Владикавказский математический журнал
2019, Том 21, Выпуск 3, С. 5–13

УДК 517.95
DOI 10.23671/VNC.2019.3.36456

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ДАРБУ ДЛЯ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

А. А. Аллахвердян[1]

[1] Адыгейский государственный университет,
Россия, 385000, Майкоп, ул. Первомайская, 208
E-mail: alinaallakhverdyan@mail.ru

Аннотация. В работе обсуждаются элементарные преобразования Дарбу функций Бесселя. В теореме 1 мы приводим уточнённую формулировку общего метода факторизации, восходящего к Э. Шредингеру, и вводим в рассмотрение взаимосвязанные дифференциальные подстановки B_1 и B_2. В основной теореме 2 рассматриваются уравнения Бесселя — Риккати и элементарные преобразования Дарбу сводятся к дробно-линейным отображениям. Показано, что неподвижная точка такого отображения порождает рациональные по x решения уравнений Бесселя — Риккати из теоремы 2. Отметим, что функции Бесселя рассматриваются в данной работе как собственные функции $A\psi = \lambda\psi$ операторов Эйлера вида $A = e^{2t}\left(D_t^2 + a_1 D_t + a_2\right)$ с постоянными коэффициентами a_1 и a_2. Это позволяет (лемма 3) построить асимптотические решения уравнений Бесселя — Риккати в виде степенных рядов по обратным степеням $z = kx$, $k^2 = \lambda$, $x = e^{-t}$. Мы показываем, что эти формальные ряды по обратным степеням спектрального параметра $k = \sqrt{\lambda}$ сходятся, если существуют рациональные решения уравнений Бесселя — Риккати из теоремы 2.

Ключевые слова: функция Бесселя, обратимое преобразование Дарбу, непрерывные дроби, оператор Эйлера, уравнение Риккати.

Mathematical Subject Classification (2010): 34K08.

Образец цитирования: *Аллахвердян А. А.* О преобразованиях Дарбу для функций Бесселя // Владикавк. мат. журн.—2019.—Т. 21, вып. 3.—С. 5–13. DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36456.

1. Введение

В работе рассматриваются условия обратимости элементарных преобразований линейных дифференциальных уравнений вида: $A\psi = \lambda\psi$, где A — дифференциальный оператор n-го порядка, имеющий вид

$$A = a_0(x)D_x^n + a_1(x)D_x^{n-1} + \ldots + a_n(x), \quad D_x = \frac{d}{dx}. \tag{1}$$

Эти преобразования определяются дифференциальными подстановками

$$\widetilde{\psi} = B_1\psi, \quad \psi = B_2\widetilde{\psi}, \tag{2}$$

где B_1 и B_2 — дифференциальные операторы (вообще говоря, произвольного порядка) и позволяют переходить от исходного уравнения $A\psi = \lambda\psi$ к эквивалентному уравнению $\widetilde{A}\psi = \lambda\widetilde{\psi}$, и наоборот. Обратимые преобразования решений уравнения $A\psi = \lambda\psi$

называются в современной литературе *преобразованиями Дарбу*. Они используются для построения солитоноподобных решений дифференциальных уравнений.

Если дифференциальный оператор B_1 имеет нулевой порядок, то, как легко видеть, преобразование сводит оператор A к оператору $\widetilde{A} = b(x) \circ A \circ b^{-1}(x)$, где $b(x)$ — произвольная достаточно гладкая функция. В случае, когда B_1 является оператором первого порядка, соответствующее преобразование имеет вид

$$\widetilde{\psi} = (b_0(x)D_x + b_1(x))\psi, \tag{3}$$

а оператор B_2 имеет порядок $n-1$. Здесь уже функции $b_0(x)$ и $b_1(x)$ не являются произвольными и вопрос об условиях обратимости является нетривиальным. Достаточные условия обратимости преобразования (3) указаны в теореме 1.

Далее в статье рассматривается применение преобразований Дарбу к функциям Бесселя. В этом случае они сводятся к уравнению

$$(f(x) + \beta)(\widehat{f}(x) - (\beta + 1)) = x^2,$$

где $f(x)$ — решение уравнения Риккати, связанного с уравнением Бесселя (теорема 2). Последнее уравнение позволяет определить дробно-линейное преобразование решений уравнения Риккати, а неподвижные точки этого отображения приводят к последовательности рациональных решений уравнения Риккати.

В конце первого раздела рассматривается вопрос о разрешимости уравнения Риккати (теорема 2) в классе формальных рядов. Показывается, что уравнение однозначно разрешимо в классе формальных степенных рядов следующего вида:

$$f(t) = z + \frac{1}{2} + \frac{\beta^2}{2z} - \frac{1}{8z} - \frac{\beta^2}{2z^2} + \frac{1}{8z^2} - \frac{\beta^4}{4z^3} + \frac{7\beta^2}{8z^3} - \frac{13}{64z^3} + \ldots \tag{4}$$

Найдены значения β, при которых формальные ряды сходятся и дают все рациональные решения данного уравнения.*

2. Уравнение Бесселя

Справедлива следующая теорема, которая обобщает результаты, полученные Шредингером в работах [1, 2], на случай дифференциальных операторов произвольного порядка. Обобщение этой теоремы на случай операторов высокого порядка рассматривалось ранее в [3, § 4.2.2], но в другой формулировке.

Теорема 1. *Уравнение для собственных функций $A\psi = \lambda\psi$ при $\lambda \neq 0$ допускает обратимую замену вида* (3) *с коэффициентами $b_0(x) \equiv 1$ и $b_1(x) = D_x(\log\varphi(x))$, где $\varphi(x) \in \ker A$.*

В основе данной теоремы лежит следующая известная лемма (см., например [3, § 4.2.2, лемма 17]) о представлении дифференциального оператора A.

Лемма 1. *Дифференциальный оператор A порядка $n > 1$ представим в виде $A = \tilde{A}(D_x - g(x))$ в том и только том случае, если $g = D_x(\log\varphi(x))$, где $\varphi(x) \in \ker A$, $\tilde{A}$ — оператор $(n-1)$-го порядка.*

Итак, докажем теорему о собственных функциях.

* Можно показать, что асимптотические ряды для функций Бесселя, используемые в [4], эквивалентны (4).

$\triangleleft$ Доказательство теоремы 1. Рассмотрим уравнение $A\psi = \lambda\psi$, согласно лемме 1 его можно переписать в виде

$$\widetilde{A}\widehat{\psi} = \lambda\psi, \tag{5}$$

где $\widehat{\psi} = (D_x - g(x))\psi$. Из формулы (5) имеем, что

$$\lambda\psi = \widetilde{a}_0(x)\widehat{\psi}^{(n-1)} + \widetilde{a}_1(x)\widehat{\psi}^{(n-2)} + \ldots + \widetilde{a}_{n-1}(x)\widehat{\psi} = \sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{a}_i(x)\widehat{\psi}^{(n-(i+1))}. \tag{6}$$

Домножив слева обе части уравнения (5) на $(D_x - g(x))$, получим

$$\lambda\widehat{\psi} = \frac{d}{dx}\left[\sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{a}_i(x)\widehat{\psi}^{(n-(i+1))}\right] + g(x)\left[\sum_{i=0}^{n-1} \widetilde{a}_i(x)\widehat{\psi}^{(n-(i+1))}\right] = \widehat{A}\widehat{\psi}. \tag{7}$$

Полученное уравнение (7) при $\lambda \neq 0$ имеет тот же порядок, что и исходное $A\psi = \lambda\psi$, но другие коэффициенты.

Таким образом, доказано, что уравнение $A\psi = \lambda\psi$, $\lambda \neq 0$, допускает замену $\widehat{\psi} = (D_x - g(x))\psi$, если $g = (\log\varphi(x))_x$, $\varphi(x) \in \ker A$ и то, что данная замена обратима. $\triangleright$

Рассмотрим уравнение $A\psi = \lambda\psi$, когда A — оператор второго порядка. Применяя теорему 1, запишем оператор A в виде

$$A = a_0(x)D_x^2 + a_1(x)D_x + a_2(x). \tag{8}$$

Произведем замену $\psi = e^{\varphi}\widehat{\psi}$ в данном уравнении и будем считать коэффициент при D_x^2, равным 1. Тогда оператор A, определяемый формулой (8), примет вид

$$A = D_x^2 + q(x). \tag{9}$$

Найдем как связана функция $q(\cdot)$ с функцией $g(\cdot)$. Для этого применим теорему 1 к (9):

$$\begin{aligned} A &= (D_x + g(x))(D_x - g(x)) \\ &= D_x^2 + g(x)D_x - g(x)D_x - g'(x) - g^2(x) = D_x^2 - g'(x) - g^2(x). \end{aligned}$$

Таким образом, функция $q(\cdot)$ удовлетворяет уравнению Риккати

$$g'(x) + g^2(x) - q(x) = 0. \tag{10}$$

Уравнением Риккати, связанным с уравнением $A\psi = \lambda\psi$, называется уравнение для логарифмической производной $f = \frac{\psi'}{\psi}$:

$$a_0 f' + a_0 f^2 + a_1 f + (a_2 - \lambda) = 0. \tag{11}$$

В случае, когда оператор A имеет вид (9), уравнение Риккати, связанное с уравнением $A\psi = \lambda\psi$, запишется в виде

$$f' + f^2 + q(x) + \lambda = 0, \quad f = \frac{\psi'}{\psi},$$

где $q(\cdot)$ удовлетворяет уравнению (10).

В дальнейшем будем рассматривать применения теоремы 1 в случае, когда оператор A является оператором Эйлера, т. е.

$$A = e^{mt}P_m(D_t) = e^{mt}(p_0 D_t^m + p_1 D_t^{m-1} + \ldots + p_m), \tag{12}$$

где $p_i \in \mathbb{C}$.

Лемма 2. *Если $A = e^{mt}P_m(D_t)$, $B = e^{nt}Q_n(D_t)$, то суперпозиция операторов Эйлера A и B запишется в виде*

$$A \circ B = e^{(m+n)t}U_{m+n}(D_t), \quad U_{m+n}(D_t) = P_m(D_t + n)Q_n(D_t).$$

Отметим, что вместо замены $\widehat{\psi} = (b_0 D_x + b_1)\psi$ в случае, когда A определяется формулой (12) используется оператор Эйлера первого порядка

$$\widehat{\psi} = e^t(D_t + c)\psi, \quad c \in \mathbb{C}. \tag{13}$$

Итак, рассмотрим случай, когда оператор A имеет вид

$$A = D_x^2 + \frac{1}{x}D_x - \frac{\beta^2}{x^2}. \tag{14}$$

Замечание 1. Уравнение $A\psi = \lambda\psi$, в котором A определяется формулой (14) называется *уравнением Бесселя* [5]. Используя замену $x = e^{-t}$,

$$D_x = -e^{-t}D_t, \quad D_x^2 = e^{2t}(D_t^2 + D_t),$$

оператор, определяемый формулой (14), преобразуем в оператор Эйлера

$$A = e^{2t}(D_t^2 - \beta^2).$$

Применив лемму 2 к данному оператору

$$A = e^t(D_t - (\beta + 1)) \circ e^t(D_t - \beta), \tag{15}$$

уравнение $A\psi = \lambda\psi$ можно переписать в следующем виде:

$$e^t(D_t - \beta - 1) \circ e^t(D_t + \beta)\psi = \lambda\psi. \tag{16}$$

Таким образом, уравнение Бесселя является уравнением для собственных функций оператора Эйлера.

Применив теорему 1 к уравнению (16), находим

$$e^t(D_t + \beta)\psi = \widehat{\psi}, \quad e^t(D_t - (\beta + 1))\widehat{\psi} = \lambda\psi. \tag{17}$$

Теперь перепишем уравнения (17) в терминах $f = (\log\psi)_t$ и $\widehat{f} = (\log\widehat{\psi})_t$, получим

$$\begin{gathered} \widehat{\psi} = e^t(f + \beta)\psi, \quad \lambda\psi = e^t(\widehat{f} - (b + 1)), \\ (f + \beta)(\widehat{f} - (\beta + 1)) = \lambda \cdot e^{-2t}. \end{gathered} \tag{18}$$

Без ограничения общности, считая $\lambda = 1$ в последнем уравнении, докажем основную теорему.

Теорема 2. *Соотношение*

$$(f+\beta)(\widehat{f}-(\beta+1))=e^{-2t}, \quad \beta\in\mathbb{C}, \tag{19}$$

устанавливает эквивалентность двух уравнений Риккати:

$$f_t+f^2=\beta^2+e^{-2t} \iff \widehat{f}_t+\widehat{f}^{\,2}=(\beta+1)^2+e^{-2t}. \tag{20}$$

$\lhd$ Выразим $\widehat{f}$ из (19):

$$\widehat{f}=\frac{e^{-2t}}{f+\beta}+(\beta+1). \tag{21}$$

Продифференцируем (21) по t:

$$\widehat{f}_t=\frac{-2e^{-2t}(f+\beta)-f_te^{-2t}}{(f+\beta)^2}=-2\frac{e^{-2t}}{f+\beta}-f_t\frac{e^{-2t}}{(f+\beta)^2}. \tag{22}$$

Заметим, что

$$f_t=\beta^2-f^2+e^{-2t}. \tag{23}$$

Подставим (23) в (22). Тогда

$$\widehat{f}_t=-2\frac{e^{-2t}}{f+\beta}+e^{-2t}\frac{f-\beta}{f+\beta}-\frac{e^{-4t}}{(f+\beta)^2}, \tag{24}$$

$$\frac{e^{-4t}}{(f+\beta)^2}=-\widehat{f}_t-2\frac{e^{-2t}}{f+\beta}+e^{-2t}\frac{f-\beta}{f+\beta}. \tag{25}$$

Возведем равенство (21) в квадрат

$$\widehat{f}^2=\frac{e^{-4t}}{(f+\beta)^2}+2(\beta+1)\frac{e^{-2t}}{f+\beta}+(\beta+1)^2.$$

Следовательно,

$$\frac{e^{-4t}}{(f+\beta)^2}=\widehat{f}^{\,2}-2(\beta+1)\frac{e^{-2t}}{f+\beta}-(\beta+1)^2. \tag{26}$$

Таким образом, согласно (25) и (26) имеем

$$-\widehat{f}_t-2\frac{e^{-2t}}{f+\beta}+e^{-2t}\frac{f-\beta}{f+\beta}=\widehat{f}^{\,2}-2(\beta+1)\frac{e^{-2t}}{f+\beta}-(\beta+1)^2,$$

$$\widehat{f}_t+\widehat{f}^{\,2}=(\beta+1)^2+e^{-2t}\frac{-2+f-\beta+2(\beta+1)}{f+\beta}.$$

Итак,

$$\widehat{f}_t+\widehat{f}^{\,2}=(\beta+1)^2+e^{-2t}. \rhd$$

Заменив в формуле (21) $\widehat{f}_j=f_{j+1}$, последовательно подставляя вместо β последовательность чисел $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_j,\ldots$, получим рекуррентную формулу для последовательности функций f_j:

$$f_{j+1}=\beta_{j+1}+\frac{x^2}{f_j+\beta_j},$$

которую можно записать в виде непрерывной дроби (ср. [6])

$$f_{j+1} = \beta_{j+1} + \cfrac{x^2}{2\beta_j + \cfrac{x^2}{2\beta_{j-1} + \cfrac{x^2}{2\beta_{j-2} + \cfrac{x^2}{\ddots}}}}.$$

Утверждение 1. *Отображение $f \to \widehat{f}$, определяемое* (19) *из теоремы* 2, *имеет неподвижную точку*

$$\widehat{f} = f \tag{27}$$

при $(\beta+1)^2 = \beta^2$.

$\triangleleft$ В случае (27) и (19), решая квадратные уравнения, мы находим, что

$$\begin{gathered} f = f_\pm = \frac{1}{2} \pm x, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \ \beta + 1 = \frac{1}{2}, \\ f_t + f^2 = \frac{1}{4} + x^2 \quad (x = e^{-t}). \end{gathered} \tag{28}$$

Нетрудно заметить, что $\widehat{f_\pm} = f_\pm$. $\triangleright$

Используя, как и выше, нумерацию, мы введем обозначения

$$\begin{gathered} \beta_1 = \frac{1}{2}, \ \beta_{j+1} = \beta_j + 1, \ j = 1, 2, \ldots, \ \Rightarrow \ \beta_j = j - \frac{1}{2}, \\ f_{j+1} = \beta_{j+1} + \frac{x^2}{f_j + \beta_j}, \quad f_1 = -x + \frac{1}{2}. \end{gathered} \tag{29}$$

Очевидно, что эта формула дает последовательность рациональных решений уравнения Риккати теоремы 2:

$$f_2 = \frac{3}{2} + \frac{x^2}{1-x}.$$

Аналогично можно определить $f_3, f_4, \ldots$:

$$\begin{gathered} f_3 = \frac{5}{2} + \frac{x^2(1-x)}{x^2 - 3x + 3} = \frac{9}{2} + 7x + \frac{7x+2}{x^2 - 3x + 3}, \\ f_4 = \frac{41}{12} - \frac{x}{6} + \frac{x^2 - 10}{12x^3 - 42x^2 + 60x - 30}, \ \ldots \end{gathered}$$

Для того чтобы доказать, что найдены все рациональные решения уравнения Риккати

$$f_t + f^2 = \beta^2 + e^{-2t}, \tag{30}$$

можно использовать следующую лемму, в которой строятся два формальных решения уравнения (30) при любом $\beta \in \mathbb{C}$. Эти решения представляют собой формальные ряды по степеням $\frac{1}{z}$ (см. [4, § 24]).

Лемма 3. *Формальные решения уравнения Риккати*

$$f_t + f^2 = \beta^2 + k^2 e^{-2t}$$

определены однозначно, с точностью до выбора знака $k \in \mathbb{C}$, и записываются в виде формальных степенных рядов с постоянными коэффициентами по вспомогательной переменной $z = ke^{-t}$:

$$f = z + \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma_j}{z^j}. \tag{31}$$

$\triangleleft$ Подставим f, определяемое из (31), в уравнение Риккати (30), предварительно подсчитав f_t и f^2:

$$f_t = z_t + \sum_1^\infty \frac{\gamma_i \cdot i}{z^i},$$

$$f^2 = \frac{1}{4} + z + z^2 + 2z\sum_1^\infty \frac{\gamma_i}{z^i} + \sum_1^\infty \frac{\gamma_i}{z^i} + \sum_1^\infty \frac{\gamma_i^2}{z^{2i}} + 2\sum_{i>j} \frac{\gamma_i\gamma_j}{z^{i+j}}.$$

Таким образом,

$$z_t + \sum_1^\infty \frac{\gamma_i \cdot i}{z^i} + \frac{1}{4} + z + z^2 + 2z\sum_1^\infty \frac{\gamma_i}{z^i} + \sum_1^\infty \frac{\gamma_i}{z^i} + \sum_1^\infty \frac{\gamma_i^2}{z^{2i}} + 2\sum_{i>j} \frac{\gamma_i\gamma_j}{z^{i+j}} = \beta^2 + z^2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, найдем значения γ_i:

$$\begin{aligned} &\gamma_1 = \frac{1}{2}\left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right), \ \gamma_2 = -\frac{1}{2}\left(\beta^2 - \frac{1}{4}\right), \ \gamma_3 = -\frac{1}{4}\left(\beta^4 - \frac{7}{2}\beta^2 + \frac{13}{16}\right), \dots, \\ &2\gamma_{i+1} + (i+1)\gamma_i + \sum_{j+j'=i} \gamma_j\gamma_{j'} = 0. \ \triangleright \end{aligned} \tag{32}$$

Отметим, что для последовательности β_j, определенной в (29), ряд (31) сходится и определяет рациональные функции f_j из формулы (29). Например, полагая в (31) $\beta^2 = \frac{1}{4}$, находим $f_1 = -e^{-t} + \frac{1}{2}$, интегрируя уравнение $\frac{\psi_1'}{\psi_1} = -e^{-t} + \frac{1}{2}$, получим, что $\psi_1 = e^{-ke^{-t} + \frac{1}{2}t}$. Можно проверить, что эта функция с точностью до обозначений совпадает с экспоненциальной производящей функцией полиномов Чебышева [7, § 5.2.1]

$$\mathrm{Re}\left[\exp\left\{ke^{i\theta}\right\}\right] = \sum_{n=0}^\infty \frac{k^n}{n!} T_n(x). \tag{33}$$

Напомним, что многочлены Чебышева определяются следующим уравнением:

$$T_n(x) = \cos(n\theta), \qquad x = \cos\theta, \tag{34}$$

и удовлетворяют следующей рекуррентной формуле:

$$2xT_n(x) = T_{n-1}(x) + T_{n+1}(x).$$

Произведя замену $f_n = \frac{T_{n-1}}{T_n} - x$, последнее рекуррентное соотношение можно записать в следующем виде:

$$(f_n - x)(f_{n+1} + x) = -1. \tag{35}$$

Заметим, что уравнения (35) и (19) схожи.

3. Заключение

Теорема 1 и формула (13) сводят задачу о функциях Бесселя к задаче о собственных функциях операторов Эйлера и своеобразной алгебре многочленов. Представляется интересным обобщение теоремы 2 на спектральные задачи третьего порядка. Можно показать также, что формальные ряды из леммы 3 применимы к задаче об асимптотических разложениях функций Бесселя и их обобщений.

Благодарность. В заключении хочу выразить благодарность всем участникам семинара «Интегрируемые системы» под руководством А. Б. Шабата в Адыгейском государственном университете города Майкопа за внимание к работе и полезные замечания.

Литература

1. *Schrodinger E.* A method of determining quantum-mechanical eigenvalues and eigenfunctions // Proc. Roy. Irish Acad.—1940–1941.—Vol. A.46.—P. 9–16.
2. *Schrodinger E.* Further studies on solving eigenvalue problems by factorization // Proc. Roy. Irish Acad.—1940–1941.—Vol. A.46.—P. 183–206.
3. *Shabat A.* Symmetries of spectral problems // Lect. Notes Phys.—2009.—Vol 767.—P. 139–173. DOI: 10.1007/978-3-540-88111-7_5.
4. *Ильин А. М., Данилин А. Р.* Асимптотические методы в анализе.—М.: Физматлит, 2009.—248 с.
5. *Ватсон Дж. Н.* Теория бесселевых функций.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1945.
6. *Flajolet P., Schott R.* Non-overlapping partitions, continued fractions, bessel functions and a divergent series // Europ. J. Combinatorics.—1990.—Vol. 11, № 5.—P. 421–432. DOI: 10.1016/S0195-6698(13)80025-X.
7. *Mason J. C., Handscomb D. C.* Chebyshev Polynomials.—Boca Raton, FL: Chapman & Hall/CRC, 2003.—xiv+341 p.

Статья поступила 27 июля 2019 г.

Аллахвердян Алина Альбертовна
Адыгейский государственный университет,
студентка Адыгейского государственного университета
РОССИЯ, 385000, Майкоп, ул. Первомайская, 208
E-mail: alinaallakhverdyan@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2019, Volume 21, Issue 3, P. 5–13

ON TRANSFORMATIONS OF BESSEL FUNCTIONS

Allahverdyan, A. A.[1]
[1] Adyghe State University,
208 Pervomayskaya St., Maikop 385000, Russia
E-mail: alinaallakhverdyan@mail.ru

Abstract. Elementary Darboux transformations of Bessel functions are discussed. In Theorem 1 we present an improved version of a general factorization approach which goes back to E. Schrödinger, in terms of the two interrelated linear differential substitutions B_1 and B_2. The main Theorem 2 deals with the Bessel–Riccati equations. The elementary Darboux transformations are reduced to fraction-rational ones. It is shown that a fixed point of the latter generates the rational in x solutions of Bessel–Riccati equations introduced by Theorem 2. It should be noted that Bessel functions are considered as eigenfunctions $A\psi = \lambda\psi$ of the Euler operators $A = e^{2t}\left(D_t^2 + a_1 D_t + a_2\right)$ with constant coefficients a_1 and a_2. This enables one (Lemma 3) to build up asymptotic solutions of the Bessel–Riccati equations in the form of series in inverse powers of the parameter $z = kx$, $k^2 = \lambda$, $x = e^{-t}$. It is also shown that these formal series in inverse powers of the spectral parameter $k = \sqrt{\lambda}$ are convergent if the rational solutions of the corresponding Bessel–Riccati equation from Theorem 2 are exist.

Key words: Bessel functions, invertible Darboux transforms, continued fractions, Euler operator, Riccati equation.

Mathematical Subject Classification (2010): 34K08.

For citation: *Allahverdyan, A. A.* On Transformations of Bessel Functions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2019, vol. 21, no. 3, pp. 5–13 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2019.3.36456.

References

1. *Schrodinger, E.* A Method of Determining Quantum-Mechanical Eigenvalues and Eigenfunctions, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 1940–1941, vol. A.46, pp. 9–16.
2. *Schrodinger, E.* Further Studies on Solving Eigenvalue Problems by Factorization, *Proceedings of the Royal Irish Academy*, 1940–1941, vol. A.46, pp. 183–206.

3. *Shabat A.* Symmetries of Spectral Problems, *Lecture Notes in Physics*, 2009, vol. 767, pp. 139–173. DOI: 10.1007/978-3-540-88111-7_5.
4. *Il'yin, A. M. and Danilin, A. R. Asymptotic Methods in Analysis*, Moscow, Fizmatlit, 2009, 248 p. (in Russian).
5. *Watson, J. H. Teoriya besselevyh funkcij* [Theory of Bessel Functions], Moscow, Izd-vo inostr. lit-ry, 1945 (in Russian).
6. *Flajolet, P. and Schott, R.* Non-Overlapping Partitions, Continued Fractions, Bessel Functions and a Divergent Series, *European Journal of Combinatorics*, 1990, vol. 11, no. 5, pp. 421–432. DOI: 10.1016/S0195-6698(13)80025-X.
7. *Mason, J. C. and Handscomb, D. C. Chebyshev Polynomials*, Boca Raton, FL, Chapman & Hall/CRC, 2003, xiv+341 p.

Received 27 June, 2019

Alina A. Allahverdyan
Adyghe State University,
208 Pervomayskaya St., Maikop 385000, Russia,
Student
E-mail: alinaallakhverdyan@mail.ru