Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 4, С. 5–19

УДК 517.53/57
DOI 10.23671/VNC.2018.4.23383

СВОЙСТВА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В СООТНОШЕНИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА ХАРДИ[♯]

Х. Х. Бурчаев[1], Г. Ю. Рябых[2]

[1] Чеченский государственный университет,
Россия, 364024, Грозный, ул. А. Шерипова, 32;
[2] Донской государственный технический университет,
Россия, 344010, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

E-mail: `bekhan.burchaev@gspetroleum.com`, `ryabich@aaanet.ru`

Аннотация. Рассмотрим пространство Харди H_p в единичном круге D, $p \geqslant 1$. Пусть l_ω — линейный функционал на H_p, определяемый функцией $\omega \in L_q(T)$, где $T = \partial D$ и $1/p + 1/q = 1$, а F — экстремальная функция для l_ω. На $X \in H_q$ реализуется наилучшее приближение $\bar{\omega}$ в $L_q(T)$ элементами из $H_q^0 = \{y \in H_q : y(0) = 0\}$. Функции F и X называем экстремальными элементами (э. э.) для l_ω. Э. э. связаны соответствующим соотношением двойственности. Рассматривается задача о том, как те или иные свойства ω отразятся на свойствах э. э. Аналогичная задача исследуется и для случая $0 < p < 1$. В статье Л. Карлесона и С. Кобса (1972) была изучена задача о свойствах элементов, на которых достигается нижняя грань $\|\bar{\omega} - x\|_{L_\infty(T)}$ для заданного $\omega \in L_q(T)$ по $x \in H_\infty^0$. Гипотеза авторов о том, что связь между э. э. подобна связи между ω и его проекцией на H_q, частично подтверждена в статье В. Г. Рябых (2006). Свойства э. э. для l_ω, когда ω — полином, изучены в статье Х. Х. Бурчаева, В. Г. Рябых и Г. Ю. Рябых (2017). В данной статье, опираясь на основной результат последней статьи и пользуясь методом последовательных приближений, доказано: если $\omega \in L_{q^*}(T)$, $q \leqslant q^* < \infty$, то $F \in H_{(p-1)q^*}$, $X \in H_{q^*}$; когда производная $\omega^{(n-1)} \in \mathrm{Lip}(\alpha, T)$, $0 < \alpha < 1$, то $F = Bf$, где B — произведение Бляшке, f — внешняя функция, при этом $(|f(t)|^p)^{(n-1)} \in \mathrm{Lip}(\alpha, T)$. Если же функция ω аналитична вне единичного круга, то э. э. аналитичны в том же круге. Перечисленные результаты уточняют и дополняют подобные результаты, полученные в упомянутой работе В. Г. Рябых (2006). Доказано также, что экстремальная функция для $l_\omega \in (H_q)^*$, где $1/(n+1) < \delta < 1/n$, $\omega \in H_\infty \cap \mathrm{Lip}(\beta, T)$, $\beta = 1/\delta - n + \nu < 1$ и $\nu > 0$, существует и обладает той же гладкостью, что и образующая функция ω.

Ключевые слова: линейный функционал, экстремальный элемент, метод приближения, производная.

Mathematical Subject Classification (2000): 47A60.

Образец цитирования: *Бурчаев Х. Х., Рябых Г. Ю.* Свойства экстремальных элементов в соотношении двойственности для пространства Харди // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 4.—С. 5–19. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23383.

1. Введение

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $T = \partial D$, $t = e^{i\theta}$; $1 \leqslant p < \infty$, $q : 1/p + 1/q = 1$. Рассмотрим линейный (ограниченный) функционал над пространством Харди H_p, образованный $\omega \in H_q$, т. е. $\left(\int_0^{2\pi} (\cdot)\, d\theta = \int_T (\cdot)\, d\theta\right)$

$$l(a) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_T a(t)\bar{\omega}(t)\, d\theta, \quad a \in H_p. \tag{1.1}$$

[♯]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00017.

Пусть $H_q^0 = \{x \in H_q : x(0) = 0\}$. Согласно [1, гл. IV] имеет место

Теорема A (о двойственности). *Если в функционале* (1.1) $1 < p < \infty$ *и* $\omega \in H_q$, *то* ($\|\cdot\|_{L_p(T)} = \|\cdot\|_p$)

$$\|l\| = \sup_{\|a\|_p \leqslant 1} \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_T a\,\bar{\omega}\,d\theta \right| = \inf_{x \in H_q^0} \|\bar{\omega} - x\|_q = \lambda. \tag{1.2}$$

Существуют единственные функции $F \in H_p$, $\|F\|_p = 1$ *и* $X \in H_q^0$, *для которых*

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} \int\limits_T F\bar{\omega}\,d\theta = \|\bar{\omega} - X\|_q. \tag{1.3}$$

Равенство (1.3) *равносильно выполнению п. в. соотношения*

$$\frac{|F(t)|^p}{F(t)} = \frac{\bar{\omega}(t)}{\lambda} - \frac{X(t)}{\lambda}. \tag{1.4}$$

Будем говорить, что функция $F \in H_p$ *экстремальна* (э. ф.) *для функционала* l, если $l(F) = \|l\|$ и $\|F\|_p = 1$.

Функцию X в (1.3), на которой реализуется нижняя грань, называем *элементом наилучшего приближения* (э. н. п.) для $\bar{\omega}$.

Э. ф. и э. н. п. называем *экстремальными элементами* (э. э.) для функционала l.

1.1. В предлагаемой работе исследуются качественные свойства э. э. для функционала (1.1). Подобная задача изучена относительно э. ф. для линейного функционала над H_p, $0 < p < 1$.

1.2. В [2] (2006 г.) установлено, что свойства э. э. зависят от принадлежности функции ω в функционале (1.1) тому или иному классу. Впервые подобная задача при $p = 1$ изучена в [3] (1972 г.). Одной из последних по этому вопросу является статья [4] (2017 г.).

1.3. В данной работе, опираясь на основной результат из [4], уточняются и дополняются некоторые старые результаты. Получены новые результаты.

Кратко изложим содержание работы. Ниже приводятся обозначения и сведения, используемые в дальнейшем. В § 2 сформулированы основные результаты (теоремы 1, 2 и 3, 4). Доказательства даны в §§ 3, 4 и §§ 5, 6. Лемма 1 является вспомогательной для теоремы 2. Обсуждение старых и новых результатов вынесено в замечания 1 (§ 3) и 2 (§ 4). Теорема 3$'$ (§ 5) обобщает теорему 3 относительно линейного функционала над H_p, $0 < p < 1$.

Настоящую работу можно рассматривать как продолжение работ [2] и [4].

1.4. Через $A(A(R); A(\mathbb{C}))$ обозначим множество функций, аналитических в $D(|z| < R, R > 1; \mathbb{C})$; AC — совокупность функций из A, непрерывных на $\overline{D}$ — замыкании круга D.

Для $0 < \alpha < 1$, $n \geqslant 1$ обозначим $\mathrm{Lip}^{(n-1)}(\alpha, T) = \mathrm{Lip}^{(n-1)}\alpha$ — класс функций w, непрерывных на T вместе с производными до порядка $n-1$ включительно, причем $w^{(n-1)}$ принадлежит классу Липшица с показателем α:

$$\left|w^{(n-1)}(t_1) - w^{(n-1)}(t_2)\right| = O\big(|t_1 - t_2|^{\alpha}\big).$$

Если $n = 1$, то обозначим $\mathrm{Lip}\,\alpha = \mathrm{Lip}^{(0)}\alpha$.

Класс $L_*^{(n-1)}$ состоит из функций ω, принадлежащих $\mathrm{Lip}^{(n)}\beta$, $0<\beta<1$, таких, что $w^{(n-1)}$ удовлетворяют условию Зигмунда:

$$\left|w^{(n-1)}(te^{i\varphi}) - 2w^{(n-1)}(t) + w^{(n-1)}(te^{-i\varphi})\right| = O(|\varphi|).$$

Соответственно, пусть

$$\Lambda_\alpha^{(n-1)}A = \left\{g \in A:\ \|g\|_{\alpha,n} = \sum_{j=0}^{n-1} \left|g^{(j)}(0)\right| + \sup_{z\in D}(1-|z|)^{1-\alpha}\left|g^{(n)}(z)\right| < \infty\right\},$$

$$\Lambda_*^{(n-1)}A = \left\{g \in A:\ \|g\|_n^* = \sum_{j=0}^{n} \left|g^{(j)}(0)\right| + \sup_{z\in D}(1-|z|)\left|g^{(n+1)}(z)\right| < \infty\right\}.$$

Теорема B [4]**.** *Если в функционале (1.1) $1<p<\infty$ и ω — полином, то $F \in A(\mathbb{C})$.*

Теорема C [5]**.** *Пусть $\Psi \in (H_\delta)^*$, $0<\delta<1$. Тогда существует единственная функция $g \in AC$ такая, что*

$$\Psi(a) = \lim_{\rho\to 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_T a(\rho t)\bar{g}(t)\, d\theta, \quad a \in H_\delta. \tag{1.5}$$

Если при этом $1/(n+1) < \delta < 1/n$, $n \geqslant 1$, то $g \in \Lambda_\alpha^{(n-1)}A$, где $\alpha = 1/\delta - n$.

Обратно, для $g \in \Lambda_\alpha^{(n-1)}A$, $\alpha = 1/\delta - n$, предел (1.5) существует для всех $a \in H_\delta$ и определяет ограниченный функционал над H_δ.

При $\delta = 1/(n+1)$ функция $g \in L_*^{(n-1)}$. Соответственно, если $g \in L_*^{(n-1)}$, то она образует над $H_{1/(n+1)}$ ограниченный функционал вида (1.5).

Отметим, что для $\delta = 1/(n+\alpha)$ имеет место оценка (см. [5])

$$c(\delta)\,\|g\|_{\alpha,n} \leqslant \|\Psi\| \leqslant C(\delta)\,\|g\|_{\alpha,n}. \tag{1.6}$$

Функцию $\Phi \in H_\delta$ называем *экстремальной* для функционала (1.5), если

$$\|\Phi\|_\delta = \left(\lim_{\rho\to 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left|\Phi\big(\rho e^{i\theta}\big)\right|^\delta d\theta\right)^{1/\delta} = 1, \quad \Psi(\Phi) = \|\Psi\| = \sup_{a\neq 0} \frac{|\Psi(a)|}{\|a\|_\delta}.$$

Говорим, что $g \in \lambda_\alpha A$, $0<\alpha<1$, если $(1-|z|)^{1-\alpha}|g'(z)| \to 0$ при $|z| \to 1$. Множество полиномов плотно в $\lambda_\alpha A$ (см. [5]).

2. Формулировки основных результатов

Теорема 1. *Э. ф. для функционала (1.1), в котором $1<p<\infty$ и $\omega \in H_{q_1}$, $q \leqslant q_1 < \infty$, принадлежит $H_{(p-1)q_1}$ тогда и только тогда, когда $\omega \in H_{q_1}$. При этом э. н. п. $X \in H_{q_1}$.*

Доказательство основано на использовании теоремы B, теоремы о форме элементов пространства $(L_\gamma(T))^*$, $1<\gamma<\infty$, и теоремы о проектировании из $L_\gamma(T)$ в H_γ.

Теорема 2. *Если в функционале* (1.1) $1<p<\infty$ *и* $\omega\in\Lambda_\alpha^{(n-1)}A$, $0<\alpha<1$, $n\geqslant 1$, *то* $F=Bf$, *где* f — *внешняя функция,* $|f(t)|^p\in\mathrm{Lip}^{(n-1)}\alpha$, B — *произведение Бляшке.*

Соответственно, если $\omega\in\Lambda_*^{(n-1)}A$, *то* $|f(t)|^p\in L_*^{(n-1)}$.

Доказательство проводится с помощью теорем 1 и C, теоремы Арцела — Асколи о компактности и теоремы о граничных значениях интеграла Пуассона.

Теорема 3. *Пусть в функционале* (1.5) $1/2<\delta<1$ *и* $g\in\Lambda_{\alpha+\nu}A$, *где* $\alpha=1/\delta-1$, $\nu>0$, $0<\alpha+\nu<1$. *Тогда э. ф. этого функционала существует* (*может быть, не единственная*) *и принадлежит* $\Lambda_{\alpha+\nu}A$.

Теорема 3 доказывается сведением ее к аналогичной теореме 4 из [2] относительно функционала (1.1): *если в* (1.1) $1\leqslant p<2$ *и* $\omega\in\Lambda_\alpha A$, *то э. ф. обладает такой же гладкостью.*

Теорема 4. *Если в равенстве* (1.3) $\omega\in A(R)$, *то э. н. п.* $X\in A(R)$.

Доказательство проводится методом вложения, примененным в [4].

3. Доказательство теоремы 1

Если в условии теоремы $q=q_1$, то доказательство сразу вытекает из теоремы A.

Пусть в функционале (1.1) $q<q_1$ и $\omega:=\omega_N$ — частичная сумма разложения ω в ряд Тейлора, l_N — линейный функционал над H_p, образованный полиномом ω_N, F_N и X_N — соответствующие э. э., $\lambda_N=\|l_N\|$. Тогда согласно соотошению (1.4) п. в.

$$\frac{|F_N(t)|^p}{F_N(t)}=\frac{\bar\omega_N(t)}{\lambda_N}-\frac{X_N(t)}{\lambda_N}, \tag{3.1}$$

где $X_N\in H_q^0$. Умножим обе части (3.1) на $F_N(t)h(t)$, где h — полином, и проинтегрируем по θ. Получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_T |F_N|^p h\,d\theta=\frac{1}{\lambda_N}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \bar\omega_N F_N h\,d\theta\right). \tag{3.2}$$

Пусть $p_1=(p-1)q_1$, $p_2=p_1/(p_1-p)$. Тогда $p_1>p>1$, $p_2>1$. При этом

$$\frac{1}{q_1}+\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}=\frac{1}{q_1}\left(1+\frac{1}{p-1}+\frac{(p-1)q_1-p}{p-1}\right)=1.$$

Правую часть (3.2) оценим с помощью неравенства Гёльдера. С учетом $F_N\in A(\mathbb{C})$ по теореме B, $\omega_N\in H_{q_1}$, $h\in H_{p_2}$, получим

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_T |F_N|^p h\,d\theta\right|\leqslant\left(\frac{\|\omega_N\|_{q_1}}{\lambda_N}\right)\|F_N\|_{p_1}\|h\|_{p_2}.$$

Тогда, тем более, будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_T |F_N|^p\,\mathrm{Re}(h)\,d\theta\right|\leqslant\left(\frac{\|\omega_N\|_{q_1}}{\lambda_N}\right)\|F_N\|_{p_1}\|h\|_{p_2}.$$

Воспользовавшись оценкой

$$\big\|h\big\|_{p_2} \leqslant \big\|\mathrm{Re}(h)\big\|_{p_2} + \big\|\mathrm{Im}(h)\big\|_{p_2} \leqslant \big(1 + C_1(p_2)\big)\big\|\mathrm{Re}(h)\big\|_{p_2},$$

где $C_1 = O(p_2/(p_2-1))$ (см. [6, гл. 9]), предыдущее неравенство сводим к неравенству

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_T |F_N|^p\,\mathrm{Re}(h)\,d\theta\right| \leqslant C_2(N, q_1, p_1)\|F_N\|_{p_1}\|\mathrm{Re}(h)\|_{p_2}, \tag{3.3}$$

где $C_2(N, q_1, p_1)$ ограничены в совокупности в силу $\omega_N \to \omega$ в H_{q_1}, $\lambda_N = \|l_N\| \to \|l\|$ при $N \to \infty$ (см. [7, замечание]).

Множество тригонометрических полиномов плотно в $L_{p_2}(T)$, $p_2 > 1$. Поэтому линейный функционал из левой части (3.3) можно с сохранением нормы продолжить на все пространство $L_{p_2}(T)$, т. е.

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_T |F_N|^p y\,d\theta\right| \leqslant C(q_1, p_1)\|F_N\|_{p_1}\|y\|_{p_2}$$

для всех $y \in L_{p_2}(T)$. Из предыдущего по теореме об общем виде линейного функционала над $L_{p_2}(T)$ (см. [8, гл. VI, § 2]) следует неравенство $\big(1/p_2 + 1/p_2' = 1\big)$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T |F_N|^{\frac{p}{p_2'}}\,d\theta\right)^{\frac{1}{p_2'}} \leqslant C\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T |F_N|^{p_1}d\theta\right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

Отсюда, имея ввиду $pp_2' = p_1$, $1/p_2' = p/p_1$, после сокращения получим

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T |F_N|^{p_1}d\theta\right)^{\frac{p-1}{p_1}} \leqslant C. \tag{3.4}$$

Так как $\omega_N \to \omega$ в H_q, $q \leqslant q_1$, при $N \to \infty$, пространство H_p, $p > 1$, — равномерно выпуклое, то $F_N \to F$ в H_p (см. [7]), значит, $F_N(z) \to F(z)$ равномерно внутри D. Из (3.4) следует

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T |F_N(\rho t)|^{p_1}d\theta\right)^{\frac{1}{p_1}} \leqslant C^{\frac{1}{p-1}}.$$

В последнем неравенстве перейдем к пределу при $N \to \infty$. Получим

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T |F(\rho t)|^{p_1}d\theta\right)^{\frac{1}{p_1}} \leqslant C^{\frac{1}{p-1}},$$

т. е. $F \in H_{p_1}$, $p_1 = (p-1)q_1$.

Обратно, пусть э. ф. $F \in H_{(p-1)q_1}$. Тогда функция $|F|^p/F \in L_{q_1}(T)$ и на основании разложения $L_\gamma(T) = H_\gamma \oplus \overline{H_\gamma^0}$, $\gamma > 1$ (теорема о проектировании из $L_\gamma(T)$ в H_γ (см. [6, гл. 9])), она единственным образом представима в виде

$$\frac{|F(t)|^p}{F(t)} = \varphi_1(t) + \bar{\varphi}_0(t),$$

где $\varphi_1 \in H_{q_1}$, $\varphi_0 \in H^0_{q_1}$. Отсюда и из (1.4) следует, что п. в.

$$\varphi_1(t) + \bar{\varphi}_0(t) = \frac{\bar{\omega}(t)}{\lambda} - \frac{X(t)}{\lambda}.$$

Следовательно, по единственности $\omega = \lambda(\varphi_0 + \bar{\varphi}_1(0)) \in H_{q_1}$, $X = -\lambda(\varphi_1 - \varphi_1(0)) \in H_{q_1}$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Теорема 1 уточняет теорему 2 из [2]: в последней установлено, что в условиях теоремы 1 э.н.п. $X \in \bigcap\limits_{\gamma<q_1} H_\gamma$ (в теореме 1 э.н.п. $X \in H_{q_1}$).

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\log(G(e^{i\theta}) + \mu)|d\theta \leqslant \sup_N \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\log(|F_N(e^{i\theta})|^p + 1) + p|\log(|F_N(e^{i\theta})|)\,d\theta.$$

4. Доказательство теоремы 2

Лемма 1. *Если в функционале* (1.1) $1 < p < \infty$ *и* $\omega \in \Lambda_\alpha A$, $0 < \alpha < 1$, *то* $|F_N(t)|^p \to G(t)$ *в* $C(T)$, *где* $G \in \operatorname{Lip}\alpha$.

$\lhd$ Умножим обе части равенства (3.1) на $F_N(t)/(1 - tz)$ и проинтегрируем по θ. Получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{|F_N|^p}{1 - tz}\,d\theta = \frac{1}{\lambda_N}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{F_N(t)}{1 - tz}\,\bar{\omega}_N(t)\,d\theta\right) = \frac{1}{\lambda_N}\left(\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{F_N(\rho t)}{1 - \rho tz}\,\bar{\omega}_N(t)\,d\theta\right). \quad (4.1)$$

Пусть $0 < \beta < \alpha$. Тогда $\omega_N \to \omega$ в $\Lambda_\beta A$ (см. [5]). Поэтому последовательность $\{\omega_N\}$ ограничена в H_∞. Следовательно, по теореме 1 последовательность $\{F_N\}$ ограничена в H_γ для каждого $0 < \gamma < \infty$. По теореме C предел в правой части (4.1) воспринимаем как значение линейного функционала Ψ_N над $H_{1/(1+\beta)}$ на $F_N(t)/(1 - tz)$. Тогда

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{|F_N|^p}{1 - tz}\,d\theta\right| \leqslant \left(\frac{\|\Psi_N\|}{\lambda_N}\right)\left\|\frac{F_N(t)}{1 - tz}\right\|_{1/(1+\beta)},$$

где $\|\Psi_N\|$ ограничены в совокупности в силу оценки (1.6) и ограниченности $\{\omega_N\}$ в $\Lambda_\beta A$. Норму в правой части предыдущего неравенства оценим с помощью неравенства Гёльдера, $\gamma > 1$, $1\gamma' + 1/\gamma = 1$. Получим

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{|F_N|^p}{1 - tz}\,d\theta\right| \leqslant C_*\|F_N\|^{1+\beta}_{\gamma'/(1+\beta)}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{d\theta}{|1 - tz|^{\gamma/(1+\beta)}}\right)^{\frac{1+\beta}{\gamma}}.$$

Число γ подберем так, чтобы выполнялось условие $\gamma/(1 + \beta) < 1$. Тогда интеграл в правой части последнего неравенства сходится. Следовательно, последовательность из левой части ограничена в D. Поэтому последовательности

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{|F_N|^p}{1 - t\bar{z}}d\theta\right\}, \quad \left\{\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{|F_N|^p\bar{t}z}{1 - \bar{t}z}d\theta\right\}$$

ограничены в D. С учетом этого, воспользовавшись представлением ядра Пуассона $(z = re^{i\varphi})$

$$P(r, \theta - \varphi) = \frac{1 - r^2}{1 - 2\,r\cos(\theta - \varphi) + r^2} = \frac{1}{1 - t\bar{z}} + \frac{\bar{t}z}{1 - \bar{t}z} \tag{4.2}$$

и неравенством треугольника, заключаем, что последовательность

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \big|F_N\big(e^{i\theta}\big)\big|^p P(r, \theta - \varphi)\, d\theta = \big(P_r * |F_N|^p\big)(\varphi)$$

ограничена в D. Откуда, $|F_N|^p \in C(T)$ в силу $F_N \in A(\mathbb{C})$ по теореме B, переходя к пределу при $r \to 1$, пользуясь теоремой о граничных значениях интеграла Пуассона [6, гл. 3], заключаем, что последовательность $\{F_N(z)\}$ ограничена в D. Поэтому $F(z)$ ограничена в D в силу $F_N(z) \to F(z)$ в D.

Продифференцировав обе части (4.1) по φ, получим

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{|F_N|^p}{1 - tz}\, d\theta\right) = \frac{iz}{\lambda_N}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{F_N(t)t}{(1 - tz)^2}\,\bar{\omega}_N(t)\, d\theta\right).$$

Как и выше, выражение в круглых скобках в правой части считаем значением функционала Ψ_N над $H_{1/(1+\beta)}$ на функции $F_N(t)t/(1 - tz)^2$. Соответственно имеем

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{|F_N|^p}{1 - tz}\, d\theta\right)\right| \leqslant \left(\frac{\|\Psi_N\|}{\lambda_N}\right)\|F_N\|_\infty\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{d\theta}{|1 - tz|^{2/(1+\beta)}}\, d\theta\right)^{1+\beta},$$

где последовательности $\{\|\Psi_N\|\}$ и $\{\lambda_N\}$ ограничены.

К интегралу в правой части применим оценку $(z = re^{i\varphi})$ [5]

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{d\theta}{|1 - tz|^{1+\mu}} \leqslant \frac{C_\mu}{(1 - r)^\mu}, \quad \mu > 0. \tag{4.3}$$

В результате получим

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{|F_N|^p}{1 - tz}\, d\theta\right)\right| \leqslant \frac{C(\beta)}{(1 - r)^{1-\beta}}.$$

Отсюда, пользуясь представлением (4.2), $\frac{\partial}{\partial\varphi}\,\psi(z) = iz\psi'(z)$ для $\psi \in A$, рассуждая как в первой части доказательства, заключаем, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \big|F_N\big(e^{i\theta}\big)\big|^p P(r, \theta - \varphi)\, d\theta\right)\right| \leqslant \frac{A(\beta)}{(1 - r)^{1-\beta}}.$$

Воспользуемся теоремой C из [2]: «*для того чтобы 2π-периодическая функция w имела на T производную порядка $n - 1$, удовлетворяющую условию Липшица с показателем $0 < \alpha < 1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось*

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial\varphi^n}\int\limits_0^{2\pi} w(\theta)P(r, \theta - \varphi)\, d\theta\right| \leqslant \frac{A_*(\alpha)}{(1 - r)^{1-\alpha}}.\text{»}$$

По процитированной теореме последовательность $\{|F_N(t)|^p\}$ ограничена в $\operatorname{Lip}\beta$. Поэтому найдется $M(\beta)>0$ такое, что

$$\big||F_N(t_1)|^p-|F_N(t_2)|^p\big|\leqslant M(\beta)|t_1-t_2|^\beta. \tag{4.4}$$

Таким образом, ограниченная в $C(T)$ последовательность $\{|F_N(t)|^p\}$ равностепенно непрерывна. Следовательно, по теореме Арцела — Асколи последовательность $\{|F_N(t)|^p\}$ компактна в $C(T)$ (см. [8, гл. I, § 5]). Из $|F_N|^p\to|F|^p$ в $L_1(T)$ следует, что предел $(P_r*|F_N|^p)(\varphi)$ при $N\to\infty$ существует. Если $\{|F_N(t)|^p\}$ имеет в $C(T)$ предельные точки $G_1(t)$ и $G_2(t)$, то в силу единственности предела $(P_r*G_1)(\varphi)=(P_r*G_2)(\varphi)$. Откуда при $r\to1$ получим, что $G_1(t)=G_2(t)$. И в силу (4.4) $|F_N(t)|^p\to G(t)\in\operatorname{Lip}\beta$. Перейдем в равенстве (4.1) к пределу при $N\to\infty$. Получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_T\frac{G}{1-tz}\,d\theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_T\frac{F}{1-tz}\,\bar\omega\,d\theta,$$

где $F\in H_\infty$. Относительно этого равенства повторим рассуждения, проведенные выше. В результате заключаем, что $|F_N|^p\to G\in\operatorname{Lip}\alpha$ в $C(T)$. $\triangleright$

Перейдем к доказательству основной части теоремы 2. Из ограниченности $\{F_N(z)\}$ и $F(z)$ в D следуют представления $F_N=B_Nf_N$ и $F=Bf$, где B_N и B — произведения Бляшке, f_N и f — функции, ограниченные в D и без нулей [6, гл. 5]. Произведение Бляшке однозначно определяется нулями данной функции. Поэтому $B_N\to B$, $f_N\to f$ в D. Поскольку последовательность $\{F_N(t)\}$ ограничена в H_∞, то последовательность $\{\log|F_N(t)|\}$ ограничена в $L_1(T)$ (см. [6, гл. 4]). Так как $|F_N(t)|\to G(t)\in\operatorname{Lip}\alpha$ по лемме 1, то $|\log(|F_N(t)|^p+\mu)|\to|\log(G(t)+\mu)|$ для любого $0<\mu<1$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\big|\log\big(G\big(e^{i\theta}\big)+\mu\big)\big|\,d\theta\leqslant\sup_N\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\big|\log\big(\big|F_N(e^{i\theta})\big|^p+1\big)+p\big|\log\big(\big|F_N(e^{i\theta})\big|\big)\,d\theta.$$

Отсюда в силу произвольности μ, $0<\mu<1$, заключаем, что $\log G(t)$ суммируем. Тогда п. в. $G(t)=|G_*(t)|$, где $G_*\in H_\infty$ (см. [6, гл. 4]). Следовательно, п. в. $G(t)>0$.

Пусть $t_0=e^{i\theta_0}$, $G(t_0)>0$. Тогда по непрерывности $G(t)>0$ в некоторой открытой окрестности точки θ_0. Опираясь на оценку (4.4), получим

$$\begin{aligned}|F_N(t)|^p&=G(t)+\big(|F_N(t)|^p-|F_N(t_0)|^pv\big)+\big(|F_N(t_0)|^p-G(t_0)\big)\\&\geqslant G(t_0)-\big(M|\theta-\theta_0|^\beta+\big||F_N(t_0)|^p-G(t_0)\big|\big).\end{aligned}$$

Отсюда, $|F_N(t_0)|^p\to G(t_0)$, заключаем, что найдутся δ_0, $0<\delta_0<\pi$, и номер $N_0=N(\delta_0)$ такие, что при $\theta\in l_0=\{\theta:|\theta-\theta_0|<\delta_0\}$ значения $G(t)>0$ и $|F_N(t)|^p>0$. Тогда $\log|F_N(t)|$ и $\log G(t)$ непрерывны при $\theta\in l_0$. И по $\varepsilon>0$ можно выбрать δ, $0<\delta<\delta_0$, такое, что при $\theta\in l_1=\{\theta:|\theta-\theta_0|<\delta\}$ будет

$$\big|\log G(t)-\log G(t_0)\big|=p\lim_{N\to\infty}\big|\log|F_N(t)|-\log|F_N(t_0)|\big|<\varepsilon. \tag{4.5}$$

Так как $F_N\in A(\mathbb{C})$, то f_N — внешняя функция функции f_N (см. [6, гл. 5]). Тогда $|f_N(t)|=|F_N(t)|$ п. в., причем

$$\log\big|f_N\big(\rho e^{i\theta_0}\big)\big|=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\log\big|F_N\big(e^{i\theta}\big)\big|P(\rho,\theta-\theta_0)\,d\theta.$$

Отсюда, с учетом

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} P(\rho, \theta - \theta_0)\, d\theta = \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{d\theta}{1 - 2\rho\cos(\theta - \theta_0) + \rho^2},$$

$|F_N(t_0)|^p \to G(t_0)$, следует, что

$$\log|f(\rho t_0)| - \frac{1}{p}\log G(t_0) = \lim_{N\to\infty}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\bigl(\log\bigl|F_N\bigl(e^{i\theta}\bigr)\bigr| - \log\bigl|F_N\bigl(e^{i\theta_0}\bigr)\bigr|\bigr)P(\rho, \theta - \theta_0)\, d\theta. \quad (4.6)$$

Пусть $l = \{\theta : |\theta - \theta_0| < \delta/2\}$. Интеграл в правой части (4.6) представим как сумму интегралов $I_{1,N}(\rho)$ и $I_{2,N}(\rho)$ соответственно по l и $l_* = [-\pi, \pi] \setminus l$. Относительно первого слагаемого, имея ввиду оценку (4.5), получим

$$I_{1,N}(\rho) < \varepsilon, \quad N > N_0. \quad (4.7)$$

На l_* имеем, что $|\theta - \theta_0| < \delta/2$, где $0 < \delta < \pi$, тогда $\cos(\theta - \theta_0) \leqslant \cos(\delta/2) < 1$. Следовательно, для второго слагаемого имеем

$$\bigl|I_{2,N}(\rho)\bigr| \leqslant \frac{1-\rho^2}{1 - 2\rho\cos(\delta/2) + \rho^2}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\bigl(\bigl|\log|F_N(t)|\bigr| + \bigl|\log|F_N(t_0)|\bigr|\bigr)\, d\theta.$$

Откуда вытекает, что $\sup_N |I_{2,N}(\rho)| \to 0$ при $\rho \to 1$ в силу ограниченности $\{\log|F_N(t)|\}$ в $L_1(T)$ и $|F_N(t_0)| \to G^{1/p}(t_0) > 0$. Вследствие последнего, (4.6) и (4.7) получим

$$\lim_{\rho\to 1}\bigl|\log|f(\rho t_0)|^p - \log G(t_0)\bigr| \leqslant p\varepsilon,$$

как только $G(t_0) > 0$. Следовательно, $|f(t)|^p = G(t)$ п. в. в силу произвольности $\varepsilon > 0$. Если $G(t_0) = 0$, то из неравенства (формула Пуассона)

$$0 \leqslant |f(\rho t_0)|^p \leqslant (P_\rho * G)(\theta_0)$$

при $\rho \to 1$ вытекает, что $f(t_0) = 0$. Это вместе с предыдущим устанавливает, что $|f(t)|^p = G(t) \in \operatorname{Lip}\alpha$, когда в функционале (1.1) $\omega \in \Lambda_\alpha A$.

Пусть в функционале (1.1) $\omega \in \Lambda_\alpha^{(n-1)} A$, $n \geqslant 2$. Тогда, тем более, $\omega \in \Lambda_\alpha A$, и по доказанному выше $|F_N(t)|^p \to |f(t)|^p \in C(T)$. Перейдем в равенстве (4.1) к пределу при $N \to \infty$, в новом равенстве от обеих частей возьмем производную порядка n. Получим

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{|f(t)|^p}{1 - tz}\, d\theta\right)^{(n)} = \frac{n!}{\|l\|}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{F(t)t^n\bar{\omega}(t)}{(1 - tz)^{n+1}}\, d\theta\right).$$

Как и ранее, по теореме C выражение в круглых скобках в правой части воспринимаем как значение линейного функционала Ψ над $H_{1/(n+\alpha)}$ на функции $F(t)t^n/(1 - tz)^{n+1}$. Тогда

$$\left|\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{|f(t)|^p}{1 - tz}\, d\theta\right)^{(n)}\right| \leqslant \frac{n!\|\Psi\|\|F\|_\infty}{\|l\|}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{d\theta}{|1 - tz|^{(n+1)/(n+\alpha)}}\right)^{n+\alpha}.$$

К интегралу правой части применим оценку (4.3). В левой части перейдем к производной по φ. После простых промежуточных оценок получим оценку ($z = re^{i\varphi}$)

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial\varphi^n}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{|f(t)|^p}{1-tz}\,d\theta\right)\right| \leqslant \frac{C(\alpha)}{(1-r)^{1-\alpha}},$$

которую, воспользовавшись представлением (4.2), сводим к оценке

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial\varphi^n}\left(P_r * |f|^p\right)(\varphi)\right| \leqslant \frac{A(\alpha)}{(1-r)^{1-\alpha}}.$$

Отсюда по процитированной выше теореме C из [2] заключаем, что $|f|^p \in \mathrm{Lip}^{(n-1)}\alpha$.

Пусть теперь в функционале (1.1) $\omega \in \Lambda_*^{(n-1)}A$, $n \geqslant 1$. Тогда $\omega \in \Lambda_\nu^{(n-1)}A$, где ν, такое, что $0 < \nu < 1$. По доказанному выше соответствующий $|f|^p \in \mathrm{Lip}^{(n-1)}\nu$. Умножим обе части (1.4) на $F(t)h(\rho t)$, где h — полином, и проинтегрируем по θ. С учетом $|F(t)|^p = |f(t)|^p$ п. в., $F(\rho t) \to F(t)$ в H_1, получим

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_T h(\rho t)|f(t)|^p\,d\theta = \lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_T h(\rho t)F(\rho t)\bar{\omega}(t)\,d\theta. \tag{4.8}$$

Множество полиномов плотно в $H_{1/(n+1)}$, $hF \in H_{1/(n+1)}$ в силу $F \in F_\infty$. По теореме C линейный функционал над $H_{1/(n+1)}$ из правой части (4.8) можно продолжить с сохранением нормы на все пространство $H_{1/(n+1)}$. Значит, такое же продолжение допускает функционал из левой части (4.8). Далее, пользуясь разложением $L_\gamma(T) = H_\gamma \oplus \overline{H_\gamma^0}$, имея ввиду $|f|^p \in C(T)$, по теореме C, $\delta = 1/(n+1)$, заключаем, что $|f|^p \in L_*^{(n-1)}$.

Теорема 2 доказана.

Так как функция $F_N \in A(\mathbb{C})$, то в ее факторизации сингулярная часть равна единице. Поэтому в представлении $F_N = B_N f_N$ функция

$$f_N(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,\log\left|f_N\big(e^{i\theta}\big)\right|d\theta\right] \tag{4.9}$$

с точностью до множителя с модулем, равным 1 (см. [6, гл. 5]). Перейдем в этом представлении к пределу при $N \to \infty$. Следуя первой части доказательства теоремы 2 и (4.9), заключаем, что

$$f(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,\log G^{\frac{1}{p}}\big(e^{i\theta}\big)\,d\theta\right]$$

с точностью до множителя с модулем, равным 1.

Соответственно, э. ф.

$$F(z) = \lim_{N\to\infty} B_N(z)f_N(z) = B(z)f(z), \tag{4.10}$$

где f — внешняя функция функции F.

Замечание 2. Теорема 2 дополняет [2, теорема 3]. Именно, в одинаковых условиях этих теорем в теореме 2 дополнительно установлено, что э. ф. F представима в виде (4.10), где f подчиняется условиям, которые указаны в заключении теоремы 2 (в [2, теорема 3] не затрагивается вопрос о сингулярной части э. ф. F).

5. Доказательство теоремы 3

Лемма 2. *Если в функционале* (1.5) $1/2 < \delta < 1$ *и* $g \in \lambda_\alpha A$, $\alpha = 1/\delta - 1$, *то* э. ф. *для* (1.5) *существует* (*может быть, не единственная*).

$\lhd$ С помощью тейлоровых рядов функций a и g получим $(a_\rho(\zeta) = a(\rho\zeta))$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_T a_\rho \bar{g}\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int\limits_D a_\rho\big(\bar{\zeta}\bar{g}\,' + \bar{g}\big)\,d\sigma = \frac{1}{\pi}\int\limits_D a_\rho\bar{\zeta}\bar{g}\,'d\sigma + \frac{1}{\pi}\int\limits_D a_\rho\bar{g}\,d\sigma = M_1(a,\rho) + M_2(a,\rho). \quad (5.1)$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства представим как сумму интегралов $I_1(a,\rho)$ и $I_2(a,\rho)$ соответственно, по $D(r) = \{|\zeta| < r < 1\}$ и $K(r) = D\setminus D(r)$. С учетом того, что $(1-|\zeta|)^{1-\alpha}|g'(\zeta)| \leqslant C(\alpha)$, $1-\alpha = 2 - 1/\delta$, будет

$$\big|I_2(a,r)\big| = \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{K(r)} a\bar{\zeta}\,\bar{g}\,'d\sigma\right| \leqslant \frac{C(\alpha)}{\pi}\int\limits_{K(r)}\big(1-|\zeta|\big)^{1/\delta-2}\big|a(\zeta)\big|\big((1-|\zeta|)^{1-\alpha}|g'(\zeta)|\big)\,d\sigma. \quad (5.2)$$

Так как $g \in \lambda_\alpha A$ в силу $g \in \Lambda_{\alpha+\nu}A$, то по $\varepsilon > 0$ найдется $0 < r_\varepsilon < 1$ такое, что $(1-|\zeta|)^{1-\alpha}|g'(\zeta)| < \varepsilon$, как только $\zeta \in K(r_\varepsilon)$. Это позволяет свести (5.2) к оценке

$$\big|I_2(a,r_\varepsilon)\big| \leqslant \varepsilon C(\alpha)\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_D\big(1-|\zeta|\big)^{1/\delta-2}|a|\,d\sigma\right).$$

Воспользуемся оценкой: если $b \in H_\gamma$, $1/2 < \gamma < 1$, то [1, гл. IV, упражнение 5(d)]

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_D\big(1-|\zeta|\big)^{1/\delta-2}|b|\,d\sigma \leqslant C_1(\gamma)\|b\|_\gamma.$$

Получим

$$\big|I_2(a,r_\varepsilon)\big| \leqslant \varepsilon\, C_2(\delta)\|a\|_\delta. \quad (5.3)$$

По определению нормы функционала Ψ существует последовательность $\{a_m\} \in H_\delta$, $\|a_m\|_\delta \leqslant 1$, такая, что $\Psi(a_m) \to \|\Psi\|$ при $m \to \infty$. Из ограниченности $\{a_m\}$ в H_δ следует ее компактность относительно равномерной сходимости внутри D (это вытекает из оценки роста функций из H_p, $0 < p < \infty$, и принципа компактности аналитических функций). Пусть сама последовательность $a_m \to \Phi$ внутри D. Тогда $\|\Phi\|_\delta \leqslant 1$. Из оценки (5.3) и произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{\rho\to 1} M_1(a_m,\rho) = \frac{1}{\pi}\int\limits_D \Phi\bar{\zeta}\,\bar{g}\,'d\sigma. \quad (5.4)$$

Пространства H_δ вложены в пространства Бергмана $A_{2\delta}$, $2\delta > 1$. Функция $g \in AC$, поэтому ограничена в D, пусть $|g(\zeta)| \leqslant M$. Применяя неравенство Гёльдера, $1/2\delta + 1/\delta' = 1$, имеем, что

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{K(r)} a_m\bar{g}\,d\sigma\right| \leqslant M\|a_m\|_{A_{2\delta}}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{K(r)} d\sigma\right)^{1/\delta'} \to 0$$

при $r \to 1$ равномерно относительно a_m. Соответственно,

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{\rho\to 1} M_2(a_m,\rho) = \frac{1}{\pi}\int\limits_D \Phi\bar{g}\,d\sigma.$$

Отсюда, из (5.1) и (5.4) вытекает равенство

$$\|\Psi\| = \lim_{\rho\to 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_T \Phi_\rho \bar{g}\, d\theta,$$

где, как отмечалось, $\|\Phi\|_\delta \leqslant 1$. Последнее вместе с предыдущим возможно только в случае $\|\Phi\|_\delta = 1$. Следовательно, функция Φ экстремальная для функционала (1.5) (может быть, не единственная [9, теорема 7]). $\triangleright$

Пусть $\Phi = bh$, где b — произведение Бляшке, функция $h \in H_\delta$ и без нулей в D. На основании $L_s(T) = \overline{H}_s \oplus H_s^0$, $s > 1$, для γ, $0 < \gamma < 1$, имеем, что $b_\rho(t)h_\rho^\gamma(t)\bar{g}(t) = w(\bar{t},\rho,\gamma) + w_0(t,\rho,\gamma)$, $w \in H_s$, $w_0 \in H_s^0$ (ρ и γ являются параметрами). При этом функция ($\tau = e^{i\psi}$)

$$w(z,\rho,\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_T \frac{h_\rho^\gamma(\tau) b_\rho(\tau)\bar{g}(\tau)}{1-\tau z}\, d\psi. \tag{5.5}$$

На основании теоремы C, $g \in \Lambda_\beta A$, правую часть (5.5) рассматриваем как значение линейного функционала Ψ_* над H_μ, $\mu = 1/(1+\alpha+\nu)$ на $h_\rho^\gamma b_\rho/(1-\tau z)$. С учетом $|b(\tau)| = 1$ п. в., $\|h\|_\delta = 1$, получим (неравенство Гёльдера: $\delta = 1/(1+\alpha) > \mu$, $p_1 = \delta/\gamma\mu$, $q_1 = \delta/(\delta-\gamma\mu)$)

$$\bigl|w(z,\rho,\gamma)\bigr| \leqslant \|\Psi_*\| \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_T \frac{|h_\rho|^{\gamma\mu}}{|1-\tau z|^\mu}\, d\psi \right)^{1/\mu} \leqslant \|\Psi_*\| \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_T \frac{d\psi}{|1-\tau z|^{\mu\delta/(\delta-\gamma\mu)}} \right)^{(\delta-\gamma\mu)/\delta}. \tag{5.6}$$

Так как $\mu < \delta$, то γ можно выбрать так, чтобы выполнялось условие $1-\delta < \gamma < \delta/\mu - \delta$. Тогда $\mu\delta/(\delta-\gamma\mu) < 1$ и интеграл в правой части (5.6) ограничен. Соответственно, имея ввиду $\gamma < \delta$, $h_\rho^\gamma b_\rho \to h^\gamma b$ в H_1 при $\rho \to 1$, заключаем, что

$$w(z,\rho,\gamma) \to w_*(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_T \frac{h^\gamma b \bar{g}}{1-\tau z}\, d\psi, \tag{5.7}$$

причем $w_* \in H_\infty$. Следовательно, $w(t,\rho,\gamma) \to w_*(t)$ слабо в H_s, $1 < s < \infty$.

Из предыдущих рассуждений равенства

$$\|\Psi\| = \lim_{\rho\to 1} \int\limits_T \Phi_\rho \bar{g}\, d\theta = \lim_{\rho\to 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_T h_\rho^{1-\gamma} \bigl(h_\rho^\gamma b_\rho \bar{g}\bigr)\, d\theta \tag{5.8}$$

и $h^{1-\gamma} \in H_{p_*}$, $p_* = \delta/(1-\gamma) > 1$, следует, что

$$\|\Psi\| = \frac{1}{2\pi} \int\limits_T h^{1-\gamma}(t) w_*(\bar{t}\,)\, d\theta. \tag{5.9}$$

Причем функция $h^{1-\gamma}$ является экстремальной для функционала $\mathscr{L}$ над H_{p_*}, заданного формулой

$$\mathscr{L}(a) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_T a(t) w_*(\bar{t}\,)\, d\theta, \quad a \in H_{p_*}.$$

Действительно, пусть функция φ экстремальна для $\mathscr{L}$. Поскольку равенства (5.8) и (5.9) равносильны, то

$$\|\Psi\| \leqslant \lim_{\rho\to 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_T \big(\varphi_\rho h_\rho^\gamma b_\rho\big)\bar g\, d\theta = \|\mathscr{L}\|. \tag{5.10}$$

С помощью неравенства Гёльдера, $\|\varphi\|_{p_*} = \|h\|_\delta = 1$, определяем, что

$$\big\|\varphi(h^\gamma b)\big\|_\delta = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T |\varphi|^\delta |h|^{\gamma\delta} d\theta\right)^{1/\delta} \leqslant \|\varphi\|_{p_*}\|h\|_\delta^{1-\gamma} = 1.$$

Откуда и из (5.10) следует, что $\|\Psi\| = \|\mathscr{L}\|$. Но $\mathscr{L}(h^{1-\gamma}) = \|\mathscr{L}\|$, стало быть, $\varphi = h^{1-\gamma}$ по единственности э. ф. в H_{p_*}. Тогда по теореме 1 э. ф. для функционала $\mathscr{L}$, $w_* \in H_\infty$, принадлежит $\bigcap_{1<s} H_s$, значит, $h \in \bigcap_{1<s} H_s$. Отсюда и (5.7) по сложившейся схеме выводим, что $w_* \in \Lambda_\beta A$, $\beta = \alpha + \nu$.

Повторим последние рассуждения относительно равенства

$$\|\Psi\| = \lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_T h_\rho^{1/2}\big(h_\rho^{1/2} b_\rho \bar g\big)\, d\theta = \lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_T h_\rho^{1/2} b_\rho\big(h^{1/2}\bar g\big)\, d\theta.$$

В результате заключаем, что $h^{1/2}$ экстремальна для функционала

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_T a(t) w^*(\bar t)\, d\theta$$

над $H_{2\delta}$, где, с учетом $h \in \bigcap_{1<s} H_s$, функция $w^*(z) = \frac{1}{2\pi}\int_T \frac{h^{1/2} b \bar g}{1-\tau z}\, d\psi \in \Lambda_\beta A$. Тогда на основании теоремы 4 из [2], $1 < 2\delta < 2$, функция $h^{1/2} \in \Lambda_\beta A$. Аналогично определяем, что $h^{1/2} b \in \Lambda_\beta A$. Следовательно, $\Phi = h^{1/2}(h^{1/2} b) \in \Lambda_\beta A$. Теорема 3 доказана.

Обобщением теоремы 3 является

Теорема 3′. *Если в функционале* (1.5) $1/n < \delta < 1/(n+1)$ *и* $g \in \lambda_{\alpha+\nu} A$, *где* $\alpha = 1/\delta - n$, $\nu > 0$, $\alpha + \nu < 1$, *то э. ф. существуют и обладают той же гладкостью.*

Доказательство не приводим по технической причине.

6. Доказательство теоремы 4

Для $1 < q < 2$ доказательство дано в [4, следствие 3.1]. В общем случае $1 < q < \infty$ и $\omega \in A(R)$ доказательство основано на идее доказательства теоремы 3.2 из [4].

Ограничимся доказательством теоремы 4 для случая, когда в равенстве (1.3) $1 < q < \infty$ и ω — полином, т. е. докажем, что при указанных условиях $X \in A(\mathbb{C})$.

Пусть $f^N(t) = C_0 + \dots + C_N t^N$ — произвольный полином порядка не выше N, $\bar w_N(t) = \bar t^N f^N(t) = C_N + \dots + C_0 \bar t^N$, $E_N = \{Q \in H_p : Q(z) = \sum_{j=N+1}^\infty q_j z^j$, q_j — тейлоровы коэффициенты$\}$. Следуя ходу доказательства теоремы 3.1 из [4], заключаем, что

$$\mu_N = \min_{Q\in E_N}\big\|f^N + Q\big\|_p = \big\|f^N + Q^N\big\|_p, \tag{6.1}$$

где $Q^N \in E_N$. По упомянутой теореме 3.1 функция $f^N + Q^N \in A(\mathbb{C})$, значит, $Q^N \in A(\mathbb{C})$. С учетом $\bar t^N Q(t) = \sum_{j=N+1}^\infty q_j t^{j-N}$, $|\bar t^N| = 1$, (6.1) равносильно

$$\mu_N = \min_{Q\in E_N}\big\|\bar t^N f^N + \bar t^N Q\big\|_p = \big\|f^N + Q^N\big\|_p = \min_{y\in H_p^0}\big\|\bar w + y\big\|_p = \big\|\bar w_N + Y_N\big\|_p,$$

где по единственности э. н. п. $Y_N = \bar t^N Q^N \in H_p^0$. При этом $Y_N \in A(\mathbb{C})$ в силу $Q^N \in A(\mathbb{C})$.

Пусть $\omega(z) = a_0 + \dots + a_N z^N$. Относительно $g^N(t) = -(a_N + \dots + a_0 t^N)$ повторим рассуждения, проведенные выше. Для p такого, что $1 < p < \infty$ получим

$$\min_{x \in H_p^0} \|\bar{\omega} - x\|_p = \|\bar{\omega} - X\|_p = \min_{Q \in E_N} \|t^N \bar{g}^N + Q\|_p,$$

где $X \in A(\mathbb{C})$. Теорема 4 доказана.

Литература

1. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции.—М.: Мир, 1984.—469 с.
2. *Carleson L., Jacobs S.* Best uniform approximation by analytic functions // Arc. Mat.—1972.—Vol. 10, № 2.—P. 219–229.
3. *Рябых В. Г.* Приближение неаналитических функций аналитическими // Мат. сб.—2006.—Т. 197, № 2.—С. 87–94. DOI: 10.4213/sm1513.
4. *Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Об одной экстремальной задаче в пространстве Харди H_p, $0 < p < \infty$ // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 58, № 3.—С. 510–525. DOI: 10.17377/smzh.2017.58.303.
5. *Duren P. L. Romberg B. W., Shields A. L.* Linear functionals on H_p space with $0 < p < 1$ // J. Reine Angew. Math.—1969.—Vol. 238.—P. 32–60.
6. *Гофман М.* Банаховы пространства аналитических функций.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963.—311 с.
7. *Рябых В. Г.* Экстремальные задачи для суммируемых аналитических функций // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 3.—С. 212–217.
8. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—750 с.
9. *Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Некоторые свойства экстремальных функций линейных функционалов над пространствами Харди и Бергмана // Мат. форум. Т. 9. Исслед. по мат. анализу, дифференц. уравнениям и мат. моделированию.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2015.—С. 125–139.—(Итоги науки. Юг России).

Статья поступила 29 ноября 2017 г.

Бурчаев Хайдар Хасанович
Чеченский государственный университет, *доцент*
РОССИЯ, 364024, Грозный, ул. А. Шерипова, 32
E-mail: bekhan.burchaev@gspetroleum.com

Рябых Галина Юрьевна
Донской государственный технический университет, *профессор*
РОССИЯ, 344010, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
E-mail: ryabich@aaanet.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 4, P. 5–19

PROPERTIES OF EXTREMAL ELEMENTS IN THE DUALITY RELATION FOR HARDY SPACES

Burchaev, Kh. Kh.[1] and Ryabykh, G. Yu.[2]

[1] Chechen State University, 32 A. Sheripov St., Grozny, 364024, Russia;
[2] Don State Technical University, 1 Pl. Gagarina, Rostov-on-Don, 344010, Russia
E-mail: bekhan.burchaev@gspetroleum.com, ryabich@aaanet.ru

Abstract. Consider a Hardy space H_p in the unit disk D, $p \geqslant 1$. Let l_ω be a linear functional on H_p determined by $\omega \in L_q$ ($T = \partial D$, $1/p + 1/q = 1$) and let F be an extremal function for l_ω. Let $X \in H_q$ implements the best approximation of $\bar{\omega}$ in $L_q(T)$ by functions from $H_q^0 = \{y \in H_q : y(0) = 0\}$. The functions F and X are called extremal elements (e. e.) for l_ω. E. e. are related by the corresponding duality relation.

We consider the problem of how certain properties of ω will affect e. e. A similar problem is investigated in the case of $0 < p < 1$. An article by L. Carleson and S. Jacobs (1972), investigated the problem of the properties of elements on which the infimum $\inf\{\|\bar{\omega} - x\|_{L_\infty(T)} : x \in H^0_\infty\}$ for a given $\omega \in L_q(T)$ is attained. The hypothesis of the authors that the relationship between extremal elements is similar to that of the function ω and its projection onto H_q is partially confirmed in a paper by V. G. Ryabykh (2006). Some properties of e. e. for l_ω, when ω is a polynomial, were studied in a paper by Kh. Kh Burchaev, G. Yu. Ryabykh V. G. Ryabykh (2017). In this paper, relying on the main result of the last article and using the method of successive approximations, the following is proved: if $\omega \in L_{q^*}(T)$ and $q \leqslant q^* < \infty$, then $F \in H_{(p-1)q^*}$ and $X \in H_{q^*}$; if the derivative $\omega^{(n-1)} \in \mathrm{Lip}(\alpha, T)$ with $0 < \alpha < 1$, then $F = Bf$, where B is the Blaschke product, f is an external function, with $(|f(t)|^p)^{(n-1)} \in \mathrm{Lip}(\alpha, T)$. If the function ω is analytic outside the unit circle, then e. e is analytic in the same circle. The listed results clarify and complement similar results obtained in an above mentioned paper by V. G. Ryabykh. It is also proved that the extremal function for $l_\omega \in (H_q)^*$ exists and has the same smoothness as the generator function ω, whenever $1/(n+1) < \delta < 1/n$, $\omega \in H_\infty \bigcap \mathrm{Lip}(\beta, T)$, $\beta = 1/\delta - n + \nu < 1$, and $\nu > 0$.

Key words: linear functional, extremal element, approximation method, derivative.

Mathematical Subject Classification (2000): 47A60.

For citation: *Burchaev, Kh. Kh. and Ryabykh, G. Yu.* Properties of Extremal Elements in the Duality Relation for Hardy Spaces, *Vladikavkaz Math. J.*, 2018, vol. 20, no. 3, pp. 5–19 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23383.

References

1. *Garnett, J. Ogranichennye Analiticheskie Funktsii*, Moscow, Mir, 1984, 469 p. (in Russian).
2. *Carleson, L. and Jacobs, S.* Best Uniform Approximation by Analytic Functions, *Arc. Mat.*, 1972, vol. 10, no. 2, pp. 219–229.
3. *Ryabykh, V. G.* Approximation of Non-Analytic Functions by Analytic Functions, *Sbornik: Mathematics*, 2006, vol. 197, no. 2, pp. 225–233. DOI: 10.1070/SM2006v197n02ABEH003755.
4. *Burchaev, Kh. H., Ryabykh, V. G., and Ryabykh, G. Yu.* On an Extremal Problem in Hardy Space H_p, $0 < p < \infty$, *Siberian Mathematical Journal*, 2017, vol. 58, no. 3, pp. 392–404. DOI: 10.1134/S003744661703003X.
5. *Duren, P. L. Romberg, B. W. and Shields, A. L.* Linear Functionals on H_p Space with $0 < p < 1$, *J. Reine Angew. Math.*, 1969, vol. 238, pp. 32–60.
6. *Gofman, M. Banach Spaces of Analytic Functions*, Moscow, Foreign Languages Publishing House, 1963, 311 p. (in Russian).
7. *Ryabykh, V. G.* Extremal Problems for Summable Analytic Functions, *Sib. Mat. Zh.*, 1986, vol. 27, no. 3, pp. 212–217 (in Russian).
8. *Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P. Functional Analysis*, Moscow, Nauka, 1984, 750 p. (in Russian).
9. *Burchaev, Kh. Kh., Ryabykh, V. G. and Ryabykh, G. Yu.* Some Properties of the Extremal Functions of Linear Functionals on Hardy and Bergman Spaces, *Math. Forum. Vol. 9. Studies in Mathematical Analysis, Differential Equations, and Mathematical Modeling* (*Review of Science: The South of Russia*), Vladikavkaz, SMI VSC RAS, 2015, pp. 125–139 (in Russian).

Received November 29, 2017

Khaidar Kh. Burchaev
Chechen State University,
32 A. Sheripov Str., Grozny, 364024, Russia,
Associate Professor
E-mail: `bekhan.burchaev@gspetroleum.com`

Galina Yu. Ryabykh
Don State Technical University,
1 Pl. Gagarina, Rostov-on-Don, 344010, Russia,
Professor
E-mail: `ryabich@aaanet.ru`