Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 3, С. 57–68

УДК 517.955
DOI 10.23671/VNC.2018.3.17991

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

Ш. Т. Каримов[1], **А. К. Уринов**[1]

[1] Ферганский государственный университет,
Узбекистан, 150100, Фергана, ул. Мураббийлар, 19

E-mail:shaxkarimov@gmail.com, urinovak@mail.ru

Аннотация. Исследована видоизмененная задача Коши для четырехмерного уравнения второго порядка гиперболического типа со спектральным параметром и с оператором Бесселя. В уравнении по всем переменным участвует сингулярный дифференциальный оператор Бесселя. Для решения сформулированной задачи, применен обобщенный оператор Эрдейи — Кобера дробного порядка. Доказана формула вычисления производных высокого порядка от обобщенного оператора Эрдейи — Кобера, которая применяется при исследовании сформулированной задачи. Рассматривается также конфлюэнтная гипергеометрическая функция четырех переменных обобщающая функцию Гумберта и доказывается некоторые ее свойства. Принимая во внимание доказанные свойства оператора Эрдейи — Кобера и конфлюэнтной гипергеометрической функции, решение видоизмененной задачи Коши представлено в компактной интегральной форме, которая обобщает формулу Кирхгофа. Полученная формула позволяет непосредственно усмотреть характер зависимости решения от начальных функций и в частности, установить условия гладкости классического решения. В работе также содержится краткое историческое вступление в дифференциальные уравнения с операторами Бесселя.

Ключевые слова: задача Коши, дифференциальный оператор Бесселя, обобщенный оператор Эрдейи — Кобера дробного порядка.

Mathematical Subject Classification (2000): 35L15.

1. Введение. Постановка задачи

Пусть $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — точка n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$; $\Omega = \{(x,t) : x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, x_k > t > 0, k = 1, \ldots, n\}$, $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_k > 0, k = 1, \ldots, n\}$. Рассмотрим видоизмененную задачу Коши для уравнения

$$L^\lambda_{\alpha,\beta}(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{2\beta}{t}\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{2\alpha_k}{x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \lambda^2 u = 0, \quad (x,t) \in \Omega, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = f(x), \quad \lim_{t\to+0} t^{2\beta} u_t(x,t) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}^n_+, \tag{2}$$

где $f(x)$ и $g(x)$ — заданные непрерывные функции, а $\alpha_k, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$, причем $0 < \alpha_k < 1$, $k = 1, \ldots, n$, $0 < \beta < \frac{1}{2}$.

Уравнение (1) при различных значениях n, β, λ и α_k, $k=1,\dots,n$, возникает во многих классических задачах геометрии, прикладной математики и физики, которые изучаются в течение более чем двух столетий со времен Эйлера. Дифференциальное уравнение с сингулярными коэффициентами при младших членах впервые рассмотрено Эйлером в работе [1] в связи с изучением движения воздуха в трубах разного сечения и колебаний струн переменной толщины, которое заменой переменных сводится к уравнению (1) при $n=1$, $\beta\neq 0$, $\alpha_1\neq 0$, $\lambda=0$. Общее решение аналогичного уравнения, рассмотренное Эйлером, при $n=1$, $\alpha_1=\beta$, $\lambda=0$ нашел Б. Риман [2], построивший решение задачи Коши с помощью вспомогательной функции и методом, который впоследствии был назван его именем. Уравнение (1) при $n=1$, $\beta\neq 0$, $\alpha_1=0$, $\lambda=0$ позже рассматривал Пуассон [3], найдя для него гиперболический аналог представления решений, называемый представлением Пуассона. В этой работе он также рассмотрел уравнение (1) при $n=3$, $\beta=1$, $\alpha_k=0$, $k=1,2,3$, $\lambda=0$. Значительно позже уравнение (1) при $n=1$, $\alpha_1=0$, $\lambda=0$ и $0<\beta<1/2$ встречалось при исследовании вопросов кривизны поверхностей в монографии Г. Дарбу [4], где оно названо уравнением Эйлера — Пуассона. Поэтому впоследствии многие авторы стали называть уравнения вида (1) и их эллиптические аналоги уравнениями Эйлера — Пуассона — Дарбу.

Важный частный случай уравнения (1) при $n=1$, $\beta=1/6$, $\alpha_1=0$, $\lambda=0$ является основным объектом исследования работы [5]. Полученные здесь результаты сыграли ключевую роль при изучении краевой задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа $yu_{xx}+u_{yy}=0$, названного впоследствии уравнением Трикоми. В связи с этим исследованию разных задач для уравнения (1) при $n=1$ посвящено очень много работ. Кроме того, теория уравнений, по одной из переменных которой действует сингулярный оператор Бесселя

$$B_\eta^{(x)}=x^{-2\eta-1}\frac{d}{dx}\,x^{2\eta+1}\frac{d}{dx}=\frac{d^2}{dx^2}+\frac{2\eta+1}{x}\,\frac{d}{dx}, \tag{3}$$

тесно связана с теорией вырождающихся уравнений. Значительные результаты по исследованию вырождающихся дифференциальных уравнений и уравнений смешанного типа получены в работах Ф. Трикоми, С. Геллерстедта, Ф. И. Франкля, М. В. Келдыша, К. И. Бабенко, А. В. Бицадзе, О. А. Олейника, В. А. Ильина, Е. И. Моисеева, И. А. Киприянова, М. М. Смирнова, А. М. Нахушева, В. И. Жегалова, С. П. Пулькина, В. Ф. Волкодавова, К. Б. Сабитова, А. И. Кожанова, Т. Ш. Кальменова, М. С. Салохитдинова, Т. Д. Джураева, Н. Р. Раджабова и их учеников и последователей. Более подробную информацию об этом направлении можно найти в монографиях А. В. Бицадзе [6], М. М. Смирнова [7], А. М. Нахушева [8], Р. Кэррола и Р. Шоуолтера [9], М. С. Салохитдинова и М. Мирсабурова [10] и др.

Уравнение (1) в случае, когда сингулярный оператор Бесселя (3) действует по временной переменной ($n>1$, $\beta\neq 0$, $\alpha_k=0$, $k=1,\dots,n$, $\lambda=0$), исследовано к настоящему времени достаточно полно. Сюда также следует отнести все работы, связанные с изучением принципа Гюйгенса для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу. Обзор этих исследований можно найти в работах А. Вейнштейна [11], Юнга [12], И. А. Киприянова и Л. А. Иванова [13], С. А. Терсенова [14], С. А. Алдашева [15] и др.

Задача Коши для уравнения (1) в случае, когда сингулярный оператор Бесселя (3) действует по нескольким или всем переменным, исследована мало. Имеется ряд результатов, связанных в основном с изучением наличия принципа Гюйгенса (см. [16–18]).

В данной работе для решения поставленной задачи применен обобщенный оператор интегрирования дробного порядка Эрдейи — Кобера [19]. Применение этого оператора позволяет сводить уравнения со спектральным параметром и с сингулярным оператором Бесселя, который действует по одной или нескольким переменным, к несингулярным уравнениям без спектрального параметра.

В работе [20] при $n > 2$, $\lambda \neq 0$, $\alpha_k = 0$, $k = 1, \dots, n$, и различных значениях параметра β получены явные формулы решения видоизмененной задачи Коши с применением одномерного обобщенного оператора Эрдейи — Кобера дробного порядка. В работах [21, 22] при $n = 1, 2$, $0 < \beta < 1/2$, $\lambda \neq 0$ и $\alpha_k \neq 0$, $k = 1, 2$, построены явные формулы решения задачи Коши (1), (2) с применением многомерного оператора Эрдейи — Кобера, которые введены и исследованы в работе [23]. Здесь также исследована задача Коши (1), (2) при $n = 3$, $\alpha_k \neq 0$, $k = 1, 2, 3$, $\beta = 0$, $\lambda = 0$. В настоящей работе при $n = 3$, используя обобщенный оператор дробного интегрирования Эрдейи — Кобера, построено в явном виде решение задачи Коши (1), (2), когда в уравнении (1) по всем переменным действует сингулярный оператор Бесселя, т. е. при $\alpha_k \neq 0$, $k = 1, 2, 3$, $\beta \neq 0$, $\lambda \neq 0$.

2. Обобщенный оператор Эрдейи — Кобера и его свойства

В работе [19] был введен и исследован обобщенный оператор Эрдейи — Кобера

$$J_\lambda(\eta, \alpha) f(x) = 2^\alpha \lambda^{1-\alpha} x^{-2\alpha-2\eta} \int_0^x t^{2\eta+1} \left(x^2 - t^2\right)^{(\alpha-1)/2} J_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2 - t^2}\right) f(t)\, dt, \tag{4}$$

где $\eta, \alpha, \lambda \in \mathbb{R}$, причем $\alpha > 0$, $\eta \geqslant -(1/2)$; $J_\nu(z)$ — функция Бесселя порядка ν.

Основные свойства оператора (4), можно найти в работах [19, 24]. Приведем некоторые из этих свойств.

1. Очевидно, что в пределе при $\lambda \to 0$, оператор (4) совпадает с обычным оператором Эрдейи — Кобера

$$I_{\eta,\alpha} f(x) = \frac{2x^{-2(\eta+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \left(x^2 - t^2\right)^{\alpha-1} t^{2\eta+1} f(t)\, dt,$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера.

2. Справедливы следующие равенства:

$$J_{i\lambda}(\eta + \alpha, \beta) J_{i\lambda}(\eta, \alpha) = J_\lambda(\eta + \alpha, \beta) J_{i\lambda}(\eta, \alpha) = I_{\eta,\alpha+\beta},$$

где i — мнимая единица, а $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$.

3. Из последнего равенства, воспользовавшись свойством $J_0(\eta, 0) = E$, где E — единичный оператор, можно доопределить оператор $J_\lambda(\eta, \alpha)$ при $\alpha < 0$, следующим образом:

$$J_\lambda(\eta, \alpha) f(x) = x^{-2(\eta+\alpha)} \left(\frac{d}{2xdx}\right)^m x^{2(\eta+\alpha+m)} J_\lambda(\eta, \alpha + m) f(x),$$

где $-m < \alpha < 0$, $m = 1, 2, \dots$

4. Из свойств 2 и 3 вытекают следующие соотношения для обратного оператора:

$$J_{i\lambda}^{-1}(\eta, \alpha) = J_\lambda(\eta + \alpha - \alpha), \quad J_\lambda^{-1}(\eta, \alpha) = J_{i\lambda}(\eta + \alpha - \alpha).$$

Лемма 1 [25]. *Пусть $\alpha > 0$, $f(x) \in C^2(0, b)$, $b > 0$, функция $x^{2\eta+1} f(x)$ интегрируема в окрестности нуля и $x^{2\eta+1} f'(x) \to 0$ при $n \to 0$. Тогда справедливо равенство*

$$\left(B_{\eta+\alpha}^{(x)} + \lambda^2\right) J_\lambda(\eta, \alpha) f(x) = J_\lambda(\eta, \alpha) B_\eta^{(x)} f(x). \tag{5}$$

В дальнейшем нам понадобится следующий вид оператора (4):

$$J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\frac{2x^{-2(\alpha+\eta)}}{\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x t^{2\eta+1}\big(x^2-t^2\big)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)f(t)\,dt, \tag{6}$$

где $\bar{J}_v(z)$ — функция Бесселя — Клиффорда [23]:

$$\bar{J}_v(z)=\Gamma(v+1)(z/2)^{-v}J_v(z)={}_0F_1(\nu+1;-z^2/4)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-z^2/4)^k}{(\nu+1)_k k!}. \tag{7}$$

Теперь, докажем одно свойство оператора (4), необходимое для дальнейшего исследования. Пусть $D_\eta^0=E$,

$$D_\eta=x^{-2\eta}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)x^{2\eta},\quad D_\eta^m=D_\eta^{m-1}D_\eta,\quad D_\eta^m=x^{-2\eta}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^m x^{2\eta}.$$

Теорема 1. *Если $\alpha>0$, $\eta\geqslant-(1/2)$, $f(x)\in C^m(0,b)$, $b>0$, функции $x^{2\eta+1}D_\eta^{k+1}f(x)$ интегрируемы в нуле и $\lim_{x\to0}x^{2\eta}D_\eta^k f(x)=0$, $k=0,\dots,m-1$, то верно равенство*

$$D_{\eta+\alpha}^m J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=J_\lambda(\eta,\alpha)D_\eta^m f(x). \tag{8}$$

$\lhd$ Теорему докажем методом математической индукции по m.

Покажем, что равенство (8) справедливо при $m=1$, т. е., что

$$D_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=J_\lambda(\eta,\alpha)D_\eta f(x). \tag{9}$$

Рассмотрим функцию

$$D_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=\frac{2x^{-2(\eta+\alpha)}}{\Gamma(\alpha)}\lim_{\varepsilon\to0}F_\varepsilon(x),$$

где ε — достаточно малое положительное действительное число, а

$$F_\varepsilon(x)=\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\int\limits_0^{x-\varepsilon}\big(x^2-t^2\big)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)t^{2\eta+1}f(t)\,dt.$$

Применяя правило дифференцирования интеграла, получаем

$$F_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{x}(2x-\varepsilon)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\big(\lambda\sqrt{\varepsilon(2x-\varepsilon)}\big)(x-\varepsilon)^{2\eta+1}f(x-\varepsilon)$$
$$+\int\limits_0^{x-\varepsilon}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\left[\big(x^2-t^2\big)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)\right]t^{2\eta+1}f(t)\,dt.$$

Далее, учитывая легко проверяемое равенство

$$\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)\left[\big(x^2-t^2\big)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)\right]=-\left(\frac{1}{t}\frac{d}{dt}\right)\left[\big(x^2-t^2\big)^{\alpha-1}\bar{J}_{\alpha-1}\left(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\right)\right],$$

имеем

$$F_\varepsilon(x)=\frac{\varepsilon^{\alpha-1}}{x}\,(2x-\varepsilon)^{\alpha-1}\bar J_{\alpha-1}\bigl(\lambda\sqrt{\varepsilon(2x-\varepsilon)}\,\bigr)(x-\varepsilon)^{2\eta+1}f(x-\varepsilon)$$
$$-\int\limits_0^{x-\varepsilon}\left(\frac{d}{dt}\right)\Bigl[\bigl(x^2-t^2\bigr)^{\alpha-1}\bar J_{\alpha-1}\Bigl(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\Bigr)\Bigr]\,t^{2\eta}f(t)\,dt.$$

Применяя к последнему интегралу правило интегрирования по частям и принимая во внимание условие теоремы 1, после приведения подобных членов, получаем

$$F_\varepsilon(x)=\frac{-\varepsilon^{\alpha}}{x(x-\varepsilon)}\,(2x-\varepsilon)^{\alpha-1}\bar J_{\alpha-1}\bigl(\lambda\sqrt{\varepsilon(2x-\varepsilon)}\,\bigr)(x-\varepsilon)^{2\eta+1}f(x-\varepsilon)$$
$$+\int\limits_0^{x-\varepsilon}\Bigl[\bigl(x^2-t^2\bigr)^{\alpha-1}\bar J_{\alpha-1}\Bigl(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\Bigr)\Bigr]\,t^{2\eta+1}D_\eta f(t)\,dt.$$

Отсюда в силу $\alpha>0$ при $\varepsilon\to0$ получим равенство (9).

Предположим, что равенство (8) справедливо при $m=k$. Докажем, что оно верно и при $m=k+1$. С этой целью рассмотрим левую часть равенства (8) при $m=k+1$:

$$D^{k+1}_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=D_{\eta+\alpha}D^{k}_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x).$$

По предположению индукции при выполнении условий теоремы 1

$$D_{\eta+\alpha}D^{k}_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=D_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)D^k_\eta f(x).$$

В правой части последнего равенства, применяя формулу (9) к функциям $D^k_\eta f(x)$, получим

$$D^{k+1}_{\eta+\alpha}J_\lambda(\eta,\alpha)f(x)=J_\lambda(\eta,\alpha)D^{k+1}_\eta f(x).\ \triangleright$$

Следствие 1. *Пусть* $\eta=0$, $\alpha>0$, $f(x)\in C^m(0,b)$, $b>0$, *функции* $\frac{d}{dx}\bigl(\frac1x\frac{d}{dx}\bigr)^kf(x)$ *интегрируемы в нуле и* $\lim_{x\to0}\bigl(\frac1x\frac{d}{dx}\bigr)^kf(x)=0$, $k=0,\dots,m-1$. *Тогда*

$$\left(\frac1x\,\frac{d}{dx}\right)^m\int\limits_0^x\bigl(x^2-t^2\bigr)^{\alpha-1}\bar J_{\alpha-1}\bigl(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\,\bigr)f(t)t\,dt$$
$$=\int\limits_0^x\bigl(x^2-t^2\bigr)^{\alpha-1}\bar J_{\alpha-1}\bigl(\lambda\sqrt{x^2-t^2}\,\bigr)\left[\left(\frac1t\,\frac{d}{dt}\right)^m f(t)\right]t\,dt.\qquad(10)$$

3. Приложение оператора Эрдейи — Кобера к решению задачи (1), (2)

Пусть $n=3$. Сначала рассмотрим задачу нахождения классического решения уравнения

$$L^\lambda_{\alpha,\beta}(u)\equiv\frac{\partial^2u}{\partial t^2}+\frac{2\beta}{t}\,\frac{\partial u}{\partial t}-\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_k^2}+\frac{2\alpha_k}{x_k}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)+\lambda^2u=0,\quad(x,t)\in\Omega,\qquad(1')$$

удовлетворяющего полуоднородным начальным условиям

$$u_1(x,0)=f(x),\quad u_t(x,0)=0,\quad x\in\mathbb{R}^3_+. \tag{11}$$

Предположим, что решение этой задачи существует. Это решение ищем в виде

$$u_1(x,t)=J^{(t)}_{\lambda}\,(-1/2,\beta)\,U(x,t), \tag{12}$$

где $U(x,t)$ — неизвестная, дважды непрерывно дифференцируемая функция, верхний индекс t в операторе означает переменную, по которой действует этот оператор.

Подставим (12) в уравнение (1′) и начальные условия (11), а затем, используя лемму 1, получим задачу нахождения решения $U(x,t)$ уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}-\sum_{k=1}^{3}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_k^2}+\frac{2\alpha_k}{x_k}\frac{\partial U}{\partial x_k}\right)=0, \tag{13}$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$U(x,0)=k_0 f(x),\quad x\in\mathbb{R}^3_+,\qquad U_t(x,0)=0,\quad x\in\mathbb{R}^3_+, \tag{14}$$

где $k_0=\Gamma[\beta+(1/2)]/\sqrt{\pi}$.

Решение задачи (13), (14) имеет вид [23]

$$U(x,t)=\frac{k_0 t}{4\pi}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 U_0(x,t), \tag{15}$$

где

$$U_0(x,t)=\iiint\limits_{|\xi-x|<t} f(\xi)R(\xi;x,t;\alpha)\,d\xi, \tag{16}$$

$$R(\xi;x,t;\alpha)=\prod_{k=1}^{3}\left(\frac{\xi_k}{x_k}\right)^{\alpha_k} F_B^{(3)}(\alpha_1,\alpha_2,a_3;1-\alpha_1,1-\alpha_2,1-a_3;1;\omega_1,\omega_2,\omega_3), \tag{17}$$

$F_B^{(3)}(\alpha_1,\alpha_2,a_3;1-\alpha_1,1-\alpha_2,1-a_3;1;\omega_1,\omega_2,\omega_3)$ — гипергеометрическая функция Лауричеллы трех переменных [26] $\omega_k=[t^2-r^2]/(4\xi_k x_k)$, $r^2=|\xi-x|^2=\sum_{k=1}^{3}(\xi_k-x_k)^2$, причем $0\leqslant\omega_k<(1/2)$, $k=1,2,3$.

Переходя в равенстве (16) к сферическим координатам $\xi=x+\rho z$, где $\xi_k=x_k+\rho z_k$, $k=1,2,3$, $z_1=\sin\theta\cos\varphi$, $z_2=\sin\theta\sin\varphi$, $z_3=\cos\theta$, $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi$, $0<\rho<t$, можно показать, что

$$U_0(x,0)=0,\quad \lim_{t\to 0}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)U_0(x,t)=0. \tag{18}$$

Действительно, в сферических координатах равенство (16) примет вид

$$U_0(x,t)=\int\limits_0^t \rho^2 F(x,t;\rho)\,d\rho=t^3\int\limits_0^1 \mu^2 F(x,t;\mu t)\,d\mu, \tag{19}$$

где

$$F(x,t;\rho)=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x+\rho z)R(x+\rho z;x,t;\alpha)\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

функция $R(\xi;x,t;\alpha)$ определяется равенством (17), в котором $\xi=x+\rho z$.

Учитывая, что при $t \to 0$, также $\rho \to 0$ и $R(x;x,0;\alpha) = 1$, $F(x,0;0) = 4\pi f(x)$, из (19) имеем $U_0(x,0) = 0$. Аналогично, учитывая

$$\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right) F(x,t,\mu t)\bigg|_{t=0} = 4\pi f(x) \sum_{k=1}^{3} \frac{\alpha_k(1-\alpha_k)}{2x_k^2},$$

$$\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right) U_0(x,t) = 3t \int_0^1 \mu^2 F(x,t,\mu t)\, d\mu + t^2 \int_0^1 \mu^2 \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right) F(x,t,\mu t)\, d\mu,$$

при $t \to 0$ имеем $\lim_{t\to 0}(\partial/(t\partial t))U_0(x,t) = 0$.

Подставив (15) в (12), получим

$$u_1(x,t) = \frac{k_0 t^{1-2\beta}}{2\pi\, \Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{\bar{J}_{\beta-1}\big(\lambda\sqrt{t^2-s^2}\,\big)}{(t^2-s^2)^{1-\beta}} \left[\left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial s}\right)^2 U_0(x,s)\right] s\, ds. \tag{20}$$

В силу (18) функция $U_0(x,t)$ удовлетворяет условиям следствия 1. Тогда, применяя формулу (10) к равенству (20), получаем

$$u_1(x,t) = \frac{k_0 t^{1-2\beta}}{2\pi\Gamma(\beta)} \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \int_0^t \frac{\bar{J}_{\beta-1}\big(\lambda\sqrt{t^2-s^2}\,\big)}{(t^2-s^2)^{1-\beta}}\, U_0(x,s) s\, ds. \tag{21}$$

Подставляя значение функции $U_0(x,s)$ из (16) в равенство (21) и меняя порядок интегрирования, имеем

$$u_1(x,t) = \frac{k_0 t^{1-2\beta}}{2\pi\Gamma(\beta)} \prod_{k=1}^{3} \left[x_k^{-\alpha_k}\right] \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \int_{x_1-t}^{x_1+t} \xi_1^{\alpha_1}\, d\xi_1 \int_{x_1-r_1}^{x_1+r_1} \xi_2^{\alpha_2}\, d\xi_2 \int_{x_1-r_2}^{x_1+r_2} \xi_3^{\alpha_3} f(\xi) q(x,t;\xi)\, d\xi_3, \tag{22}$$

где

$$r_1 = \sqrt{t^2 - (\xi_1 - x_1)^2}, \quad r_2 = \sqrt{t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2},$$

$$q(x,t;\xi) = \int_r^t \frac{\bar{J}_{\beta-1}\big(\lambda\sqrt{t^2-s^2}\,\big)}{(t^2-s^2)^{1-\beta}}\, F_B^{(3)}(\alpha_1,\alpha_2,a_3;1-\alpha_1,1-\alpha_2,1-a_3;1;\omega_1,\omega_2,\omega_3) s\, ds, \tag{23}$$

$$r = |\xi - x|, \quad \omega_k = \frac{s^2 - r^2}{4\xi_k x_k}, \quad k = 1,2,3.$$

Для вычисления интеграла (23) выполним замену переменных по формуле $z = (s^2 - r^2)/(t^2 - r^2)$. Затем, принимая во внимание разложение функции Бесселя — Клиффорда в ряд (7) и учитывая равномерную сходимость данного ряда при любых значениях аргумента, меняем порядок интегрирования и суммирования:

$$q(x,t;\xi) = \frac{1}{2}\left(t^2 - r^2\right)^{\beta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_4^k}{(\beta)_k k!}$$
$$\times \int_0^1 (1-z)^{\beta+k-1} F_B^{(3)}(\alpha_1,\alpha_2,a_3;1-\alpha_1,1-\alpha_2,1-a_3;1;\sigma_1 z,\sigma_2 z,\sigma_3 z)\, dz, \tag{24}$$

где $\sigma_k = [t^2 - r^2]/(4\xi_k x_k)$, $0 \leqslant \sigma_k < (1/2)$, $k = 1,2,3$, $\sigma_4 = (-\lambda^2/4)[t^2 - r^2]$.

Лемма 2. *Пусть $c > d > 0$, $|x_k| < 1$, $k = 1, \dots, n$. Тогда справедливо равенство*

$$\int\limits_0^1 z^{d-1}(1-z)^{c-d-1} F_B^{(n)}(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; d; x_1 z, \dots, x_n z)\, dz = \frac{\Gamma(d)\Gamma(c-d)}{\Gamma(c)}\, F_B^{(n)}(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; c; x_1, \dots, x_n),$$

где $F_B^{(n)}(a_1, \dots, a_n; b_1, \dots, b_n; c; x_1, \dots, x_n)$ — гипергеометрическая функция Лауричеллы n переменных [26].

Эту лемму можно доказать, пользуясь разложением гипергеометрической функции Лауричеллы n переменных в ряд и определением гамма- и бета-функций Эйлера.

Применяя к (24) лемму 2 при $n = 3$, получаем

$$q(x,t;\xi) = \frac{1}{2\beta}\left(t^2 - r^2\right)^\beta \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sigma_4^k}{(\beta+1)_k k!} \times F_B^{(3)}(\alpha_1, \alpha_2, a_3; 1-\alpha_1, 1-\alpha_2, 1-a_3; \beta+k+1; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \tag{25}$$

При $n > 1$ введем обозначение

$$\begin{aligned}\Xi_2^{(n)}&(a_1, \dots, a_{n-1}; b_1, \dots, b_{n-1}; c; z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= \sum_{k_n=0}^{\infty} \frac{z_n^{k_n}}{(c)_{k_n} k_n!}\, F_B^{(n-1)}(a_1, \dots, a_{n-1}; b_1, \dots, b_{n-1}; c+k_n; z_1, \dots, z_{n-1}) \\ &= \sum_{k_1, k_2, \dots, k_n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_{k_1} \dots (a_{n-1})_{k_{n-1}} (b_1)_{k_1} \dots (b_{n-1})_{k_{n-1}}}{(c)_{k_1+k_2+\dots+k_n} k_1! k_2! \dots k_n!}\, z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n}.\end{aligned} \tag{26}$$

Рассматриваемый гипергеометрический ряд сходится при $|z_k| < 1$, $k = 1, \dots, n-1$, $|z_n| < \infty$, $c \neq 0, -1, -2, \dots$, и при $n = 2$ он совпадает с функцией Горна [26] $\Xi_2(a_1, b_1; c; z_1, z_2) = \Xi_2^{(2)}(a_1, b_1; c; z_1, z_2)$, а при $n = 3$ — с вырожденной гипергеометрической функцией трех переменных [27] ${}_3\Phi_B^{(5)}(a_1, a_2, b_1, b_2, c; z_1, z_2, z_3) = \Xi_2^{(3)}(a_1, a_2; b_1, b_2; c; z_1, z_2, z_3)$.

Учитывая введенное обозначение и полагая $\Xi_2^{(4)}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3; 1-\alpha_1, 1-\alpha_2, 1-\alpha_3; 1+\beta; \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) = \Xi_2^{(4)}(\alpha; 1-\alpha; 1+\beta; \sigma)$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $1-\alpha = (1-\alpha_1, 1-\alpha_2, 1-\alpha_3)$, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$ из (23), получаем

$$q(x,t;\xi) = \frac{1}{2\beta}\left(t^2 - r^2\right)^\beta \Xi_2^{(4)}(\alpha; 1-\alpha; 1+\beta; \sigma). \tag{27}$$

Подставляя (27) в (22), имеем

$$u_1(x,t) = \frac{k_0 t^{1-2\beta} x^{-\alpha}}{4\pi\beta\Gamma(\beta)} \left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)^2 \iiint\limits_{|\xi - x| < t} \xi^\alpha f(\xi)\left(t^2 - r^2\right)^\beta \Xi_2^{(4)}(\alpha; 1-\alpha; 1+\beta; \sigma)\, d\xi, \tag{28}$$

где $x^{-\alpha} = x_1^{-\alpha_1} x_2^{-\alpha_2} x_3^{-\alpha_3}$, $\xi^\alpha = \xi_1^{\alpha_1}\xi_2^{\alpha_2}\xi_3^{\alpha_3}$, $\sigma_k = [t^2 - |\xi - x|^2]/(4\xi_k, x_k)$, $\sigma_4 = -(\lambda^2/4)[t^2 - |\xi - x|^2]$, причем $0 \leqslant \sigma_k < (1/2)$, $k = 1, 2, 3$.

Далее нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3. *Если функции* z_k, $k=1,\dots,n$, *не зависят от* x *и* $|z_k x|<1$, $k=1,\dots,n-1$, $c\neq 1,0,-1,-2,\dots$, *то имеет место равенство*

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x^{c-1}\,\Xi_2^{(n)}(a_1,\dots,a_{n-1};b_1,\dots,b_{n-1};c;z_1x,z_2x,\dots,z_nx)\right]$$
$$=(c-1)x^{c-2}\,\Xi_2^{(n)}(a_1,\dots,a_{n-1};b_1,\dots,b_{n-1};c-1;z_1x,z_2x,\dots,z_nx).$$

◁ Лемма 3 легко доказывается с применением следующих формул:

$$\Xi_2^{(n)}(a_1,\dots,a_{n-1};b_1,\dots,b_{n-1};c;z_1,z_2,\dots,z_n)$$
$$=\sum_{k_1,k_2,\dots,k_{n-1}=0}^{\infty}\frac{(a_1)_{k_1}\dots(a_{n-1})_{k_{n-1}}(b_1)_{k_1}\dots(b_{n-1})_{k_{n-1}}}{(c)_{k_1+k_2+\dots+k_{n-1}}k_1!k_2!\dots k_{n-1}!}$$
$$\times z_1^{k_1}z_2^{k_2}\dots z_{n-1}^{k_{n-1}}\bar I_{c+k_1+k_2+\dots+k_{n-1}-1}(2\sqrt{z_n}\,),$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{c+p-1}\bar I_{c+p-1}(2\sqrt{z_nx}\,)\right]=(c+p-1)x^{c+p-2}\bar I_{c+p-2}(2\sqrt{z_nx}\,),\qquad \frac{c+p-1}{(c)_p}=\frac{c-1}{(c-1)_p},$$

где $p=k_1+k_2+\dots+k_{n-1}$, $\bar I_\nu(z)=\Gamma(\nu+1)(z/2)^{-\nu}I_\nu(z)$, $I_\nu(z)$ — модифицированная функция Бесслея. ▷

Переходя к сферическим координатам в равенстве (28) и вычислив производную с учетом леммы 3, получаем окончательный вид решения $u_1(x,t)$:

$$u_1(x,t)=\gamma_1 t^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\iiint\limits_{|\xi-x|<t}f(\xi)R_\lambda(\xi,x,t;\alpha,\beta)\,d\xi, \tag{29}$$

где

$$\gamma_1=2^{2-2\beta}\frac{\Gamma(2\beta)}{4\pi\Gamma^2(\beta)},\qquad R_\lambda(\xi,x,t;\alpha,\beta)=\left(\frac{\xi}{x}\right)^{\alpha}\left(t^2-r^2\right)^{\beta-1}\Xi_2^{(4)}(\alpha;1-\alpha;\beta;\sigma).$$

Теперь рассмотрим задачу нахождения классического решения уравнения (1′), удовлетворяющего полуоднородным начальным условиям

$$u(x,0)=0,\qquad \lim_{t\to+0}t^{2\beta}u_t(x,t)=g(x),\qquad x\in\mathbb{R}^3_+. \tag{30}$$

Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что если $u_1=u_1(x,t,1-\beta)$ есть решение уравнения $L^{\lambda}_{\alpha,1-\beta}(u_1)=0$, удовлетворяющее условиям (11), то функция $u_2(x,t)=t^{1-2\beta}u_1(x,t,1-\beta)$ при $0<\beta<(1/2)$ будет решением уравнения (1), удовлетворяющим начальным условиям $u_2(x,0)=0$, $\lim_{t\to+0}t^{2\beta}u_{2t}(x,t)=(1-2\beta)f(x)$, $x\in\mathbb{R}^3_+$.

Учитывая это свойство и заменяя $(1-2\beta)f(x)$ на $g(x)$, из равенства (29) получаем

$$u_2(x,t)=\gamma_2\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\iiint\limits_{|\xi-x|<t}g(\xi)R_\lambda(\xi,x,t;\alpha,1-\beta)\,d\xi, \tag{31}$$

где $\gamma_2=2^{2\beta}\Gamma(2-2\beta)/[4\pi\Gamma^2(1-\beta)]$.

Таким образом, в силу формул (28), (31) и принципа линейной суперпозиции решение задачи (1), (2) при $n=3$ имеет вид

$$u(x,t)=\gamma_1 t^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\iiint\limits_{|\xi-x|<t} f(\xi)R_\lambda(\xi,x,t;\alpha,\beta)\,d\xi + \gamma_2\left(\frac{1}{t}\frac{\partial}{\partial t}\right)\iiint\limits_{|\xi-x|<t} g(\xi)R_\lambda(\xi,x,t;\alpha,1-\beta)\,d\xi. \qquad (32)$$

Установленная формула (32) позволяет указать точную степень гладкости начальных функций, при этом справедлива

Теорема 2. *Пусть* $f(x), g(x)\in C^3(\mathbb{R}^3_+)$. *Тогда формула* (32) *определяет классическое решение задачи* (1), (2) *при* $n=3$.

Литература

1. *Эйлер Л.* Интегральное исчисление.—М.: ГИФМЛ, 1958.—Т. 3.—447 с.
2. *Reimann B.* Vercuch einer allgemeinen auffassung der integration und differentiation // Ges. Math. Werke.—Leipzing: Teubner, 1876.—P. 331–334.
3. *Poisson S. D.* Memoire sur L'integration des equations lineaires aux differences partielles // J. l'Ecole Rog. Politechn.—1823.—№ 12.—P. 215–248.
4. *Darboux G.* Lecons sur la Theorie Generale des Surfaces et les Applications Geometriques du Calcul Infinitesimal. Vol. 2.—Paris: Gauthier-Villars, 1915.
5. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях смешанного типа.—М.–Л.: Гостезиздат, 1947.—192 с.
6. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных.—М.: Наука, 1981.—448 с.
7. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения.—М.: Наука, 1966.—292 с.
8. *Нахушев А. М.* Задачи со смещеним для уравнений в частных производных.—М.: Наука, 2007.—287 с.
9. *Carroll R. W., Showalter R. E.* Singular and Degenerate Cauchy Problems.—N. Y.: Academic Press, 1976.—333 p.
10. *Салохитдинов М. С., Мирсабурова М.* Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами.—Ташкент: Университет, 2005.—224 с.
11. *Weinstein A.* On the wave equation and the equation of Euler-Poisson // Wave Motion and Vibration Theory. Proc. Sympos. Appl. Math.—N. Y. : McGraw-Hill, 1954.—Vol. 5.—P. 137–147.
12. *Young E. C.* On a generalized Euler–Poisson–Darboux equation // J. Math. Mech.—1969.—Vol. 18, № 12.—P. 1167–1175.
13. *Киприянов И. А., Иванов. Л. А.* Задача Коши для уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу в симметрическом пространстве // Мат. сб.—1984.—Т. 124 (166), № 1 (5).—С. 45–55.
14. *Терсенов С. А.* Введение в теорию уравнений, вырождающихся на границе.—Новосибирск, 1973.—144 с.
15. *Алдашев С. А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений.—Алматы: Изд-во «Гылым», 1994.—168 с.
16. *Ибрагимов Н. Х., Оганесян А. О.* Иерархия гюйгенсовых уравнений в пространствах с нетривиальной конформной группой // Успехи мат. наук.—1991.—Т. 36, вып. 3 (279).—С. 111–146.
17. *Fox D. W.* The solution and Huygens' principle for a singular Cauchy problem // J. Math. Mech.—1959.—Vol. 8.—P. 197–220.
18. *Ляхов Л. Н., Половинкин И. П., Шишкина Э. Л.* Формулы решения задачи Коши для сингулярного волнового уравнения с оператором Бесселя по времени // Д окл. РАН.—2014.—Т. 459, № 5.—С. 533–538.
19. *Lowndes J. S.* A generalization of the Erdélyi–Kober operators // Proc. Edinb. Math. Soc.—1970.—Vol. 17, № 2.—P. 139–148.
20. *Urinov A. K., Karimov S. T.* Solution of the cauchy problem for generalized Euler–Poisson–Darboux equation by the method of fractional integrals // Progress in Partial Differential Equations.—Springer Intern. Publ., 2013.—P. 321–337. DOI: 10.1007/978-3-319-00125-8_15.

21. *Каримов Ш. Т.* Об одном методе решения задачи Коши для обобщенного уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу // Узб. мат. журн.—2013.—№ 3.—С. 57–69.
22. *Каримов Ш. Т.* Решение задачи Коши для многомерного гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами методом дробных интегралов // Докл. АН РУз.—2013.—№ 1.—С. 11–13.
23. *Karimov Sh. T.* Multidimensional generalized Erdélyi–Kober operator and its application to solving Cauchy problems for differential equations with singular coefficients // Fract. Calc. Appl. Anal.—2015.—Vol. 18, № 4.—P. 845–861.
24. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—702 с.
25. *Lowndes J. S.* An application of some fractional integrals // Glasgow Math. J.—1979.—Vol. 20.—P. 35–41.
26. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды: Специальные функции.—М.: Наука, 1988.—752 с.
27. *Jain R. N.* The confluent hypergeometric functions of three variables // Proc. Nat. Acad. Sci. India.—1966.—Vol. A36, № 2.—P. 395–408.

Статья поступила 12 февраля 2017 г.

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 3, P. 57–68

SOLUTION OF THE CAUCHY PROBLEM FOR THE FOUR-DIMENSIONAL HYPERBOLIC EQUATION WITH BESSEL OPERATOR

Karimov Sh. T.[1], Urinoiv A. K.[1]

[1] Fergana State University, 19 Murabbiylar st., Fergana 150100, Uzbekistan
E-mail: shaxkarimov@gmail.com, urinovak@mail.ru

Abstract. The modified Cauchy problem is investigated for a four-dimensional second order equation of hyperbolic type with spectral parameter and with the Bessel operator. The equation contains a singular differential Bessel operator on all variables. To solve the formulated problem, a generalized Erdélyi–Kober fractional order operator is applied. To solve the problem, a generalized Erdélyi–Kober fractional order operator is applied. A formula is obtained for calculating the high order derivatives of the generalized operator Erdélyi–Kober, that is then used in the study of the problem. We also consider the confluent hypergeometric function of four variables, which generalizes the Humbert function; some properties of this function are proved. Taking into account the proven properties of the Erdélyi–Kober operator and the confluent hypergeometric function, the solution of the modified Cauchy problem is presented in a compact integral form that generalizes the Kirchhoff formula. The obtained formula allows us to see directly the nature of the dependence of the solution on the initial functions and, in particular, to establish the smoothness conditions for the classical solution. The paper also contains a brief historical introduction to differential equations with Bessel operators.

Key words: Cauchy problem, Bessel differential operator, generalized Erdélyi–Kober operator of fractional order.

Mathematical Subject Classification (2000): 35L15.

References

1. *Eejler L. Integral'noe ischislenie* [Integral Calculus], Moscow, GIFML, 1958, vol. 3, 447 p.
2. *Reimann B.* Vercuch Einer Allgemeinen Auffassung der Integration und Differentiation, *Gessammelte Mathematische Werke*, Leipzing, Teubner, 1876, pp. 331–334.
3. *Poisson S. D.* Memoire sur L'integration des equations Lineaires aux Differences Partielles, *J. l'Ecole Rog. Politechn.*, 1823, no. 12, pp. 215–248.
4. *Darboux G.* Lecons sur la Theorie Generale des Surfaces et les Applications Geometriques du Calcul Infinitesimal, vol. 2, Paris, Gauthier-Villars, 1915.

5. *Trikomi F. O linejnyh uravnenijah smeshannogo tipa* [On Linear Equations of Mixed Type], Moscow–Leningrad, Gostezizdat, 1947, 192 p.
6. *Bitcadze A. V. Nekotorye klassy uravnenij v chastnyh proizvodnyh* [Some Classes of Partial Differential Equations], Moscow, Nauka, 1981, 448 p.
7. *Smirnov M. M. Vyrozhdajushhiesja jellipticheskie i giperbolicheskie uravnenija* [Degenerate Elliptic and Hyperbolic Equations], Moscow, Nauka, 1966, 292 p.
8. *Nahushev A. M.* Zadachi so smeshhenim dlja uravnenij v chastnyh proizvodnyh [*Displacement Problems for Partial Differential Equations*], Moscow, Nauka, 2007, 287 p.
9. *Carroll R. W., Showalter R. E. Singular and Degenerate Cauchy Problems*, New York, Academic Press, 1976, 333 p.
10. *Salohitdinov M. S., Mirsaburov M. Nelokal'nie zadachi dlja uravnenij smeshannogo tipa s singuljarnymi kojefficientami* [Nonlocal Problems for Mixed-Type Equations with Singular Coefficients], Toshkent, Universitet, 2005, 224 p.
11. *Weinstein A.* On the wave equation and the equation of Euler-Poisson, *Wave motion and vibration theory. Proc. Sympos. Appl. Math.*, New York, McGraw-Hill, 1954, vol. 5, pp. 137–147.
12. *Young E. C.* On a Generalized Euler–Poisson–Darboux Equation, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1969, vol. 18, no. 12, pp. 1167–1175.
13. *Kipriyanov I. A., Ivanov L. A.* The Cauchy Problem for the Euler–Poisson–Darboux Equation in a Symmetric Space, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1985, vol. 52, no. 1, pp. 41–51.
14. *Tersenov S. A. Vvedenie v teoriju uravnenij, vyrozhdajushhihsja na granice* [Introduction to the Theory of Equations Degenerating at the Boundary], Novosibirsk, 1973, 144 p.
15. *Aldashev S. A. Kraevye zadachi dlja mnogomernyh giperbolicheskih i smeshannyh uravnenij* [Boundary Value Problems for Multidimensional Hyperbolic and Mixed Equations], Almaty, Izd-vo «Gylym», 1994, 168 p.
16. *Ibragimov N. Kh., Oganesyan A. O.* The hierarchy of Huygens Equations in Spaces with a Non-Trivial Conformal Group, *Russian Math. Surveys*, 1991, vol. 46, no. 3, pp. 137–176.
17. *Fox D. W.* The Solution and Huygens' Principle for a Singular Cauchy Problem, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 1959, vol. 8, pp. 197–220.
18. *Lyakhov L. N., Polovinkin I. P., Shishkina E. L.* Formulas for the Solution of the Cauchy Problem for a Singular Wave Equation with Bessel Time Operator, *Doklady Mathematics*, 2014, vol. 90, no. 3, pp. 737–742.
19. *Lowndes J. S.* A Generalization of the Erdélyi–Kober Operators, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 1970, vol. 17, no. 2, pp. 139–148.
20. *Urinov A. K., Karimov S. T.* Solution of the Cauchy Problem for Generalized Euler-Poisson-Darboux Equation by the Method of Fractional Integrals, *Progress in Partial Differential Equations*, Springer, Heidelberg, 2013, vol. 44, pp. 321–337. DOI: 10.1007/978-3-319-00125-8_15.
21. *Karimov Sh. T.* Ob odnom metode reshenija zadachi Koshi dlja obobshhennogo uravnenija Jejlera–Puassona–Darbu, *Uzbekskij matematicheskij zhurnal*, 2013, no. 3, pp. 57–69 (in Russian).
22. *Karimov Sh. T.* Reshenie zadachi Koshi dlja mnogomernogo giperbolicheskogo uravnenija s singuljarnymi kojefficientami metodom drobnyh integralov, *Doklady AN RUz*, 2013, no. 1, pp. 11–13.
23. *Karimov Sh. T.* Multidimensional Generalized Erdélyi–Kober Operator and its Application to Solving Cauchy Problems for Differential Equations with Singular Coefficients, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2015, vol. 18, no. 4, pp. 845–861. DOI: 10.1515/fca-2015-0051.
24. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Integraly i proizvodnye drobnogo porjadka i ih prilozhenija* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Their Applications], Minsk, Nauka i tehnika, 1987, 702 p. (in Russian).
25. *Lowndes J. S.* An Application of Some Fractional Integrals, *Glasgow Mathematical Journal*, 1979, vol. 20, pp. 35–41.
26. *Prudnikov A. P., Brychkov Ju. A., Marichev O. I. Integraly i rjady: Special'nye funkcii* [Integrals and series: Special functions], Moscow, Nauka, 1988, 752 p.
27. *Jain R. N.* The confluent hypergeometric functions of three variables, *Proceedings of the National Academy of Sciences India*, 1966, vol. A36, no. 2, pp. 395–408.

Received February 12, 2017