Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 2, С. 18–23

УДК 517.983
DOI 10.46698/y3646-7660-8439-j

О НЕОГРАНИЧЕННЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ С КВАЗИСИММЕТРИЧНЫМИ ЯДРАМИ

В. Б. Коротков[1]

[1] Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
Россия, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4

E-mail: `vitalborkor@gmail.com`

Аннотация. В 1935 г. фон Нейман установил, что предельный спектр самосопряженного карлемановского интегрального оператора в L_2 содержит 0. Этот результат был обобщен автором на несамосопряженные операторы: предельный спектр оператора, сопряженного к карлемановскому интегральному оператору, содержит 0. Будем говорить, что плотно определенный в L_2 линейный оператор A удовлетворяет обобщенному условию фон Неймана, если 0 принадлежит предельному спектру сопряженного оператора A^*. Обозначим через B_0 класс всех линейных операторов в L_2, удовлетворяющих обобщенному условию фон Неймана. Автором было доказано, что каждый определенный на L_2 ограниченный интегральный оператор принадлежит классу B_0. Возникает вопрос: верно ли аналогичное утверждение для любого неограниченного плотно определенного в L_2 интегрального оператора? В статье дается отрицательный ответ на этот вопрос и устанавливается достаточное условие принадлежности плотно определенного в L_2 интегрального оператора с квазисимметричным ядром классу B_0.

Ключевые слова: замыкаемый оператор, интегральный оператор, ядро интегрального оператора, предельный спектр, линейное интегральное уравнение 1-го или 2-го рода.

Mathematical Subject Classification (2010): 45P05, 47B34.

Образец цитирования: *Коротков В. Б.* О неограниченных интегральных операторах с квазисимметричными ядрами // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 2.—С. 18–23. DOI: 10.46698/y3646-7660-8439-j.

Пусть (X, μ) — пространство с положительной мерой μ, $L_0 := L_0(X, \mu)$ — совокупность всех μ-измеримых μ-почти всюду конечных функций на X с обычным отождествлением функций, отличающихся одна от другой лишь на множествах μ-меры нуль, $L_2 := L_2(X, \mu)$ — пространство всех функций из L_0 с суммируемым квадратом. Через $\|\cdot\|$ и $(\cdot, \cdot)$ обозначим норму и скалярное произведение в L_2.

Мера μ называется *σ-конечной*, если существуют множества $X_n \subset X$, $\mu X_n < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$, такие, что $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$. *Атомом меры* μ называется множество положительной меры, непредставимое в виде объединения двух непересекающихся множеств с положительными мерами. Будем говорить, что мера μ не является чисто атомической, если в X имеется множество положительной меры, не содержащее атомов меры μ. Всюду далее предполагается, что мера μ не является чисто атомической и σ-конечна. Этим условиям удовлетворяет мера Лебега измеримых по Лебегу множеств евклидова пространства или вещественной числовой прямой.

Линейный оператор $T : D_T \subset L_2 \to L_0$ называется *интегральным*, если найдется определенная на $X \times X$ $(\mu \times \mu)$-измеримая $(\mu \times \mu)$-почти всюду конечная функция $K(x, y)$ такая, что для любого $f \in D_T$

$$Tf(x) = \int K(x,y) f(y)\, d\mu(y) \tag{1}$$

для μ-почти всех $x \in X$. Интеграл в (1) понимается в лебеговом смысле. Функция $K(x, y)$ называется *ядром* интегрального оператора T. Будем говорить, что ядро порождает интегральный оператор по формуле (1).

Определение. Нуль принадлежит предельному спектру $\sigma_C(H)$ оператора $H : D_H \subset L_2 \to L_2$, если существует ортонормированная последовательность $\{f_n\} \subset D_H$ такая, что $\|Hf_n\| \to 0$ при $n \to \infty$.

Если $T : L_2 \to L_2$ — ограниченный интегральный оператор, то $0 \in \sigma_C(T^*)$, где T^* — сопряженный к T оператор [1, с. 754; 2, теорема III. 2.6]. Другое доказательство этого результата дано в книге Халмоша и Сандера [3, теорема 15.1].

Возникает вопрос: будет ли иметь место включение $0 \in \sigma_C(T^*)$, если T — произвольный неограниченный интегральный плотно определенный замыкаемый оператор в L_2? Отрицательный ответ на этот вопрос дает следующий

Пример. Пусть $T_0 : L_\infty(0,1) \subset L_2(0,1) \to L_2(0,1)$ — линейный оператор, определяемый равенством

$$T_0 f = \sum_{n=1}^{\infty} n w_n \int_0^1 f \frac{\chi_{E_n}}{\sqrt{mE_n}}\, dy, \quad f \in L_\infty(0,1),$$

где $\{w_n\}$ — ортонормированный базис Уолша, χ_{E_n} — характеристическая функция множества $E_n \subset (0,1)$, $\{E_n\}$ — последовательность попарно не пересекающихся множеств, удовлетворяющих условию $\sum_{n=1}^{\infty} n\sqrt{mE_n} < \infty$, здесь m — мера Лебега. Тогда T_0 — замыкаемый интегральный оператор с ядром

$$K_0(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} n w_n(x) \frac{\chi_{E_n}(y)}{\sqrt{mE_n}},$$

но $0 \notin \sigma_C(T^*)$.

Действительно, для любой функции f из $L_\infty(0,1)$

$$\int_0^1 T_0 f w_j\, dx = \int_0^1 f j \frac{\chi_{E_j}}{\sqrt{mE_j}}\, dy, \quad j = 1, 2, \ldots$$

Следовательно, T_0^* определен на $\{w_n\}$, поэтому T_0^* плотно определен и T_0 имеет замыкание — оператор T_0^{**}. Далее, для любой функции f из $L_\infty(0,1)$ и всех $x \in (0,1)$

$$\int_0^1 |K_0(x,y)||f(y)|\, dy \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n\|f\|_\infty \sqrt{mE_n} < \infty,$$

где $\|\cdot\|_\infty$ — норма в $L_\infty(0,1)$, так что T_0 — замыкаемый интегральный оператор. При этом для любой функции $g \in D_{T_0^*}$

$$\|T_0^* g\|^2 = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{\chi_{E_n}(y)}{\sqrt{mE_n}} \int_0^1 g w_n\, dx \right\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left| \int_0^1 g w_n\, dx \right|^2 \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^1 g w_n\, dx \right|^2 = \|g\|^2.$$

Следовательно, $0 \notin \sigma_C(T^*)$.

Обозначим через B_0 класс всех линейных операторов H в L_2, для которых $0 \in \sigma_C(H^*)$. Различные условия принадлежности операторов классу B_0 даны в [4]. Ниже устанавливается еще одно такое условие.

Назовем ядро $K(x,y)$ квазисимметричным, если

$$|K(x,y)| = |K(y,x)| \quad \text{для} \quad (\mu\times\mu)\text{-почти всех } (x,y)\in X\times X. \tag{2}$$

Условию (2) удовлетворяют все эрмитовы, косоэрмитовы, симметричные и кососимметричные ядра.

Теорема 1. *Пусть $T : D_T \subset L_2 \to L_2$ — неограниченный плотно определенный замыкаемый интегральный оператор с квазисимметричным ядром $K(x,y)$. Если существует вещественная неотрицательная функция $a \in L_0$, положительная на множестве положительной меры, не содержащем атомов меры μ, и удовлетворяющая условию*

$$\int |K(u,v)|a(v)\,d\mu(v) \in L_2,$$

то $0 \in \sigma_C(T^*)$.

$\lhd$ Выберем $\alpha > 0$ так, чтобы множество $E = \{x \in X : a(x) \geqslant \alpha\}$ содержало подмножество e, $0 < \mu e < \infty$, без атомов меры μ. Пусть $\varphi \in L_0$ и $\operatorname{supp}\varphi := \{x\in X : |\varphi(x)| \neq 0\}$. Обозначим через χ_e характеристическую функцию множества e. Для любого $f \in L_2$ и любого $h \in L_\infty$ с $\operatorname{supp} h \subseteq e$ имеем, обозначив через $\|\cdot\|_\infty$ норму в L_∞:

$$\begin{aligned}
&\left|\int\int K(x,y)f(y)\,d\mu(y)\overline{h(x)}\,d\mu(x)\right| = \left|\int\int K(x,y)f(y)\,d\mu(y)\chi_e(x)\overline{h(x)}\,d\mu(x)\right| \\
&\leqslant \int\left|\int \chi_e(x)K(x,y)f(y)d\mu(y)\right||h(x)|\,d\mu(x) \leqslant \iint \chi_e(x)|K(x,y)||f(y)|\,d\mu(y)|h(x)|\,d\mu(x) \\
&\leqslant \|h\|_\infty \int\int_e |K(x,y)|\,d\mu(x)|f(y)|\,d\mu(y) = \|h\|_\infty \int\int_e |K(y,x)|\,d\mu(x)|f(y)|\,d\mu(y) \\
&\leqslant \frac{1}{\alpha}\|h\|_\infty \int\int_e |K(y,x)|a(x)\,d\mu(x)|f(y)|\,d\mu(y) \leqslant \frac{1}{\alpha}\|h\|_\infty\|\lambda_e\|\|f\|,
\end{aligned} \tag{3}$$

где

$$\lambda_e(y) := \int_e |K(y,x)|a(x)\,d\mu(x).$$

Из (3) вытекает, что для любого $f \in D_T$

$$|(Tf,h)| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|h\|_\infty\|\lambda_e\|\|f\|,$$

поэтому $h \in D_{T^*}$.

Положим в (3) $h = \chi_e$. Тогда из (3) следует для любого $f \in L_2$

$$\int\left|\int \chi_e(x)K(x,y)f(y)\,d\mu(y)\right|d\mu(x) \leqslant \frac{1}{\alpha}\|\lambda_e\|\|f\|.$$

Таким образом, ядро $\chi_e(x)K(x,y)$ порождает действующий из L_2 в $L_1(e,\mu)$ ограниченный интегральный оператор τ с нормой, не превосходящей $\frac{1}{\alpha}\|\lambda_e\|$.

Пусть $\{e_m\}$ — последовательность множеств из e, удовлетворяющих условию $0 < \mu e_m \to 0$ при $m \to \infty$. Положим в (3) $h = \chi_{e_m}$ и обозначим через P_F оператор умножения на $\chi_F : P_F f = \chi_F f$, $f \in L_2$. Из (3) подобно предыдущему следует, что интегральный оператор $P_{e_m}\tau$ с ядром $\chi_{e_m}(x)K(x,y)$ действует из L_2 в $L_1(e,\mu)$, ограничен и его норма не превосходит $\frac{1}{\alpha}\|\lambda_{e_m}\|$, где

$$\lambda_{e_m}(y) := \int\limits_{e_m} |K(y,x)|a(x)\,d\mu(x).$$

Пусть $X_0 = \{y \in X : \lambda_e(y) < \infty)\}$. Тогда для любого $y \in X_0$ и любого m $\lambda^2_{e_m}(y) \leqslant \lambda^2_e(y)$ и для любого $y \in X_0$ $\lambda^2_{e_m}(y) \to 0$ при $m \to \infty$. Следовательно, $\|\lambda_{e_m}\|^2 = \int \lambda^2_{e_m} d\mu \to 0$ при $m \to \infty$ и $\|P_{e_m}\tau\| \leqslant \frac{1}{\alpha}\|\lambda_{e_m}\| \to 0$ при $m \to \infty$. Отсюда из [5, теорема I.2.9] оператор $\tau : L_2 \to L_1(e,\mu)$ вполне непрерывен.

Пусть $D = \{f \in L_2 : f \in D_T, \ \|f\| \leqslant 1\}$. Множество $P_eTD = \tau D$ относительно компактно в $L_1(e,\mu)$. Возьмем равномерно ограниченную ортонормированную систему функций h_n с $\operatorname{supp} h_n \subseteq e$, $n = 1, 2, \ldots$ В качестве $\{h_n\}$ можно выбрать ортонормированную систему обобщенных функций Радемахера $r_{n,e}$ (их определение см., например, в [5, гл. I, § 1]). Имеем $\{h_n\} \subset D_{T^*}$ и в силу относительной компактности множества P_eTD в $L_1(e,\mu)$

$$\|T^*h_n\| = \sup_{\varphi\in D}|(T^*h_n,\varphi)| = \sup_{\varphi\in D}|(h_n,T\varphi)| = \sup_{\varphi\in D}|(\chi_e h_n,T\varphi)| = \sup_{\varphi\in D}|(h_n,\chi_e T\varphi)| \to 0$$

при $n \to \infty$, так как по лемме Римана — Лебега [3, с. 125] $|\int h_n\overline{f}\,d\mu| \to 0$ при $n \to \infty$ для любого $f \in L_1$, откуда

$$\sup_{f\in F}\left|\int h_n\overline{f}\,d\mu\right| \to 0 \ \text{ при } \ n \to \infty$$

для любого относительно компактного множества F в L_1 (и, в частности, для $F = P_eTD$) вследствие равномерной ограниченности $\{h_n\}$ и существования конечной ε-сети для F для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно, $0 \in \sigma_C(T^*)$. $\rhd$

Следствие. *Пусть $T : D_T \subset L_2 \to L_2$ — неограниченный плотно определенный замыкаемый интегральный оператор с вещественным неотрицательным симметричным ядром. Если в D_T существует вещественная неотрицательная функция, положительная на множестве положительной меры, не содержащем атомов меры μ, то $0 \in \sigma_C(T^*)$.*

Замечание 1. Включение $0 \in \sigma_C(T^*)$ позволяет существенно улучшить свойства ядра интегрального оператора T с помощью перехода к унитарно эквивалентному интегральному оператору: в [5, теорема IV. 3.7] доказано, что если L_2 — сепарабельное пространство, то из $0 \in \sigma_C(T^*)$ следует, что можно построить унитарный оператор $U : L_2 \to L_2$ такой, что UTU^{-1} — интегральный оператор с ядром $M(x,y)$, удовлетворяющим условию Карлемана

$$\int |M(x,y)|^2 d\mu(y) < \infty$$

для μ-почти всех $x \in X$ и условию Ахиезера: существует положительная функция $b \in L_0$ такая, что $|M(x,y)| \leqslant b(x)b(y)$ для $(\mu \times \mu)$-почти всех $(x,y) \in X \times X$.

Замечание 2. Пусть L_2 — сепарабельное пространство. Тогда интегральное уравнение

$$\alpha z(x) - \lambda Tz(x) = f(x), \quad f(x) \in L_2,$$

где T — интегральный оператор, удовлетворяющий условиям теоремы 1, может быть сведено явным линейным непрерывным обратимым преобразованием при $\alpha = 0$ к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода в L_2 с ядерным оператором, а при $\alpha \neq 0$ к эквивалентному интегральному уравнению 2-го рода в L_2 с квазивырожденным карлемановским ядром

$$N(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{g_n}(x)}{\sqrt{\mu g_n}} f_{n,\lambda}(y), \tag{4}$$

где $\{g_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из X с конечными положительными мерами, $\{f_{n,\lambda}\} \subset L_2$.

Это утверждение непосредственно следует из построений статьи [6], так как в них использовалось лишь включение $0 \in \sigma_C(T^*)$. Заметим еще, что в [7] предложены два приближённых метода решения интегральных уравнений 2-го рода в L_2 с ядрами (4).

Литература

1. *Коротков В. Б.* О некоторых свойствах частично интегральных операторов // Докл. АН СССР.—1974.—Т. 217, № 4.—С. 752–754.
2. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы.—Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1977.—68 с.
3. *Halmos P. R., Sunder V. S.* Bounded Integral Operators on L^2 Spaces.—Berlin–Heidelberg–New York: Springer Verlag, 1978.—134 p.
4. *Коротков В. Б.* Об одном классе линейных операторов в L_2 // Сиб. мат. журн.—2019.—Т. 60, № 1.—С. 118–122. DOI: 10.33048/smzh.2019.60.110.
5. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы.—Новосибирск: Наука, 1983.—224 с.
6. *Коротков В. Б.* О частично компактных по мере неограниченных линейных операторах в L_2 // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, вып. 1.—С. 36–41. DOI: 10.23671/VNC.2016.1.5945.
7. *Коротков В. Б.* Интегральные уравнения третьего рода с неограниченными операторами // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 58, № 2.—С. 333–343. DOI: 10.17377/smzh.2017.58.207.

Статья поступила 22 октября 2019 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
ведущий научный сотрудник лаборатории функционального анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4
E-mail: vitalborkor@gmail.com

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 2, P. 18–23

ON UNBOUNDED INTEGRAL OPERATORS WITH QUASISYMMETRIC KERNELS

Korotkov, V. B.[1]

[1] Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk 630090, Russia
E-mail: vitalborkor@gmail.com

Abstract. In 1935 von Neumann established that a limit spectrum of self-adjoint Carleman integral operator in L_2 contains 0. This result was generalized by the author on nonself-adjoint operators: the limit spectrum of the adjoint of Carleman integral operator contains 0. Say that a densely defined in L_2 linear operator A satisfies the generalized von Neumann condition if 0 belongs to the limit spectrum of adjoint operator A^*. Denote by B_0 the class of all linear operators in L_2 satisfying a generalized von Neumann condition. The author proved that each bounded integral operator, defined on L_2, belongs to B_0. Thus, the question arises: is an analogous assertion true for all unbounded densely defined in L_2 integral operators? In this note, we give a negative answer on this question and we establish a sufficient condition guaranteeing that a densely defined in L_2 unbounded integral operator with quasisymmetric lie in B_0.

Key words: closable operator, integral operator, kerner of integral operator, limit spectrum, linear integral equation of the first or second kind.

Mathematical Subject Classification (2010): 45P05, 47B34.

For citation: *Korotkov, V. B.* On Unbounded Integral Operators with Quasisymmetric Kernels, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 2, pp. 18–23 (in Russian). DOI: 10.46698/y3646-7660-8439-j.

References

1. *Korotkov, V. B.* On Some Properties of Partially Integral Operators, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1974, vol. 217, no. 4, pp. 752–754 (in Russian).
2. *Korotkov, V. B. Integral'nye operatory* [Integral Operators], Novosibirsk, Izd-vo Novosib. Gos. Un-ta, 1977, 68 p. (in Russian).
3. *Halmos, P. R. and Sunder, V. S. Bounded Integral Operators on L^2 Spaces*, Berlin, Heidelberg, New York, Springer Verlag, 1978, 134 p.
4. *Korotkov, V. B.* On One Class of Linear Operators in L_2, *Siberian Mathematical Journal*, 2019, vol. 60, no. 1, pp. 89–92. DOI: 10.1134/S0037446619010105.
5. *Korotkov, V. B. Integral'nye operatory* [Integral Operators], Novosibirsk, Nauka, 1983, 224 p. (in Russian).
6. *Korotkov, V. B.* On Partially Measure Compact Unbounded Linear Operators in L_2, *Vladikavkaz. Math. J.*, 2016, vol. 18, no. 1, pp. 36–41 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2016.1.5945.
7. *Korotkov, V. B.* Integral Equations of the Third Kind with Unbounded Operators, *Siberian Mathematical Journal*, 2017, vol. 58, no. 2, pp. 255–263. DOI: 10.1134/S0037446617020070.

Received October 22, 2019

Vitaly B. Korotkov
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Acad. Koptyug Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
*Leading Researcher of Laboratory
of Functional Analysis*
E-mail: `vitalborkor@gmail.com`