is carried out by the method of associated G-structures; therefore, the space of the associated G-structure of almost contact metric manifolds is constructed first. Next, we define the generalized Kenmotsu manifolds (in short, the GK-manifolds) and give the complete group of structural equations of such manifolds. The first, second, and third fundamental identities of GK-structures are defined. Definitions of special generalized Kenmotsu manifolds (SGK-manifolds) of the I and II kinds are given. We consider GK-manifolds the first fundamental distribution of which is completely integrable. It is shown that the almost Hermitian structure induced on integral manifolds of maximal dimension of the first distribution of a GK-manifold is nearly Kahler. The local structure of a GK-manifold with a closed contact form is obtained, and the expressions of the first and second structural tensors are given. We also compute the components of the Nijenhuis tensor of a GK-manifold. Since the setting of the Nijenhuis tensor is equivalent to the specification of four tensors $N^{(1)}$, $N^{(2)}$, $N^{(3)}$, $N^{(4)}$, the geometric meaning of the vanishing of these tensors is investigated. The local structure of the integrable and normal GK-structure is obtained. It is proved that the characteristic vector of a GK-structure is not a Killing vector. The main result is **Theorem**: *Let M be a GK-manifold. Then the following statements are equivalent:* 1) *GK-manifold has a closed contact form;* 2) $F^{ab} = F_{ab} = 0$; 3) $N^{(2)}(X,Y) = 0$; 4) $N^{(3)}(X) = 0$; 5) *M — is a second-kind SGK manifold;* 6) *M is locally canonically concircular with the product of a nearly Kahler manifold and a real line.*

Key words: generalized Kenmotsu manifold, Kenmotsu manifold, normal manifold, Nijenhuis tensor, integrable structure, nearly Kahler manifold.

Mathematical Subject Classification (2000): 58A05.

References

1. *Kenmotsy K.* A Class of Almost Contact Riemannian Manifolds, *Tohoku Math. J.*, 1972, vol. 24, no. 1, pp. 93–103. DOI: 10.2748/tmj/1178241594.
2. *Tanno S.* The Automorphisms Groups of Almost Contact Riemannian Manifolds, *Tohoku Math. J.*, 1969, vol. 21, no. 1, pp. 21–38. DOI: 10.2748/tmj/1178243031.
3. *Bishop R. L., O'Neil B.* Manifolds of Negative Curvature, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1965, vol. 145, pp. 1–50. DOI: 10.1090/s0002-9947-1969-0251664-4.
4. *Kirichenko V. F.* On the Geometry of Kenmotsu Manifolds, *Doklady RAN* [Reports of the RAS], 2001, vol. 380, no. 5, pp. 585–587 (in Russian).
5. *Umnova S. V. Geometriya mnogoobrazij Kenmocu i ih obobshenij: Dis.... kand. fiz.-mat. nauk* [Geometry Kenmotsu Manifolds and their Generalizations: Dis.... Cand. Sci. Sciences], Moscow, Moscow State Pedagogical University, 2002, 88 p. (in Russian).
6. *Kirichenko V. F. Differencial'no-geometricheskie struktury na mnogoobrazijah. 2-e izd., dop.* [Differential-Geometric Structures on Manifolds. Second edition, expanded], Odessa, Printing House, 2013, 458 p. (in Russian).
7. *Kirichenko V. F., Rustanov A. R.* Differential Geometry of Quasi-Sasakian Manifolds, *Sbornik: Mathematics*, 2002, vol. 193, no. 8, pp. 1173–1201. DOI: 10.1070/SM2002v193n08ABEH000675.
8. *Abu-Saleem A., Rustanov A. R.* Curvature Identities Special Generalized Manifolds Kenmotsu Second Kind, *Malaysian Journal of Mathematical Sciences*, 2015, vol. 9, no. 2, pp. 187–207.
9. *Kirichenko V. F., Dondukova N. N.* Contactly Geodesic Transformations of Almost-Contact Metric Structures, *Mathematical Notes*, 2006, vol. 80, no. 1–2, pp. 204–213. DOI: 10.1007/s11006-006-0129-0.
10. *Blair D. E. Contact Manifolds in Riemannian Geometry. Series: Lecture Notes in Mathematics; book* 509, Berlin, Springer-Verlag, 1976, 148 p.
11. *Sasaki S., Hatakeyama Y.* On Differentiable Manifolds with Certain Structures which are Closely Related to Almost Contact Structure. II, *Tohoku Math. J.*, 1961, vol. 13, no. 2, pp. 281–294. DOI: 10.2748/tmj/1178244304.

Received July 11, 2017