Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 3, С. 48–56

УДК 517.9
DOI 10.23671/VNC.2018.3.17988

КОММУТАНТ ОПЕРАТОРА ПОММЬЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА И ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ

О. А. Иванова[1], **С. Н. Мелихов**[1,2]

[1] Южный федеральный университет,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: `neo_ivolga@mail.ru`, `melih@math.rsu.ru`

Аннотация. В пространстве целых функций экспоненциального типа, реализующем сильное сопряженное к пространству Фреше функций, бесконечно дифференцируемых на вещественном интервале, содержащем начало координат, исследованы линейные непрерывные операторы, перестановочные с оператором Поммье. Они задаются линейным непрерывным функционалом на упомянутом пространстве целых функций, а значит, с точностью до сопряженного к преобразованию Фурье — Лапласа, бесконечно дифференцируемой функцией на исходном интервале. Дана полная характеризация функционалов, определяющих указанным образом изоморфизмы. Доказано, что изоморфизм задается функциями, не равными 0 в начале координат (и только ими). Существенную роль в доказательстве соответствующего критерия играет метод, использующий теорию компактных операторов в банаховых пространствах. Выделен класс тех бесконечно дифференцируемых на исходном интервале функций, которые задают операторы из упомянутого коммутанта, близкие к изоморфизму. Такие операторы имеют конечномерное ядро. Для интервала, отличного от вещественной прямой, мы определяем также класс операторов из коммутанта оператора Поммье, не являющихся сюръективными. Сопряженный к линейному непрерывному оператору, перестановочному с оператором Поммье, реализуется в пространстве бесконечно дифференцируемых функций как оператор, полученный фиксированием одного сомножителя в произведении Дюамеля. Существенное отличие рассмотренной ситуации от исследовавшихся ранее состоит в отсутствии циклических векторов у оператора Поммье в исходном пространстве целых функций.

Ключевые слова: оператор Поммье, целая функция экспоненциального типа, пространство бесконечно дифференцируемых функций, коммутант, изоморфизм.

Mathematical Subject Classification (2000): 46E10, 30D15, 47L10, 26E10.

Введение

В настоящей работе изучаются свойства коммутанта оператора Поммье D_0 в пространстве H_Ω целых функций экспоненциального типа, изоморфного сильному сопряженному к пространству Фреше $\mathscr{E}(\Omega)$ функций, бесконечно дифференцируемых на интервале $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Ранее оператор D_0 и его одномерное возмущение D_{0,g_0} изучались в [1–4] в счетном индуктивном пределе E весовых пространств Фреше целых функций (если $g_0 \equiv 1$, то $D_0 = D_{0,g_0}$). В. А. Ткаченко [5, 6] использовал оператор D_{0,g_0} в случае $g_0 = e^P$, где P — некоторый многочлен (см. [1]). В [5, 6] он действует в (LB)-пространстве целых функций, рост которых определяется ρ-тригонометрически выпуклой ($\rho > 0$) функцией со значениями в $(-\infty, +\infty]$. Сопряженный к нему назван в [5] оператором обобщенного интегрирования. Конструкции подобного рода в (LB)-пространстве целых функций экспоненциального типа использовались И. Ф. Красичковым-Терновским [7]. В [1] был исследован коммутант D_{0,g_0} в кольце всех линейных непрерывных операторов в E. Свойства алгебры, образованной сопряженным E' к E с умножением, определяемым оператором сдвига для D_{0,g_0}, изучены в [2], циклические векторы и собственные замкнутые инвариантные подпространства D_{0,g_0} в E описаны в [3, 4]. Существенным отличием рассматриваемой здесь ситуации от изученных ранее конкретных случаев является неквазианалитичность пространства $\mathscr{E}(\Omega)$, изоморфного сопряженному к H_Ω (в [3, 4] сопряженное к E реализуется как некоторое пространство аналитических функций). Следствием этого является отсутствие циклических векторов у оператора Поммье в H_Ω. В ситуациях, исследованных в [3, 4], циклическими векторами D_0 являются все функции из E, отличные от многочлена (т. е. их «больше», чем функций, не являющихся циклическими).

Основной целью данной работы является описание линейных непрерывных в H_Ω операторов, перестановочных в H_Ω с D_0 и являющихся изоморфизмом H_Ω или близких к нему. Всякий оператор B из коммутанта $\mathscr{K}(D_0)$ оператора D_0 задается некоторым линейным непрерывным функционалом φ на H_Ω. С учетом рефлексивности $\mathscr{E}(\Omega)$ и теоремы Пэли — Винера — Шварца сопряженное к H_Ω можно отождествить с $\mathscr{E}(\Omega)$, и тогда элементы $\mathscr{K}(D_0)$ определяются (однозначно) функциями из $\mathscr{E}(\Omega)$. Показано, что изоморфизм задается той и только той функцией, которая не равна 0 в начале координат. При этом существенную роль играет метод, использующий теорию компактных операторов в банаховых пространствах. Ранее в аналогичных вопросах он применялся В. А. Ткаченко [6]. В другом крайнем случае, когда бесконечно дифференцируемая в Ω функция обращается тождественно в 0 в некоторой односторонней окрестности начала координат (и интервал Ω с соответствующей стороны ограничен), она задает несюръективный оператор. Как показано в [1], с помощью оператора сдвига для оператора Поммье в сопряженном H'_Ω к пространству H_Ω можно ввести ассоциативное и коммутативное умножение. Его естественной реализацией в $\mathscr{E}(\Omega)$ является произведение Дюамеля, играющее важную роль в различных вопросах анализа (см., например, работы М. Т. Караева [8, 9]). Это произведение тоже существенно используется в доказательствах.

1. Вспомогательные сведения

Пусть Ω — интервал в $\mathbb{R}$, содержащий 0; $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — исчерпывающая Ω последовательность отрезков: $K_n \subset \operatorname{int} K_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$; $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$. При этом для множества $M \subset \mathbb{R}$ символ $\operatorname{int} M$ обозначает внутренность M в $\mathbb{R}$. Будем считать, что $0 \in K_1$. Пусть $H_M(x) := \sup_{y\in M}(xy)$, $x \in \mathbb{R}$, — опорная функция множества $M \subset \mathbb{R}$; $A(\mathbb{C})$ — пространство целых в $\mathbb{C}$ функций.

Далее для $n \in \mathbb{N}$

$$H_{\Omega,n} := \left\{ f \in A(\mathbb{C}) : \|f\|_n := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{(1+|z|)^n \exp(H_{K_n}(\operatorname{Im} z))} < +\infty \right\};$$

$H_{\Omega,n}$ является банаховым пространством с нормой $\|\cdot\|_n$. При этом $H_{\Omega,n} \subset H_{\Omega,n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, и эти вложения непрерывны. Положим $H_\Omega := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_{\Omega,n}$ и снабдим H_Ω топологией индуктивного предела пространств $H_{\Omega,n}$, $n \in \mathbb{N}$, относительно их вложений в H_Ω.

Положим $e_\lambda(x) := e^{-i\lambda x}$, $x, \lambda \in \mathbb{C}$. Для локально выпуклого пространства X символ X' обозначает топологическое сопряженное к X. Пусть $\mathscr{E}(\Omega)$ — пространство Фреше всех бесконечно дифференцируемых в Ω функций. По теореме Пэли — Винера — Шварца [10, теорема 7.3.1] преобразование Фурье — Лапласа $\mathscr{F}(\varphi)(\lambda) := \varphi(e_\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\varphi \in \mathscr{E}(\Omega)'$, устанавливает топологический изоморфизм сильного сопряженного к $\mathscr{E}(\Omega)$ на H_Ω. Отметим, что $\mathscr{E}(\Omega)$ рефлексивно.

Пусть $\mathscr{L}(H_\Omega)$ — пространство всех линейных непрерывных операторов в H_Ω. Оператор Поммье D_z, $z \in \mathbb{C}$, определяется равенством

$$D_z(f)(t) := \begin{cases} \frac{f(t)-f(z)}{t-z}, & t \neq z, \\ f'(z), & t = z, \end{cases}$$

$f \in H_\Omega$. По [1] $D_z \in \mathscr{L}(H_\Omega)$ для любого $z \in \mathbb{C}$.

Следуя [11, 12], введем сдвиги T_z, $z \in \mathbb{C}$, для D_0, линейно и непрерывно действующие в H_Ω: для $f \in H_\Omega$

$$T_z(f)(t) := \begin{cases} \frac{tf(t)-zf(z)}{t-z}, & t \neq z, \\ f(z) + zf'(z), & t = z. \end{cases}$$

Пусть $\mathscr{K}(D_0)$ — множество всех линейных непрерывных операторов в H_Ω, перестановочных с D_0 в H_Ω, т. е. коммутант D_0 в кольце $\mathscr{L}(H_\Omega)$.

Теорема 1. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) $B \in \mathscr{K}(D_0)$.

(ii) *Существует функционал* $\varphi \in H'_\Omega$ *такой, что* $B(f)(z) = \varphi(T_z(f))$, $z \in \mathbb{C}$, $f \in H_\Omega$.

$\lhd$ Из [1, теорема 15] следует справедливость теоремы. $\rhd$

Для $\varphi \in H'_\Omega$ положим $B_\varphi(f)(z) = \varphi(T_z(f))$, $z \in \mathbb{C}$, $f \in H_\Omega$.

Определим бинарную операцию $\otimes$ в H_Ω : $(\varphi \otimes \psi)(f) := \varphi_z(\psi(T_z(f))$, $\varphi, \psi \in H'_\Omega$, $f \in H_\Omega$. По [1, § 3] произведение $\varphi \otimes \psi$ корректно определено; оно ассоциативно и коммутативно. Кроме того [1, следствие 18], отображение $\kappa(\varphi) := B_\varphi$ является изоморфизмом алгебр $(H'_\Omega, \otimes)$ и $\mathscr{K}(D_0)$ (в последней вводится обычное операторное умножение).

2. Основной результат

Как обычно, $D(\mathbb{R})$ — пространство всех бесконечно дифференцируемых в $\mathbb{R}$ функций с компактным носителем. Для обобщенной функции $u \in D'(\mathbb{R})$ символ $\operatorname{supp}(u)$ обозначает носитель u. Отметим свойство равномерной ограниченности носителей обобщенных функций $\mathscr{F}^{-1}(T_z(f))$, $z \in \mathbb{C}$, для фиксированной функции $f \in H_\Omega$.

Лемма 1. *Для любых* $m \in \mathbb{N}$ $f \in H_{\Omega,m}$, $z \in \mathbb{C}$, *носители* $\mathscr{F}^{-1}(D_0(f))$ *и* $\mathscr{F}^{-1}(T_z(f))$ *содержатся в* K_m.

$\lhd$ Применяя принцип максимума модуля, получаем, что $\|D_0(f)\|_m < +\infty$ и

$$\sup_{t \in \mathbb{C}} \frac{|T_z(f)(t)|}{(1+|t|)^{m+1} \exp(H_{K_m}(\operatorname{Im} t))} < +\infty.$$

По теореме Пэли — Винера — Шварца $\operatorname{supp}(\mathscr{F}^{-1}(D_0(f))) \subset K_m$ и $\operatorname{supp}(\mathscr{F}^{-1}(T_z(f))) \subset K_m$. $\rhd$

Для локально выпуклого пространства X, линейного непрерывного оператора $A : X \to X$ элемент $x \in X$ называется *циклическим вектором* A в X, если система $\{A^n(x) : n \geqslant 0\}$ полна в X, т. е. ее линейная оболочка плотна в X.

Следствие 1. *Оператор D_0 не имеет в H_Ω ни одного циклического вектора.*

$\lhd$ Зафиксируем $f \in H_{\Omega,m}$. По лемме 1 носитель каждой обобщенной функции $\mathscr{F}^{-1}(D_0^n(f))$, $n \geqslant 0$, содержится в K_m. Возьмем ненулевую функцию $h \in D(\mathbb{R})$ такую, что $(\operatorname{supp}(h)) \cap K_m = \varnothing$ и $\operatorname{supp}(h) \subset \Omega$. Тогда $\mathscr{F}^{-1}(D_0^n(f))(h) = 0$ для любого $n \geqslant 0$. Значит, множество $\left\{\mathscr{F}^{-1}(D_0^n(f)) : n \geqslant 0\right\}$ не является полным в сильном сопряженном к $\mathscr{E}(\Omega)$, следовательно, множество $\{D_0^n(f) : n \geqslant 0\}$ не является полным в H_Ω. $\rhd$

Этот факт принципиально отличает рассматриваемую здесь ситуацию от изученных ранее. Он влечет также, что семейство собственных замкнутых D_0-инвариантных подпространств H_Ω очень широкое.

Пусть $S(\mathbb{R})$ — пространство Шварца всех бесконечно дифференцируемых функций $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ таких, что $\lim_{t\to\infty}(|t|^k |f^{(k)}(t)|) = 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Символом $\mathscr{F}_S$ обозначим преобразование Фурье, действующее в пространстве $S'(\mathbb{R})$ обобщенных функций медленного роста на $\mathbb{R}$.

Для $h \in S(\mathbb{R})$ введем функцию $k(h)(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{h(t)}{t-z}\,dt$, $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$.

Лемма 2. *Пусть $h \in S(\mathbb{R})$ и $A := \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)\,dt$. Тогда $\lim_{\substack{z\to\infty,\\ z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}}}(zk(h)(z)) = -A$.*

Это утверждение содержится в [13, гл. 4, § 71]. Поскольку функции h и $h_1(t) := th(t)$ принадлежат $S(\mathbb{R})$, то найдется $C > 0$ такое, что для любых $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, для которых $|t_1|, |t_2| \geqslant 1$, выполняются неравенства $|h(t_1) - h(t_2)| \leqslant C\left|\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right|$ и $|h_1(t_1) - h_1(t_2)| \leqslant C\left|\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right|$ (т. е. в терминологии [13] h и h_1 удовлетворяют условию H вблизи ∞). Кроме того, существуют пределы $\lim_{\substack{z\to\infty,\\ \operatorname{Im} z>0}} k(h_1)(z)$ и $\lim_{\substack{z\to\infty,\\ \operatorname{Im} z<0}} k(h_1)(z)$, равные 0. Поэтому $\lim_{\substack{z\to\infty,\\ z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}}}(zk(h)(z)) = -A$ по [13, с. 260].

Замечание 1. (i) Преобразование $\widetilde{\mathscr{F}} : \varphi \mapsto (\varphi(e_\lambda), \lambda \in \Omega)$ является топологическим изоморфизмом сильного сопряженного к H_Ω на $\mathscr{E}(\Omega)$. При этом $\widetilde{\mathscr{F}}$ — отображение, сопряженное к $\mathscr{F} : \mathscr{E}(\Omega)' \to H_\Omega$ относительно дуальных пар $(\mathscr{E}(\Omega)', \mathscr{E}(\Omega))$ и (H_Ω, H'_Ω).

Полагаем $\widehat{\varphi} := \widetilde{\mathscr{F}}(\varphi)$, $\varphi \in H'_\Omega$. Для любых $\varphi \in H'_\Omega$, $n \geqslant 0$, справедливо равенство $\widehat{\varphi}^{(n)}(0) = \varphi_t(t^n)$.

(ii) Операция $\otimes$ посредством $\widetilde{\mathscr{F}} : H'_\Omega \to \mathscr{E}(\Omega)$ индуцирует в $\mathscr{E}(\Omega)$ произведение Дюамеля, т. е. $\widehat{\varphi \otimes \psi} = \widehat{\varphi} * \widehat{\psi}$, где

$$(g * h)(t) = \frac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t g(t-\tau)h(\tau)\,d\tau\right) = g(0)h(t) + \int\limits_0^t g'(t-\tau)h(\tau)\,d\tau, \quad g, h \in \mathscr{E}(\Omega).$$

(iii) Билинейная форма $\langle f, h\rangle := \widetilde{\mathscr{F}}^{-1}(h)(f)$, $f \in H_\Omega$, $h \in \mathscr{E}(\Omega)$, задает двойственность между H_Ω и $\mathscr{E}(\Omega)$. При этом $\langle f, h\rangle = \mathscr{F}^{-1}(f)(h)$.

Сопряженным к оператору $B_\varphi : H_\Omega \to H_\Omega$, $\varphi \in H'_\Omega$, относительно этой двойственности является оператор $A_{\widehat{\varphi}} : \mathscr{E}(\Omega) \to \mathscr{E}(\Omega)$, $A_{\widehat{\varphi}}(h) = \widehat{\varphi} * h$.

Выясним далее, при каких условиях B_φ является изоморфизмом H_Ω. Вначале охарактеризуем инъективные операторы B_φ.

Лемма 3. *Следующие утверждения равносильны:*

(i) *B_φ инъективен в H_Ω.*

(ii) *$\widehat{\varphi}(0) \neq 0$.*

$\lhd$ (i)$\Rightarrow$(ii): Если $\widehat{\varphi}(0) = 0$, то $B_\varphi(1) = 0$ (стоящая в скобках функция тождественно равна 1). Поэтому оператор B_φ не является инъективным.

(ii)⇒(i): Пусть $f \in \operatorname{Ker} B_\varphi$. Тогда $\varphi(T_z(f)) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$. Следовательно, $\widetilde{\mathscr{F}}^{-1}(\widehat{\varphi})(T_z(f)) = 0$ и $\mathscr{F}^{-1}(T_z(f))(\widehat{\varphi}) = 0$ для любого $z \in \mathbb{C}$. По лемме 1 существует $m \in \mathbb{N}$, для которого носители всех обобщенных функций $\mathscr{F}^{-1}(T_z(f))$, $z \in \mathbb{C}$, содержатся в K_m. Возьмем функцию $\chi \in D(\mathbb{R})$ такую, что χ равна 1 в K_{m+1} и $\operatorname{supp}(\chi) \subset \Omega$. Тогда $\mathscr{F}^{-1}(T_z(f))\,(\chi\widehat{\varphi}) = 0$, $z \in \mathbb{C}$. Таким образом,

$$\mathscr{F}_S^{-1}\,(\chi\widehat{\varphi})\,(T_z(f)\,|_{\mathbb{R}}) = 0, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Функция $g := \mathscr{F}_S^{-1}(\chi\widehat{\varphi})$ принадлежит $S(\mathbb{R})$ (при этом $S(\mathbb{R})$ отождествляется стандартным образом с подпространством $S'(\mathbb{R})$). Значит,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tf(t)g(t)}{t-z}\,dt = zf(z)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(t)}{t-z}\,dt, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

Положим

$$\alpha(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tf(t)g(t)}{t-z}\,dt, \quad \beta(z) := \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{g(t)}{t-z}\,dt, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}.$$

По лемме 2

$$\lim_{z\to\infty, z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}}(z\beta(z)) = -\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)dt = -\chi(0)\widehat{\varphi}(0) \neq 0$$

(функция $tf(t)g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, принадлежит $S(\mathbb{R})$). Поскольку $\lim_{\substack{z\to\infty,\\ z\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}}}\alpha(z) = 0$, то $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ и, следовательно, $f = 0$. Значит, $\operatorname{Ker} B_\varphi = \{0\}$. ▷

Введем функционалы $\delta_{0,n} \in H'_\Omega$, $n \geqslant 0$: $\delta_{0,n}(f) := \frac{i^n}{n!}f^{(n)}(0)$, $f \in H_\Omega$. Заметим, что $\widehat{\delta}_{0,n}(x) = \frac{1}{n!}x^n$, $x \in \Omega$, и $\kappa(\delta_{0,n}) = B_{\delta_{0,n}} = D_0^n$ [1, лемма 7] (отображение $\kappa : H'_\Omega \to \mathscr{K}(D_0)$ введено в § 1).

Лемма 4. *Пусть $\varphi \in H'_\Omega$ и $\widehat{\varphi}^{(j)}(0) = 0$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует $\psi \in H'_\Omega$ такое, что $\varphi = \delta_{0,n} \otimes \psi$. Если $\widehat{\varphi}^{(n)}(0) \neq 0$, то $\widehat{\psi}(0) \neq 0$.*

◁ Положим $\psi := \widetilde{\mathscr{F}}^{-1}(\widehat{\varphi}^{(n)})$ и $h := \widehat{\varphi}$. Тогда

$$h(t) = \frac{1}{n!}\frac{d}{dt}\left(\int_0^t (t-\tau)^n h^{(n)}(\tau)\,d\xi\right), \quad t \in \Omega,$$

т. е. $\widehat{\delta}_{0,n} * h^{(n)} = h$. Отсюда следует равенство $\varphi = \delta_{0,n} \otimes \widetilde{\mathscr{F}}^{-1}(h^{(n)})$. ▷

Введем дуальные преднормы в H'_Ω: $\|\varphi\|_n^* := \sup_{\substack{f\in H_\Omega,\\ \|f\|_n\leqslant 1}} |\varphi(f)|$, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi \in H'_\Omega$.

Теорема 2. *Следующие утверждения равносильны:*
(i) $B_\varphi \in \mathscr{K}(D_{0,g_0})$ *— изоморфизм* H_Ω.
(ii) $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$.

◁ (ii)⇒(i): Используем метод доказательства В. А. Ткаченко [6, теорема 2]. Поскольку для $f \in H_\Omega$, $t \neq z$

$$\frac{tf(t) - zf(z)}{t-z} = f(z) + t\frac{f(t)-f(z)}{t-z},$$

то

$$B_\varphi(f) = \widehat{\varphi}(0)f + B(f), \quad B(f)(z) := \varphi_t(tD_z(f)(t)), \quad z \in \mathbb{C},\ f \in H_\Omega. \qquad (1)$$

Покажем, что B — линейный непрерывный оператор в H_Ω такой, что для любого $n \in \mathbb{N}$ сужение B на $H_{\Omega,n}$ — компактный оператор в $H_{\Omega,n}$. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$. Положим $S_n = \{f \in H_{\Omega,n} : \|f\|_n \leqslant 1\}$. Для любой функции $f \in S_n$

$$|\varphi_t(tD_z(f)(t))| \leqslant \|\varphi\|^*_{n+1} \sup_{t\in\mathbb{C}} \frac{|t||D_z(f)(t)|}{(1+|t|)^{n+1}\exp(H_{K_{n+1}}(\operatorname{Im} t))}. \tag{2}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Если $z \in \mathbb{C}$, $|t-z| \geqslant \frac{1}{\varepsilon}$, то для любой функции $f \in S_n$

$$\begin{gathered}\frac{|t||D_z(f)(t)|}{(1+|t|)^{n+1}\exp(H_{K_{n+1}}(\operatorname{Im} t))} = \frac{|t||f(t)-f(z)|}{|t-z|(1+|t|)^{n+1}\exp(H_{K_{n+1}}(\operatorname{Im} t))} \\ \leqslant \varepsilon\left(\frac{|t|}{1+|t|} + (1+|z|)^n\exp(H_{K_n}(\operatorname{Im} z))\right) \leqslant 2\varepsilon(1+|z|)^n\exp(H_{K_n}(\operatorname{Im} z)).\end{gathered} \tag{3}$$

Если же $|t-z| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}$ для $z \in \mathbb{C}$, то для любой функции $f \in S_n$ по принципу максимума модуля найдется $w \in \mathbb{C}$ такое, что $|w-z| = \frac{1}{\varepsilon}$ и выполняются следующие неравенства:

$$\begin{gathered}\frac{|t||D_z(f)(t)|}{(1+|t|)^{n+1}\exp(H_{K_{n+1}}(\operatorname{Im} t))} \leqslant \varepsilon\frac{1}{(1+|t|)^{n}\exp(H_{K_{n+1}}(\operatorname{Im} t))} \\ \times((1+|w|)^n\exp(H_{K_n}(\operatorname{Im} w)) + (1+|z|)^n\exp(H_{K_n}(\operatorname{Im} z))) \\ \leqslant \varepsilon\left(\left(\frac{1+(2/\varepsilon)+|t|}{1+|t|}\right)^n \exp\left(\frac{2C_n}{\varepsilon}\right) + (1+|z|)^n\exp(H_{K_n}(\operatorname{Im} z))\right) \\ \leqslant \varepsilon\left(\left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \exp\left(\frac{2C_n}{\varepsilon}\right) + (1+|z|)^n\exp(H_{K_n}(\operatorname{Im} z))\right),\end{gathered} \tag{4}$$

где $C_n := \max_{|\xi|=1} H_{K_n}(\operatorname{Im}\xi) < +\infty$. Из (2)–(4) следует, что

$$\lim_{z\to\infty} \sup_{f\in S_n} \frac{|B(f)(z)|}{(1+|z|)^n\exp(H_{K_n}(\operatorname{Im} z))} = 0.$$

Последнее влечет относительную компактность $B(S_n)$ в $H_{\Omega,n}$. По лемме 3 оператор B_φ инъективен. Поскольку $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$, то вследствие (1) он является изоморфизмом каждого пространства $H_{\Omega,n}$, $n \in \mathbb{N}$. Отсюда следует, что B_φ — изоморфизм H_Ω.

(i)$\Rightarrow$(ii): Если $\widehat{\varphi}(0) = 0$, то по лемме 3 B_φ не является инъективным. $\rhd$

Следствие 2. *Пусть $\varphi \in H'_\Omega$ и $\widehat{\varphi}^{(j)}(0) = 0$, $0 \leqslant j \leqslant n-1$, $\widehat{\varphi}^{(n)}(0) \neq 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует $\psi \in H'_\Omega$, для которого $B_\varphi = D_0^n B_\psi$ и B_ψ — топологический изоморфизм H_Ω. Кроме того, $B_\varphi : H_\Omega \to H_\Omega$ имеет линейный непрерывный правый обратный.*

$\lhd$ По лемме 4 существует $\psi \in H'_\Omega$ такое, что $\varphi = \delta_{0,n} \otimes \psi$ и $\widehat{\psi}^{(n)}(0) \neq 0$. Тогда $B_\varphi = B_{\delta_{0,n}} B_\psi = D_0^n B_\psi = B_\psi D_0^n$. По теореме 2 B_ψ — изоморфизм H_Ω. Поскольку оператор $D_0^n : H_\Omega \to H_\Omega$ сюръективен, ядро $\operatorname{Ker} B_\varphi = \operatorname{Ker} D_0^n$ n-мерно (а значит, топологически дополнимо в H_Ω), то $B_\varphi : H_\Omega \to H_\Omega$ имеет линейный непрерывный правый обратный. $\rhd$

Обратимся теперь к другой крайней ситуации, когда функция $\widehat{\varphi}$ является «очень» плоской в начале координат, т. е. она равна 0 в некоторой односторонней окрестности начала координат.

Замечание 2. Рассмотрим случай, когда интервал Ω отличен от прямой $\mathbb{R}$. Тогда $\Omega = (\omega^-, \omega^+)$, где хотя бы одно из ω^-, ω^+ конечно. Пусть, например, $\omega^+ \in (0, +\infty)$.

Предположим, что $\widehat{\varphi} = 0$ в некоторой правосторонней окрестности начала координат. Тогда найдется ненулевая функция $h \in \mathscr{E}(\Omega)$ такая, что $h = 0$ в $(\omega^+, \omega_0]$ для некоторого $\omega_0 \in (0, \omega^+)$ и $\int_0^t \widehat{\varphi}(t-\tau)h(\tau)\,d\tau = 0$ для любого $t \in \Omega$. Значит, $A_{\widehat{\varphi}}(h) = \widehat{\varphi} * h = 0$. Оператор $A_{\widehat{\varphi}} : \mathscr{E}(\Omega) \to \mathscr{E}(\Omega)$ является сопряженным к $B_\varphi : H_\Omega \to H_\Omega$ (относительно дуальной пары $(H_\Omega, \mathscr{E}(\Omega))$). Так как $A_{\widehat{\varphi}}$ неинъективен, то по [14, гл. 8, § 8.6] $\operatorname{Im} B_\varphi$ не является плотным в H_Ω и, тем более, $B_\varphi : H_\Omega \to H_\Omega$ несюръективен.

Аналогично, если ω^- конечно и $\widehat{\varphi} = 0$ в некоторой левосторонней окрестности начала, то оператор $B_\varphi : H_\Omega \to H_\Omega$ несюръективен, причем его образ даже не плотен в H_Ω.

Приведенные рассуждения имеют непосредственное отношение к теореме Титчмарша о свертке [15]. Ее доказательство с использованием только теории функций вещественного переменного дано в [16, гл. II], в [17] оно проведено методами функционального анализа. О делителях нуля свертки Дюамеля речь идет в монографии И. Димовского [18, § 1.1].

Литература

1. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об операторах, перестановочных с оператором типа Поммье в весовых пространствах целых функций // Алгебра и анализ.—2016.—Т. 28, № 2.—С. 114–137.
2. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об алгебре аналитических функционалов, связанной с оператором Поммье // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, № 4.—С. 34–40.
3. *Иванова О. А., Мелихов С. Н.* Об инвариантных подпространствах оператора Поммье в пространствах целых функций экспоненциального типа // Комплексный анализ. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.—Вып. 142.—М.: ВИНИТИ РАН, 2017.—С. 111–120.
4. *Ivanova O. A., Melikhov S. N.* On the completeness of orbits of a Pommiez operator in weighted (LF)-spaces of entire functions // Complex Analysis and Operator Theory.—2017.—Vol. 11.—P. 1407–1424.
5. *Ткаченко В. А.* Инвариантные подпространства и одноклеточность операторов обобщенного интегрирования в пространствах аналитических функционалов // Мат. заметки.—1977.—Т. 22, вып. 2.—С. 613–618.
6. *Ткаченко В. А.* Об операторах, коммутирующих с обобщенным интегрированием в пространствах аналитических функционалов // Мат. заметки.—1979.—Т. 25, вып. 2.—С. 271–282.
7. *Красичков-Терновский И. Ф.* Инвариантные подпространства аналитических функций. III. О распространении спектрального синтеза // Матем. сб.—1972.—Т. 88 (130), № 3 (7).—С. 331–352.
8. *Karaev M. T.* Invariant subspaces, cyclic vectors, commutant and extended eigenvectors of some convolution operators // Methods Funct. Anal. Topology.—2005.—Vol. 11, №1.—P. 48–59.
9. *Караев М. Т.* Алгебры Дюамеля и их приложения // Функц. анализ и его прил.—2018.—Т. 52, вып. 1.—С. 3–12. DOI: doi.org/10.4213/faa3481.
10. *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. Теория распределений и анализ Фурье.—М.: Мир, 1986.—464 с.
11. *Binderman Z.* Functional shifts induced by right invertible operators // Math. Nachr.—1992.—Vol. 157.—P. 211–224. DOI: 10.1002/mana.19921570117.
12. *Dimovski I. N., Hristov V. Z.* Commutants of the Pommiez operator // Int. J. Math. and Math. Science.—2005.—№ 8.—P. 1239–1251.
13. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.—М.: ГРФМЛ, 1966.—708 с.
14. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения.—М.: Мир, 1969.—1072 с.
15. *Titchmarsh E. C.* The zeros of certain integral function // Proc. London Math. Soc.—1926.—Vol. 25.—P. 283–302.
16. *Микусинский Я.* Операторное исчисление.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1956.—367 с.
17. *Kalish G. K.* A Functional Analysis Proof of Titchmarsh's Theorem on Convolution // J. Math. Anal. Appl.—1962.—Vol. 5.—P. 176–183.
18. *Dimovski I.* Convolutional Calculus.—London: Kluwer, 1990.—184 p.

Статья поступила 24 апреля 2018 г.

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 3, P. 48–56

THE COMMUTANT OF THE POMMIEZ OPERATOR IN A SPACE OF ENTIRE FUNCTIONS OF EXPONENTIAL TYPE AND POLYNOMIAL GROWTH ON THE REAL LINE

Ivanova O. A.[1], Melikhov S. N.[1,2]

[1] Southern Federal University,
8 a Mil'chakova st., Rostov-on-Don 344090, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus st., Vladikavkaz 362027, Russia

E-mail: `neo_ivolga@mail.ru`, `melih@math.rsu.ru`

Abstract. In the space of entire functions of exponential type representing a strong dual to a Frechet space of infinitely differentiable functions on a real interval containing the origin, linear continuous operators commuting with the Pommiez operator are investigated. They are given by a continuous linear functional on this space of entire functions and hence, up to the adjoint of the Fourier–Laplace transform, by an infinite differentiable function on the initial interval. A complete characterization of linear continuous functionals defining isomorphisms by virtue of the indicated correspondence is given. It is proved that isomorphisms are determined by functions that do not vanish at the origin (and only by them). An essential role in proving the corresponding criterion is played by a method exploiting the theory of compact operators in Banach spaces. The class of those functions infinitely differentiable on the considered interval that define the operators from the mentioned commutant close to isomorphisms is distinguished. Such operators have finite-dimensional kernels. For an interval other than a straight real line, we also define the class of operators from the commutant of the Pommiez operator that are not surjective. The adjoint of a continuous linear operator that commutes with Pommiez operators is realized in the space of infinitely differentiable functions as an operator obtained by fixing one factor in the Duhamel product. The essential difference of the situation under consideration from the previously studied one is the absence of cyclic vectors of the Pommiez operator in the considered space of entire functions.

Key words: Pommiez operator, entire function of exponential type, space of infinitely differentiable functions, commutant, isomorphism.

Mathematical Subject Classification (2000): 46E10, 30D15, 47L10, 26E10.

References

1. *Ivanova O. A., Melikhov S. N.* On Operators Commuting with a Pommiez type Operator in Weighted Spaces of Entire Functions, *St. Petersburg Math. J.*, 2017, vol. 28, no. 2, pp. 209–224. DOI: 10.1090/spmj/1447.
2. *Ivanova O. A., Melikhov S. N.* On an Algebra of Analytic Functionals Connected with a Pommiez Operator, *Vladikavkazskij matematicheskij zhurnal* [Vladikavkaz Math. J.], 2016, vol. 18, no. 4, pp. 34–40 (in Russian). DOI 10.23671/VNC.2016.4.5989.
3. *Ivanova O. A., Melikhov S. N.* On Invarint Subspaces of the Pommiez Operator in Spaces of Entire Functions of Exponential Type, *Complex Analysis, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, vol. 142, Moscow, VINITI, 2017, pp. 111–120 (in Russian).
4. *Ivanova O. A., Melikhov S. N.* On the Completeness of Orbits of a Pommiez Operator in Weighted (LF)-Spaces of Entire Functions, *Complex Analysis and Operator Theory*, 2017, vol. 11, pp. 1407–1424. DOI: 10.1007/s11785-016-0617-5.
5. *Tkachenko V. A.* Invariant Subspaces and Unicellularity of Operators of Generalized Integration in Spaces of Analytic Functionals, *Math. Notes*, 1977, vol. 22, no. 2, pp. 613–618. DOI: 10.1007/BF01142725.
6. *Tkachenko V. A.* Operators that Commute with Generalized Integration in Spaces of Analytic Functionals, *Math. Notes*, 1979, vol. 25, no. 2, pp. 141–146. DOI: 10.1007/BF01780970.

7. Krasichkov-Ternovskii I. F. Invariant Subspaces of Analytic Functions. III. On the Extension of Spectral Synthesis, *Math. USSR-Sbornik*, 1972, vol. 17, pp. 327–348. DOI: 10.1070/SM1972v017n03ABEH001508.
8. Karaev M. T. Invariant Subspaces, Cyclic Vectors, Commutant and Extended Eigenvectors of Some Convolution Operators. *Methods Funct. Anal. Topology*, 2005, vol. 11, no. 1, pp. 48–59.
9. Karaev M. T. Duhamel Algebras and Applications, *Functional Analysis and its Applications*, 2018, vol. 52, no. 1, pp. 1–8. DOI: doi.org/10.4213/faa3481.
10. Hörmander L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. Vol. I: Distribution Theory and Fourier Analysis*, Springer, 1983, 391 p.
11. Binderman Z. Functional Shifts Induced by Right Invertible Operators, *Math. Nachr.*, 1992, vol. 157, pp. 211–224. DOI: 10.1002/mana.19921570117.
12. Dimovski I. N., Hristov V. Z. Commutants of the Pommiez Operator, *Int. J. Math. and Math. Science*, 2005, no. 8, pp. 1239–1251.
13. Muskheleshvili N. I. *Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoi teorii uprugosti* [Some Basic Problems of the Mathematical Elasticity Theory], Moscow, GRFML, 1966, 708 p. (in Russian).
14. Edvards R. E. *Functional Analysis. Theory and Applications.* N. Y., Holt, Rinehart and Winston, 1965, 791 p.
15. Titchmarsh E. C. The Zeros of Certain Integral Function, *Proc. London Math. Soc.*, 1926, vol. 25, pp. 283–302.
16. Mikusiński J. *Operational Calculus*, N. Y., Pergamon Press, 1959, 495 p.
17. Kalish G. K. A Functional Analysis Proof of Titchmarsh's Theorem on Convolution, *J. Math Anal. Appl.*, 1962, vol. 5, pp. 176–183.
18. Dimovski I. *Convolutional Calculus*, London, Kluwer, 1990, 184 p.

Received April 24, 2018