Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 1, С. 85–92

УДК 517.392
DOI 10.23671/VNC.2020.1.57607

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ГИПЕРСИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Ш. С. Хубежты[1,2]

[1] Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, Ватутина, 46;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
E-mail: shalva57@rambler.ru

Аннотация. В работе рассматривается один метод квадратур для численного решения гиперсингулярных интегральных уравнений на классе функций, неограниченных на концах интервала интегрирования. Для гиперсингулярного интеграла с весовой функцией $p(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ строится квадратурная формула интерполяционного типа с применением нулей ортогонального многочлена Чебышева первого рода. Для регулярного интеграла используется квадратурная формула наивысшей степени точности с той же весовой функцией $p(x)$. После дискретизации гиперсингулярного интегрального уравнения параметру сингулярности придаются значения корней многочлена Чебышева и, раскрывая неопределенности при совпадении значений узлов, получается система линейных алгебраических уравнений. Но, как оказалось, полученная система некорректная, т. е. не имеет единственного решения. Благодаря определенным дополнительным условиям, система становится корректной, и доказывается теорема о существовании и сходимости приближенного метода на некотором широком классе функций. Приводятся тестовые примеры, которые показывают, что построенная вычислительная схема удобна для реализации и эффективна для решения гиперсингулярных интегральных уравнений на классе функций, неограниченных на концах интервала интегрирования.

Ключевые слова: гиперсингулярный интеграл, квадратурная формула, вычислительная схема, оценка погрешности.

Mathematical Subject Classification (2010): 65R20, 45E05.

Образец цитирования: *Хубежты Ш. С.* Численное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 1.—С. 85–92. DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57607.

1. Введение

Теория сингулярных интегральных уравнений из-за многочисленных приложений переживает бурное развитие. Этим уравнениям посвящены фундаментальные труды широко известных математиков: Д. Гильберта, А. Пуанкаре, Т. Карлемана, Н. И. Мусхелишвили, С. Г. Михлина, З. Пресдорфа и т. д. Хорошо известен спектр применения теории сингулярных интегральных уравнений в механике и технике: теории упругости и термоупругости, аэродинамике. Сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения являются одним из основных аппаратов математического моделирования задач электродинамики.

Однако решение сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений возможно лишь в исключительных случаях, и основным аппаратом в прикладных задачах являются численные методы. В этом направлении должен отметить труды В. В. Иванова, И. К. Лифанова, Б. Г. Габдулхаева, Д. Г. Саникидзе, И. В. Бойкова и др. Но надо отметить, что и теория и методы численного решения гиперсингулярных интегральных уравнений разработаны в значительно меньшей степени, нежели соответствующая теория и методы для сингулярных интегральных уравнений. Среди работ, посвященных приближенным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений, можно отметить работы Б. Г. Габдулхаева [1], И. К. Лифанова [2], И. В. Бойкова [3, 4] и др.

Гиперсингулярное интегральное уравнение первого рода имеет вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^p}\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}k(x,t)\varphi_0(t)\,dt=f(x), \tag{1}$$

где $-1<x<1$, $k(x,t)$ и $f(x)$ — непрерывно дифференцируемые функции, $\varphi_0(t)$ — неизвестная функция.

Гиперсингулярный интеграл

$$H(\varphi_0,x)=\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^p}\,dt \quad (p\geqslant 2) \tag{2}$$

понимается в смысле конечной части по Адамару [1]:

$$H(\varphi_0,x)=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left\{\int_{-1}^{x-\varepsilon}\frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^p}\,dt+\int_{x+\varepsilon}^{1}\frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^p}\,dt-\frac{\psi(x)}{\varepsilon^{p-1}}\right\}, \tag{3}$$

где

$$\psi(x)=\sum_{k=0}^{p-2}\frac{\varphi_0^{(k)}(x)}{k!}\cdot\frac{\varepsilon^k[1+(-1)^{p-k}]}{p-k-1}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать гиперсингулярные интегральные уравнения первого рода в случае $p=2$, т. е. уравнения вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^2}\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}k(x,t)\varphi_0(t)\,dt=f(x), \tag{4}$$

где

$$\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^2}\,dt=\lim_{\varepsilon\to 0+}\left(\int_{-1}^{x-\varepsilon}\frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^2}\,dt+\int_{x+\varepsilon}^{1}\frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^2}\,dt-\frac{2\varphi_0(x)}{\varepsilon}\right). \tag{5}$$

В задачах механики и электродинамики чаще всего встречаются случаи, когда $\varphi_0(t)$ имеет вид

$$\varphi_0(t)=\sqrt{1-t^2}\,\varphi(t), \quad \varphi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\varphi(t),$$

$$\varphi_0(t)=\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}\,\varphi(t), \quad \varphi_0(t)=\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\varphi(t),$$

где $\varphi(t)$ — достаточно гладкая функция на отрезке $[-1,1]$.

2. Квадратурные формулы для гиперсингулярных интегралов и вычислительная схема

Так как мы ищем решения уравнения (4) на классе функций, неограниченных на концах интервала интегрирования $[-1,1]$, т. е. вида $\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\varphi(t)$, методом квадратур, то нам понадобятся квадратурные формулы для интеграла

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\,dx.$$

В работе [5] построена квадратурная формула для вышеуказанного гиперсингулярного интеграла, которая имеет вид

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\,dt \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}}{x-x_k} \times \left[\frac{U_{n-1}(x_k)-U_{n-1}(x)}{x-x_k} + \frac{xU_{n-1}(x)-nT_n(x)}{1-x^2}\right]\varphi(x_k), \quad (6)$$

где $T_n(x) = \cos n \arccos x$, $U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ — ортогональные многочлены Чебышева соответственно по весам $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ и $p(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\,\pi$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ — нули многочлена $T_n(x)$.

Кроме этого, для регулярного интеграла мы будем использовать квадратурную формулу типа Гаусса [6, с. 132]

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,f(t)\,dt \approx \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k), \quad x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\,\pi. \quad (7)$$

Вычислительная схема для поиска решений уравнения (4) вида $\varphi_0(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\varphi(t)$, т. е. уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,k(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x) \quad (8)$$

строится следующим образом: используя квадратурные формулы (6) и (7) и подставляя их в (8), получаем следующее дискретное уравнение:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k}\sqrt{1-x_k^2}}{(x-x_k)^2}\left[U_{n-1}(x_k)-U_{n-1}(x) + (x-x_k)\frac{xU_{n-1}(x)-nT_n(x)}{1-x^2}\right]\varphi(x_k) + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k(x,x_k)\varphi(x_k) = f(x), \quad (9)$$

где $x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\,\pi$ $(k = 1,2,\ldots,n)$.

Придавая параметру x последовательно значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и раскрывая неопределенности при $x_j = x_k$ $(k = j)$ [7], получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, $\ldots$, $\varphi(x_n)$:

$$\begin{gathered}\frac{1}{n}\sum_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}}{(x_j-x_k)^2}\left[U_{n-1}(x_k)-U_{n-1}(x_j)+(x_j-x_k)\frac{x_jU_{n-1}(x_j)-nT_n(x_j)}{1-x_j^2}\right]\varphi(x_k)\\ +\frac{-(n^2-1)(1-x_j^2)+3x_j^2}{2n(1-x_j^2)^2}\,\varphi(x_j)+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}k(x_j,x_k)\varphi(x_k)=f(x_j)\quad (j=1,2,\ldots,n).\end{gathered}\tag{10}$$

Это и есть построенная вычислительная схема для уравнения (8).

Попытки численного решения системы (10) для некоторых тестовых задач не увенчались успехом. Численные результаты не сходились к точным решениям. И. В. Бойков подробно изучил данную проблему в работе [4]. Им установлено, что для существования и единственности решения уравнения (8) требуется выполнение следующих дополнительных условий:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,T_0(t)\varphi(t)\,dt=C_0,\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,T_1(t)\varphi(t)\,dt=C_1,\tag{11}$$

где $T_0(t)$ и $T_1(t)$ — ортогональные многочлены Чебышева первого рода степени 0 и степени 1, а C_0 и C_1 — произвольные постоянные.

В работе [4, с. 458] указано, что «если $f(x)$ — достаточно гладкая функция, то на классе функций вида $(1-t^2)^{-1/2}\varphi(t)$ оператор K_0

$$\left(K_0\varphi_0\equiv\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_0(t)}{(t-x)^2}\,dt=f(x)\right)\tag{$*$}$$

имеет правый обратный оператор. Так как правый обратный оператор не единственный, то необходимо выделить конкретный правый оператор. Следовательно, для получения однозначного решения уравнения $(*)$ нужно на него наложить дополнительные условия вида (11). При этих условиях и в предположении, что $f(x)$ — достаточно гладкая функция, уравнение $(*)$ однозначно разрешимо.

С учетом этого замечания построение и обоснование коллокационного метода и метода механических квадратур для приближенного решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода проводится на базе общей теории приближенных методов [8].»

С учетом дополнительных условий (11) получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases}\frac{1}{n}\sum\limits_{\substack{k=1,\\ k\neq j}}^{n}\frac{(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}}{(x_j-x_k)^2}\left[U_{n-1}(x_k)-U_{n-1}(x_j)+(x_j-x_k)\frac{x_jU_{n-1}(x_j)-nT_n(x_j)}{1-x_j^2}\right]\varphi(x_k)\\ +\frac{-(n^2-1)(1-x_j^2)+3x_j^2}{2n(1-x_j^2)^2}\,\varphi(x_j)+\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}k(x_j,x_k)\varphi(x_k)=f(x_j),\quad j=2,3,\ldots,n-1,\\ \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}T_0(x_k)\varphi(x_k)=C_0,\\ \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}T_1(x_k)\varphi(x_k)=C_1,\end{cases}\tag{12}$$

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\,\pi, \quad T_0(t) = 1, \quad T_1(t) = t.$$

Система (12) является системой линейных алгебраических уравнений порядка $n \times n$ относительно неизвестных $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$, $\ldots$, $\varphi(x_n)$.

Решая систему (12), мы получаем численное решение уравнения (8) $\varphi(t)$ в точках $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

3. Обоснование вычислительной схемы и примеры

Справедлива следующая теорема (см. [3, 4]).

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (8) *с условиями* (11) *функции* $k(x,t)$ *и* $f(x)$ *на отрезке* $[-1;1]$ *принадлежат классу* $H_r(\alpha)$ $(r > 1)$ (*т. е. имеют непрерывные производные до порядка* $r-1$, *а производная* $\varphi^{(r)}$ *удовлетворяет условию Гёльдера с показателем* $\frac{1}{2} < \alpha \leqslant 1$) *и это уравнение с условиями* (11) *имеет единственное решение. Тогда система линейных алгебраических уравнений* (12) *также имеет единственное решение и справедлива оценка*

$$|\varphi(t) - \varphi_n(t)| \leqslant O\left(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-\beta}}\right) \quad (0 < \beta < \alpha),$$

где

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_n(t)}{(t-x_k)T_n'(x_k)}\,\varphi(x_k),$$

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi, \quad T_n(t) = \cos n \arccos t.$$

$\lhd$ Для доказательства введем пространство X (см. [3, 4]) функций $x(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\varphi(t)$, $\varphi(t) \in H_r(\alpha)$ $(\alpha > \frac{1}{2})$ с нормой

$$\|x(t)\| = \max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|\varphi(t)| + \max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|\varphi'(t)| + \sup_{t_1\neq t_2}\frac{|\varphi'(t_1)-\varphi'(t_2)|}{|t_1-t_2|^{\beta}}$$

и пространство Y функций $y(t) \in H(\beta)$ $\left(\beta < \alpha - \frac{1}{2}\right)$ с нормой

$$\|y(t)\| = \max_{-1\leqslant t\leqslant 1}|y(t)| + \sup_{t_1\neq t_2}\frac{|y(t_1)-y(t_2)|}{(t_1-t_2)^{\beta}}.$$

Тогда гиперсингулярный оператор Hx отображает пространство X в пространство Y, причем $\|Hx\|_Y \leqslant K\|x\|$, $K = \|H\|$. После этого аналогично доказательствам в [4] на основе общей теории приближенных методов [8] доказывается указанная теорема. $\rhd$

Приведем несколько тестовых примеров.

Пример 1. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\cdot\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,(x+t)\varphi(t)\,dt = x$$

с дополнительными условиями

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,T_0(t)\varphi(t)\,dt = 1, \quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,T_1(t)\varphi(t)\,dt = 0.$$

Для этого уравнения $k(x,t) = x+t$, $f(x) = x$, $C_0 = 1$, $C_1 = 0$. Точное решение $\varphi(t) = 1$. При $n = 4$ получаем следующие результаты: $\varphi(x_1) = 1$, $\varphi(x_2) = 1$, $\varphi(x_3) = 0{,}9999999$, $\varphi(x_4) = 0{,}9999999$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,(x+t)\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}$$

с дополнительными условиями

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,T_0(t)\varphi(t)\,dt = 0, \quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,T_1(t)\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}.$$

Здесь $k(x,t) = x+t$, $f(x) = \frac{1}{2}$, $C_0 = 0$, $C_1 = \frac{1}{2}$. Точное решение $\varphi(t) = t$. При $n = 4$ получаем $\varphi(x_1) = 0{,}9238794$, $\varphi(x_2) = 0{,}3826835$, $\varphi(x_3) = -0{,}3826833$, $\varphi(x_4) = -0{,}9238797$.

Пример 3. Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\frac{\varphi(t)}{(t-x)^2}\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,(x+t)\varphi(t)\,dt = 1 + \frac{x}{2}$$

с дополнительными условиями

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,T_0(t)\varphi(t)\,dt = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,T_1(t)\varphi(t)\,dt = 0.$$

Здесь $k(x,t) = x+t$, $f(x) = 1+\frac{x}{2}$, $C_0 = \frac{1}{2}$, $C_1 = 0$. Точное решение $\varphi(t) = t^2$. При $n = 4$ получаем $\varphi(x_1) = 0{,}8535533$, $\varphi(x_2) = 0{,}1464467$, $\varphi(x_3) = 0{,}1464465$, $\varphi(x_4) = 0{,}85355534$.

Во всех указанных примерах погрешность

$$|\varepsilon(t)| = |\varphi(t) - \varphi_n(t)| \leqslant 10^{-6}.$$

Она показывает, что вычислительная схема (12) удобна для реализации на ЭВМ и эффективна для решения гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода.

Литература

1. *Габдулхаев Б. Г., Шарипов Р. Н.* Оптимизация квадратурных формул для сингулярных интегралов Коши и Адамара // Конструктивная теория функций.—Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1987.—С. 3–48.
2. *Вайникко Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л. Н.* Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения.—М.: «Янус–К», 2001.—508 с.

3. *Бойков И. В., Бойкова А. И., Сёмов М. А.* Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода // Изв. вузов. Поволж. регион. Физ.-мат. науки. Математика.—2015.—№ 3 (35).—С. 11–27.
4. *Бойков И. В., Бойкова А. И.* Приближенное решение гиперсингулярных интегральных уравнений первого рода с особенностями второго порядка // XIII Междунар. конф. «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» (Саранск, 12–16 июля 2017 г.).—Саранск, 2017.—С. 446–461.
5. *Хубежты Ш. С., Плиева Л. Ю.* О квадратурных формулах для гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования // Аналит. и числ. методы моделирования естеств.-науч. и соц. проблем: Сб. статей IX Междунар. науч.-техн. конф. (28–31 октября 2014 г.).—Пенза: Изд-во ПГУ, 2014.—С. 54–59.
6. *Крылов В. И.* Приближенное вычисление интегралов.—М.: Наука, 1967.—500 с.
7. *Хубежты Ш. С.* О численном решении гиперсингулярных интегральных уравнений I рода с ядром Адамара // Мат. и компьютер. моделирование естеств.-науч. и соц. проблем: Материалы X Междунар. конф. молод. специалистов, аспирантов и студентов (23–27 мая 2016 г.).—Пенза: Изд-во ПГУ, 2016.—С. 83–92.
8. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1977.—720 с.

Статья поступила 30 ноября 2018 г.

Хубежты Шалва Соломонович
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
профессор кафедры мат. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, Ватутина, 46;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник отдела мат. моделирования
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
E-mail: shalva57@rambler.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 1, P. 85–92

ON NUMERICAL SOLUTION OF HYPERSINGULAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

Khubezhty Sh. S.[1,2]
[1] North Ossetian State University,
44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia
E-mail: shalva57@rambler.ru

Abstract. We consider a quadrature method for the numerical solution of hypersingular integral equations on the class of functions that are unbounded at the ends of the integration interval. For a hypersingular integral with a weight function $p(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$, a quadrature formula of the interpolation type is constructed using the zeros of the Chebyshev orthogonal polynomial of the first kind. For a regular integral, the quadrature formula of the highest degree of accuracy is also used with the weight function $p(x)$. After discretizing the hypersingular integral equation, the singularity parameter is given the values of the roots of the Chebyshev polynomial and, evaluating indeterminate forms when the values of the nodes coincide, a system of linear algebraic equations is obtained. But, as it turned out, the resulting system is incorrect, that is, it does not have a unique solution, there is no convergence. Due to certain additional conditions, the system turns out to be correct. This is proved on numerous test cases, in which the errors of computations are also sufficiently small. On the basis of the considered test problems, we conclude that the constructed computing scheme is convenient for implementation and effective for solving hypersingular integral equations on the class of functions of the integration interval unbound at the ends.

Key words: hypersingular integral, quadrature formula, computational scheme, error estimate.

Mathematical Subject Classification (2010): 65R20, 45E05.

For citation: *Khubezhty, Sh. S.* On Numerical Solution of Hypersingular Integral Equations of the First Kind, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 1, pp. 85–92 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2020.1.57607.

References

1. *Gabdulkhaev, B. G. and Sharipov, R. N.* Optimization of Quadrature Formulas for Singular Cauchy and Hadamard Integrals, *Konstructivnaya Teoriya Funktsii i Funktsional'nyi Analiz* [Constructive Theory of Functions and Functional Analysis], Kazan', Kazan. Gos. Univ., 1987, issue 6, pp. 3–48 (in Russian).
2. *Vaynikko, G. M., Lifanov, I. K. and Poltavskiy, I. N. Chislennye Metody v Gipersinguljarnyh Integral'nyh Uravnenijah i ih Prilozhenija* [Numerical Methods in Hypersingular Equations and their Applications], Moscow, Yanus–K, 2001, 508 p. (in Russian).
3. *Boykov, I. V., Boykov, A. I. and Semov, M. A.* Approximate Solution of Nonlinear Hypersingular Integral Equations of First Kind, *Izvestiya Vysshih Uchebnyh Zavedenii. Povolzhskii Region. Fiziko-Matematicheskie Nauki. Matematika* [University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences. Mathematics], 2015, no. 3 (35), pp. 11–27 (in Russian).
4. *Boykov, I. V. and Boykova, A. I.* Approximate Solution of Some Type of Hypersingular Integral Equations, *XIII Mezhdunar. Konf. «Differencial'nye Uravneniya i ikh Prilozheniya v Matematicheskom Modelirovanii»* (*Saransk,* 12–16 *Ijulja* 2017) [XIII International Scientific Conference "Differential Equations and their Applications in Mathematical Modeling" (Saransk, July 12–16, 2017)], Saransk, 2017, pp. 446–461 (in Russian).
5. *Khubezhty, Sh. S. and Plieva, L. Yu.* O Kvadraturnykh Formulakh dlya Gipersingulyarnykh Integralov na Otrezke Integrirovaniya, *Analiticheskie i Chislennye Metody Modelirovaniya Estestvenno-Nauchnykh i Sotsial'nykh Problem: Sbornik Statey IX Mezhdunarodnoy Nauchno-Tekhnicheskoy Konferentsii* (28–31 *Oktyabrya* 2014) [Analytical and Numerical Methods of Modelling of Natural Science and Social Problems: Proceedings of the Ninth International Conference ANM-2014 (28–31 October, 2014)], Penza, 2014, pp. 54–59 (in Russian).
6. *Krylov, V. I. Priblizhennoe Vychislenie Integralov* [Approximate Calculation of Integrals], Moscow, Nauka, 1967, 500 p. (in Russian).
7. *Khubezhty, Sh. S.* O Chislennom Reshenii Gipersingulyarnykh Integral'nykh Uravneniy I Roda s Yadrom Adamara, *Matematicheskoe i Komp'yuternoe Modelirovanie Estestvenno-Nauchnykh i Sotsial'nykh Problem: Materialy X Mezhdunarodnoy Nauchno-Tekhnicheskoy Konferentsii Molodykh Spetsialistov, Aspirantov i Studentov* (23–274 *Maya* 2016) [Mathematical and Computer Modelling of Natural Science and Social Problems: Proceedings of the Tenth International Conference MCM-2016 (23–27 May, 2016)], Penza, PGU, 2016, pp. 83–92 (in Russian).
8. *Kantorovich, L .V. and Akilov, G. P. Funkcionalnyj analiz* [Functional Analysis], Moscow, Nauka, 1977, 720 p. (in Russian).

Received 30 November, 2018

Shalva S. Khubezhty
North Ossetian State University,
Professor of the Department of Mathematical Analysis
44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia;
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
Leading Researcher of the Department of Mathematical Modeling
22 Marcus St., Vladikavkaz 362027, Russia
E-mail: `shalva57@rambler.ru`