Владикавказский математический журнал
2019, Том 21, Выпуск 1, С. 79–84

УДК 517.518.13, 517.983.23
DOI 10.23671/VNC.2019.1.27737

О КОМБИНАЦИЯХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ КОНТУРОВ И ОБЛАСТЕЙ И НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

С. Б. Климентов[1,2]

[1] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;
[2] Южный федеральный университет,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а

E-mail: `sbklimentov@sfedu.ru`

Аннотация. В работе изучаются суперпозиции диффеоморфизмов регулярных контуров, гомеоморфных окружности, и ограниченных ими областей с одномерными и двумерными интегральными операторами. Установлено свойство таких одномерных суперпозиций, аналогичное свойству бесселевых потенциалов.

Ключевые слова: диффеоморфизм контуров и областей, интегральный оператор.

Mathematical Subject Classification (2000): 30E20.

Образец цитирования: *Климентов С. Б.* О комбинациях диффеоморфизмов контуров и областей и некоторых интегральных операторов // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 1.—С. 79–84. DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27737.

1. Введение. Формулировка результатов

Цель настоящей заметки — обобщение и развитие результатов статьи [1], а также установление некоторых свойств двумерных интегральных операторов, необходимых при исследовании эллиптических уравнений и систем.

Обозначим $D = \{z : |z| < 1\}$ единичный круг комплексной z-плоскости E, $z = x + iy$, $i^2 = -1$; $\Gamma = \partial D$ — граница круга D; $\overline{D} = D \cup \Gamma$; G — односвязную ограниченную область комплексной ζ-плоскости с регулярной границей $\mathscr{L}$, $\overline{G} = G \cup \mathscr{L}$; W — односвязную ограниченную область комплексной ω-плоскости с регулярной границей $\mathscr{C}$, $\overline{W} = W \cup \mathscr{C}$.

В работе используется банахово пространство $C^{k,\alpha}(\Gamma)$ комплекснозначных функций, имеющих на Γ k производных, где $k \geqslant 1$ — целое число, причем k-е производные удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. В этом пространстве предполагается заданной стандартная норма (см., например, [2, с. 25]). Как обычно, предполагаем, что $C^{k,0}(\Gamma) = C^k(\Gamma)$, $C^{0,\alpha}(\Gamma) = C^\alpha(\Gamma)$ при $\alpha < 1$. Вместо контура Γ в этих пространствах может фигурировать любой другой контур соответствующей гладкости.

Будем говорить, что контур $\mathscr{L} \in C^{k,\alpha}$, $k \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, если существует гомеоморфное отображение $\zeta = f(z)$ окружности Γ на $\mathscr{L}$ класса $C^{k,\alpha}(\Gamma)$, такое, что $f'(z) \neq 0$. Отметим, что при этом обратное отображение $z = f^{-1}(\zeta)$ будет класса $C^{k,\alpha}(\mathscr{L})$. В этом случае отображение $\zeta = f(z)$ (как и обратное) называют диффеоморфизмом класса $C^{k,\alpha}$

контуров Γ и $\mathscr{L}$. Аналогично определяется диффеоморфизм любых контуров соответствующей гладкости.

Отметим также, что если s — длина дуги на Γ, а σ — длина дуги на $\mathscr{L}$, то при диффеоморфизме имеют место соотношения: $\zeta'_t(t) \neq 0$, где $\zeta'_t = \zeta'_s \cdot s'_t = \zeta'_s \cdot \overline{t'}_s$, t — аффикс точки контура Γ; и, соответственно, $z'_\tau(\tau) \neq 0$, где $z'_\tau = z'_\sigma \cdot \sigma'_\tau = z'_\sigma \cdot \overline{\tau'}_\sigma$, τ — аффикс точки контура $\mathscr{L}$.

Также в работе рассматриваются соболевские пространства $W^k_p(\overline{G})$, $k \geqslant 1$, $p > 2$, со стандартной нормой. Замкнутое подпространство голоморфных функций пространства $W^k_p(\overline{G})$ с индуцированной нормой будем обозначать $A^k_p(\overline{G})$.

Обобщая [3, с. 33], для функции $\varphi(\zeta)$, определенной на $\mathscr{L}$, введем оператор $\mathscr{W}_p\varphi(\omega) = \mathscr{W}\varphi(\omega) = \varphi(p(\omega))$, где $\zeta = p(\omega) = \zeta(\omega)$ — диффеоморфное класса $C^{k,\alpha}$, $k \geqslant 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, отображение контура $\mathscr{C} \in C^{k,\alpha}$ на контур $\mathscr{L} \in C^{k,\alpha}$. Очевидно, $\mathscr{W} = \mathscr{W}_p$ — линейный, ограниченный, непрерывно обратимый оператор, действующий из $C^{k,\alpha}(\mathscr{L})$ в $C^{k,\alpha}(\mathscr{C})$. Там, где это не может вызвать недоразумений, индекс у $\mathscr{W}$ будем опускать.

Обозначим

$$S_{\mathscr{C}}\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathscr{C}} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}\,d\tau, \quad t \in \mathscr{C}, \tag{1}$$

одномерный сингулярный (интегральный) оператор. Для других контуров соответствующий оператор определяется аналогично.

Предметом настоящего исследования является суперпозиция

$$\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t) = (\mathscr{W}S_{\mathscr{L}}\mathscr{W}^{-1} - S_{\mathscr{C}})\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathscr{C}} k(\tau, t)\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{2}$$

где

$$k(\tau, t) = \frac{\zeta'(\tau)}{\zeta(\tau) - \zeta(t)} - \frac{1}{\tau - t}, \tag{3}$$

а также суперпозиция

$$Nw(z) = \iint\limits_{D} \left[\frac{\zeta'(t)}{\zeta(t) - \zeta(z)} - \frac{1}{t - z}\right] \partial_{\bar z} w(\zeta(z))\,dx\,dy, \tag{4}$$

где $\zeta = \zeta(z)$ — однолистное конформное отображение D на G.

Основными результатами этой работы являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Если $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\mathscr{C})$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\varphi(t) \in C^{0,\beta}(\mathscr{C})$, $0 < \beta \leqslant 1$, $\mu = \alpha + \beta \leqslant 2$, то при $\mu < 1$ $\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t) \in C^{\mu}(\mathscr{C})$, причем*

$$\|\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t)\|_{C^{\mu}(\mathscr{C})} \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_{C^{0,\beta}(\mathscr{C})}, \tag{5}$$

где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\mathscr{C})}$.

Если $\mu = 1$, то $\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t) \in C^{\mu-\varepsilon}(\mathscr{C})$ для любого ε, $0 < \varepsilon < \mu$ с выполнением оценки, аналогичной (5).

Если $\mu > 1$, то $\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t) \in C^{1,\mu-1}(\mathscr{C})$, причем

$$\|\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t)\|_{C^{1,\mu-1}(\mathscr{C})} \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_{C^{0,\beta}(\mathscr{C})}, \tag{6}$$

где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\mathscr{C})}$.

Следствие 1. *Если* $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\mathscr{C})$, $0 < \alpha \leqslant 1$, $\varphi(t) \in C^{1,\beta}(\mathscr{C})$, $0 < \beta \leqslant 1$, *то* $\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t) \in C^{1,\alpha}(\mathscr{C})$, *причем*

$$\|\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t)\|_{C^{1,\alpha}(\mathscr{C})} \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_{C^{0,1}(\mathscr{C})} \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_{C^{1,\beta}(\mathscr{C})}, \tag{7}$$

где константа зависит лишь от $\|\zeta\|_{C^{1,\alpha}(\mathscr{C})}$.

Замечание 1. В [1] доказан частный случай теоремы 1, когда $\mathscr{L}$ и $\mathscr{C}$ — единичные окружности.

Как показывают примеры (см. [1]), при $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\mathscr{C})$ показатель α в левой части (7) не улучшаем в том смысле, что существуют функции $\zeta(t) \in C^{1,\alpha}(\mathscr{C})$, $\varphi(t) \in C^{1,\alpha}(\mathscr{C})$ такие, что $\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t) \in C^{1,\alpha}(\mathscr{C})$, но $\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t) \notin C^{1,\gamma}(\mathscr{C})$ при любом γ, $1 \geqslant \gamma > \alpha$.

Теорема 2. *Пусть* $G \in C^1_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $\zeta = \zeta(z)$ — *однолистное конформное отображение* D *на* G, $w(\zeta) \in W^1_s(\overline{G})$, $s > 2$. *Тогда при* $\alpha s < 2$ $Nw(z) \in A^1_q(\overline{D})$, где $q = \frac{2s}{2-\alpha s}$, *и*

$$\|Nw(z)\|_{W^1_q(\overline{D})} \leqslant \mathrm{const}\|\partial_{\bar\zeta} w\|_{L_s(\overline{G})}, \tag{8}$$

причем const *от* w *не зависит.*

2. Доказательство теоремы 1

В рассуждениях работы [1] нигде не используется предположение, что $\mathscr{L}$ — единичная окружность, т. е. в [1] теорема доказана для оператора

$$\Psi_{\mathscr{L}\Gamma}\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \left[\frac{f'(\tau)}{f(\tau)-f(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right]\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{9}$$

Сделав в (9) замену переменной интегрирования $\tau = f^{-1}(\eta)$, получим (о замене переменной интегрирования в сингулярном интеграле см., например, [4, с. 31]):

$$\Psi_{\mathscr{L}\Gamma}\varphi(t) = -\Psi_{\Gamma\mathscr{L}}\varphi(f^{-1}(\zeta)) = -\Psi_{\Gamma\mathscr{L}}\mathscr{W}_{f^{-1}}\varphi(\zeta).$$

Так как $\mathscr{W}$ — линейный изоморфизм пространств $C^{k,\alpha}(\mathscr{C})$ и $C^{k,\alpha}(\Gamma)$, то отсюда получаем справедливость теоремы 1 и для $\Psi_{\Gamma\mathscr{L}}$.

Пусть теперь $\omega = g(t)$ — $C^{1,\alpha}$-диффеоморфизм Γ на $\mathscr{C}$, а $\zeta = f(t) = p(g(t))$ — $C^{1,\alpha}$-диффеоморфизм Γ на $\mathscr{L}$. Из (2) имеем

$$\mathscr{W}_g\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t) = \Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(g(t)) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \left[\frac{1}{\tau - t} - \frac{g'(\tau)}{g(\tau)-g(t)}\right]\varphi(g(\tau))\,d\tau$$
$$+ \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \left[\frac{f'(\tau)}{f(\tau)-f(t)} - \frac{1}{\tau - t}\right]\varphi(g(\tau))\,d\tau.$$

Таким образом,

$$\Psi_{\mathscr{L}\mathscr{C}}\varphi(t) = -\mathscr{W}_{g^{-1}}\Psi_{\mathscr{C}\Gamma}\mathscr{W}_g\varphi(t) + \mathscr{W}_{g^{-1}}\Psi_{\mathscr{L}\Gamma}\mathscr{W}_g\varphi(t)$$

и вопрос сведен к уже рассмотренному частному случаю.

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2

Лемма 1. *Пусть* $G \in C^1_\alpha$, $0 < \alpha < 1$, $\mathscr{L} = \partial G$, D — *единичный круг*, $\partial D = \Gamma$, $\zeta = \zeta(z)$ — *однолистное конформное отображение* D *на* G, $w(\zeta) \in W^1_s(\overline{G})$, $s > 2$.

Тогда имеет место формула

$$Nw(z) = \iint\limits_D \left[\frac{\zeta'(t)}{\zeta(t) - \zeta(z)} - \frac{1}{t-z}\right] \partial_{\bar z} w(\zeta(z))\, dx\, dy$$
$$= \frac{1}{2i} \int\limits_\Gamma \left[\frac{\zeta'(t)}{\zeta(t) - \zeta(z)} - \frac{1}{t-z}\right] w(\zeta(t))\, dt, \quad t = x + iy. \qquad (10)$$

◁ В силу формулы Помпейю [2, с. 57] имеют место соотношения

$$w(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_G \frac{w_{\bar\tau}(\tau)}{\tau - \zeta}\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathscr{L}} \frac{w(\tau)}{\tau - \zeta}\, d\tau, \quad \tau = \xi + i\eta, \qquad (11)$$

$$w(\zeta(z)) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{w_{\bar t}(\zeta(t))}{t - z}\, dx\, dy + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{w(\zeta(t))}{t - z}\, dt, \quad t = x + iy. \qquad (12)$$

Отметим, что по теореме Келлога [2, гл. 1, § 2] $\zeta(z) \in C^1_\alpha(\overline{D})$.

Перейдем в интегралах формулы (11) к переменной интегрирования t, $\tau = \zeta(t)$, и заменим ζ на $\zeta(z)$:

$$w(\zeta(z)) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{w_{\bar t}(\zeta(t)) \cdot \zeta'(t)}{\zeta(t) - \zeta(z)}\, dx\, dy + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{w(\zeta(t)) \cdot \zeta'(t)}{\zeta(t) - \zeta(z)}\, dt.$$

Вычитая из последнего равенства (12), получим (10). ▷

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 2.

◁ Доказательство теоремы 2. Из формулы (10) очевидно, что $\partial_{\bar z} Nw(z) \equiv 0$, так что достаточно показать, что $\partial_z Nw(z) \in L_q(\overline{D})$.

Продифференцируем (11) и (12) соответственно по ζ и z:

$$\partial_\zeta w(\zeta) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_G \frac{w_{\bar\tau}(\tau)}{(\tau - \zeta)^2}\, d\xi\, d\eta + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathscr{L}} \frac{w(\tau)}{(\tau - \zeta)^2}\, d\tau, \qquad (13)$$

$$\partial_z w(\zeta(z)) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{w_{\bar t}(\zeta(t))}{(t - z)^2}\, dx\, dy + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{w(\zeta(t))}{(t - z)^2}\, dt. \qquad (14)$$

Двойные интегралы в правых частях этих формул понимаются в смысле главного значения, и все слагаемые в правых частях принадлежат соответственно классам $L_s(\overline{G})$ и $L_s(\overline{D})$ [2, гл. 1, §§ 8, 9].

Поскольку $\zeta = \zeta(z)$ — конформное отображение, формула замены переменной в двойном сингулярном интеграле в (13) имеет обычный вид [5, гл. 2, § 5, п.п. 4,5]. Так же, как и выше, перейдем в (13) к переменным t, z:

$$\partial_z w(\zeta(z)) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_D \frac{w_{\bar t}(\zeta(t))\zeta'(t)\zeta'(z)}{(\zeta(t) - \zeta(z))^2}\, dx\, dy + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{w(\zeta(t))\zeta'(t)}{(\zeta(t) - \zeta(z))^2}\, dt. \qquad (15)$$

Вычитая (14) из (15), с учетом (10) получим

$$\partial_z Nw(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \left[\frac{\zeta'(t)\zeta'(z)}{(\zeta(t)-\zeta(z))^2} - \frac{1}{(t-z)^2}\right] w_{\bar t}(\zeta(t))\,dx\,dy \in L_s(\overline{D}).$$

Далее имеем [1]

$$\left|\frac{\zeta'(t)\zeta'(z)}{(\zeta(t)-\zeta(z))^2} - \frac{1}{(t-z)^2}\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}}{|t-z|^{2-\alpha}},$$

где const зависит лишь от $\|\zeta(z)\|_{C^1_\alpha(\overline{D})}$.

Отсюда и из $\partial_{\bar z} w(\zeta(z)) \in L_s(\overline{D})$ получаем $\partial_z Nw(z) \in L_q(\overline{D})$ [6, гл. 5, п. 1.2] и

$$\|\partial_z Nw(z)\|_{L_q(\overline{D})} \leqslant \mathrm{const}\|\partial_{\bar\zeta} w\|_{L_s(\overline{G})}. \tag{16}$$

Также имеем неравенство (см. [2, с. 54]):

$$\|Nw(z)\|_{C(\overline{D})} \leqslant \mathrm{const}\|\partial_{\bar\zeta} w\|_{L_s(\overline{G})}. \tag{17}$$

Сопоставляя (16) и (17), получим (8). Теорема 2 доказана. ▷

Литература

1. *Климентов С. Б.* О комбинациях диффеоморфных сдвигов окружности и некоторых одномерных интегральных операторов // Владикавк. мат. журн.—2017.—Т. 19, № 1.—С. 30–40. DOI: 10.23671/VNC.2017.1.5819.
2. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.—М.: Физматгиз, 1959.—628 с.
3. *Литвинчук Г. С.* Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом.—М.: Физматгиз, 1977.—448 с.
4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.—М.: Наука, 1977.—640 с.
5. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения.—М.: Физматгиз, 1962.—254 с.
6. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.—М.: Мир, 1973.—342 с.

Статья поступила 5 апреля 2018 г.

Климентов Сергей Борисович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела математического анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22;

Южный федеральный университет,
заведующий кафедрой геометрии
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: sbklimentov@sfedu.ru
https://orcid.org/0000-0002-7406-3667

Vladikavkaz Mathematical Journal
2019, Volume 21, Issue 1, P. 79–84

ON COMBINATIONS OF DIFFEOMORPHISMS OF CURVES AND DOMAINS AND SOME INTEGRAL OPERATORS

Klimentov, S. B.[1,2]
[1] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia;
[2] Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia
E-mail: sbklimentov@sfedu.ru

Abstract. The superposition of diffeomorphisms of regular curves homeomorphic to the circle and domains bounded by them with the one-dimensional and two-dimensional integral operators are under consideration. A property of one-dimensional superposition similar to that of Bessel potentials is established.

Key words: diffeomorphism of paths and domains, integral operator.

Mathematical Subject Classification (2000): 30E20.

For citation: *Klimentov, S. B.* On the Combinations of the Diffeomorphisms of Curves and Domains and Some Integral Operators, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 1, pp. 79–84. (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.1.27737.

References

1. *Klimentov, S. B.* On the Combinations of the Circle Shifts and Some One-Dimensional Integral Operators, *Vladikavkaz Math. J.*, 2017, vol. 19, no. 1, pp. 30–40 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2017.1.5819.
2. *Vekua, I. N. Generalized Analytic Functions*, Oxford, etc. Pergamon Press, 1962, 668 p.
3. *Litvinchuk, G. S. Kraevye zadachi i singulyarnye integralnye uravneniya so sdvigom* [Boundary Value Problems and Singular Integral Equations with a Shift], Moscow, Fizmatgiz, 1977. 448 p. (in Russian).
4. *Gakhov, F. D. Boundary Value Problems,* Oxford, etc., Pergamon Press, 1966, 564 p.
5. *Mikhlin, S. G. Multidimensional Singular Integrals and Integral Equations,* Oxford, etc., Pergamon Press, 1965, 269 p.
6. *Stein Elias, M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions,* Princeton, Princeton Univ. Press, 1970, 290 p.

Received April 5, 2018

Sergey B. Klimentov
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Leading Researcher of the Department of Mathematical Analysis;
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Head of Departament of Geometry
E-mail: sbklimentov@sfedu.ru
https://orcid.org/0000-0002-7406-3667