Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 1, С. 5–12

УДК 517.95
DOI 10.23671/VNC.2020.1.57532

ТРИ ТЕОРЕМЫ О МАТРИЦАХ ВАНДЕРМОНДА

А. Е. Артисевич[1], **А. Б. Шабат**[2]

[1] Адыгейский государственный университет,
Россия, 385000, Майкоп, ул. Первомайская, 20;
[2] Институт теоретической Физики им. Ландау РАН,
Россия, 142432, Черноголовка, пр. Ак. Семенова, 1а

E-mail: cokolovangela@rambler.ru, shabatab@mail.ru

Аннотация. Рассматриваются алгебраические вопросы, связанные с дискретным преобразованием Фурье, определенным при помощи симметричной матрицы Вандермонда Λ. Основное внимание в первых двух теоремах уделяется выработке формулировок, независящих от размера $N \times N$ матрицы Λ и явных формул для элементов матрицы Λ через корни уравнения $\lambda^N = 1$. В третьей теореме рассматриваются рациональные функции $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, удовлетворяющие условию «вещественности» $f(\lambda) = f\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ на всей комплексной плоскости и связанные с известной задачей о коммутировании симметричных матриц Вандермонда Λ с (симметричными) трехдиагональными матрицами T. Показано, что уже несколько первых уравнений коммутирования и указанное выше условие вещественности определяют вид рассматриваемых рациональных функций $f(\lambda)$, а найденные уравнения для элементов трехдиагональных матриц T не зависят от порядка N коммутирующих матриц. Полученные уравнения и приведенные примеры позволяют высказать гипотезу о том, что рассматриваемые рациональные функции являются обобщением многочленов Чебышева. В определенном смысле аналогичная гипотеза была высказана в недавно опубликованной в журнале «Теоретическая и математическая физика» работе В. М. Бухштабера с соавторами, где обсуждаются приложения этих обобщений в современной математической физике.

Ключевые слова: матрица Вандермонда, дискретное преобразование Фурье, условия коммутирования, многочлены Лорана.

Mathematical Subject Classification (2010): 42A38.

Образец цитирования: *Артисевич А. Е., Шабат А. Б.* Три теоремы о матрицах Вандермонда // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 1.—С. 5–12. DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57532.

1. Симметричные матрицы Вандермонда

Мы называем матрицу Вандермонда A общего вида с комплексными элементами x_i^j :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{N-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{N-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_N & x_N^2 & \dots & x_N^{N-1} \end{pmatrix}, \quad x_j \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

симметричной, если $A^T = A$. В этом случае $x_1 = 1$, а все остальные x_j являются степенями одного и того же комплексного числа λ. Этот частный случай матрицы Вандермонда (1) имеет следующий вид:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^{N-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \lambda^{N-1} & \lambda^{2(N-1)} & \dots & \lambda^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix}, \qquad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Известное свойство унитарности матриц дискретного преобразования Фурье (см. [1]), приводит нас к следующему уравнению для матриц Вандермонда (1):

$$AA^* = A^*A = N \cdot E, \tag{3}$$

где $*$ обозначает эрмитово сопряжение $A^* = \bar{A^T}$, а $E = \mathrm{diag}(1, \dots, 1)$ — единичную матрицу.

Теорема 1. *Матрица Вандермонда* (1) *удовлетворяет уравнению* (3) *в том и только в том случае, если x_j для $j = 1, 2, \dots, N$ являются N различными корнями уравнения $x^N = e^{iN\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{R}$. При этом матрица* (1) *записывается в виде произведения симметричной матрицы Вандермонда* (2) *с $\lambda^N = 1$ и диагональной $A = \Lambda \cdot \mathrm{diag}(1, e^{i\gamma}, e^{i2\gamma}, \dots)$.*

Последнюю формулу в теореме поясним следующим примером.

Пример 1.1. Выбор $x_1 = e^{i\gamma}$ находится в нашем распоряжении и, выбрав при $N = 3$

$$x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + i) \;\Rightarrow\; x_1^2 = \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \quad x_1^3 = i; \quad \lambda = e^{\frac{2}{3}i\pi}, \tag{4}$$

мы получаем «унитарную» матрицу (1), удовлетворяющую уравнению (3):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & \lambda^2 \\ 1 & \lambda^2 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 \\ 0 & 0 & x_1^2 \end{pmatrix}, \quad \lambda^3 = 1.$$

Для доказательства теоремы 1 рассмотрим диагональные элементы с номерами $\boxed{22}$ и $\boxed{33}$ произведения A^*A. Уравнение (3) дает для разностей $y_j = |x_j|^2 - 1$

$$y_1 + y_2 + \dots + y_N = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_N^2 = 0 \;\Rightarrow\; y_j = 0 \quad (\forall\, j \in [N]).$$

Поэтому справедливо утверждение

Лемма 1. *В условиях теоремы* 1 *выполняется $|x_j| = 1$ для любого j.*

Таким образом независимо от размера матрицы Вандермонда доказательство теоремы 1 сводится в силу формул Виета к проверке импликации

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_N = 0, \\ x_1^2 + \ldots + x_N^2 = 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_1^{N-1} + \ldots + x_N^{N-1} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x_j^N = a \quad (\forall\, j \in [N]).$$

Остается заметить, что $|a| = 1$ в силу леммы 1 и что уравнение $z^N = a$ сводится к уравнению $\lambda^N = 1$ заменой $z = e^{i\gamma}$ при $a = e^{iN\gamma}$. Доказательство обратного утверждения, т. е. $\lambda = e^{\frac{2i\pi}{N}} \Rightarrow$ (3), можно извлечь из цитированной выше монографии [1].

Пример 1.2. Пусть $N = 3$. Тогда восемь уравнений матричного равенства $A^*A = 3E$ можно представить в виде трех систем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0; \\ x_1^2 + x_1^2 + x_3^2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 3; \\ y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 = 0; \\ y_1\bar{x}_1 + y_2\bar{x}_2 + y_3\bar{x}_3 = 0, \end{cases}$$

где мы сменили обозначения леммы 1 и $y_j \stackrel{\text{def}}{=} x_j\bar{x}_j$. В силу леммы $y_j = 1 \Leftrightarrow x_j\bar{x}_j = 1$ для любого $j = 1, 2, 3$. При этом последняя система уравнений совпадает с первой, а вторая превращается в тождества вида $3 = 3$. Аналогично в случае $N = 4$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 \end{pmatrix}$$

и 16 уравнений матричного равенства $A^*A = 4E$, при условии что $y_j = x_j\bar{x}_j = 1$,

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_4 = 0; \\ x_1^2 + \ldots + x_4^2 = 0; \\ x_1^3 + \ldots + x_4^3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 + \ldots + y_4 = 4; \\ y_1^2 + \ldots + y_4^2 = 4; \\ y_1^3 + \ldots + y_4^3 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} y_1x_1 + \ldots + y_4x_4 = 0; \\ y_1x_1^2 + \ldots + y_4x_4^2 = 0; \\ y_1^2x_1 + \ldots + y_4^2x_4 = 0 \end{cases}$$

сводятся к трем уравнениям первой из этих систем.

Замечание 1. Множество корней из единицы при $N = 3$ состоит из трех элементов, образующих циклическую группу. При этом любой из элементов $\lambda_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\lambda_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$ можно использовать в качестве образующей циклической группы. Если решать рассматриваемую полиномиальную систему из 8 уравнений при помощи вычислительной техники, то решения записываются в виде, аналогичном (4), но со свободным параметром. Компьютер выдает два таких решения (с учетом перестановок). Следует заметить, что уже для случая $N = 5$ вычислительная техника испытывает затруднения и не доводит решение до конца.

Следующая теорема показывает, что для симметричных матриц Вандермонда Λ вида (2) условие $AA^* = N \cdot E$ из теоремы 1 можно заменить условием $\Lambda^2 = N \cdot Q$, где Q — матрица перестановок, состоящая из нулей и единиц:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \vdots & \ldots & 0 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Теорема 2. *Симметричная $N \times N$ матрица Вандермонда (2) является матрицей дискретного преобразования Фурье и удовлетворяет условию $\lambda^N = 1$ тогда и только тогда, когда $\Lambda^2 = N \cdot Q$, где Q — симметричная матрица перестановок (5).*

$\lhd$ Доказательство этой теоремы приведено в монографии [1], и мы ограничимся замечанием, что для вывода основного уравнения $\lambda^N = 1$ достаточно приравнять к нулю элемент с номером $\boxed{12}$ в матрице Λ^2, так как при $\lambda \neq 0$

$$1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots + \lambda^{N-1} = 0 \Rightarrow \lambda^N = 1. \rhd$$

2. Канонические многочлены Лорана

Следуя работам [2, 3], рассмотрим теперь связанное с матрицами Вандермонда (1) коммутационное уравнение $TA = AT$, где T — трехдиагональная матрица общего вида:

$$T \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \widetilde{b}_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \widetilde{b}_{N-1} & a_N \end{pmatrix}, \tag{6}$$

элементы которой можно выразить через элементы матрицы (1). В дополнение к работе [2] мы покажем, что в условиях теоремы 2, т. е. для симметричных матриц Вандермонда вида (2), диагональные элементы a_j матрицы (6) записываются в виде «канонических» многочленов Лорана:

$$P_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{n} \left(\lambda + \gamma_j + \frac{1}{\lambda} \right). \tag{7}$$

Отметим, что коэффициенты этих «многочленов» степени $2n$ определяются только их номером n (см. ниже) и не зависят от размера N рассматриваемой симметричной матрицы (2).

2.1. Необходимые условия коммутирования. Схема вывода формул, выражающих элементы треугольной матрицы через элементы матрицы Вандермонда (1), мало зависит от предположения симметричности $A^T = A$, и мы ограничимся ниже именно этим случаем, предполагая для простоты искомую матрицу (6) также симметричной. Коммутатор симметрических матриц кососимметричен и его первая строка с элементами $\boxed{12}$, $\boxed{13}, \dots$ позволяют выразить разности диагональных элементов $a_2 - a_1,\ a_3 - a_1, \dots$ через недиагональные. В результате получаем

$$\begin{cases} \boxed{12} : a_1 + b_1\lambda = b_1 + a_2 + b_2, \quad a_2 - a_1 = \lambda b_1 - b_1 - b_2, \\ \boxed{13} : a_1 + b_1\lambda^2 = b_2 + a_3 + b_3, \quad a_3 - a_1 = \lambda^2 b_1 - b_2 - b_3, \\ \boxed{14} : a_1 + b_1\lambda^3 = b_3 + a_4 + b_4, \quad a_4 - a_1 = \lambda^3 b_1 - b_3 - b_4, \dots \end{cases} \tag{8}$$

Вторая строка коммутатора с элементами $\boxed{23}$, $\boxed{24}$, $\boxed{25} \dots$ дает

$$\begin{cases} \boxed{23} : b_1 + a_2\lambda^2 + b_2\lambda^4 = b_2\lambda + a_3\lambda^2 + b_3\lambda^3, \\ \boxed{24} : b_1 + a_2\lambda^3 + b_2\lambda^6 = b_3\lambda^2 + a_4\lambda^3 + b_4\lambda^4, \\ \boxed{25} : b_1 + a_2\lambda^4 + b_2\lambda^8 = b_4\lambda^3 + a_5\lambda^4 + b_5\lambda^5 \end{cases} \tag{9}$$

и, подставив сюда найденные из предыдущих уравнений разности диагональных элементов, находим уравнения для выражения b_j, $j \geqslant 2$, через b_1 и b_2. В частности,

$$\begin{gathered} b_3(\lambda) = \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + 1 \right) b_2(\lambda) - \left(\lambda + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \right) b_1(\lambda), \\ b_4(\lambda) = \left(\lambda^2 + \lambda + 2 + \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \right) b_2(\lambda) - \left(\lambda^2 + \lambda + 1 + \frac{1}{\lambda} + \frac{2}{\lambda^2} + \frac{2}{\lambda^3} \right) b_1(\lambda). \end{gathered} \tag{10}$$

Итак, можно считать доказанной следующую теорему 3.

Теорема 3. *Первые две строки уравнений коммутативности* (8) *и* (9) *позволяют найти вид коэффициентов трехдиагональной матрицы T в форме многочленов Лорана от независимой переменной λ и выразить их через $b_1(\lambda)$, $b_2(\lambda)$.*

Сравнив полученные выражения с уравнением, полученным из элемента $\boxed{34}$ коммутатора

$$b_2\lambda^3 + a_3\lambda^6 + b_3\lambda^9 = \lambda^4 b_3 + \lambda^6 a_4 + \lambda^9 b_4, \tag{11}$$

приходим к выводу (ср. [2]), что условие $b_1 = 0$ является *необходимым условием* для выполнения коммутационных соотношений $TA = AT$ в симметричном случае (2).

2.2. Формулы Виета. Рассматривая условия разрешимости коммутационных соотношений в кольце многочленов Лорана $\sum c_j\lambda^j$ от формальной переменной λ, будем использовать следующие обозначения:

$$\sum c_j\lambda^j = \Big[\sum c_j\lambda^j\Big]_- + \Big[\sum c_j\lambda^j\Big]_+; \qquad \Big[\sum c_j\lambda^j\Big]_+ \overset{\text{def}}{=} \sum_{j\geqslant 0} c_j\lambda^j,$$

где квадратные скобки $[\ldots]_+$ и $[\ldots]_-$ обозначают сумму соответственно членов с отрицательными и положительными степенями λ.

Лемма 2. *Пусть $b_1 = 0$, $b_2 = 1$. Тогда все многочлены Лорана $b_m(\lambda)$ и $a_m(\lambda)$, найденные из уравнений* (8) *и* (9), *инвариантны относительно замены $\lambda \leftrightarrow \lambda^{-1}$, и для многочлена $a_{N+2}(\lambda)$ при любом $N > 0$ имеем*

$$\begin{gathered} -[a_{N+2}]_+ = \lambda^N + 2\lambda^{N-1} + 3\lambda^{N-2} + \cdots + N\lambda + N, \\ [\lambda a_{N+2}]_- = [a_{N+1}]_-,\ N > 0.^{**} \end{gathered} \tag{12}$$

$\lhd$ Уравнения первой строчки при $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ и $a_1 = 1$ дают

$$a_2 = 0, \quad a_3 + b_3 = 0, \quad a_m = 1 - b_m - b_{m-1},\ m > 3. \tag{13}$$

Учитывая формулы (8), (9), получаем теперь (ср. [2]), что при $m > 0$

$$b_{m+1} = \frac{1}{\lambda}b_m + 1 + \lambda + \cdots + \lambda^{m-1}, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 1.$$

Найденные по этим формулам многочлены Лорана $b_m(\lambda)$ инвариантны относительно замены $\lambda \leftrightarrow \lambda^{-1}$ и для доказательства уравнений (12) остается применить индукцию к $b_m + b_{m-1} - 1$. $\rhd$

Следствием полученных выше формул является

Лемма 3. *При $m \geqslant 3$ комплексные корни $\lambda^m = 1$ из единицы являются комплексными нулями многочленов Лорана $a_m(\lambda)$, $m \geqslant 3$, из леммы* 3.

$\lhd$ Заменив при помощи уравнения $\lambda^m = 1$, $m = N + 2$, отрицательные степени λ в формуле (12) на положительные

$$\begin{gathered} P_N(\lambda) = \lambda^N + 2\lambda^{N-1} + 3\lambda^{N-2} + \cdots + N\lambda + N + \frac{N}{\lambda} + \cdots + \frac{1}{\lambda^N}, \\ \lambda^{N+2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{\lambda^N} = \lambda^2, \quad \frac{1}{\lambda^{N-1}} = \lambda^3, \ldots, \quad \frac{1}{\lambda} = \lambda^{N+1}, \end{gathered}$$

после приведения подобных членов получаем

$$P_N(\lambda) \equiv N\left(\lambda^{N+1} + \lambda^N + \cdots + 1\right) = 0, \quad \bmod \lambda^{N+2} = 1. \ \rhd \tag{14}$$

** В статье [4] получены аналогичные формулы.

Очевидно, общее число $2n$ комплексных корней многочленов Лорана $P_n(\lambda)$ из формулы (7) превосходит при $n > 2$ число $n + 2$ соответствующих комплексных корней из единицы. Дополнительные корни уравнения $P_n(\lambda) = 0$ можно найти, используя обобщенные *формулы Виета*, приспособленные к произведениям вида (7):

$$\left(\lambda + \gamma_1 + \frac{1}{\lambda}\right)\left(\lambda + \gamma_2 + \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} + (\gamma_1 + \gamma_2)\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + \gamma_1\gamma_2 + 2,$$

$$P_n(\lambda) = \prod_{j=1}^{n}\left(\lambda + \gamma_j + \frac{1}{\lambda}\right) = \lambda^n + \frac{1}{\lambda^n} + \widetilde{\sigma}_1\left(\lambda^{n-1} + \frac{1}{\lambda^{n-1}}\right) + \widetilde{\sigma}_2\left(\lambda^{n-2} + \frac{1}{\lambda^{n-2}}\right) + \cdots + \widetilde{\sigma}_n.$$

Здесь коэффициенты $\widetilde{\sigma}_j$ выражаются через элементарные симметрические многочлены σ_i, $i \leqslant j$,

$$\widetilde{\sigma}_1 = \sigma_1 = \sum \gamma_i; \quad \widetilde{\sigma}_2 = \sigma_2 + n = n + \sum_{i<j}\gamma_i\gamma_j, \quad n > 2,$$

и определяются при $j \geqslant 2$ следующей рекуррентной формулой:

$$\widetilde{\sigma}_j(n+1) = \widetilde{\sigma}_j(n) + \gamma_{n+1}\widetilde{\sigma}_{j-1}(n) + \widetilde{\sigma}_{j-2}(n), \quad \widetilde{\sigma}_0 = 1. \tag{15}$$

Пример 3. При $n = 3$ комплексные корни уравнения $\lambda^5 = 1$ дают 4 из 6 корней рассматриваемого уравнения:

$$P_3(\lambda) = \lambda^3 + \frac{1}{\lambda^3} + 2\left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right) + 3\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right) + 3 = \prod_{j=1}^{3}\left(\lambda + \gamma_j + \frac{1}{\lambda}\right) = 0.$$

Формулы Виета приводят в этом случае к следующей системе уравнений для γ_j:

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 2, \quad \gamma_1\gamma_2 + \gamma_1\gamma_3 + \gamma_3\gamma_2 = 0, \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_3 = -1.$$

Можно проверить независимо, что рассматриваемый многочлен $P_3(\lambda)$ является приводимым и факторизуется следующим образом:

$$P_3(\lambda) = \left(\lambda + 1 + \frac{1}{\lambda}\right)\left(\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} + \lambda + \frac{1}{\lambda} + 1\right).$$

3. Заключение

Свойство унитарности матриц дискретного преобразования Фурье $AA^* = NE$ допускает, как следует из теоремы 1, дополнительные возможности (см. пример 1), которые могут использоваться при дискретном преобразовании Фурье квази-периодических функций. Имея в виду полный отказ от условий периодичности преобразуемых функций, представляется интересным исследовать возможности, предоставляемые коммутационными соотношениями вида

$$[T, A] = TA - AT = 0, \tag{16}$$

где A — матрица Вандермонда (1) и T — трехдиагональная матрица (6) общего вида. Дополнительный интерес в этой задаче связан с алгебраическими обобщениями уравнения $\lambda^N = 1$, рассмотренными в заключительном разделе данной работы и с многочленами Чебышева.

Литература

1. *Бурланков Д. Е., Кузнецов М. И., Чирков А. Ю., Яковлев В. А.* Компьютерная алгебра.—Нижний Новгород: Нижегородский гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского, 2002.—105 с.
2. *Grunbaum F. A.* The eigenvectors of the discrete Fourier transform: a version of the Hermite functions // J. Math. Anal. Appl.—1982.—Vol. 88, № 2.—P. 355–363. DOI: 10.1016/0022-247X(82)90199-8.
3. *Шабат А. Б.* Симметрические многочлены и законы сохранения // Владикавк. мат. журн.—2012.—Т. 14, вып. 4.—С. 83–94. DOI 10.23671/VNC.2012.14.11014.
4. *Бухштабер В. М., Тертычный С. И.* Семейство явных решений уравнений резистивной модели перехода Джозефсона // Теор. и мат. физика.—2013.—Т. 176, № 2.—С. 163–188. DOI: 10.4213/tmf8512.

Статья поступила 16 июля 2019 г.

Артисевич Анжела Евгеньевна
Адыгейский государственный университет,
старший преподаватель кафедры мат. анализа
РОССИЯ, 385000, Майкоп, ул. Первомайская, 20
E-mail: `cokolovangela@rambler.ru`

Шабат Алексей Борисович
Институт теоретической Физики им. Ландау РАН,
главный научный сотрудник
РОССИЯ, 142432, Черноголовка, пр. Ак. Семенова, 1а
E-mail: `shabatab@mail.ru`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 1, P. 5–12

THREE THEOREMS ON VANDERMOND MATRICES

Artisevich, A. E.[1] and Shabat, A. B.[2]
[1] Adyghe State University,
208 Pervomayskaya St., Maikop 385000, Russia;
[2] Landau Institute for Theoretical Physics,
1A Akademika Semenova Ave., Chernogolovka 142432, Russia;
E-mail: `cokolovangela@rambler.ru`, `shabatab@mail.ru`

Abstract. We consider algebraic questions related to the discrete Fourier transform defined using symmetric Vandermonde matrices Λ. The main attention in the first two theorems is given to the development of independent formulations of the size $N \times N$ of the matrix Λ and explicit formulas for the elements of the matrix Λ using the roots of the equation $\Lambda^N = 1$. The third theorem considers rational functions $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, satisfying the condition of "materiality" $f(\lambda) = f(\frac{1}{\lambda})$, on the entire complex plane and related to the well-known problem of commuting symmetric Vandermonde matrices Λ with (symmetric) three-diagonal matrices T. It is shown that already the first few equations of commutation and the above condition of materiality determine the form of rational functions $f(\lambda)$ and the equations found for the elements of three-diagonal matrices T are independent of the order of N commuting matrices. The obtained equations and the given examples allow us to hypothesize that the considered rational functions are a generalization of Chebyshev polynomials. In a sense, a similar, hypothesis was expressed recently published in "Teoreticheskaya i Matematicheskaya Fizika" by V. M. Bukhstaber et al., where applications of these generalizations are discussed in modern mathematical physics.

Key words: Vandermond matrix, discrete Fourier transform, commutation conditions, Laurent polynomials.

Mathematical Subject Classification (2010): 42A38.

For citation: *Artisevich, A. E. and Shabat, A. B.* Three Vandermond Matrices Theorem, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 1, pp. 11–12 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57532.