Владикавказский математический журнал
2019, Том 21, Выпуск 1, С. 37–50

УДК 517.956
DOI 10.23671/VNC.2019.1.27733

ТРИХОТОМИЯ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С УБЫВАЮЩИМ ПОТЕНЦИАЛОМ НА ПЛОСКОСТИ

А. В. Неклюдов[1]

[1] Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана,
Россия, 105005, Москва, Рубцовская наб., 2/18

E-mail: `nekl5@yandex.ru`

Аннотация. В двумерной области Q, внешней по отношению к кругу, рассматривается равномерно эллиптическое уравнение второго порядка в дивергентной форме с измеримыми коэффициентами, содержащее младший неотрицательный коэффициент $q(x) = q(x_1, x_2)$ типа потенциала в стационарном уравнении Шрёдингера. Изучаются обобщенные решения, принадлежащие пространству С. Л. Соболева W_2^1 в любой ограниченной подобласти. Рассматривается вопрос о возможном росте решений на бесконечности. Доказано, что при достаточно быстром убывании младшего коэффициента $q(x)$ на бесконечности существует положительное решение, растущее как логарифм модуля радиус-вектора точки, т. е. так же, как фундаментальное решение соответствующего эллиптического оператора без младшего члена. Построенное решение обладает равномерно ограниченным «потоком тепла» через окружности произвольного радиуса R, концентрические с границей области Q. Далее устанавливается, что для любого решения, удовлетворяющего некоторой степенной оценке роста на бесконечности, выполнена оценка интеграла Дирихле типа принципа Сен-Венана в теории упругости. Ранее подобная оценка широко использовалась в работах для эллиптических уравнений второго порядка без младших членов в неограниченных областях. Оценка типа Сен-Венана позволяет получить оценку для интеграла Дирихле решения в кольцевой области через среднее значение решения на одной из окружностей этой кольцевой области. Из этого следует, что решение на окружности радиуса R имеет тот же порядок роста по R, что и среднее значение на этой окружности. Использование принципа максимума позволяет показать, что любое растущее на бесконечности решение имеет логарифмический рост. Основной результат статьи состоит в том, что для данного уравнения имеет место трихотомия решений, как и для уравнения без младшего члена: решение является либо ограниченным, либо растет с логарифмической скоростью, сохраняя знак, либо осциллирует и растет по максимуму модуля как минимум степенным образом. Основным условием убывания младшего коэффициента, гарантирующего трихотомию решений, является конечность интеграла $\int_Q q(x) \ln|x|\,dx$.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение, неограниченная область, младший коэффициент, асимптотическое поведение решений, трихотомия решений.

Mathematical Subject Classification (2000): 35J15.

Образец цитирования: *Неклюдов А. В.* Трихотомия решений эллиптических уравнений второго порядка с убывающим потенциалом на плоскости // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 1.—С. 37–50. DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27733.

1. Введение

Поведение решений эллиптических уравнений второго порядка в неограниченных областях изучалось различными авторами [1–4]. Хорошо известно [3], что при некоторых предположениях относительно неограниченной области, в случае уравнений второго порядка без младших членов, для решений, удовлетворяющих на границе неограниченной области однородному условию Неймана, типичной является трихотомия решений.

Трихотомия означает, что любое решение принадлежит к одному из трех классов: 1) ограниченные решения, 2) знакопостоянные решения, растущие по модулю на бесконечности со скоростью, определяемой геометрией области, 3) осциллирующие решения, растущие по максимуму модуля быстрей, чем решения из класса 2). Например, в случае цилиндрических областей класс 2) образуют решения линейного роста, класс 3) — решения, растущие по максимуму модуля на сечении цилиндра экспоненциально. Для двумерных угловых областей, а также во внешности круга решения из классов 2) и 3) обладают соответственно логарифмическим и степенным ростом. В данной работе вопрос о трихотомии рассматривается во внешности круга для уравнения, содержащего младший член вида $q(x)u(x)$ с достаточно быстро убывающим в бесконечности потенциалом $q(x)$. Ранее вопрос о трихотомии решений уравнений с убывающим потенциалом был рассмотрен [5] для цилиндрических областей с условием Неймана на боковой поверхности. Близкой к этому случаю оказалась [6] также ситуация с трихотомией решений в цилиндрических областях для уравнений без младшего члена при третьем граничном условии (условии Робена).

2. Основные обозначения и определения. Вспомогательные утверждения

В двумерной области $Q = \{x : |x| > R_0\}$ (будем считать, что $R_0 > 1$) рассматривается уравнение эллиптического типа

$$Lu \equiv L_0 u - q(x)u \equiv \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) - q(x)u = 0, \tag{1}$$

где $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_x$, $a_{ij}(x)$ — измеримые функции в Q, $a_{ij} = a_{ji}$, $\lambda_1|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \lambda_2|\xi|^2$, $\xi \in \mathbb{R}^2$, $\lambda_1, \lambda_2 = \mathrm{const} > 0$, $q(x) \geqslant 0$ — ограниченная измеримая функция.

Введем следующие обозначения:

$$Q(a,b) := Q \cap \{x : a < |x| < b\}, \quad Q_R = Q(R, R+1),$$

$$S_R := \{x : |x| = R\}, \quad \nabla u := \operatorname{grad} u, \quad \overline{u}(R) := (2\pi R)^{-1} \int\limits_{S_R} u\, ds.$$

Под решениями (1) в Q будем понимать обобщенные решения, т. е. функции, принадлежащие пространству Соболева $W_2^1(Q(R_0, R))$ для всех $R > R_0$ и удовлетворяющие интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q(R_0,R)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_j}\, dx + \int\limits_{Q(R_0,R)} quv\, dx = 0 \tag{2}$$

для всех функций $v \in W_2^1(Q(R_0, R))$ таких, что $v\big|_{S_{R_0} \cup S_R} = 0$.

Для решения $u(x)$ уравнения (1) стандартным образом введем понятие «потока тепла» через окружность S_R:

$$P(R,u) = \lim_{h\to 0+}\left(h^{-1} \int\limits_{Q(R,R+h)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\, dx\right) = \int\limits_{S_R} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\, ds,$$

последнее равенство справедливо для почти всех $R \geqslant R_0$, его также можно записать в виде

$$P(R,u) = \int\limits_{S_R} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, ds,$$

где $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{x_j}{|x|}$ — производная по конормали к окружности S_R.

Пусть $R_0 \leqslant r < R$, $h_1 > 0$, $h_2 > 0$. Положим в (2) $v = \Phi$, где $\Phi = \Phi(|x|)$ — непрерывная функция, $\Phi = 1$ при $r + h_1 < |x| < R$, $\Phi(r) = \Phi(R + h_2) = 0$, Φ — линейная при $r < x_1 < r + h_1$ и при $R < x_1 < R + h_2$:

$$h_1^{-1} \int\limits_{Q(r,r+h_1)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{x_j}{|x|}\, dx - h_2^{-1} \int\limits_{Q(R,R+h_2)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{x_j}{|x|}\, dx + \int\limits_{Q(r,R+h_2)} qu\Phi\, dx = 0.$$

Устремляя к нулю h_1, а затем h_2, получаем соотношение

$$P(R,u) - P(r,u) = \int\limits_{Q(r,R)} qu\, dx. \tag{3}$$

Легко видеть, что при $R > R_0$ в определении потока область интегрирования $Q(R, R+h)$ можно заменить на $Q(R-h, R)$.

Далее будем использовать неравенство Пуанкаре следующего вида:

$$\int\limits_{S_R} v^2\, ds \leqslant cR^2 \int\limits_{S_R} |\nabla v|^2\, ds$$

($c > 0$ не зависит от функции v и R) для $v \in W_2^1(S_R)$ таких, что $\overline{v}(R) = 0$; и

$$\int\limits_{Q(aR,bR)} v^2\, dx \leqslant c(a,b) R^2 \left(\int\limits_{Q(aR,bR)} |\nabla v|^2\, dx + \overline{v}^2(R) \right)$$

для $v \in W_2^1(Q(aR, bR))$, $0 < a \leqslant 1$, $b > 1$.

Будем использовать также оценку [7, лемма 1]

$$|\overline{v}(R) - \overline{v}(R_1)| \leqslant (2\pi)^{-1/2} \ln^{1/2}\left(\frac{R}{R_1}\right) \left(\int\limits_{Q(R_1,R)} |\nabla v|^2\, dx \right)^{1/2}, \tag{4}$$

$R > R_1 > 0$, $v \in W_2^1(Q(R_1, R))$.

3. Существование положительного решения с логарифммичеким ростом

Рассмотрим соответствующее уравнению (1) уравнение без младшего члена

$$L_0 V \equiv \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a_{ij}(x) \frac{\partial V}{\partial x_i} \right) = 0. \tag{5}$$

Хорошо известно, например [8, формула (7.5)], что в Q существует фундаментальное решение $V(x)$ уравнения (5), удовлетворяющее при $|x| > R_0$ оценке

$$C_1 \ln|x| \leqslant V(x) \leqslant C_2 \ln|x|,$$

C_1, C_2 — неотрицательные константы.

Естественно ожидать, что при достаточно быстром убывании коэффициента $q(x)$ на бесконечности решение с логарифмическим поведением существует и для уравнения (1).

Теорема 1. *Пусть $q(x) \geqslant 0$ в Q, $\int_Q q(x) \ln|x|\,dx < \infty$, $0 \leqslant q(x) \leqslant c|x|^{-2}\ln|x|$ при $|x| > R_1 = \mathrm{const}$; $c > 0$ — некоторая постоянная, зависящая от λ_1, λ_2. Тогда в Q существует положительное решение $U(x)$ уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$U\Big|_{S_{R_0}} = 0, \quad A_1 \ln|x| \leqslant U(x) \leqslant A_2 \ln|x| \quad (0 < A_i = \mathrm{const},\ i = 1, 2),$$

$$P(R, U) \to p_0 \quad \text{при } R \to \infty \quad (0 < p_0 = \mathrm{const}).$$

$\lhd$ Для произвольного $N \in \mathbb{N}$, $N > R_0$, в области $Q(R_0, N)$ рассмотрим решение $U_N(x)$ задачи

$$LU_N = 0, \quad U_N\Big|_{S_{R_0}} = 0, \quad \frac{\partial U_N}{\partial \nu}\bigg|_{S_N} = (2\pi N)^{-1}.$$

Функция U_N удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_{Q(R_0,N)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial U_N}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_{Q(R_0,N)} qU_N v\,dx = (2\pi N)^{-1} \int\limits_{S_N} v\,ds \tag{6}$$

для всех функций $v \in W_2^1(Q(R_0, N))$ таких, что $v|_{S_{R_0}} = 0$.

Полагая в интегральном тождестве (6) для решения U_N пробную функцию $v = U_N$ и используя оценку вида (4) для $\overline{U}_N(N)$, получаем

$$\int\limits_{Q(R_0,N)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial U_N}{\partial x_i} \frac{\partial U_N}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_{Q(R_0,N)} qU_N^2\,dx$$

$$= (2\pi N)^{-1} \int\limits_{S_N} U_N\,ds = \overline{U}_N(N) \leqslant (2\pi)^{-1/2} \ln^{1/2}\left(\frac{N}{R_0}\right) \left(\int\limits_{Q(R_0,N)} |\nabla U_N|^2\,dx \right)^{1/2}.$$

Отсюда с учетом эллиптичности уравнения (1) получаем, что

$$\int\limits_{Q(R_0,N)} |\nabla U_N|^2\,dx + \int\limits_{Q(R_0,N)} qU_N^2\,dx \leqslant c_1 \ln N, \tag{7}$$

здесь и далее в доказательстве неотрицательные константы c_i зависят только от λ_1, λ_2.

Очевидно, что $P(N, U_N) = 1$.

В силу принципа экстремума U_N не может иметь отрицательный минимум в $Q(R_0, N)$, а в силу граничного условия на S_N не может иметь минимум на S_N. Отсюда $U_N > 0$ в $Q(R_0, N)$. Так как согласно (3) при $R_0 \leqslant r < N$

$$P(r, U_N) = P(N, U_N) - \int\limits_{Q(r,N)} qU_N\,dx,$$

то из положительности U_N и равенства $P(N, U_N) = 1$ получаем, что $P(r, U_N) \leqslant 1$ при $R_0 \leqslant r < N$.

Получим оценку интеграла Дирихле для U_N по области $Q(R_0, r)$, $R_0 < r < N$. Для почти всех r имеем

$$\int\limits_{Q(R_0,r)} \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial U_N}{\partial x_i} \frac{\partial U_N}{\partial x_j}\, dx + \int\limits_{Q(R_0,r)} qU_N^2\, dx = \int\limits_{S_r} U_N \frac{\partial U_N}{\partial \nu}\, ds.$$

Отсюда с учетом эллиптичности уравнения, используя неравенства Коши — Буняковского и Пуанкаре, получаем

$$\begin{aligned} \int\limits_{Q(R_0,r)} \big(|\nabla U_N|^2 + qU_N^2\big)\, dx &\leqslant c_2 \int\limits_{S_r} U_N \frac{\partial U_N}{\partial \nu}\, ds = c_2 \int\limits_{S_r} \big(U_N - \overline{U}_N(r)\big) \frac{\partial U_N}{\partial \nu}\, ds \\ &+ c_2 P(r, U_N) \overline{U}_N(r) \leqslant c_3 r \int\limits_{S_r} |\nabla U_N|^2\, ds + c_2 P(r, U_N) \overline{U}_N(r). \end{aligned} \tag{8}$$

Отсюда с учетом оценки вида (4) для $\overline{U}_N(r)$ и неравенства $P(r, U_N) \leqslant 1$ получим

$$\begin{aligned} I(r) \equiv \int\limits_{Q(R_0,r)} \Big(|\nabla U_N|^2 + qU_N^2\Big)\, dx &\leqslant c_3 r \int\limits_{S_r} |\nabla U_N|^2\, ds + c_4 \ln^{1/2} r \left(\int\limits_{Q(R_0,r)} |\nabla U_N|^2\, dx \right)^{1/2} \\ &\leqslant c_3 r \int\limits_{S_r} |\nabla U_N|^2\, ds + \frac{1}{2} c_4^2 \ln r + \frac{1}{2} \int\limits_{Q(R_0,r)} |\nabla U_N|^2\, dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$I(r) \leqslant 2c_3 r \int\limits_{S_r} |\nabla U_N|^2\, ds + c_4^2 \ln r \leqslant 2c_3 r I'(r) + c_4^2 \ln r.$$

Запишем это неравенство в виде

$$\big(I(r) r^{-\delta}\big)' \geqslant -c_5 r^{-\delta-1} \ln r, \quad \delta = (2c_3)^{-1} > 0,\ c_5 = c_4^2/(2c_3).$$

Интегрируя и учитывая логарифмическую оценку (7) интеграла Дирихле для U_N по области $Q(R_0, N)$, получаем оценку

$$I(r) \leqslant I(N) \left(\frac{r}{N}\right)^{\delta} + c_5 r^{\delta} \int\limits_{r}^{N} \rho^{-\delta-1} \ln \rho\, d\rho \leqslant c_6 \ln r, \tag{9}$$

если $r^2 \leqslant N$.

Таким образом, последовательность U_N $(N \geqslant r^2)$ ограничена в $W_2^1(Q(R_0, r))$ для любого $r > R_0$. Отсюда, применяя диагональный процесс, получаем последовательность U_{N_k}, слабо сходящуюся в $W_2^1(Q(R_0, r))$ и сильно сходящуюся в $L_2(Q(R_0, r))$ для любого $r > R_0$ к некоторой функции U, являющейся решением уравнения (1). Очевидно, что $U > 0$ в Q, и справедлива оценка

$$\int\limits_{Q(R_0,r)} \big(|\nabla U|^2 + qU^2\big)\, dx \leqslant c_6 \ln r. \tag{10}$$

Тогда в силу (4)

$$|\overline{U}(r)| \leqslant c_4 \ln^{1/2} r \left(\int\limits_{Q(R_0,r)} |\nabla U|^2 \, dx \right)^{1/2} \leqslant c_7 \ln r.$$

Из оценки Де Джорджи [9, теорема 8.17] и неравенства Пуанкаре получаем, что

$$\sup_{S_r} |U_N(x)| \leqslant c_8 r^{-1} \left(\int\limits_{Q(r/2,2r)} U_N^2 \, dx \right)^{1/2} \leqslant c_9 \left[\left(\int\limits_{Q(r/2,2r)} |\nabla U_N^2| \, dx \right)^{1/2} + \overline{U}_N(r) \right].$$

Отсюда, учитывая оценки (4) для $\overline{U}_N(r)$ и (9) для интеграла Дирихле функции U_N, получаем

$$\sup_{S_r} |U_N(x)| \leqslant c_{10} \ln r,$$

откуда

$$\sup_{S_r} |U(x)| \leqslant c_{10} \ln r. \tag{11}$$

Из этой оценки, с учетом того, что $P(N, U_N) = 1$ и $\int_Q q(x) \ln |x| \, dx < \infty$, получаем, что при $R \geqslant R_1 = \mathrm{const}$ и $N > R$ справедливо неравенство

$$P(R, U_N) = P(N, U_N) - \int\limits_{Q(R,N)} q U_N \, dx \geqslant \frac{1}{2}.$$

Из (3) следует, что

$$P(R, U_N) = \int\limits_{R_0}^{R_0+1} \left(P(r, U_N) + \int\limits_{Q(r,R)} q U_N \, dx \right) dr,$$

откуда вытекает, что $P(R, U) = \lim_{N\to\infty} P(R, U_N)$ и, следовательно, $P(R, U) \geqslant 1/2$ для достаточно больших R. Из (3) и оценки сверху (11) для функции U также следует, что $P(R, U) \to p_0 = \mathrm{const}$, причем $p_0 \geqslant 1/2$.

Очевидно также, что

$$\int\limits_{S_r} |\nabla U|^2 \, ds \geqslant c_{11} r^{-1} P^2(r, U) \geqslant c_{12} r^{-1},$$

$$\int\limits_{Q(R_0,R)} |\nabla U|^2 \, dx \geqslant c_{13} \ln R. \tag{12}$$

Получим логарифмическую оценку снизу для $U(x)$.

Для интеграла Дирихле функции U справедливо дифференциальное неравенство вида (8):

$$J(r) \equiv \int\limits_{Q(R_0,r)} |\nabla U|^2 \, dx \leqslant c_3 r \int\limits_{S_r} |\nabla U|^2 \, ds + c_2 P(r, U) \overline{U}(r)$$

$$\leqslant c_3 r \int\limits_{S_r} |\nabla U|^2 \, ds + c_2 \overline{U}(r) = c_3 r J'(r) + c_2 \overline{U}(r),$$

$$\big(J(r)r^{-\varepsilon}\big)' \geqslant -c_{14}r^{-\varepsilon-1}\overline{U}(r), \quad \varepsilon = c_3^{-1},\ c_{14} = c_2/c_3.$$

Интегрируя это неравенство от R до mR при $m > 1$, получаем

$$\int\limits_R^{mR} \overline{U}(r)r^{-\varepsilon-1}\,dr \geqslant c_{14}^{-1}\big(J(R)R^{-\varepsilon} - J(mR)(mR)^{-\varepsilon}\big).$$

Отсюда, используя двустороннюю логарифмическую оценку (10), (12) для $J(R)$, получим

$$\int\limits_R^{mR} \overline{U}(r)r^{-\varepsilon-1}\,dr \geqslant c_{15}R^{-\varepsilon}\ln R - c_{16}(mR)^{-\varepsilon}\ln(mR).$$

Пусть $m > 1$ таково, что $c_{15} - 2m^{-\varepsilon}c_{16} \geqslant c_{15}/2$. Возьмем $R > m$. Получим оценку

$$\int\limits_R^{mR} \overline{U}(r)r^{-\varepsilon-1}\,dr \geqslant \frac{1}{2}\,c_{15}\,R^{-\varepsilon}\ln R.$$

Тогда для некоторого $\xi \in (R, mR)$ имеем

$$(m-1)R\overline{U}(\xi)\xi^{-\varepsilon-1} \geqslant \frac{1}{2}\,c_{15}\,R^{-\varepsilon}\ln R,$$

отсюда

$$\overline{U}(\xi) \geqslant \frac{1}{2}(m-1)^{-1}c_{15}\ln R.$$

Так как в силу (4)

$$\big|\overline{U}(\xi) - \overline{U}(R)\big| \leqslant (2\pi)^{-1/2}\ln\left(\frac{\xi}{R}\right)\left(\int\limits_{Q(R,\xi)} |\nabla U|^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant c_{17}\ln^{1/2}R,$$

то из предыдущей оценки для $\overline{U}(\xi)$ получаем для достаточно больших R оценку

$$\overline{U}(R) \geqslant c_{18}\ln R. \tag{13}$$

Так как функция $w = U - \overline{U}(R)$ удовлетворяет уравнению $L_0 w = qU$, то из оценки Де Джорджи [9, теорема 8.17] имеем

$$\sup\nolimits_{S_R} |U(x) - \overline{U}(R|^2 \leqslant c_8\left(R^{-2}\int\limits_{Q(R/2,2R)} \big|U - \overline{U}(R)\big|^2\,dx + R^2\int\limits_{Q(R/2,2R)} q^2U^2\,dx\right).$$

Используя неравенство Пуанкаре, условия на функцию $q(x)$ и оценку (10), получаем, что

$$\sup\nolimits_{S_R} |U(x) - \overline{U}(R|^2 \leqslant c_{19}\left(\int\limits_{Q(R/2,2R)} |\nabla U|^2\,dx + c\ln R\int\limits_{Q(R/2,2R)} qU^2\,dx\right) \leqslant \frac{1}{4}\,c_{18}^2\ln^2 R,$$

если константа c достаточно мала. С учетом нижней логарифмической оценки (13) для $\overline{U}(R)$ получим оценку $U(x) \geqslant A_1\ln|x|$, $A_1 = \mathrm{const}$, $A_1 > 0$. $\rhd$

Заметим также, что точечную оценку $q(x) \leqslant c|x|^{-2}\ln|x|$ для неотрицательной функции $q(x)$ в условии теоремы можно заменить на интегральную оценку $\int_{Q(R/2,2R)} q^2\,dx \leqslant cR^{-2}$, если постоянная $c > 0$ достаточно мала.

4. Трихотомия решений

Лемма 1. *Пусть $u(x)$ — решение (1) в Q, $q(x) \geqslant 0$. Тогда при $R > R_0+1$ справедлива оценка*

$$\int\limits_{Q(R_0+1,R)} |\nabla u|^2\,dx \leqslant c_1 R^{-2} \int\limits_{Q(R,2R)} u^2\,dx,$$

$c_1 > 0$ зависит только от λ_1, λ_2.

$\lhd$ Пусть $\Phi = \Phi(|x|) = 1$ при $R_0 + 1 < |x| < R$, $\Phi(|x|) = |x| - R_0$ при $R_0 < |x| < R_0 + 1$, $\Phi(|x|) = \varphi^2(|x|)$ при $R < |x| < 2R$, где $\varphi(|x|) = \frac{2R-|x|}{R}$. Положим в интегральном тождестве (2) $v = u\Phi$:

$$\int\limits_{Q(R_0,2R)} \Phi \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\,dx + \int\limits_{Q(R_0,2R)} qu^2\Phi\,dx = 2R^{-1}\int\limits_{Q(R,2R)} \varphi u \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{x_j}{|x|}\,dx.$$

Используя эллиптичность уравнения (1) и неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\int\limits_{Q(R_0,2R)} \Phi|\nabla u|^2\,dx \leqslant \int\limits_{Q(R,2R)} \varphi^2|\nabla u|^2\,dx + c_1R^{-2}\int\limits_{Q(R,2R)} u^2\,dx.$$

Учитывая, что $\Phi = \varphi^2$ в области $Q(R, 2R)$, то отсюда сразу получаем утверждение леммы. $\rhd$

Лемма 2. *Пусть $u(x)$ — решение (1) в Q, $q(x) \geqslant 0$; в Q выполнено условие*

$$|u(x)| \leqslant c_0|x|^\gamma$$

для некоторых постоянных $\gamma > 0$, $c_0 > 0$. Тогда, если $4^\gamma/(1 + \delta) < 1$, $\delta > 0$, то для некоторой последовательности $R_k \to \infty$, $k \to \infty$, справедлива оценка

$$\int\limits_{Q(R_k,2R_k)} |\nabla u|^2\,dx \leqslant \delta \int\limits_{Q(R_0,R_k)} |\nabla u|^2\,dx.$$

$\lhd$ Предположим противное. Тогда для всех $R > R_0' = \mathrm{const}$ имеем

$$\int\limits_{Q(R_0,2R)} |\nabla u|^2\,dx - \int\limits_{Q(R_0,R)} |\nabla u|^2\,dx = \int\limits_{Q(R,2R)} |\nabla u|^2\,dx > \delta \int\limits_{Q(R_0,R)} |\nabla u|^2\,dx,$$

т. е.

$$\int\limits_{Q(R_0,R)} |\nabla u|^2\,dx < (1+\delta)^{-1}\int\limits_{Q(R_0,2R)} |\nabla u|^2\,dx < (1+\delta)^{-2}\int\limits_{Q(R_0,4R)} |\nabla u|^2\,dx$$
$$< \dots < (1+\delta)^{-k}\int\limits_{Q(R_0,2^kR)} |\nabla u|^2\,dx.$$

Используя лемму 1, получаем

$$\int\limits_{Q(R_0,R)} |\nabla u|^2\,dx \leqslant (1+\delta)^{-k}\left(c_1\big(2^kR\big)^{-2}\int\limits_{Q(2^kR,2^{k+1}R)} u^2\,dx + I_0\right)$$
$$\leqslant (1+\delta)^{-k}\Big(c_1\big(2^kR\big)^{-2}\pi\big(2^{k+1}R\big)^2c_0^2(2^{k+1}R)^{2\gamma}+I_0\Big) \to 0, \quad k\to\infty,$$

если $4^\gamma/(1+\delta) < 1$ (здесь I_0 не зависит от k). Таким образом, $\nabla u \equiv 0$, что невозможно. $\rhd$

Лемма 3. *Пусть $u(x)$ — решение* (1) *в Q, $|u(x)| \leqslant c_0|x|^\gamma$, $0 < c_0 = \mathrm{const}$, $0 \leqslant q(x) \leqslant c|x|^{-2}$, $\gamma > 0$ и $c > 0$ — некоторые постоянные, зависящие от λ_1, λ_2. Тогда для некоторой последовательности $R'_k \to \infty$, $k\to\infty$, для $x \in S_{R'_k}$ справедлива оценка*

$$\overline{u}(R'_k) - \frac{1}{2}|\overline{u}(R'_k)| - I_1 \leqslant u(x) \leqslant \overline{u}(R'_k) + \frac{1}{2}|\overline{u}(R'_k)| + I_1,$$

где $I_1 > 0$ не зависит от k.

$\lhd$ Пусть для $\delta > 0$ выполнено условие $4^\gamma/(1+\delta) < 1$. Как и ранее, через $c_1, c_2, \dots$ будем обозначать положительные постоянные, зависящие только от λ_1, λ_2.

Используя леммы 2 и 1 и неравенство Пуанкаре, получим для некоторой последовательности $R_k \to \infty$ оценку

$$\int\limits_{Q(R_k,2R_k)} |\nabla u|^2\,dx \leqslant \delta \int\limits_{Q(R_0,R_k)} |\nabla u|^2\,dx \leqslant c_1\delta\left(R_k^{-2}\int\limits_{Q(R_k,2R_k)} u^2\,dx + I_0\right)$$
$$\leqslant c_2\delta\left(\int\limits_{Q(R_k,2R_k)} |\nabla u|^2\,dx + \overline{u}^2(3R_k/2) + I_0\right),$$

где I_0 не зависит от k. Если $c_2\delta \leqslant 1/2$, то

$$\int\limits_{Q(R_k,2R_k)} |\nabla u|^2\,dx \leqslant 2c_2\delta\big(\overline{u}^2(3R_k/2) + I_0\big). \tag{14}$$

Введем обозначение $\tilde{q}_k := \sup_{Q(R_k,2R_k)} q(x)$. Так как функция $w = u - \overline{u}(3R_k/2)$ является решением уравнения $L_0w = qu$, то, используя оценку Де Джорджи [9, теорема 8.17] и далее дважды неравенство Пуанкаре, получаем

$$\sup_{S_{3R_k/2}} \big|u-\overline{u}(3R_k/2)\big|^2 \leqslant c_3 \left(R_k^{-2} \int\limits_{Q(R_k,2R_k)} \big|u-\overline{u}(3R_k/2)^2\big|\,dx + R_k^2 \int\limits_{Q(R_k,2R_k)} q^2u^2\,dx \right)$$
$$\leqslant c_4 \left(\int\limits_{Q(R_k,2R_k)} |\nabla u|^2\,dx + \tilde q_k^2 R_k^2 \int\limits_{Q(R_k,2R_k)} u^2\,dx \right)$$
$$\leqslant c_5 \left(\int\limits_{Q(R_k,2R_k)} |\nabla u|^2\,dx + \tilde q_k^2 R_k^4 \left[\int\limits_{Q(R_k,2R_k)} |\nabla u|^2\,dx + \overline{u}^2(3R_k/2) \right] \right)$$
$$= c_5\big(1+\tilde q_k^2 R_k^4\big) \int\limits_{Q(R_k,2R_k)} |\nabla u|^2\,dx + c_5\tilde q_k^2 R_k^4 \overline{u}^2(3R_k/2) \leqslant c_6 \int\limits_{Q(R_k,2R_k)} |\nabla u|^2\,dx + c_5c^2\overline{u}^2(3R_k/2).$$

Используя оценку (14) получаем, что при $k > k_0 = \mathrm{const}$

$$\sup_{S_{3R_k/2}} \big|u-\overline{u}(3R_k/2)\big|^2 \leqslant c_7\delta\big(\overline{u}^2(3R_k/2)+I_0\big) + c_5c^2\overline{u}^2(R_k) \leqslant 2c_7\delta\overline{u}^2(3R_k/2) + I_0',$$

если $c_5c^2 \leqslant c_7\delta$. Здесь I_0' не зависит от k.

Пусть $\delta > 0$, $\gamma > 0$ и $c > 0$ таковы, что $c_2\delta \leqslant 1/2$, $2c_7\delta \leqslant 1/4$, $4^\gamma/(1+\delta) < 1$, $c_5c^2 \leqslant c_7\delta$. Тогда при $k > k_0 = \mathrm{const}$ справедлива оценка

$$\sup_{S_{3R_k/2}} \big|u-\overline{u}(3R_k/2)\big|^2 \leqslant \frac{1}{4}\overline{u}^2(3R_k/2) + I_0'.$$

Отсюда сразу вытекает утверждение леммы для последовательности $R_k' = 3R_k/2$. $\triangleright$

Лемма 4. *Пусть для $u(x)$ выполнены условия теоремы 1 и леммы 3. Тогда при $|x| > R_1 = \mathrm{const}$ справедлива оценка*

$$|u(x)| \leqslant c_0 \ln|x|,$$

$0 < c_0 = \mathrm{const}$ *не зависит от x.*

$\triangleleft$ Предположим противное, тогда для некоторой последовательности $R_k \to \infty$ имеем $\sup_{R_k} |u|/\ln R_k \to \infty$, $k \to \infty$. Пусть $U(x)$ — положительное решение уравнения (1), удовлетворяющее логарифмической оценке, существование которого доказано в теореме 1. Применяя к функциям $u \pm c_1U$ при достаточно большом c_1 принцип максимума, легко получить, что $\sup_{S_R} |u|/\ln R \to \infty$, $R \to \infty$. В противном случае функция $u(x)$ удовлетворяла бы логарифмической оценке в Q, что противоречит предположению.

Пусть R_k' — последовательность, для которой справедливо утверждение леммы 3. Без ограничения общности можно считать, что $\sup_{S_{R_k'}} u > 0$. Тогда из леммы 3 получаем, что $\inf_{S_{R_k'}} u/\ln R_k' \to +\infty$, $k \to \infty$. Применяя принцип максимума к функции $U - c_2 - \varepsilon u$ при достаточно большом c_2 и устремляя $\varepsilon > 0$ к нулю, получаем, что $U \leqslant c_2$ в $Q(R_1', \infty)$, что невозможно. $\triangleright$

Лемма 5. *Пусть для $u(x)$ выполнены условия теоремы 1 и леммы 3. Тогда*

$$\int\limits_{Q(R_0,r)} |\nabla u|^2\,dx \leqslant c_0 \ln r,$$

$0 < c_0 = \mathrm{const}$ *не зависит от* $r > R_0$.

$\lhd$ Используем для функции $u(x)$ дифференциальное неравенство вида (8):

$$I(r) \equiv \int\limits_{Q(R_0,r)} |\nabla u|^2\,dx \leqslant c_1 r I'(r) + c_2 P(r,u)\overline{u}(r), \tag{15}$$

здесь и далее в доказательстве $c_i > 0$ зависят только от λ_1, λ_2. В силу леммы 4 $|u(x)| \leqslant c_3 \ln|x|$, поэтому $\int_Q q|u|\,dx < \infty$. Тогда из (3) следует, что $|P(r,u)| \leqslant c_4$. А из (15) тогда вытекает, что

$$I(r) \leqslant c_1 r I'(r) + c_5 \ln r.$$

Интегрируя как и в доказательстве теоремы 1, при $r^2 < R$ получаем оценку

$$I(r) \leqslant I(R)\left(\frac{r}{R}\right)^{\delta} + c_6 \ln r \leqslant c_0 \ln r,$$

последнее неравенство следует из того, что в силу леммы 1 выполнена оценка $I(R) \leqslant c_7 \ln^2 R$, здесь $0 < \delta = \mathrm{const}$. $\rhd$

Лемма 6. *Пусть для* $u(x)$ *выполнены условия теоремы* 1 *и леммы* 3, *причем для некоторой последовательности* $R_k, R_k \to \infty$, $k \to \infty$, *справедлива оценка* $\inf_{S_{R_k}} |u| = o(\ln R_k)$, $k \to \infty$. *Тогда решение* $u(x)$ *ограничено в* Q.

$\lhd$ Согласно лемме 4 $|u(x)| \leqslant c_0 \ln|x|$. В силу оценки Де Джорджи и неравенства Пуанкаре

$$\sup_{S_{R_k}} |u(x) - \overline{u}(R_k)|^2 \leqslant c_1 \left(R_k^{-2} \int\limits_{Q(R_k/2,2R_k)} |u - \overline{u}(R_k)|^2\,dx + R_k^2 \int\limits_{Q(R_k/2,2R_k)} q^2 u^2\,dx \right)$$
$$\leqslant c_2 \left(\int\limits_{Q(R_k/2,2R_k)} |\nabla u|^2\,dx + \sup\nolimits_{Q(R_k/2,2R_k)}(qu^2) R_k^2 \ln^{-1} R_k \int\limits_{Q(R_k/2,2R_k)} q \ln|x|\,dx \right)$$
$$\leqslant c_3 \left(\int\limits_{Q(R_k/2,2R_k)} |\nabla u|^2\,dx + \ln R_k \int\limits_{Q(R_k/2,2R_k)} q \ln|x|\,dx \right).$$

Отсюда, учитывая логарифмическую оценку интеграла Дирихле в силу леммы 5, получаем, что при $x \in S_{R_k}$ выполнена оценка $u(x) - \overline{u}(R_k) = o(\ln R_k)$, откуда следует, что $u(x) = o(\ln R_k)$ на S_{R_k}. Применяя принцип максимума к функциям $u \pm c_0 \pm \varepsilon U$ (где, как и выше, $U(x)$ — решение уравнения (1) с логарифмическим ростом) при достаточно большом c_0, получим, что $|u| \leqslant c_0 + \varepsilon U$ в $Q(R_1, R_k)$ для $k \geqslant k_0(\varepsilon)$. Устремив ε к нулю, получим утверждение леммы. $\rhd$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* $\int_Q q(x)\ln|x|\,dx < \infty$, $0 \leqslant q(x) \leqslant c|x|^{-2}$ *для зависящей от* λ_1, λ_2 *постоянной* $c > 0$, *удовлетворяющей условиям на константу* c *в теореме* 1 *и лемме* 3. *Тогда любое решение уравнения* (1) *в* Q *ведет себя одним из трех возможных способов:*

1) $\sup_{S_{R_k}} |u| \geqslant c_0 R_k^{\gamma}$ *для некоторой последовательности* $R_k \to \infty$, $k \to \infty$, *причем* $u(x)$ *меняет знак на любой окружности* S_R *при* $R > R_0' = \mathrm{const}$; *постоянная* $\gamma > 0$ *зависит только от* λ_1, λ_2; $0 < c_0 = \mathrm{const}$;

2) $C_1 \ln|x| \leqslant u(x) \leqslant C_2 \ln|x|$, $C_1 > 0$, $C_2 > 0$;

3) $u(x)$ *ограничено в* Q.

$\lhd$ Если решение $u(x)$ не удовлетворяет условию 1), то, согласно лемме 4, справедлива оценка $|u(x)| \leqslant c \ln|x|$, $c = \mathrm{const}$. Если при этом не выполнено условие 2), то по лемме 6 решение $u(x)$ ограничено в Q.

Покажем, что любое решение, удовлетворяющее 1), является знакопеременным. Предположим противное. Пусть существует решение $u(x)$ из класса 1), неотрицательное при $|x| > R_1 = \mathrm{const}$.

Легко видеть, что для неотрицательных решений уравнения (1) в области $Q(R/2, 3R/2)$ выполнено неравенство Харнака с константой K, не зависящей от R: $u(A)/u(B) \leqslant K$ для всех $A, B \in Q(R/2, 3R/2)$. Действительно, отобразим $Q(R/2, 3R/2)$ на область $Q(1/2, 3/2)$ преобразованием $x \to y = x/R$. Уравнение (1) перейдет в уравнение $L_R u - q_R(y)u = 0$, где L_R — равномерно эллиптический дивергентный оператор по переменным y с постоянными эллиптичности, не зависящими от R; $q_R(y) = R^2 q(x) \leqslant c_2 = \mathrm{const}$, поэтому константа Харнака для решений $u(y)$ в $Q(1/2, 3/2)$ не зависит от R. Соответственно не зависит от R константа Харнака для решений $u(x)$ в $Q(R/2, 3R/2)$.

Так как $\sup_{S_{R_k}} u/\ln R_k \to \infty$, $k \to \infty$, то в силу неравенства Харнака получаем $\inf_{S_{R_k}} u/\ln R_k \to \infty$. Применяя принцип максимума, как и в доказательстве леммы 4, получим, что существование решения $u(x)$, растущего на некоторой последовательности окружностей S_{R_k} быстрее, чем $\ln|x|$, противоречит существованию решения $U(x)$ с логарифмическим ростом. Таким образом, решение из класса 1) может быть только знакопеременным в любой области вида $|x| > R_1$. Отсюда следует, что оно должно менять знак на любой окружности S_R для достаточно больших R, поскольку, если бы существовала последовательность $R'_k \to \infty$ такая, что $u \geqslant 0$ на $S_{R'_k}$, то в силу принципа максимума $u > 0$ в $Q(R'_1, \infty)$, что невозможно. Таким образом, теорема полностью доказана. $\rhd$

В заключение отметим, что интегральное условие убывания потенциала $\int_Q q(x) \ln|x|\, dx < \infty$ является аналогом условия трихотомии $\int x_1 q(x)\, dx < \infty$ для решений задачи Неймана в бесконечном цилиндре [5] (здесь x_1 — переменная, соответствующая оси цилиндра).

Литература

1. *Ландис Е. М., Панасенко Г. П.* Об одном варианте теоремы типа Фрагмена — Линделефа для эллиптических уравнений с коэффициентами, периодическими по всем переменным, кроме одной // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.—1979.—Т. 5.—С. 105–136.
2. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* О поведении на бесконечности решений эллиптических уравнений второго порядка в областях с некомпактной границей // Мат. сб.—1980.—№ 4.—С. 588–610.
3. *Ландис Е. М., Ибрагимов А. И.* Задачи Неймана в неограниченных областях // Докл. РАН.—1995.—Т. 343, № 4.—С. 17–18.
4. *Кондратьев В. А., Олейник О. А.* Об асимптотике в окрестности бесконечности решений с конечным интегралом Дирихле эллиптических уравнений второго порядка // Тр. семинара им. И. Г. Петровского.—1987.—Т. 2.—С. 149–163.
5. *Неклюдов А. В.* О решениях эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрических областях // Уфимск. мат. журн.—2016.—Т. 8, вып. 4.—С. 135–146.
6. *Неклюдов А. В.* О задаче Робена для эллиптических уравнений второго порядка в цилиндрических областях // Мат. заметки.—2018.—Т. 103, вып. 3.—С. 417–436.
7. *Неклюдов А. В.* Асимптотика решений двумерного уравнения Гаусса — Бибербаха — Радемахера с переменными коэффициентами во внешней области // Сиб. электрон. мат. изв.—2018.—Т. 15.—С. 338–354.

8. *Littman W., Stampacchia G., Weinberger H. F.* Regular Points for Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Ser. 3.—1963.—Vol. 17, № 3.—P. 43–77.
9. *Гилбарг Д., Трудигер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.—М.: Наука, 1989.—464 с.

Статья поступила 16 мая 2018 г.

Неклюдов Алексей Владимирович
Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана,
доцент кафедры высшей математики
РОССИЯ, 105005, Москва, Рубцовская наб., 2/18
E-mail: nekl5@yandex.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2019, Volume 21, Issue 1, P. 37–50

TRICHOTOMY OF SOLUTIONS OF SECOND-ORDER ELLIPTIC EQUATIONS WITH A DECREASING POTENTIAL IN THE PLANE

Neklyudov, A. V.[1]

[1] Bauman Moscow State Technical University,
2/18 Rubtsovskaya nab., Moscow 105005, Russia
E-mail: nekl5@yandex.ru

Abstract. We consider a uniformly elliptic second-order divergent equation with measurable coefficients in two-dimensional domain Q external to the circle. An equation contains the lower nonnegative coefficient $q(x) = q(x_1, x_2)$ of potential type in the stationary Schrödinger equation. Weak solutions in the Sobolev space W_2^1 in any bounded subdomain are studied. The possible rate of solutions at infinity is considered. It is established that if the lower coefficient decreases with a sufficient rate then the positive solution exists and has the same rate at infinity as the fundamental solution of respective elliptic equation without lower term. The rate is logarithmic. This solution has uniformly bounded "heat flow" on circles of radius R. It is established Sen-Venan type inequality for Dirichlet integral of solution of power rate. Sen-Venan inequality leads to the evaluation of Dirichlet integral in a ring domain via average value of solution on the circle. It means that the solution has the same rate on the circle as its average value. Maximum principle implies that any tending to infinity solution has the logarithmic rate. The main result of paper is the trichotomy of solutions: The solution is either bounded, or tends to infinity with a logarithmic rate, preserving the sign, or oscillates and has a power-law rate of the maximum of the modulus. The basic condition for the decrease of the lower coefficient is formulated in integral form $\int_Q q(x)\ln|x|\,dx < \infty$.

Key words: elliptic equation, unbounded domain, lower coefficient, asymptotic behaviour of solutions, trichotomy of solutions.

Mathematical Subject Classification (2000): 35J15.

For citation: *Neklyudov, A. V.* Trichotomy of Solutions of Second-Order Elliptic Equations with a Decreasing Potential in the Plane, *Vladikavkaz Math. J.*, 2013, vol. 21, no. 4, pp. 37–50 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27733.

References

1. *Landis, E. M., Panasenko, G. P.* A Variant of a Theorem of Phragmen-Lindelof Type for Elliptic Equations with Coefficients That Are Periodic in All Variables But One, *Trudy Seminara imeni I. G. Petrovskogo* [Proceedings of the Petrovskiy Seminar], 1979, vol. 5, pp. 105–136 (in Russian).
2. *Oleinik, O. A., Iosif'yan, G. A.* On the Behavior at Infinity of Solutions of Second Order Elliptic Equations in Domains with Noncompact Boundary, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1981, vol. 40, no. 4, pp. 527–548. DOI: 10.1070/SM1981v040n04ABEH001849.

3. *Landis, E. M. Ibragimov, A. I.* Neumann Problems in Unbounded Domains, *Doklady Akademii Nauk* [Reports of Akademy of Science], 1995, vol. 343, no. 1, pp. 17–18 (in Russian).
4. *Kondrat'ev, V. A. and Oleinik, O. A.* Asymptotics in a Neighborhood of Infinity of Solutions with Finite Dirichlet Integral of Second-Order Elliptic Equations, *Journal of Soviet Mathematics*, 1989, vol. 47, no. 4, pp. 2596–2607. DOI: 10.1007/BF01105913.
5. *Nekludov, A. V.* On Solutions of Second Order Elliptic Equations in Cylindrical Domains, *Ufa Mathematical Journal*, 2016, vol. 8, no. 4, pp. 131–143. DOI: 10.13108/2016-8-4-131.
6. *Nekludov, A. V.* On the Robin Problem for Second-Order Elliptic Equations in Cylindrical Domains, *Mathematical Notes*, 2018, vol. 103, no. 3–4, pp. 430–446. DOI: 10.1134/S0001434618030094.
7. *Nekludov, A. V.* Asymptotic of Solutions of Two-Dimesional Gauss–Bierbach–Rademacher Equation with Variable Coefficients in External Area, *Sibirskie Electronnie Matematicheskie Izvestiya* [Syberian Electronic Mathematical Reports], 2018, vol. 15, pp. 338–354 (in Russian).
8. *Littman, W., Stampacchia, G. and Weinberger, H. F.* Regular Points for Elliptic Equations with Discontinuous Coefficients, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. Ser. 3*, 1963, vol. 17, no. 1–2, pp. 43–77.
9. *Gilbarg, D. and Trudinger, N. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Berlin, N. Y., Springer Verlag, 1977, 401 p.

Received May 16, 2018

Aleksey V. Neklyudov
Bauman Moscow State Technical University,
2/18 Rubtsovskaya nab., Moscow 105005, Russia,
Assosiate Professor of the Department of Higher Mathematics
E-mail: nekl5@yandex.ru