Владикавказский математический журнал
2020, Том 22, Выпуск 4, С. 58–67

УДК 517.958:531.332
DOI 10.46698/s8185-4696-7282-p

РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ КАРЛЕМАНА ЧЕРЕЗ РАЗЛОЖЕНИЕ ПЕНЛЕВЕ

С. А. Духновский[1]

[1] Национальный исследовательский Московский
государственный строительный университет,
Россия, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26

E-mail: sergeidukhnvskijj@rambler.ru

Посвящается 75-летию Семена Самсоновича Кутателадзе

Аннотация. Рассматривается одномерная дискретная кинетическая система уравнений Карлемана. Система Карлемана является кинетическим уравнением Больцмана и для нее не сохраняется импульс и энергия. Данная система описывает одноатомный разреженный газ, состоящий из двух групп частиц. Данные группы частиц двигаются вдоль прямой, в противоположных направлениях с единичной скоростью. Взаимодействие частиц происходит внутри одной группы, т. е. сами с собой, меняя направление движения. В последнее время особое внимание уделяется построению точных решений неинтегрируемых уравнений в частных производных с использованием усеченного ряда Пенлеве. Применяя разложение Пенлеве к неинтегрируемым уравнениям в частных производных, получают условия в резонансе, которые должны выполняться. Решение системы ищется с помощью усеченного разложения Пенлеве. Данная система не удовлетворяет тесту Пенлеве. Это приводит к некоторым ограничениям на многообразие особенностей, одним из которых является двумерное уравнение Бейтмена. Зная неявное решение уравнения Бейтмена, можно найти новые частные решения самой системы Карлемана. Также отдельно решение строится с помощью анзаца масштабирования, которое позволяет свести задачу к нахождению решений соответствующего уравнения Риккати.

Ключевые слова: система уравнений в частных производных Карлемана, разложение Пенлеве, уравнение Бейтмена.

Mathematical Subject Classification (2010): 35A24, 35Q20, 35C99.

Образец цитирования: *Духновский С. А.* Решения системы Карлемана через разложение Пенлеве // Владикавк. мат. журн.—2020.—Т. 22, вып. 4.—С. 58–67. DOI: 10.46698/s8185-4696-7282-p.

1. Введение

Основными дискретными кинетическими системами, описывающими различные процессы в газе между группами частиц, являются модели типа Карлемана, Годунова — Султангазина, Бродуэлла [1, 2, 3–5]. Исследование асимптотической устойчивости состояний равновесия кинетических систем в весовом пространстве $L_{2,\gamma}$ для периодических начальных данных изучалось в работах [3–6]. Здесь решение искалось для малых возмущений состояния равновесия. Более того, доказана экспоненциальная скорость стабилизации к состоянию равновесия. Литература, посвященная нахождению решений в виде солитонов, приведена в [7–9], стационарных решений в [10, 11]. В статье [1] были найдены решения с помощью усеченных рядов Пенлеве для моделей Годунова — Султангазина и Бродуэлла. В данной работе будут построены новые решения аналогичным способом для одномерной системы Карлемана.

2. Решение системы Карлемана

Рассмотрим одномерную систему уравнений Карлемана [2, 12–14]:

$$\partial_t u + \partial_x u = \frac{1}{\varepsilon}(w^2 - u^2), \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \tag{1}$$

$$\partial_t w - \partial_x w = -\frac{1}{\varepsilon}(w^2 - u^2). \tag{2}$$

Проверяем на тест Пенлеве [15]. Ищем решение в виде

$$u(x,t) = \frac{1}{\varphi^p(x,t)} \sum_{j=0}^{\infty} u_j(x,t)\varphi^j(x,t),$$

$$w(x,t) = \frac{1}{\varphi^\beta(x,t)} \sum_{j=0}^{\infty} w_j(x,t)\varphi^j(x,t).$$

Для $j = 0$ имеем

$$u(x,t) = u_0(x,t)\varphi^{-p}(x,t), \tag{3}$$

$$w(x,t) = w_0(x,t)\varphi^{-\beta}(x,t). \tag{4}$$

Подставляем (3)–(4) в систему уравнений (1)–(2):

$$u_{0,t}\varphi^{-p} - p\varphi^{-p-1}\varphi_t u_0 + u_{0,x}\varphi^{-p} - p\varphi^{-p-1}\varphi_x u_0 = \frac{1}{\varepsilon}\big(w_0^2\varphi^{-2\beta} - u_0^2\varphi^{-2p}\big),$$

$$w_{0,t}\varphi^{-\beta} - \beta\varphi^{-\beta-1}\varphi_t u_0 - w_{0,x}\varphi^{-\beta} + \beta\varphi^{-\beta-1}\varphi_x w_0 = -\frac{1}{\varepsilon}\big(w_0^2\varphi^{-2\beta} - u_0^2\varphi^{-2p}\big).$$

Отсюда находим, что $p = 1$, $\beta = 1$. В этом случае имеем

$$-\varphi_t u_0 - \varphi_x u_0 = \frac{1}{\varepsilon}\big(w_0^2 - u_0^2\big), \quad -\varphi_t w_0 + \varphi_x w_0 = -\frac{1}{\varepsilon}\big(w_0^2 - u_0^2\big).$$

Отсюда

$$u_0(x,t) = -\varepsilon\frac{(\varphi_t - \varphi_x)^2(\varphi_t + \varphi_x)}{4\varphi_t\varphi_x}, \qquad w_0(x,t) = \varepsilon\frac{(\varphi_t - \varphi_x)(\varphi_t + \varphi_x)^2}{4\varphi_t\varphi_x}. \tag{5}$$

Далее находим резонансы. Подставляем соотношения

$$u(x,t) = u_0\varphi^{-1} + u_j\varphi^{j-1}, \quad w(x,t) = w_0\varphi^{-1} + w_j\varphi^{j-1}$$

в систему (1)–(2), в итоге имеем

$$\mathbf{Q}(j)\begin{pmatrix} u_j \\ w_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (j-1)(\varphi_t + \varphi_x) + \frac{2}{\varepsilon}u_0 & -\frac{2}{\varepsilon}w_0 \\ -\frac{2}{\varepsilon}u_0 & (j-1)(\varphi_t - \varphi_x) + \frac{2}{\varepsilon}w_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_j \\ w_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{j-1} \\ g_{j-1} \end{pmatrix},$$

где f_{j-1}, g_{j-1} зависят от функций $u_0, w_0, \ldots, u_{j-1}, w_{j-1}, \varphi$. Для произвольности функций u_j, w_j необходимо, чтобы определитель матрицы равнялся нулю. Тогда

$$\det\mathbf{Q}(j) = (j+1)(j-1)(\varphi_t + \varphi_x)(\varphi_t - \varphi_x) = 0.$$

Отсюда получаем два резонанса $j = -1, 1$. Далее исходя из того, что $j = 1$ — резонанс, то ищем решение в виде

$$u(x,t) = \frac{u_0(x,t)}{\varphi} + u_1(x,t), \tag{6}$$

$$w(x,t) = \frac{w_0(x,t)}{\varphi} + w_1(x,t). \tag{7}$$

Подставляем (6)–(7) в (1)–(2):

$$u_{0,t}\varphi^{-1} - \varphi^{-2}\varphi_t u_0 + u_{1,t} + u_{0,x}\varphi^{-1} - \varphi^{-2}\varphi_x u_0 + u_{1,x} = \frac{1}{\varepsilon} I(u_0, w_0, u_1, w_1),$$

имеет такой же вид

$$w_{0,t}\varphi^{-1} - \varphi^{-2}\varphi_t w_0 + w_{1,t} - w_{0,x}\varphi^{-1} + \varphi^{-2}\varphi_x w_0 - w_{1,x} = -\frac{1}{\varepsilon} I(u_0, w_0, u_1, w_1),$$

где

$$I(u_0, w_0, u_1, w_1) = \frac{w_0^2}{\varphi^2} - \frac{u_0^2}{\varphi^2} + 2\frac{w_0}{\varphi} w_1 - 2\frac{u_0}{\varphi} u_1 + w_1^2 - u_1^2.$$

Теперь группируем слагаемые при одинаковых степенях φ. Получаем для них уравнения

$$\varphi^{-1}\Big(u_{0,t} + u_{0,x} - \frac{2}{\varepsilon} w_0 w_1 + \frac{2}{\varepsilon} u_0 u_1\Big) + \varphi^0\Big(u_{1,t} + u_{1,x} - \frac{1}{\varepsilon}(w_1^2 - u_1^2)\Big)$$
$$+\varphi^{-2}\Big(-\varphi_t u_0 - \varphi_x u_0 - \frac{1}{\varepsilon}(w_0^2 - u_0^2)\Big) = 0,$$
$$\varphi^{-1}\Big(w_{0,t} - w_{0,x} + \frac{2}{\varepsilon} w_0 w_1 - \frac{2}{\varepsilon} u_0 u_1\Big) + \varphi^0\Big(w_{1,t} - w_{1,x} + \frac{1}{\varepsilon}(w_1^2 - u_1^2)\Big)$$
$$+\varphi^{-2}\Big(-\varphi_t w_0 + \varphi_x w_0 + \frac{1}{\varepsilon}(w_0^2 - u_0^2)\Big) = 0.$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях φ, получим следующую систему уравнений

$$\begin{aligned}
-\varphi_t u_0 - \varphi_x u_0 - \frac{1}{\varepsilon}(w_0^2 - u_0^2) = 0, &\quad -\varphi_t w_0 + \varphi_x w_0 + \frac{1}{\varepsilon}(w_0^2 - u_0^2) = 0,\\
u_{0,t} + u_{0,x} - \frac{2}{\varepsilon}(w_0 w_1 - u_0 u_1) = 0, &\quad w_{0,t} - w_{0,x} + \frac{2}{\varepsilon}(w_0 w_1 - u_0 u_1) = 0,\\
u_{1,t} + u_{1,x} - \frac{1}{\varepsilon}(w_1^2 - u_1^2) = 0, &\quad w_{1,t} - w_{1,x} + \frac{1}{\varepsilon}(w_1^2 - u_1^2) = 0.
\end{aligned}$$

Первые уравнения системы дает нам уже известные ведущие члены разложения, которые определяются по формуле (5).

Нас интересует выполнение уравнений при резонансе $j = 1$:

$$u_{0,t} + u_{0,x} = \frac{2}{\varepsilon}(w_0 w_1 - u_0 u_1), \quad w_{0,t} - w_{0,x} = -\frac{2}{\varepsilon}(w_0 w_1 - u_0 u_1).$$

Складываем уравнения

$$u_{0,t} + u_{0,x} = \frac{2}{\varepsilon}(w_0 w_1 - u_0 u_1), \tag{8}$$

$$u_{0,t} + u_{0,x} = -(w_{0,t} - w_{0,x}). \tag{9}$$

Очевидно, что уравнение (9) не удовлетворяется. Подставляя найденные главные члены разложения (5) в (9), получаем:

$$\varphi_{tt}\varphi_x^2 - 2\varphi_x\varphi_t\varphi_{xt} + \varphi_t^2\varphi_{xt} = 0. \tag{10}$$

Уравнение (10) представляет собой двумерное уравнение Бейтмена [16]. Тест Пенлеве будет выполнен только в том случае, если φ удовлетворяет уравнению (10). Это является ограничением на данную функцию. Поскольку $u_1 = w_1 = 0$ являются частным решением системы (1)–(2), получим уравнение для нахождения функции φ:

$$\begin{aligned} &-\varphi_x^3(\varphi_{tt} + \varphi_{xt}) + \varphi_t^2\varphi_x(-2\varphi_{tt} - \varphi_{xt} + \varphi_{xx}) + \varphi_t^3(\varphi_{xt} + \varphi_{xx}) \\ &\qquad + \varphi_t\varphi_x^2(-\varphi_{tt} + \varphi_{xt} + 2\varphi_{xx}) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Общее решение двумерного уравнения Бейтмена (10) записывается в виде

$$f(\varphi) = x + g(\varphi)t, \tag{12}$$

где f, g являются гладкими произвольными функциями.

Лемма. *Для двухскоростной модели (1)–(2) усеченное разложение Пенлеве*

$$u(x,t) = \frac{u_0(x,t)}{\varphi}, \quad w(x,t) = \frac{w_0(x,t)}{\varphi}, \tag{13}$$

где u_0, w_0 заданы формулами (5), дает условия на функцию φ (10) и (11) со следующими решениями

$$\varphi(x,t) = \frac{x + k_0 t - c_2}{c_1},$$

где $k_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$, $c_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $c_2 \in \mathbb{R}$;

$$\varphi(x,t) = F(x \pm t),$$

F — произвольная обратимая функция;

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{2(1 - (\frac{x-c_2}{c_1-t})^2)} + B\right),$$

где $\{A, c_1\} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\{c_2, B\} \in \mathbb{R}$.

$\lhd$ Диффренцируем неявное решение (12) и подставляем в (11):

$$\frac{-\varepsilon(g^2-1)\Big(\big(1+3g^2\big)\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial g}{\partial\varphi} - \big(t+3tg^2\big)\Big(\frac{\partial g}{\partial\varphi}\Big)^2 - g(g^2-1)\Big(\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} - t\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}\Big)\Big)}{4g^2\Big(\frac{\partial f}{\partial\varphi} - t\frac{\partial g}{\partial\varphi}\Big)^3} = 0.$$

Отсюда собираем слагаемые при одинаковых степенях при t:

$$\big(1+3g^2\big)\frac{\partial f}{\partial\varphi}\frac{\partial g}{\partial\varphi} - g\big(g^2-1\big)\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} = 0,$$

$$-\big(1+3g^2\big)\left(\frac{\partial g}{\partial\varphi}\right)^2 + g\big(g^2-1\big)\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2} = 0.$$

Случай 1. Рассмотрим при $g = \pm 1$. Тогда

$$\varphi_t = \pm\varphi_x.$$

Отсюда согласно (12) получаем $\varphi(x,t) = F(x \pm t)$, где F – обратимая функция. Решение системы Карлемана при $g = 1$ имеет вид

$$u(x,t) = 0, \quad w(x,t) = 0.$$

Система (1)–(2) при $g = -1$ также имеет нулевое решение.

Случай 2. Пусть $g = k_0$, $k_0 \notin \{0, \pm 1\}$. Тогда получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} = 0 \Rightarrow f(\varphi) = c_1\varphi + c_2.$$

$$c_1\varphi + c_2 = x + k_0 t \Rightarrow \varphi(x,t) = \frac{x + k_0 t - c_2}{c_1}.$$

Получаем решение системы (1)–(2) в следующем виде

$$u(x,t) = -\varepsilon\frac{(k_0-1)^2(k_0+1)}{4k_0(x+k_0t-c_2)}, \quad w(x,t) = \varepsilon\frac{(k_0-1)(k_0+1)^2}{4k_0(x+k_0t-c_2)}.$$

Случай 3. Пусть $g'(\varphi) \neq 0$. Тогда систему можно переписать в виде

$$\frac{f''}{f'} = \frac{g''}{g'}, \tag{14}$$

$$-\big(1+3g^2\big)\left(\frac{\partial g}{\partial \varphi}\right)^2 + g\big(g^2-1\big)\frac{\partial^2 g}{\partial \varphi^2} = 0. \tag{15}$$

Отсюда интегрируя (14), имеем

$$f(\varphi) = c_1 g(\varphi) + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ c_1 \neq 0.$$

Используя решение уравнения Бейтмена (12), можно выразить функцию g:

$$g(x,t) = \frac{x - c_2}{c_1 - t}. \tag{16}$$

Более того, из уравнения (15) получаем, что

$$\frac{dg}{d\varphi} = A\frac{\big(1-g^2\big)^2}{g}, \quad A \in \mathbb{R}\setminus\{0\}. \tag{17}$$

Решение (17) с учетом (16) записывается в виде

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{A}\left(\frac{1}{2\big(1-\big(\frac{x-c_2}{c_1-t}\big)^2\big)} + B\right), \tag{18}$$

где $B \in \mathbb{R}$ — постоянная интегрирования. Таким образом, решение системы Карлемана (1)–(2) с помощью (5), (13) и (18) имеет вид

$$u(x,t) = -\frac{(c_1+c_2-t-x)\varepsilon}{G(x,t)}, \quad w(x,t) = -\frac{(c_1-c_2-t+x)\varepsilon}{G(x,t)},$$

где

$$G(x,t) = 2\Big((1+2B)c_1^2 + t^2 - 2c_1(t+2Bt) - 2B(c_2^2 - t^2 - 2c_2x + x^2)\Big). \rhd$$

Предложение. *Решение двухскоростной модели может быть представлено в виде*

$$u(x,t) = u_0 H_1(\varphi), \quad w(x,t) = w_0 H_2(\varphi),$$

где

$$H_1(\varphi) = H_2(\varphi) + b, \quad b \in \mathbb{R},$$

а H_2 удовлетворяет уравнению Риккати

$$\frac{dH_2}{d\varphi} = -H_2^2 + \frac{b(g-1)^2}{2g}H_2 + \frac{b^2(g-1)^2}{4g}. \tag{19}$$

Здесь u_0, w_0 заданы в (5), *функция φ удовлетворяет уравнениям* (10) *и* (11).

$\lhd$ Ищем решение в следующем виде

$$u(x,t) = \frac{u_0}{\varphi}f_1(\varphi), \quad w(x,t) = \frac{w_0}{\varphi}f_2(\varphi). \tag{20}$$

После подстановки (20) в (1)–(2), получим условия для нахождения функций f_1, f_2:

$$\varphi_t\varphi_x(4\varphi f_1' - 4f_1 + 2f_1^2 + 2f_2^2) - \varphi_t^2(f_1^2 - f_2^2) - \varphi_x^2(f_1^2 - f_2^2) = 0,$$

$$\varphi_t\varphi_x(4\varphi f_2' - 4f_2 + 2f_1^2 + 2f_2^2) - \varphi_t^2(f_1^2 - f_2^2) - \varphi_x^2(f_1^2 - f_2^2) = 0.$$

Сделаем подстановку $f_i(\varphi) = H_i(\varphi)\varphi$, $i = 1, 2:$

$$\varphi_t\varphi_x(4H_1' + 2H_1^2 + 2H_2^2) - \varphi_t^2(H_1^2 - H_2^2) - \varphi_x^2(H_1^2 - H_2^2) = 0,$$

$$\varphi_t\varphi_x(4H_2' + 2H_1^2 + 2H_2^2) - \varphi_t^2(H_1^2 - H_2^2) - \varphi_x^2(H_1^2 - H_2^2) = 0.$$

Вычитаем одно из другого

$$4\varphi_t\varphi_x(H_1' - H_2') = 0, \tag{21}$$

$$\varphi_t\varphi_x(4H_2' + 2H_1^2 + 2H_2^2) - \varphi_t^2(H_1^2 - H_2^2) - \varphi_x^2(H_1^2 - H_2^2) = 0. \tag{22}$$

Из первого уравнения (21) следует, что

$$H_1 = H_2 + b, \quad b \in \mathbb{R}. \tag{23}$$

Подставляем (23) в (22). После некоторых преобразований получим уравнение Риккати

$$\frac{dH_2}{d\varphi} = -H_2^2 + \frac{-4gb + 2g^2b + 2b}{4g}H_2 + \frac{-2gb^2 + g^2b^2 + b^2}{4g}. \rhd$$

Здесь воспользовались, что

$$\frac{\varphi_t}{\varphi_x} = g(\varphi).$$

Рассмотрим примеры, когда уравнение Риккати дает различные решения для системы Карлемана.

Пример 1. Пусть $g = 3$, $b = 1$, $\varphi = x + 3t$ при $c_1 = 1$, $c_2 = 0$. В этом случае имеем уравнение Риккати
$$\frac{dH_2}{d\varphi} = -H_2^2 + \frac{2}{3}H_2 + \frac{1}{3},$$
которое имеет решение
$$H_2(\varphi) = \frac{3e^{\frac{4\varphi}{3}} - e^{4A}}{3\Big(e^{\frac{4\varphi}{3}} + e^{4A}\Big)},$$
где A — постоянная интегрирования. Окончательно получаем решение нашей системы (1)–(2):
$$u(x,t) = u_0(H_2(\varphi) + 1) = -\frac{4\varepsilon}{3}\left(\frac{3e^{\frac{4(x+3t)}{3}} - e^{4A}}{3\Big(e^{\frac{4(x+3t)}{3}} + e^{4A}\Big)} + 1\right),$$
$$w(x,t) = w_0 H_2(\varphi) = \frac{8\varepsilon}{9}\frac{\Big(3e^{\frac{4(x+3t)}{3}} - e^{4A}\Big)}{e^{\frac{4(x+3t)}{3}} + e^{4A}}.$$

Пример 2. При $g(\varphi) = 1$ уравнение (19) принимает вид
$$\frac{dH_2}{d\varphi} = -H_2^2.$$
Отсюда
$$H_2(\varphi) = \frac{1}{F(x+t) + C_1}, \quad C_1 \in \mathbb{R}.$$
Решение системы (1)–(2), также как и выше, имеет вид
$$u(x,t) = 0, \quad w(x,t) = 0.$$
При $g(\varphi) = -1$ получам нулевое решение.

Пример 3. Рассмотрим оставшийся случай при $g'(\varphi) \neq 0$. Сделаем подстановку $H_2(\varphi) = \widehat{H}_2(g)$, используя (18). Также воспользуемся тем, что
$$\frac{dH_2}{d\varphi} = \frac{d\widehat{H}_2}{dg}\frac{dg}{d\varphi}.$$
Тогда уравнение Риккати перепишется в виде
$$\frac{d\widehat{H}_2}{dg} = -\frac{g}{A(g-1)^2(g+1)^2}\widehat{H}_2^2 + \frac{b}{2A(g+1)^2}\widehat{H}_2 + \frac{b^2}{4A(g+1)^2}.$$
Положим $b = 0$. В этом случае решение имеет вид
$$\widehat{H}_2(g) = -\frac{2A(g^2-1)}{1 + 2A(g^2-1)C_2}, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$
Решение системы Карлемана принимает форму
$$u(x,t) = -\frac{\varepsilon}{4A(c_1 - c_2 - t + x)}\widehat{H}_2(g), \quad w(x,t) = -\frac{\varepsilon}{4A(c_1 + c_2 - t - x)}\widehat{H}_2(g).$$

Литература

1. *Линдблом О., Эйлер Н.* Решение уравнений Больцмана для дискретных скоростей при помощи уравнений Бейтмена и Риккати // Теорет. и мат. физика.—2002.—Т. 131, № 2.—С. 522–526. DOI: 10.4213/tmf322.
2. *Годунов С. К., Султангазин У. М.* О дискретных моделях кинетического уравнения Больцмана // Успехи мат. наук.—1971.—Т. 26, № 3 (159).—С. 3–51.
3. *Радкевич Е. В.* О поведении на больших временах решений задачи Коши для двумерного дискретного кинетического уравнения // Соврем. математика. Фундам. направления.—2013.—Т. 47.—С. 108–139.
4. *Духновский С. А.* О скорости стабилизации решений задачи Коши для уравнения Карлемана с периодическими начальными данными // Вест. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2017.—Т. 21, № 1.—С. 7–41. DOI: 10.14498/vsgtu1529.
5. *Духновский С. А.* Об асимптотической устойчивости состояний равновесия для систем уравнений Карлемана и Годунова — Султангазина // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.—2019.—Т. 74, № 6.—С. 55–57.
6. *Васильева О. А., Духновский С. А., Радкевич Е. В.* О природе локального равновесия уравнений Карлемана и Годунова — Султангазина // Соврем. математика. Фундам. направления.—2016.—Т. 60.—С. 23–81.
7. *Cabannes H., Dang Hong Tiem* Exact Solutions for some Discrete Models of the Boltzmann Equation // Complex Systems.—1987.—Vol. 1, № 4.—P. 575–584.
8. *Cornille H.* Exact (2 + 1)-dimensional solutions for two discrete velocity Boltzmann models with four independent densities // J. Phys. A: Math. Gen.—1987.—Vol. 20, № 16.—P. 1063–1067. DOI: 10.1088/0305-4470/20/16/005.
9. *Cornille H.* Exact (1+1)-dimensional solutions of discrete planar velocity Boltzmann models // J. Stat. Phys.—1987.—Vol. 48.—C. 789–811. DOI: 10.1007/BF01019697.
10. *Ильин О. В.* Изучение существования решений и устойчивости кинетической системы Карлемана // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.—2007.—Т. 47, № 12.—С. 2076–2087.
11. *Ильин О. В.* Стационарные решения кинетической модели Бродуэлла // Теорет. и мат. физика.—2012.—Т. 170, № 3.—С. 481–488. DOI: 10.4213/tmf6780.
12. *Карлеман Т.* Математические задачи кинетической теории газов.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1960.—120 с.
13. *Platkowski T., Illner R.* Discrete velocity models of the Boltzmann equation: a survey on the mathematical aspects of the theory // SIAM Review.—1988.—Vol. 30, № 2.—P. 213–255. DOI: 10.1137/1030045.
14. *Веденяпин В. В.* Кинетические уравнения Больцмана и Власова.—М.: Физматлит., 2001.—107 с.
15. *Weiss J., Tabor M., Carnevale G.* The Painlevé property for partial diferential equation // J. Math. Phys.—1983.—Vol. 24, № 3.—P. 522–526. DOI: 10.1063/1.525721.
16. *Euler N., Lindblom O., Euler M. and Persson L.-E.* The Higher dimensional Bateman equation and Painlevé analysis of nonintegrablee wave equations // Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics.—1997.—Vol. 1.—P. 185–192.

Статья поступила 2 апреля 2020 г.

Духновский Сергей Анатольевич
Национальный исследовательский Московский
государственный строительный университет,
преподаватель
РОССИЯ, 129337, Москва, Ярославское шоссе, 26
E-mail: `sergeidukhnvskijj@rambler.ru`
https://orcid.org/0000-0001-9643-7394

Vladikavkaz Mathematical Journal
2020, Volume 22, Issue 4, P. 58–67

SOLUTIONS OF THE CARLEMAN SYSTEM VIA THE PAINLEVÉ EXPANSION

Dukhnovskii, S. A.[1]
[1] Moscow State University of Civil Engineering,
26 Yaroslavskoe Shosse, Moscow 129337, Russia
E-mail: `sergeidukhnvskijj@rambler.ru`

Abstract. The one-dimensional discrete kinetic system of Carleman equations is considered. This system describes a monatomic rarefied gas consisting of two groups of particles. These groups of particles move along a straight line, in opposite directions at a unit speed. Particles interact within one group, i. e. themselves, changing direction. Recently, special attention has been paid to the construction of exact solutions of non-integrable partial differential equations using the truncated Painlevé series. Applying the Painlevé expansion to non-integrable partial differential equations, we obtain the conditions in resonance that must be satisfied. Solution of the system is sought using the truncated Painlevé expansion. This system does not satisfy the Painlevé test. It leads to the singularity manifold constraints, one of which is the Bateman equation. Knowing the implicit solution of the Bateman equation, one can find new particular solutions of the Carleman system. Also, the solution is constructed using the rescaling ansatz, which allows us to reduce the problem to finding solutions to the corresponding Riccati equation.

Key words: system of partial differential equations Carleman, Painlevé expansion, Batemans equation.

Mathematical Subject Classification (2010): 35A24, 35Q20, 35C99.

For citation: *Dukhnovskii, S. A.* Solutions of the Carleman System Via the Painlevé Expansion, *Vladikavkaz Math. J.*, 2020, vol. 22, no. 4, pp. 58–67 (in Russian). DOI: 10.46698/s8185-4696-7282-p.

References

1. *Lindblom, O. and Euler, N.* Solutions of Discrete-Velocity Boltzmann Equations via Bateman and Riccati Equations *Theoretical and Mathematical Physics*, 2002, vol. 131, no. 2, pp. 595–608. DOI: 10.1023/A:1015428229008.
2. *Godunov, S. K. and Sultangazin, U. M.* On Discrete Models of the Kinetic Boltzmann Equation, *Russian Mathematical Surveys*, 1971, vol. 26, no. 3, pp. 1–56. DOI: 10.1070/RM1971v026n03ABEH003822.
3. *Radkevich, E. V.* On the Large-Time Behavior of Solutions to the Cauchy Problem for a 2-dimensional Discrete Kinetic Equation, *Journal of Mathematical Sciences*, 2014, vol. 202, no. 5, pp. 735–768. DOI: 10.1007/s10958-014-2074-x.
4. *Dukhnovskii, S. A.* On a Speed of Solutions Stabilization of the Cauchy Problem for the Carleman Equation with Periodic Initial Data, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], 2017, vol. 21, no. 1, pp. 7–41. DOI: 10.14498/vsgtu1529 (in Russian).
5. *Dukhnovskii, S. A.* Asymptotic Stability of Equilibrium States for Carleman and Godunov–Sultangazin Systems of Equations, *Moscow University Mathematics Bulletin*, 2019, vol. 74, no. 7, pp. 246–248. DOI: 10.3103/S0027132219060068.
6. *Vasil'eva, O. A., Dukhnovskii, S. A. and Radkevich, E. A.* On the Nature of Local Equilibrium in the Carleman and Godunov-Sultangazin Equations, *Journal of Mathematical Sciences*, 2018, vol. 235, pp. 392–454. DOI: 10.1007/s10958-018-4080-x.
7. *Cabannes, H. and Dang Hong Tiem.* Exact Solutions for some Discrete Models of the Boltzmann Equation, *Complex Systems*, 1987, vol. 1, no. 4, pp. 575–584.
8. *Cornille, H.* Exact $(2 + 1)$-Dimensional Solutions for Two Discrete Velocity Boltzmann Models with Four Independent densities, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1987, vol. 20, no. 16, pp. 1063–1067. DOI: 10.1088/0305-4470/20/16/005.
9. *Cornille, H.* Exact $(1+1)$-Dimensional Solutions of Discrete Planar Velocity Boltzmann Models, *Journal of Statistical Physics*, 1987, vol. 48, pp. 789–811. DOI: 10.1007/BF01019697.

10. *Il'in, O. V.* Investigation of the Existence of Solutions and of the Stability of the Carleman Kinetic System, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2007, vol. 47, no. 12, pp. 1990–2001. DOI: 10.1134/S0965542507120093.
11. *Il'in, O. V.* Stationary Solutions of the Kinetic Broadwell Model, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2012, vol. 170, no. 3, pp. 406–412. DOI: 10.1007/s11232-012-0039-0.
12. *Carleman, T. Problèmes Mathématiques dans la Théorie Cinetique des Gaz*, Publications Scientifiques de l'Institut Mittag–Leffler, Almqvist & Wiksells, Uppsala, 1957, 112 p.
13. *Platkowski, T. and Illner, R.* Discrete Velocity Models of the Boltzmann Equation: a Survey on the Mathematical Aspects of the Theory, *SIAM Review*, 1988, vol. 30, no. 2, pp. 213–255. DOI: 10.1137/1030045.
14. *Vedenyapin, V., Sinitsyn, A. and Dulov, E.* Kinetic Boltzmann, Vlasov and Related Equations, Elsevier, Amsterdam, 2011, xiii+304 p. DOI: 10.1016/C2011-0-00134-5.
15. *Weiss, J., Tabor, M. and Carnevale, G.* The Painlevé Property for Partial Diferential Equation, *Journal of Mathematical Physics*, 1983, vol. 24, no. 3, pp. 522–526. DOI: 10.1063/1.525721.
16. *Euler, N., Lindblom, O., Euler, M. and Persson, L.-E.* The Higher Dimensional Bateman Equation and Painlevé Analysis of Nonintegrablee Wave Equations, *Symmetry in Nonlinear Mathematical Physics*, 1997, vol. 1, pp. 185–192.

Received April 2, 2020

Sergey A. Dukhnovskii
Moscow State University of Civil Engineering,
26 Yaroslavskoe Shosse, Moscow 129337, Russia,
Teacher
E-mail: sergeidukhnvskijj@rambler.ru
https://orcid.org/0000-0001-9643-7394