Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 2, С. 24–33

УДК 519.17
DOI 10.46698/n0833-6942-7469-t

АВТОМОРФИЗМЫ ДИСТАНЦИОННО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С МАССИВОМ ПЕРЕСЕЧЕНИЙ $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}^{\#}$

А. А. Махнев[1], **В. В. Биткина**[2], **А. К. Гутнова**[2]

[1] Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
Россия, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16;
[2] Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46

E-mail: makhnev@imm.uran.ru, bviktoriyav@mail.ru, gutnovaalina@gmail.com

Аннотация. Если дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный локально регулярный 1-код, совершенный относительно последней окрестности, то Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3$, $c = c_2$, $p = p^3_{33}$ (Юришич и Видали). В первом случае Γ имеет собственное значение $\theta_2 = -1$ и Γ_3 является псевдогеометрическим графом для $GQ(p+1, a)$. Если $c = a - 1 = q$, $p = q - 2$, то Γ имеет массив пересечений $\{q^2-1, q(q-2), q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$, $q > 6$. В работе изучены порядки и подграфы неподвижных точек автоморфизмов гипотетического дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$ $(q = 7)$. Пусть $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ — неразрешимая группа, действующая транзитивно на множестве вершин графа Γ, $K = O_7(G)$, $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/K$. Тогда $\bar{T}$ содержит единственную компоненту $\bar{L}$, точно действующую на K, $\bar{L} \cong L_2(7)$, A_5, A_6, $PSp_4(3)$ и для полного прообраза L группы $\bar{L}$ имеем $L_a = K_a \times O_{7'}(L_a)$ и $|K| = 7^3$ в случае $\bar{L} \cong L_2(7)$, $|K| = 7^4$ в противном случае.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, дистанционно регулярный граф, автоморфизм графа.

Mathematical Subject Classification (2010): 05C25.

Образец цитирования: *Махнев А. А., Биткина В. В., Гутнова А. К.* Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$ // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 2.—С. 24–33. DOI: 10.46698/n0833-6942-7469-t.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Пусть Γ — граф, $a, b \in \Gamma$, число вершин в $[a] \cap [b]$ обозначается через $\mu(a, b)$ (через $\lambda(a, b)$), если a, b находятся на расстоянии 2 (смежны) в Γ. Далее, индуцированный $[a] \cap [b]$ подграф называется *μ-подграфом* (*λ-подграфом*).

Система инцидентности с множеством точек P и множеством прямых $\mathscr{L}$ называется *α-частичной геометрией порядка* (s, t), если каждая прямая содержит ровно $s+1$ точку,

$^{\#}$Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований и ГФЕН Китая, проект № 20-51-53013.

каждая точка лежит ровно на $t+1$ прямой, любые две точки лежат не более чем на одной прямой, и для любого антифлага $(a, l) \in (P, \mathscr{L})$ найдется точно α прямых, проходящих через a и пересекающих l (обозначение: $pG_\alpha(s,t)$). В случае $\alpha = 1$ геометрия называется *обобщенным четырехугольником* и обозначается $GQ(s,t)$. Точечный граф геометрии определяется на множестве точек P и две точки смежны, если они лежат на прямой. Точечный граф геометрии $pG_\alpha(s,t)$ сильно регулярен с $v = (s+1)(1+st/\alpha)$, $k = s(t+1)$, $\lambda = s - 1 + t(\alpha - 1)$, $\mu = \alpha(t+1)$. Сильно регулярный граф с такими параметрами для некоторых натуральных чисел α, s, t называется *псевдогеометрическим графом* для $pG_\alpha(s,t)$.

Если вершины u, w находятся на расстоянии i в Γ, то через $b_i(u,w)$ (через $c_i(u,w)$) обозначим число вершин в пересечении $\Gamma_{i+1}(u)$ ($\Gamma_{i-1}(u)$) с $[w]$. Граф Γ диаметра d называется *дистанционно регулярным с массивом пересечений* $\{b_0, b_1, \ldots, b_{d-1}; c_1, \ldots, c_d\}$, если значения $b_i(u,w)$ и $c_i(u,w)$ не зависят от выбора вершин u, w на расстоянии i в Γ для любого $i = 0, \ldots, d$. Положим $a_i = k - b_i - c_i$.

Для подмножества X автоморфизмов графа Γ через $\mathrm{Fix}(X)$ обозначается множество всех вершин графа Γ, неподвижных относительно любого автоморфизма из X. Далее, через $p^l_{ij}(x,y)$ обозначим число вершин в подграфе $\Gamma_i(x) \cap \Gamma_j(y)$ для вершин x, y, находящихся на расстоянии l в графе Γ. В дистанционно регулярном графе числа $p^l_{ij}(x,y)$ не зависят от выбора вершин x, y, обозначаются p^l_{ij} и называются *числами пересечений графа* Γ [1].

Граф называется *вершинно симметричным*, если его группа автоморфизмов действует транзитивно на множестве вершин.

Пусть Γ — граф диаметра d и e — натуральное число. Подмножество C вершин графа Γ называется *e-кодом*, если минимальное расстояние между двумя вершинами из C не меньше $2e+1$. Для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $|C| \leqslant p^d_{dd} + 2$. В случае равенства код называется *максимальным*. Для максимального e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $c_d \geqslant a_d p^d_{dd}$. В случае равенства код называется *локально регулярным*. Наконец, для e-кода в дистанционно регулярном графе диаметра $d = 2e+1$ выполняется граница $|C| \leqslant k_d / \sum_{i=0}^{e} p^d_{id} + 1$. В случае равенства код называется *совершенным относительно последней окрестности* [2].

Если дистанционно регулярный граф Γ диаметра 3 содержит максимальный 1-код C, являющийся локально регулярным и совершенным относительно последней окрестности, то по предложению 5 из [2] Γ имеет массив пересечений $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ или $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, где $a = a_3$, $c = c_2$, $p = p^3_{33}$. В первом случае Γ имеет собственное значение $\theta_2 = -1$ и граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(p+1, a)$.

В случае $c = a - 1 = q$, $p = q - 2$ по [2] граф Γ имеет массив пересечений $\{q^2 - 1, q^2 - 2q, q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$, $q > 6$, спектр $(q^2-1)^1$, $(2q-1)^{q(q^2-1)/6}$, $-1^{(q+1)(q^2+q-2)/2}$, $-(q+1)^{q(q-1)(q-2)/3}$ и $\bar{\Gamma}_2$ является псевдогеометрическим графом для $pG_2(q-1, 2q+2)$. При $q = 7$ получим массив пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$.

В данной работе изучаются автоморфизмы гипотетического дистанционно регулярного графа Γ с массивом пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$. Этот граф имеет $v = 1 + 48 + 240 + 54 = 343 = 7^3$ вершин и спектр 48^1, 13^{56}, -1^{216}, -8^{70}. Ввиду границы Дельсарта максимальный порядок клики в Γ не больше 7, а максимальный порядок коклики в Γ не больше 49. Далее, граф Γ_3 является псевдогеометрическим для $GQ(6, 8)$.

Теорема 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент из G простого порядка p и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. Тогда*

$\pi(G) \subseteq \{2,3,5,7\}$ и выполняется одно из следующих утверждений:

(1) Ω — пустой граф, $p=7$, $\alpha_1(g)=49(l+1+3s)$, $\alpha_3(g)=49(2l+1)$, и $3l+2+3s \leqslant 7$;

(2) Ω является 1-кликой, $p=3$, $\alpha_1(g)=3(7l+16+21s)$, $\alpha_3(g)=42l+54$ и $9l+9s+15 \leqslant 49$;

(3) Ω является 7-кокликой, любые две вершины из Ω находятся на расстоянии 3, $p=2$, $\alpha_1(g)=14l-18+42s$ и $\alpha_3(g)=28l-36$;

(4) Ω содержит ребро и либо Ω содержит вершины, находящиеся на расстоянии 2 в Γ и $p \leqslant 11$, либо Ω — объединение двух изолированных 4-клик, $p=5$, $\alpha_1(g)=35s+20+105t$ и $\alpha_3(g)=5+70s$.

Следствие 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф, имеющий массив пересечений $\{48,35,9;1,7,40\}$, и неразрешимая группа $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа. Если $K=O_7(G)$, $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G}=G/K$, то $\bar{T}$ содержит единственную компоненту $\bar{L}$, точно действующую на K, $\bar{L} \cong L_2(7)$, A_5, A_6, $PSp_4(3)$ и для полного прообраза L группы $\bar{L}$ имеем $L_a = K_a \times O_{7'}(L_a)$ и $|K|=7^3$ в случае $\bar{L} \cong L_2(7)$, $|K|=7^4$ в противном случае.*

Для доказательства следствия полезна

Теорема 2. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(343,54,5,9)$ и спектром $54^1, 5^{216}, -9^{126}$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G, $\alpha_i(g)=pw_i$ для $i>0$ и $\Delta=\mathrm{Fix}(g)$. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Δ — пустой граф, $p=7$ и $\alpha_1(g)=49(2s+1)$;

(2) Δ является n-кликой, либо $p=2$, $n=7$ и $\alpha_1(g)=28l$, либо $p=3$, $n=1,4,7$ и $\alpha_1(g)=5n+7+42l$;

(3) Δ является m-кокликой, $m>1$, $p=3$, $m \in \{4,7,\ldots,49\}$ и $\alpha_1(g)=5m+7+42l$;

(4) Δ содержит ребро и является объединением изолированных клик, $p=3$ и порядок максимальной клики из Δ равен 1 или 4;

(5) $p \leqslant 7$.

2. Предварительные результаты

Сначала приведем один вспомогательный результат [3, теорема 2.3].

Лемма 1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами (v,k,λ,μ) и вторым собственным значением r. Если g — автоморфизм Γ и $\Delta=\mathrm{Fix}(g)$, то $|\Delta| \leqslant v \cdot \max\{\lambda,\mu\}/(k-r)$.*

По лемме 1 для графа с параметрами $(343,54,7,9)$ получим $|\Delta| \leqslant 343 \cdot 9/49 = 63$.

Лемма 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{48,35,9;1,7,40\}$. Тогда для чисел пересечений графа Γ верны равенства*

(1) $p^1_{11}=12$, $p^1_{12}=35$, $p^1_{22}=160$, $p^1_{23}=45$, $p^1_{33}=9$;

(2) $p^2_{11}=7$, $p^2_{12}=32$, $p^2_{13}=9$, $p^2_{22}=171$, $p^2_{23}=36$, $p^2_{33}=9$;

(3) $p^3_{12}=40$, $p^3_{13}=8$, $p^3_{22}=160$, $p^3_{23}=40$, $p^3_{33}=5$.

$\lhd$ Доказательство следует из [1, лемма 4.1.7]. $\rhd$

Доказательство теорем опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [4]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X,\mathscr{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \leqslant 1$

класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_l$ для чисел пересечений p_{ij}^l.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p_{ij}^l. Тогда собственные значения $p_1(0), \ldots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \ldots, m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются *первой* и *второй матрицей собственных значений схемы* и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных подпространств $W_0, \ldots, W_d$ матрицы смежности A_1 графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [4, § 3.7]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

Лемма 3. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$. Если $g \in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 56, χ_2 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 216, то $\alpha_i(g) = \alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$, $\chi_1(g) = (7\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/42 - 7/6$ и $\chi_2(g) = (9\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/14 - 9/2$. Если $|g| = p$ — простое число, то $\chi_1(g) - 56$ и $\chi_2(g) - 216$ делятся на p.*

◁ Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 56 & 91/6 & -7/6 & -28/3 \\ 216 & -9/2 & -9/2 & 20 \\ 70 & -35/3 & 14/3 & -35/3 \end{pmatrix}.$$

Значит, $\chi_1(g) = (8\alpha_0(g) + 13\alpha_1(g)/6 - \alpha_2(g)/6 - 4\alpha_3(g)/3)/49$. Подставляя $\alpha_2(g) = 343 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_1(g) = (7\alpha_0(g) + 2\alpha_1(g) - \alpha_3(g))/42 - 7/6$.

Аналогично $\chi_2(g) = (432\alpha_0(g) - 9\alpha_1(g) - 9\alpha_2(g) + 40\alpha_3(g))/686$. Подставляя $\alpha_1(g) + \alpha_2(g) = 343 - \alpha_0(g) - \alpha_3(g)$, получим $\chi_2(g) = (9\alpha_0(g) + \alpha_3(g))/14 - 9/2$.

Остальные утверждения леммы следуют из [5, лемма 2]. ▷

3. Автоморфизмы сильно регулярного графа с параметрами $(343, 54, 5, 9)$

В леммах 4–6 предполагается, что Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(343, 54, 5, 9)$ и спектром 54^1, 5^{216}, -9^{126}, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G, $\alpha_i(g) = pw_i$ для $i > 0$ и $\Delta = \mathrm{Fix}(g)$. Ввиду границы Хофмана максимальный порядок клики K из Γ не больше $1 - k/\theta_d = 7$, максимальный порядок коклики C из Γ не больше $-v\theta_d/(k - \theta_d) = 49$. В случае $|K| = 7$ любая вершина из $\Gamma - K$ смежна с единственной вершиной из K, а в случае $|C| = 49$ любая вершина из $\Gamma - C$ смежна точно с девятью вершинами из C.

Лемма 4. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если* Δ — *пустой граф, то* $p = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 49(2s + 1)$*;*

(2) *если* Δ *является* n*-кликой, то* $p = 2$, $n = 7$ *и* $\alpha_1(g) = 28l$*;*

(3) *если* Δ *является* m*-кокликой,* $m > 1$, *то* $p = 3$, $m \in \{4, 7, \dots, 49\}$ *и* $\alpha_1(g) = 5m + 7 + 42l$*;*

(4) *если* Δ *содержит ребро и является объединением изолированных клик, то* $p = 3$ *и порядок максимальной клики из* Δ *равен* 1 *или* 4.

$\lhd$ Имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 216 & 20 & -9/2 \\ 126 & -21 & 7/2 \end{pmatrix}.$$

Пусть φ_2 — проекция мономиального представления G на подпространство размерности 126. Тогда $\varphi_2(g) = (36\alpha_0(g) - 6\alpha_1(g) + \alpha_2(g))/98$. Подставляя $\alpha_2(g) = 343 - \alpha_0(g) - \alpha_1(g)$, получим $\varphi_2(g) = (5\alpha_0(g) - \alpha_1(g) + 49)/14$.

Пусть Δ — пустой граф. Так как $v = 7^3$, то $p = 7$. Далее, число $\varphi_2(g) = (-\alpha_1(g) + 49)/14$ делится на 7, поэтому $\alpha_1(g) = 49(2s + 1)$.

Пусть Δ является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 54 и 288, поэтому $p = 2$. В этом случае число $\varphi_2(g) = (54 - \alpha_1(g))/14$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 28l$. Далее, числа λ и μ нечетны, поэтому любая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна с вершиной из Δ, противоречие.

Если $n > 1$, то для двух вершин $a, b \in \Delta$ элемент g действует без неподвижных точек на $[a] \cap [b] - \Delta$, $[a] - b^\perp$ и на $\Gamma - a^\perp$. Отсюда p делит $7 - n$, 48 и 288, поэтому $p = 2$. Далее, числа λ и μ нечетны, поэтому любая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна с вершиной из Δ и $n = 7$. Далее, число $\varphi_2(g) = 6 - \alpha_1(g)/14$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 28l$.

Пусть Δ является m-кокликой, $m > 1$. Для двух вершин $a, b \in \Delta$ элемент g действует без неподвижных точек на $[a] \cap [b]$ и на $\Gamma - (a^\perp \cup b^\perp \cup \Delta)$. Отсюда p делит 9 и $244 - m$, поэтому $p = 3$, $m \in \{4, 7, \dots, 49\}$, $\varphi_2(g) = (5m - \alpha_1(g) + 49)/14$ и $\alpha_1(g) = 5m + 49 + 42l$. Если $m = 49$, то каждая вершина из $\Gamma - \Delta$ смежна с 9 вершинами из Δ и $\alpha_1(g) = 0$.

Пусть Δ содержит ребро и является объединением изолированных клик. Тогда p делит 9 и $7 - t$, где t — порядок максимальной клики из Δ, поэтому $t \in \{1, 4\}$. $\rhd$

Лемма 5. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) $[a]$ *не содержится в* Δ *для любой вершины* $a \in \Gamma$*;*

(2) Γ *не содержит собственных сильно регулярных подграфов с параметрами* $(v', k', 5, 9)$*;*

(3) $p \leqslant 7$.

$\lhd$ Пусть $[a] \subset \Delta$ для некоторой вершины a. Тогда для любой вершины $u \in \Gamma_2(a) - \Delta$ орбита $u^{\langle g \rangle}$ не содержит геодезических 2-путей и является кокликой.

Если $|\Delta| = 55$, то p делит 288, $\varphi_2(g) = (324 - \alpha_1(g))/14 = 324/14$, противоречие. Если же $b \in \Delta - a^\perp$, то $[b] \subset \Delta$, противоречие.

Допустим, что Γ содержит собственный сильно регулярный подграф Σ с параметрами $(v', k', 5, 9)$. Тогда $4(k' - 9) + 16 = n^2$, поэтому $n = 2l$, $k' = l^2 + 5$, $l \leqslant 6$, Σ имеет неглавные собственные значения $l - 2$, $-2 - l$ и кратность $l - 2$ равна $(l + 1)(l^2 + 5)(l^2 + l + 7)/18l$. Отсюда $l = 5$, $v' - k' - 1 = 80$ и Σ имеет параметры $(111, 30, 5, 9)$. Теперь число ребер между Σ и $\Gamma - \Sigma$ равно $111 \cdot 24$, противоречие с тем, что некоторая вершина из $\Gamma - \Sigma$ смежна по крайней мере с двумя вершинами из Σ.

Если $p \geqslant 11$, то Δ — сильно регулярный подграф с параметрами $(v', k', 5, 9)$, противоречие. Значит, $p \leqslant 7$. $\rhd$

Из лемм 4–5 следует теорема 2.

4. Автоморфизмы дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$

В леммах 6–7 предполагается, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$.

Лемма 6. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω — пустой граф, то $p = 7$, $\alpha_1(g) = 49(l + 1 + 3s)$ и $\alpha_3(g) = 49(2l + 1)$, $3l + 2 + 3s \leqslant 7$;*

(2) *если Ω является n-кликой, то $n = 1$, $p = 3$, $\alpha_1(g) = 3(7l+16+21s)$, $\alpha_3(g) = 42l+54$ и $9l + 9s + 15 \leqslant 49$;*

(3) *если Ω является m-кокликой, $m > 1$, то любые две вершины из Ω находятся на расстоянии 3 в Γ, $p = 2$, $m = 7$, $\alpha_1(g) = 14l - 18 + 42s$ и $\alpha_3(g) = 28l - 36$;*

(4) *если Ω содержит ребро, то либо Ω содержит вершины, находящиеся на расстоянии 2 в Γ, либо Ω — объединение двух изолированных 4-клик, $p = 5$, $\alpha_1(g) = 35s + 20 + 105t$ и $\alpha_3(g) = 5 + 70s$.*

$\lhd$ Пусть Ω — пустой граф. Так как $v = 343$, то $p = 7$, число $\chi_2(g) = (\alpha_3(g) - 63)/14$ сравнимо с 6 по модулю 7, поэтому $\alpha_3(g) = 63 + 14(7l + 6) = 49 + 98l$.

Далее, число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 49(l + 1))/21$ делится на 7, поэтому $\alpha_1(g) = 49(l + 1) + 147s = 49(l + 1 + 3s)$. Утверждение (1) доказано.

Пусть Ω является n-кликой. Если $n = 1$, то p делит 48 и 54, поэтому $p = 2, 3$. Имеем $p^1_{33} = 9$, $p^2_{33} = 9$ и $p^3_{33} = 5$, поэтому $p \neq 2$. Если $p = 3$, то число $\chi_2(g) = (9+\alpha_3(g)-63)/14$ делится на 3, $\alpha_3(g) = 42l + 54$.

Далее, число $\chi_1(g) = (7 + 2\alpha_1(g) - 6(7l + 9) - 49)/42 = (\alpha_1(g) - 21l - 48)/21$ сравнимо с 2 по модулю 3, поэтому $\alpha_1(g) = 21l + 48 + 63s$.

Если $n > 1$, то p делит $14 - n$, 54 и 35, противоречие. Утверждение (2) доказано.

Пусть Ω является m-кокликой, $m > 1$. Если любые две вершины из Ω находятся на расстоянии 3, то из равенств $p^3_{13} = 8$, $p^3_{33} = 5$ следует, что $p = 2$ и $m \in \{3, 5, 7\}$. Так как любая вершина из $\Gamma - \Omega$ находится на расстоянии 3 от вершины из Ω, то $m = 7$. Далее, число $\chi_2(g) = (63 + \alpha_3(g) - 27)/14$ четно, поэтому $\alpha_3(g) = 28l - 36$. Аналогично число $\chi_1(g) = (\alpha_1(g) - 14l + 18)/21$ четно и $\alpha_1(g) = 14l - 18 + 42s$.

Если Ω содержит две вершины на расстоянии 2, то p делит 48 и 7, противоречие. Утверждение (3) доказано.

Пусть Ω содержит ребро и не содержит вершин, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Тогда Ω является объединением l изолированных клик, и любые две вершины из разных клик находятся на расстоянии 3 в Γ. Так как $p^1_{12} = 35$ и $p^3_{12} = 40$, то $p = 5$ и порядки максимальных клик из Ω равны 4. Далее, $p^3_{33} = 5$, поэтому $l = 2$, число $\chi_2(g) = (72 + \alpha_3(g) - 63)/14$ сравнимо с 1 по модулю 5, поэтому $\alpha_3(g) = 5 + 70s$. Число $\chi_1(g) = (1 + \alpha_1(g) - 35s)/21$ сравнимо с 1 по модулю 5 и $\alpha_1(g) = 35s + 20 + 105t$. $\rhd$

Лемма 7. *Если Ω содержит вершины a, b на расстоянии 2 в Γ, то $p \leqslant 11$.*

$\lhd$ Пусть Ω содержит вершины a, b на расстоянии 2 в Γ и Ω_0 — содержащая a, b связная компонента графа Ω.

Если $p \geqslant 13$, то Ω_0 — вполне регулярный граф с параметрами $(v', k', 12, 7)$. Если Ω_0 — сильно регулярный граф, то $4(k' - 7) + 25 = n^2$. В этом случае $n = 2w + 1$ и $k' = w^2 + w + 1$. Неглавные собственные значения Ω_0 равны $w + 3$ и $2 - w$, причем кратность $w+3$ равна $(w-3)(w^2+w+1)(w^2+2w-1)/(7(2w+1))$. Далее, $(w-3, 2w+1)$ делит 7, $(w^2 + w + 1, 2w + 1) = (2w^2 + 2w + 2, 2w^2 + w) = (w + 2, 2w + 1)$ делит 3 и

$(w^2+2w-1, 2w+1) = (2w^2+4w-2, 2w^2+w) = (3w-2, 2w+1)$ делит 7. Отсюда $2w+1$ делит $49 \cdot 3$ и $2w+1 = 7$, противоречие.

Если Ω — несвязный граф, то $k' \leqslant 8$, противоречие. Итак, Ω — связный граф диаметра, большего 2. В случае $k' \geqslant 25$ получим $|\Omega| \geqslant 1+25+25\cdot 12/7+1$. Противоречие с тем, что по лемме 1 имеем $|\Omega| \leqslant 63$. В случае $k' \leqslant 17$ получим $b_1(\Omega) \leqslant 4$, $k' \geqslant 3b_1(\Omega)$ и диаметр Ω не больше 2, противоречие.

Если $k' = 18$, то p делит 30. Если $k' = 19$, то $p = 29$, $b_1(\Omega) = 6$, $k' \geqslant 3b_1(\Omega)$ и диаметр Ω не больше 2, противоречие.

Если $k' = 20$, то p делит 28. Если $k' = 21$, то p делит 27. Если $k' = 22$, то $p = 13$, $|\Omega_3(a)| \geqslant 15$ и $|\Omega| \geqslant 1+22+22\cdot 9/7+15$, противоречие.

Если $k' = 23$, то p делит 25. Если $k' = 24$, то p делит 24. В любом случае имеем противоречие. $\rhd$

Из лемм 6–7 следует теорема 1.

5. Вершинно симметричный дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$

До конца работы будем предполагать, что Γ — дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{39, 36, 4; 1, 1, 36\}$ и неразрешимая группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа. Для вершины $a \in \Gamma$ получим $|G : G_a| = 343$. Ввиду теорем 1–2 имеем $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7\}$. Пусть $K = O_7(G)$, $\bar{T}$ — цоколь группы $\bar{G} = G/K$.

Лемма 8. *Пусть U — элементарная абелева подгруппа из G порядка 49, g_i, $i \in \{1, 2, \ldots, 8\}$ порождают различные подгруппы порядка 7 из U, $\Omega^i = \mathrm{Fix}(g_i)$ и $\Omega^0 = \mathrm{Fix}(U)$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) если $a \in \Omega^0$, то $[a]$ и $\Gamma_3(a)$ содержатся в $\cup_i \Omega^i$, и на Γ нет U-орбит длины 49;

(2) Ω^0 — пустой граф.

$\lhd$ Число $\chi_2(g_i) = (9|\Omega^i| + \alpha_3(g_i) - 63)/14$ сравнимо с 6 по модулю 7, поэтому $\alpha_3(g_i) = 98l_i + 49 - 9|\Omega^i|$. Далее, число $\chi_1(g_i) = (8|\Omega^i| + \alpha_1(g_i) - 49l_i - 49)/21$ делится на 7, поэтому $\alpha_1(g_i) = 49l_i + 49 - 8|\Omega^i| + 147s_i$. Если $\alpha_0(g_i) = 35$, то $\alpha_3(g_i) = 98l_i - 294$ и $\alpha_1(g_i) = 49l_i - 280 + 147s_i$.

Пусть $a \in \Omega^0$. Из действия U на $[a]$, на $\Gamma_2(a)$ и на $\Gamma_3(a)$ следует, что Ω^0 содержит не менее 6 вершин из $[a]$, не менее 2 вершин из $\Gamma_2(a)$ и не менее 5 вершин из $\Gamma_3(a)$.

Для $b \in [a] \cap \Omega^0$ следует, что $[a] \cap [b]$ содержи 5 или 12 вершин из Ω^0. Заметим, что $[a]$ и $\Gamma_3(a)$ содержатся в $\cup_i \Omega^i$. В противном случае $\Gamma_3(a)$ содержит U-орбиту длины 49. Противоречие с действием U на $[d] \cap \Gamma_3(a)$ для $d \in \Gamma_3(a) \cap \Omega^0$. Если $\Gamma_2(a)$ содержит U-орбиту Δ длины 49, $u \in \Delta$, то u смежна с 9 вершинами из $\Gamma_3(a)$. Вершина $d \in \Gamma_3(a) \cap [u]$ попадает в Ω^i для некоторого i и d смежна с 7 вершинами из Δ. Противоречие с тем, что число ребер между Δ и $\Gamma_3(a)$ равно $9 \cdot 49$, но не больше $54 \cdot 7$. Утверждение (1) доказано.

Если $|\Omega^0| \geqslant 28$, то ввиду леммы 1 имеем $|\Gamma - \Omega^0| \leqslant 8 \cdot 35 = 280$, противоречие. Значит, $|\Omega^0| \leqslant 21$. Далее, $_3 = 40$, поэтому вершина из $\Gamma_3(a) \cap \Omega^0$ смежна с 5 вершинами из $\Gamma_2(a) \cap \Omega^0$. Поэтому Ω^0 содержит точно 6 вершин из $[a]$, 9 вершин из $\Gamma_2(a)$ и 5 вершин из $\Gamma_3(a)$ для любой вершины $a \in \Omega^0$. Теперь число ребер между $\Gamma_3(a) \cap \Omega^0$ и $\Gamma_2(a) \cap \Omega^0$ равно 25, а число ребер между $\Gamma_2(a) \cap \Omega^0$ и $\Gamma_3(a) \cap \Omega^0$ равно 18, противоречие. Утверждение (2) доказано. $\rhd$

Ввиду леммы 8 группа G_a имеет циклическую силовскую 7-подгруппу.

Лемма 9. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *если 7 делит порядок компоненты L группы $\bar{T}$, то L фиксирует вершину из Γ, $|K : K_a| = 7^3$, группа L изоморфна $L_2(7)$ и точно действует на K;*

(2) *если 7 не делит порядок компоненты M группы $\bar{T}$, то группа $M = M_a$ изоморфна A_5, A_6 или $PSp_4(3)$, M не централизует K и $|K : K_a|$ делит 7^3.*

$\lhd$ По таблице 1 из [6] группа L изоморфна $L_2(7)$, $L_2(8)$, $U_3(3)$, A_7, $L_2(49)$, $U_3(5)$, $L_3(4)$, A_8, A_9, A_{10}, J_2, $U_4(3)$,$PSp_5(7)$, $Sp_6(2)$ или $\Omega_8^+(2)$.

Так как $|L : L_a|$ делит 7^3, то группа L изоморфна $L_2(7)$ или A_7. Если $|L : L_a| = 7$, то $|K : K_a| = 7^2$, L_a централизует K и поточечно фиксирует a^K. Если K — неабелева группа, то коммутант K' содежится в K_a, противоречие. Теперь для подгруппы $U = [K, L_a]$ порядка 9 орбита a^U содержит 49 вершин, противоречие с леммой 8. Итак, $L = L_a$, $|K : K_a| = 7^3$ и L точно действует на K. Отсюда группа L изоморфна $L_2(7)$. Утверждение (1) доказано.

Если 7 не делит порядок компоненты M группы $\bar{T}$, то группа $M = M_a$ является $\{2, 3, 5\}$-группой. Поэтому M изоморфна A_5, A_6 или $PSp_4(3)$. Далее $|K : K_a|$ делит 7^3. Если M централизует K, то получим противоречие с тем, что M поточечно фиксирует a^K. $\rhd$

Лемма 10. *$\bar{T}$ содержит единственную компоненту $\bar{L}$, точно действующую на K, $\bar{L} \cong L_2(7)$, A_5, A_6, $PSp_4(3)$ и для полного прообраза L группы $\bar{L}$ имеем $L_a = K_a \times O_{7'}(L_a)$ и $|K| = 7^3$ в случае $\bar{L} \cong L_2(7)$, $|K| = 7^4$ в противном случае.*

$\lhd$ По лемме 9 любая компонента $\bar{L}$ группы $\bar{T}$ фиксирует вершину a. Если $|\bar{L}|$ не делится на 7, то по лемме 9 $\bar{L} \cong L_2(7)$, A_5, A_6, $PSp_4(3)$ и $\bar{L}$ не централизует K. Пусть L — полный прообраз компоненты $\bar{L}$. Тогда $L_a = K_a \times O_{7'}(L_a)$.

Если $|\bar{L}|$ делится на 7, то по лемме 9 имеем $|K : K_a| = 7^3$, поэтому K — элементарная абелева подгруппа порядка 7^3, $\bar{L}$ изоморфна $L_2(7)$ и $|\bar{G} : \bar{L}|$ делит 2.

Допустим, что $|L_a|$ не делится на 7. Так как $GL_3(7)$ не имеет секций, изоморфных A_5, A_6 или $PSp_4(3)$, то $|K : (K)|$ делится на 7^4. Далее, группа G_a имеет циклическую силовскую 7-подгруппу, поэтому (K) фиксирует a, $(K) = 1$ и $|K| = 7^4$. $\rhd$

Следствие 1 доказано.

Литература

1. *Brouwer A. E., Cohen A. M., Neumaier A.* Distance-Regular Graphs.—Berlin–Heidelberg–N. Y.: Springer-Verlag.—1989. DOI: 10.1007/978-3-642-74341-2.
2. *Jurisic A., Vidali J.* Extremal 1-codes in distance-regular graphs of diameter 3 // Des. Codes Cryptogr.—2012.—Vol. 65.—P. 29–47.
3. *Behbahani M., Lam C.* Strongly regular graphs with nontrivial automorphisms // Discrete Math.—2011.—Vol. 311.—P. 132–144. DOI: 10.1016/j.disc.2010.10.005
4. *Cameron P. J.* Permutation Groups.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.—(London Math. Soc. Student Texts, № 45). DOI: 10.1017/CBO9780511623677.
5. *Гаврилюк А. Л., Махнев А. А.* Об автоморфизмах дистанционно регулярных графов с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН.— 2010.—Т. 432, № 5.—С. 512–515.
6. *Zavarnitsine A. V.* Finite simple groups with narrow prime spectrum // Siberian Electr. Math. Reports.—2009.—Vol. 6.—P. 1–12.

Статья поступила 30 марта 2020 г.

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
зав. отделом алгебры и топологии
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: makhnev@imm.uran.ru

Биткина Виктория Васильевна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры прикладной математики
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
E-mail: bviktoriyav@mail.ru

Гутнова Алина Казбековна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
E-mail: gutnovaalina@gmail.com

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 2, P. 24–33

AUTOMORPHISMS OF A DISTANCE REGULAR GRAPH WITH INTERSECTION ARRAY $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$

Makhnev, A. A.[1], Bitkina, V. V.[2] and Gutnova, A. K.[2]

[1] N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja St., Ekaterinburg 620990, Russia
[2] North Ossetian State University,
44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia;
E-mail: makhnev@imm.uran.ru, bviktoriyav@mail.ru, gutnovaalina@gmail.com

Abstract. If a distance-regular graph Γ of diameter 3 contains a maximal locally regular 1-code perfect with respect to the last neighborhood, then Γ has an intersection array $\{a(p+1), cp, a+1; 1, c, ap\}$ or $\{a(p+1), (a+1)p, c; 1, c, ap\}$, where $a = a_3$, $c = c_2$, $p = p^3_{33}$ (Jurisic and Vidali). In the first case, Γ has an eigenvalue $\theta_2 = -1$ and Γ_3 is a pseudo-geometric graph for $GQ(p+1, a)$. If $c = a-1 = q$, $p = q-2$, then Γ has an intersection array $\{q^2-1, q(q-2), q+2; 1, q, (q+1)(q-2)\}$, $q > 6$. The orders and subgraphs of fixed points of automorphisms of a hypothetical distance-regular graph with intersection array $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$ $(q = 7)$ are studied in the paper. Let $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ be an insoluble group acting transitively on the set of vertices of the graph Γ, $K = O_7(G)$, $\bar{T}$ be the socle of the group $\bar{G} = G/K$. Then $\bar{T}$ contains the only component $\bar{L}$, $\bar{L}$ that acts exactly on K, $\bar{L} \cong L_2(7), A_5, A_6, PSp_4(3)$ and for the full the inverse image of L of the group $\bar{L}$ we have $L_a = K_a \times O_{7'}(L_a)$ and $|K| = 7^3$ in the case of $\bar{L} \cong L_2(7)$, $|K| = 7^4$ otherwise.

Keywords: strongly regular graph, distance-regular graph, automorphism of graph.

Mathematical Subject Classification (2000): 05C25.

For citation: *Makhnev, A. A., Bitkina, V. V. and Gutnova, A. K.* Automorphisms of a Distance Regular Graph with Intersection Array $\{48, 35, 9; 1, 7, 40\}$, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 2, pp. 24–33 (in Russian). DOI: 10.46698/n0833-6942-7469-t.

References

1. *Brouwer, A. E., Cohen, A. M. and Neumaier, A. Distance-Regular Graphs*, Berlin–Heidelberg–New York, Springer-Verlag, 1989. DOI: 10.1007/978-3-642-74341-2.
2. *Jurisic, A. and Vidali, J.* Extremal 1-Codes in Distance-Regular Graphs of Diameter 3, *Designs Codes and Cryptography*, 2012, vol. 65, pp. 29–47.
3. *Behbahani, M. and Lam, C.* Strongly Regular Graphs with Nontrivial Automorphisms, *Discrete Math.*, 2011, vol. 311, pp. 132–144. DOI: 10.1016/j.disc.2010.10.005.
4. *Cameron, P. J. Permutation Groups, London Math. Soc. Student Texts, no.* 45, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1999. DOI: 10.1017/CBO9780511623677.

5. *Gavrilyuk, A. L. and Makhnev, A. A.* On Automorphisms of Distance-Regular Graphs with Intersection Array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, *Doklady Mathematics*, 2010, vol. 81, no. 3, pp. 439–442. DOI: 10.1134/S1064562410030282.
6. *Zavarnitsine, A. V.* Finite Simple Groups with Narrow Prime Spectrum, *Siberian Electr. Math. Reports*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.

Received March 30, 2020

Alexander A. Makhnev
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja St., Ekaterinburg 620990, Russia,
Head of Departament of Algebra and Topology
E-mail: `makhnev@imm.uran.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2868-6713

Viktoriya V. Bitkina
North Ossetian State University,
44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Associate Professor of the Department of Applied Mathematics
E-mail: `bviktoriyav@mail.ru`

Alina K. Gutnova
North Ossetian State University,
44–46 Vatutin St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry
E-mail: `gutnovaalina@gmail.com`
https://orcid.org/0000-0001-7467-724X