Владикавказский математический журнал
2021, Том 23, Выпуск 1, С. 43–59

УДК 517.952
DOI 10.46698/u4295-5273-0507-x

О МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

И. В. Рахмелевич[1]

[1] Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет имени Н. И. Лобачевского,
РОССИЯ, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23

E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Аннотация. Рассмотрен класс мультипликативных дифференциальных уравнений в частных производных. Левая часть уравнения представлена в виде произведения линейных дифференциальных выражений произвольного порядка, а правая часть является функцией независимых переменных и искомой функции. Для уравнения с одномерными линейными дифференциальными операторами и факторизуемой правой частью получены решения с аддитивным, мультипликативным и комбинированным разделением переменных. При этом исходное уравнение редуцировано либо к обыкновенному дифференциальному уравнению, либо к уравнению в частных производных меньшей размерности. Показано, что если операторы в левой части уравнения являются однородными, то уравнение имеет решения в виде обобщенных полиномов. Также для уравнения с однородными операторами найдены автомодельные решения и сформулированы достаточные условия их существования. Получены решения типа бегущей волны для случая операторов с постоянными коэффициентами и правой части, зависящей от линейной комбинации независимых переменных. Показано, что если правая часть уравнения зависит от нескольких линейных комбинаций на подмножествах независимых переменных, то имеются решения типа многомерных бегущих волн, зависящие от этих линейных комбинаций. Получено решение в виде разложения по собственным функциям ядер линейных операторов, входящих в состав левой части уравнения. Также исследованы некоторые уравнения с многомерными линейными операторами. В частности, получены решения с разделением переменных для случая факторизуемых многомерных операторов, а также решения типа многомерных бегущих волн и решения в виде функций от аргументов более сложной структуры. Рассмотрены случаи, когда правая часть уравнения содержит степенные и экспоненциальные нелинейности по искомой функции.

Ключевые слова: мультипликативное дифференциальное уравнение, линейный дифференциальный оператор, разделение переменных, решение типа бегущей волны, автомодельное решение.

Mathematical Subject Classification (2010): 35G20.

Образец цитирования: *Рахмелевич И. В.* О мультипликативных многомерных дифференциальных уравнениях в частных производных // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, вып. 1.—С. 43–59. DOI: 10.46698/u4295-5273-0507-x.

Введение

Одним из основных направлений современной математической физики является исследование многомерных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и нахождение их точных решений [1–12]. Важным классом таких уравнений являются мультипликативные уравнения, которые содержат произведения частных производных искомой функции или степенных функций от этих производных. Задачи, сводящиеся

© 2021 Рахмелевич И. В.

к уравнениям такого типа, встречаются, в частности, при описании движений нелинейной вязко-пластической среды, а также в теории оптимальной коррекции случайных возмущений [1]. Результаты исследования таких уравнений представлены как в известных справочниках [1, 3], так и в оригинальных работах [6, 7, 9]. Так, в работе [9] для мультипликативного уравнения произвольного порядка получены автомодельные решения, решения типа бегущей волны, псевдополиномиальные решения и некоторые обобщения указанных типов решений. При этом существенный интерес представляет исследование общих свойств решений для наиболее широких классов таких уравнений. С этой целью в данной работе рассматривается класс мультипликативных дифференциальных уравнений, содержащих произведение дифференциальных выражений, включающих линейные дифференциальные операторы, действующие по некоторым подмножествам независимых переменных. Рассмотрены случаи, когда уравнение содержит как одномерные, так и многомерные линейные дифференциальные операторы. При этом в качестве основного метода исследования используется метод разделения переменных (РП), который остается одним из наиболее эффективных и широко используемых методов решения линейных и нелинейных уравнений в частных производных.

1. Постановка задачи. Уравнение с одномерными линейными операторами

Рассмотрим следующий класс многомерных мультипликативных дифференциальных уравнений относительно неизвестной функции $u(x_1, x_2, \ldots, x_N)$:

$$\prod_{i=1}^{N} \left(\hat{L}_{x_i} u(x_1, x_2, \ldots, x_N) \right) = f(x_1, \ldots, x_N)\, g(u). \tag{1.1}$$

Здесь $\hat{L}_{x_i}$ — линейный одномерный дифференциальный оператор порядка M_i, действующий по переменной x_i, который имеет вид

$$\hat{L}_{x_i} = \sum_{m=1}^{M_i} a_{mi}(x_i) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^m, \tag{1.2}$$

где $a_{mi}(x_i)$ — некоторые заданные функции.

Представим множество значений $I = \{1, \ldots, N\}$ индекса n, нумерующего независимые переменные, в виде объединения K непересекающихся подмножеств I_k ($k = 1, \ldots, K$); $J_k \subseteq (I \setminus I_k)$. Тогда множество переменных $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ может быть разбито на K непересекающихся подмножеств $X_k = \{x_n\}_{n \in I_k}$. Число элементов в множествах I_k, X_k обозначим как N_k. Также далее всюду будем обозначать $\Lambda_n = \ker \hat{L}_{x_n}$. Для сокращения записи будут использоваться обозначения вида $u(X)$, $f(X)$ вместо $u(x_1, \ldots, x_N)$, $f(x_1, \ldots, x_N)$.

Теорема 1.1. *Пусть правая часть уравнения* (1.1) *удовлетворяет условиям*

$$f(X) = \prod_{i=1}^{N} f_i(x_i), \quad g(u) \equiv 1. \tag{1.3}$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет множество решений вида*

$$u(X) = \sum_{l=1}^{K} \prod_{n \in I_l} v_n(x_n), \tag{1.4}$$

причем функции $v_n(x_n)$ удовлетворяют уравнению

$$[v_n(x_n)]^{N_k-1}\hat{L}_{x_n}v_n = \lambda_n f_n(x_n), \tag{1.5}$$

где λ_n — постоянные, удовлетворяющие условию

$$\prod_{n=1}^{N}\lambda_n = 1. \tag{1.6}$$

$\lhd$ Пусть $i \in I_k$ — некоторое произвольно выбранное значение индекса. Из соотношений (1.2) и (1.4) получаем

$$\hat{L}_{x_i}u(X) = \frac{\hat{L}_{x_i}v_i(x_i)}{v_i(x_i)}\prod_{j\in I_k}v_j(x_j). \tag{1.7}$$

Подставим функцию (1.4) в уравнение (1.1). Тогда с учетом (1.3) и (1.7) это уравнение можно преобразовать к виду

$$\prod_{i=1}^{N}\left(\frac{[v_i(x_i)]^{N_k-1}}{f_i(x_i)}\,\hat{L}_{x_i}v_i(x_i)\right) = 1. \tag{1.8}$$

Левая часть уравнения (1.8) представлена в виде N сомножителей, зависящих от разных переменных. Так как правая часть (1.8) постоянна, то каждый из этих сомножителей должен быть равен некоторой постоянной λ_i. Тогда из (1.8) следует уравнение (1.5) и соотношение (1.6) для постоянных. $\rhd$

Следствие 1.1. *В частности, множеству решений* (1.4) *принадлежат следующие решения уравнения* (1.1)*:*

1) *при $K = N$ — решение с аддитивным разделением переменных:*

$$u(X) = \sum_{n=1}^{N}v_n(x_n), \quad \hat{L}_{x_n}v_n = \lambda_n f_n(x_n); \tag{1.9}$$

2) *при $K = 1$ — решение с мультипликативным разделением переменных:*

$$u(X) = \prod_{n=1}^{N}v_n(x_n), \quad [v_n(x_n)]^{N-1}\hat{L}_{x_n}v_n = \lambda_n f_n(x_n). \tag{1.10}$$

Следующая теорема определяет возможность понижения размерности уравнения (1.1) для некоторых частных случаев.

Теорема 1.2. 1. *Пусть функции в правой части уравнения* (1.1) *имеют вид*

$$f(X) = \prod_{k=1}^{K}f_k(X_k), \quad g(u) = \exp(\gamma u), \tag{1.11}$$

где X_k — введенные выше подмножества независимых переменных. Тогда уравнение (1.1) *имеет решение вида*

$$u(X) = \sum_{k=1}^{K}U_k(X_k), \tag{1.12}$$

причем функции $U_k(X_k)$ *удовлетворяют уравнениям*

$$\exp(-\gamma U_k(X_k)) \prod_{i\in I_k} \left(\hat{L}_{x_i} U_k(X_k)\right) = g_k f_k(X_k), \tag{1.13}$$

где g_k *— некоторые постоянные, связанные соотношением*

$$\prod_{k=1}^{K} g_k = 1. \tag{1.13a}$$

2. *Пусть функции в правой части уравнения* (1.1) *имеют вид*

$$f(X) = \prod_{k=1}^{K} f_k(X_k), \quad g(u) = u^{\gamma}. \tag{1.14}$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет решение вида*

$$u(X) = \prod_{k=1}^{K} U_k(X_k), \tag{1.15}$$

причем функции $U_k(X_k)$ *удовлетворяют уравнениям*

$$[U_k(X_k)]^{N-N_k-\gamma} \prod_{i\in I_k} \left(\hat{L}_{x_i} U_k(X_k)\right) = g_k f_k(X_k), \tag{1.16}$$

где g_k *— некоторые постоянные, связанные соотношением* (1.13a).

$\lhd$ 1. Подставляя функцию (1.12) в уравнение (1.1), с учетом (1.11) преобразуем его к виду

$$\prod_{k=1}^{K} \left\{ \left[f_k(X_k) \exp(\gamma U_k(X_k))\right]^{-1} \prod_{i\in I_k} \left(\hat{L}_{x_i} U_k(X_k)\right) \right\} = 1. \tag{1.17}$$

Левая часть уравнения (1.17) представлена в виде произведения K сомножителей, зависящих от разных подмножеств переменных. Так как правая часть (1.17) постоянна, то каждый из этих сомножителей должен быть равен некоторой постоянной g_k. Отсюда следует уравнение (1.13) и соотношение (1.13a) для постоянных.

2. Подставляя (1.15) в уравнение (1.1), после некоторых преобразований приводим уравнение к виду

$$\prod_{k=1}^{K} \left\{ \frac{[U_k(X_k)]^{N-N_k-\gamma}}{f_k(X_k)} \prod_{i\in I_k} \left(\hat{L}_{x_i} U_k(X_k)\right) \right\} = 1. \tag{1.18}$$

Проводя для уравнения (1.18) рассуждения, аналогичные п.1 доказательства, приходим к уравнению (1.16) и условию для постоянных (1.13a). $\rhd$

Теорема 1.3. *Пусть функции в правой части уравнения* (1.1) *определяются выражениями*

$$f(X) = \prod_{i=1}^{N} f_i(x_i), \quad g(u) = u^{\widetilde{N}}, \tag{1.19}$$

где $\widetilde{N} = N - N/K$; $K > 1$ *— один из делителей числа* N. *Предполагается также, что все подмножества* $I_l \subset I$ *содержат одинаковое число элементов* $N_l = N/K$. *Тогда уравнение* (1.1) *имеет множество решений вида*

$$u(X) = \prod_{l=1}^{K} \sum_{n\in I_l} v_n(x_n), \tag{1.20}$$

причем функции $v_n(x_n)$ *удовлетворяют уравнению*

$$\hat{L}_{x_n} v_n = \lambda_n f_n(x_n), \tag{1.21}$$

где λ_n *— постоянные, удовлетворяющие условию* (1.6).

◁ Решение уравнения (1.1) ищем в виде (1.20). Из (1.2) и (1.20) получаем

$$\hat{L}_{x_i} u\Big|_{i\in I_k} = \frac{u(X)}{U_k(X_k)}\, \hat{L}_{x_i} v_i(x_i), \tag{1.22}$$

где

$$U_k(X_k) = \sum_{i\in I_k} v_i(x_i). \tag{1.22a}$$

Тогда левую часть (1.1) можно преобразовать так:

$$\prod_{i=1}^{N} \big(\hat{L}_{x_i} u(X)\big) = [u(X)]^N \prod_{k=1}^{K} \left\{ [U_k(X_k)]^{-N_k} \prod_{i\in I_k} \big(\hat{L}_{x_i} v_i(x_i)\big) \right\}. \tag{1.23}$$

Так как по условию теоремы $N_k = N/K$ для всех k, то из (1.23) находим

$$\prod_{i=1}^{N} \big(\hat{L}_{x_i} u(X)\big) = [u(X)]^{\tilde{N}} \prod_{i=1}^{N} \big(\hat{L}_{x_i} v_i(x_i)\big). \tag{1.24}$$

С учетом (1.19) и (1.24) уравнение (1.1) приводится к виду

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{\hat{L}_{x_i} v_i(x_i)}{f_i(x_i)} = 1. \tag{1.25}$$

Разделяя переменные в (1.25), получаем уравнения (1.21) для функций $v_i(x_i)$ и условие (1.6) для постоянных разделения. ▷

Теорема 1.4. *Пусть в уравнении* (1.1) $\hat{L}_{x_i}$ *— однородные операторы вида*

$$\hat{L}_{x_i} = \sum_{m=1}^{M_i} a_{mi}^{(0)} x_i^{m+r_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^m, \tag{1.26}$$

а правая часть (1.1) *может быть представлена как*

$$f(X) = f_0 \prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i}. \tag{1.27}$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет решение в виде обобщенного полинома*

$$u(X) = \sum_{k=1}^{K} A_k \prod_{i \in I_l} x_i^{\sigma_i}, \tag{1.28}$$

где A_k — *произвольные постоянные, а показатели* σ_i *определяются выражением*

$$\sigma_i = \frac{\alpha_i - r_i}{N_k}. \tag{1.29}$$

$\lhd$ Решение уравнения (1.1) ищем в виде (1.28). Тогда для некоторого произвольно выбранного значения $i \in I_k$ можно записать

$$\hat{L}_{x_i} u(X) = A_k \frac{\hat{L}_{x_i}(x_i^{\sigma_i})}{x_i^{\sigma_i}} \prod_{j \in I_k} x_j^{\sigma_j}. \tag{1.30}$$

Подставляя (1.28) в левую часть уравнения (1.1) и учитывая (1.30), находим

$$\prod_{i=1}^{N} \left(\hat{L}_{x_i} u(X) \right) = \prod_{k=1}^{K} \left\{ \left(A_k \prod_{i \in I_k} x_i^{\sigma_i} \right)^{N_k} \prod_{i \in I_k} \frac{\hat{L}_{x_i}(x_i^{\sigma_i})}{x_i^{\sigma_i}} \right\}. \tag{1.31}$$

Далее, используя выражение (1.26) для оператора $\hat{L}_{x_i}$, получаем

$$\frac{\hat{L}_{x_i}(x_i^{\sigma_i})}{x_i^{\sigma_i}} = x_i^{r_i} Q_i(\sigma_i), \tag{1.32}$$

$$Q_i(\sigma_i) = \sum_{m=1}^{M_i} a_{mi}^{(0)} \prod_{j=0}^{m-1} (\sigma_i - j). \tag{1.32a}$$

На основании (1.31), (1.32), (1.32a) левую часть уравнения (1.1) преобразуем к виду

$$\prod_{i=1}^{N} \left(\hat{L}_{x_i} u(X) \right) = C(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \prod_{i=1}^{N} x_i^{\sigma_i N_k + r_i}, \tag{1.33}$$

где коэффициент $C(\sigma_1, \ldots, \sigma_N)$ определяется выражением

$$C(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) = \prod_{k=1}^{K} A_k^{N_k} \prod_{i=1}^{N} Q_i(\sigma_i). \tag{1.33a}$$

Используя (1.27) и (1.33), получаем

$$C(\sigma_1, \ldots, \sigma_N) \prod_{i=1}^{N} x_i^{\sigma_i N_k + r_i - \alpha_i} = f_0. \tag{1.34}$$

Уравнение (1.34) можно удовлетворить только в том случае, если σ_i определяются выражением (1.29). При этом из (1.34) и (1.33a) следует, что постоянные A_k связаны соотношением

$$\prod_{k=1}^{K} A_k^{N_k} \prod_{i=1}^{N} Q_i(\sigma_i) = f_0. \rhd \tag{1.35}$$

Примечание. Если параметры уравнения таковы, что хотя бы при одном значении $i \in I$ выполнено условие $Q_i(\sigma_i) = 0$, то из соотношения (1.35) следует, что решение вида (1.28) существует только при $f_0 = 0$, т. е. при нулевой правой части уравнения (1.1).

Теорема 1.5. *Пусть в уравнении* (1.1) $\hat{L}_{x_i}$ — *однородные операторы вида* (1.26), *а правая часть удовлетворяет условию*

$$f(X) = \psi(y) \prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i}, \quad y = \prod_{j=1}^{N} x_j, \tag{1.36}$$

где $\psi(y)$ — *некоторая заданная функция. Пусть также для всех* $i \in I$ *выполнено условие*

$$\alpha_i - r_i = \rho, \tag{1.37}$$

где ρ — *некоторая постоянная.*

Тогда уравнение (1.1) *имеет автомодельное решение* $u = U(y)$, *причем функция* $U(y)$ *является решением следующего ОДУ:*

$$\prod_{i=1}^{N} \left(\sum_{m=1}^{M_i} a_{mi}^{(0)} y^m U^{(m)}(y) \right) = y^{\rho} \psi(y) g(U). \tag{1.38}$$

$\lhd$ Подставляя функцию $u = U(y)$ в уравнение (1.1), с учетом (1.26) и (1.36) получаем

$$\prod_{i=1}^{N} \left(x_i^{r_i} \sum_{m=1}^{M_i} a_{mi}^{(0)} y^m U^{(m)}(y) \right) = \psi(y) g(U) \prod_{i=1}^{N} x_i^{\alpha_i}. \tag{1.39}$$

Из (1.39) следует, что это уравнение может быть сведено к ОДУ относительно $U(y)$ только в том случае, если для для всех $i \in I$ выполнено условие (1.37). Предполагая указанное условие выполненным, получаем уравнение (1.38) для функции $U(y)$. $\rhd$

Теорема 1.6. *Пусть в уравнении* (1.1) $\hat{L}_{x_i}$ — *операторы с постоянными коэффициентами, т. е.* $a_{mi}(x_i) = \mathrm{const}$ *при всех* $i \in I, 1 \leqslant m \leqslant M_i$. *Пусть также правая часть удовлетворяет условию*

$$f(X) = \varphi(z), \quad z = \sum_{i=1}^{N} c_i x_i. \tag{1.40}$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет решение типа бегущей волны* $u = U(z)$, *причем функция* $U(z)$ *удовлетворяет следующему ОДУ:*

$$\prod_{i=1}^{N} \left(\sum_{m=1}^{M_i} a_{mi} c_i^m U^{(m)}(z) \right) = \varphi(z) g(U). \tag{1.41}$$

$\lhd$ Подставим функцию $u = U(z)$ в уравнение (1.1). При этом в силу условия $a_{mi}(x_i) = \mathrm{const}$ каждый из сомножителей в левой части (1.1) зависит только от переменной $u = U(z)$. Тогда, в результате элементарных преобразований, приходим к уравнению (1.41). $\rhd$

2. Решения более общего вида с разделяющимися переменными

Пусть правая часть уравнения (1.1) имеет вид (1.3). Будем искать решение уравнения (1.1) более общего вида:

$$u(X) = \sum_{l=1}^{K} \left\{ \prod_{n \in I_l} v_n(x_n) \prod_{n \in J_l} w_n(x_n) \right\}, \tag{2.1}$$

где $v_n(x_n)$ — неизвестные функции, подлежащие определению в дальнейшем; $w_n(x_n) \in \Lambda_n$ для всех $n \in I$. Пусть $i \in I_k$ — некоторое значение индекса. Используя выражение (2.1), преобразуем сомножитель в левой части (1.1), содержащий оператор $\hat{L}_{x_i}$:

$$\hat{L}_{x_i}u = \frac{\hat{L}_{x_i}v_i}{v_i}\prod_{n\in I_k} v_n(x_n)\prod_{n\in J_k} w_n(x_n) + \frac{\hat{L}_{x_i}w_i}{w_i}\sum_{l\in\Xi(i)}\left\{\prod_{n\in I_l} v_n(x_n)\prod_{n\in J_l} w_n(x_n)\right\}. \tag{2.2}$$

Здесь $\Xi(i)$ — множество значений l, для которых $i \in J_l$.

Из условия $w_n(x_n) \in \Lambda_n$ следует, что второе слагаемое в правой части (2.2) тождественно равно 0, поэтому

$$\hat{L}_{x_i}u = \frac{\hat{L}_{x_i}v_i}{v_i}\prod_{n\in I_k} v_n(x_n)\prod_{n\in J_k} w_n(x_n). \tag{2.3}$$

Используя соотношение (2.3), левую часть уравнения (1.1) представим в виде

$$\prod_{i=1}^{N}(\hat{L}_{x_i}u) = \prod_{k=1}^{K}\prod_{i\in I_k}\left\{\frac{\hat{L}_{x_i}v_i}{v_i}\prod_{n\in I_k} v_n(x_n)\prod_{n\in J_k} w_n(x_n)\right\}. \tag{2.4}$$

Для второго и третьего сомножителей в правой части (2.4) можно записать следующее:

$$\prod_{i\in I_k}\left\{\prod_{n\in I_k} v_n(x_n)\right\} = \prod_{i\in I_k}[v_i(x_i)]^{N_k}, \quad \prod_{i\in I_k}\left\{\prod_{n\in I_k} w_n(x_n)\right\} = \prod_{i\in J_k}[w_i(x_i)]^{N_k}. \tag{2.5}$$

Учитывая (1.3), (2.4), (2.5), уравнение (1.1) можно представить в виде

$$\prod_{i=1}^{N}\left\{[v_i(x_i)]^{N_k-1}[w_i(x_i)]^{\theta_i}\hat{L}_{x_i}v_i\right\} = \prod_{i=1}^{N} f_i(x_i), \tag{2.6}$$

где $\theta_i = \sum_{k\in\Xi(i)} N_k$.

Разделяя переменные в уравнении (2.6), получаем, что функции $v_i(x_i)$ должны удовлетворять обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ)

$$[v_i(x_i)]^{N_k-1}\hat{L}_{x_i}v_i = \lambda_i f_i(x_i)[w_i(x_i)]^{-\theta_i}, \tag{2.7}$$

причем постоянные λ_i должны удовлетворять условию

$$\prod_{i=1}^{N}\lambda_i = 1. \tag{2.8}$$

Итак, в результате проведенных выше рассуждений доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть правая часть уравнения* (1.1) *имеет вид* (1.3). *Тогда уравнение* (1.1) *имеет множество решений вида* (2.1); *входящие в него функции* $v_n(x_n)$ *удовлетворяют уравнению* (2.7), *функции* $w_n(x_n)$ *таковы, что для всех* $n \in I$ $w_n(x_n) \in \Lambda_n$, *а постоянные* λ_n *удовлетворяют соотношению* (2.8).

В приведенных ниже теоремах 2.2, 2.3 предполагается, что множество $\Xi = \{1,\dots,K\}$ значений индекса k разбито на S непересекающихся подмножеств Ω_s $(s = 1,\dots,S)$, причем подмножество Ω_s состоит из K_s элементов. Теорема 2.2 содержит обобщение решения типа бегущей волны на случай, когда решение зависит от нескольких линейных комбинаций независимых переменных.

Теорема 2.2. *Пусть в уравнении* (1.1) $\hat{L}_{x_i}$ *— операторы с постоянными коэффициентами, т. е.* $a_{mi}(x_i) = \mathrm{const}$ *при всех* $i \in I$, $1 \leqslant m \leqslant M_i$. *Пусть также функции в правой части уравнения* (1.1) *определяются выражениями*

$$f(X) = \prod_{k=1}^{K} \varphi_k(z_k), \quad z_k = \sum_{i \in I_k} c_i x_i, \quad g(u) \equiv 1. \tag{2.9}$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет множество решений вида*

$$u(X) = \sum_{s=1}^{S} \prod_{k \in \Omega_s} U_k(z_k). \tag{2.10}$$

Функции $U_k(z_k)$, *входящие в* (2.10), *удовлетворяют уравнениям*

$$[U_k(z_k)]^{K_s-1} \widehat{T}_k U_k(z_k) = \lambda_k \varphi_k(z_k). \tag{2.11}$$

Здесь $\widehat{T}_k$ *— нелинейные дифференциальные операторы, определяемые выражением*

$$\widehat{T}_k U_k(z_k) = \prod_{i \in I_k} \sum_{m=1}^{M_i} a_{mi} c_i^m U_k^{(m)}(z_k). \tag{2.12}$$

Постоянные λ_k *должны удовлетворять условию*

$$\prod_{k=1}^{K} \lambda_k = 1. \tag{2.13}$$

$\triangleleft$ Выбрав (2.10) в качестве предполагаемого вида решения и подставив в уравнение (1.1), преобразуем левую часть (1.1) следующим образом:

$$\prod_{i=1}^{N} (\hat{L}_{x_i} u) = \prod_{s=1}^{S} \prod_{k \in \Omega_s} \prod_{i \in I_k} (\hat{L}_{x_i} u) = \prod_{k=1}^{K} \left\{ [U_k(z_k)]^{K_s-1} \prod_{i \in I_k} \left(\hat{L}_{x_i} U_k(z_k)\right) \right\}. \tag{2.14}$$

Используя (2.14) и (2.9), уравнение (1.1) можно представить в виде

$$\prod_{k=1}^{K} \left\{ \frac{[U_k(z_k)]^{K_s-1}}{\varphi_k(z_k)} \prod_{i \in I_k} \left(\hat{L}_{x_i} U_k(z_k)\right) \right\} = 1. \tag{2.15}$$

С учетом (1.2) и выражения (2.9) для z_k можно записать:

$$\hat{L}_{x_i} U_k(z_k) = \sum_{m=1}^{M_i} a_{mi} c_i^m U_k^{(m)}(z_k). \tag{2.16}$$

Разделяя переменные в (2.15) и учитывая (2.16), получаем уравнение (2.11) с операторами $\widehat{T}_k$, определяемыми выражением (2.12), и условие (2.13) для постоянных разделения. $\triangleright$

Теорема 2.3. *Пусть в уравнении* (1.1) $\widehat{L}_{x_i}$ *— однородные операторы вида* (1.26), *а правая часть удовлетворяет условиям*

$$f(X) = \prod_{k=1}^{K} \left\{ \psi_k(y_k) \prod_{i \in I_k} x_i^{\alpha_i} \right\}, \quad y_k = \prod_{i \in I_k} x_i, \quad g(u) \equiv 1, \tag{2.17}$$

где $\psi_k(y_k)$ *— заданные функции. Пусть также для всех* $i \in I_k$ *выполнены условия*

$$\alpha_i - r_i = \rho_k, \tag{2.18}$$

где ρ_k *— некоторые постоянные.*

Тогда уравнение (1.1) *имеет множество решений вида*

$$u(X) = \sum_{s=1}^{S} \prod_{k \in \Omega_s} V_k(y_k), \tag{2.19}$$

где функции $V_k(y_k)$, *входящие в* (2.19), *удовлетворяют уравнениям*

$$[V_k(y_k)]^{K_s - 1} \widehat{R}_k V_k(y_k) = \lambda_k y_k^{\rho_k} \psi_k(y_k). \tag{2.20}$$

Здесь $\widehat{R}_k$ *— нелинейные дифференциальные операторы, определяемые выражением*

$$\widehat{R}_k V_k(y_k) = \prod_{i \in I_k} \sum_{m=1}^{M_i} a_{mi} y_k^m V_k^{(m)}(y_k), \tag{2.21}$$

причем постоянные λ_k *должны удовлетворять условию* (2.13).

$\lhd$ Подставив выражение (2.19) в уравнение (1.1), преобразуем левую часть этого уравнения аналогично теореме 2.2:

$$\prod_{i=1}^{N} (\widehat{L}_{x_i} u) = \prod_{s=1}^{S} \prod_{k \in \Omega_s} \prod_{i \in I_k} (\widehat{L}_{x_i} u) = \prod_{k=1}^{K} \left\{ [V_k(y_k)]^{K_s - 1} \prod_{i \in I_k} \left(\widehat{L}_{x_i} V_k(y_k) \right) \right\}. \tag{2.22}$$

Далее, используя (2.22), (2.17) и (1.26), преобразуем уравнение (1.1) к виду

$$\prod_{k=1}^{K} \left\{ \frac{[V_k(y_k)]^{K_s - 1}}{\psi_k(y_k)} \prod_{i \in I_k} \left(x_i^{r_i - \alpha_i} \sum_{m=1}^{M_i} a_{mi} y_k^m V_k^{(m)}(y_k) \right) \right\} = 1. \tag{2.23}$$

В силу условий (2.18) при всех k справедливо соотношение

$$\prod_{i \in I_k} x_i^{r_i - \alpha_i} = y_k^{-\rho_k}. \tag{2.24}$$

С учетом (2.24), уравнение (2.23) можно переписать в виде

$$\prod_{k=1}^{K} \left\{ \frac{[V_k(y_k)]^{K_s - 1}}{\psi_k(y_k)} y_k^{-\rho_k} \prod_{i \in I_k} \left(\sum_{m=1}^{M_i} a_{mi} y_k^m V_k^{(m)}(y_k) \right) \right\} = 1. \tag{2.25}$$

Разделяя переменные в (2.25), получаем уравнение (2.20) с операторами $\widehat{R}_k$, определяемыми выражением (2.21), и условие (2.13) для постоянных разделения. $\rhd$

3. Уравнение с многомерными линейными операторами

В данном разделе рассмотрим уравнение с линейными дифференциальными операторами, действующими по некоторым подмножествам независимых переменных:

$$\prod_{k=1}^{K}\big(\widehat{L}_{X_k}u(X)\big)=f(X)g(u). \tag{3.1}$$

Здесь $\widehat{L}_{X_k}$ — линейный многомерный дифференциальный оператор порядка M_k, действующий по подмножеству переменных X_k, который имеет вид

$$\widehat{L}_{X_k}=\sum_{m=1}^{M_k}\sum_{\sigma(m)}a_{\sigma(m)}(X_k)\prod_{i\in I_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{m_i}, \tag{3.2}$$

где $a_{\sigma_m}(X_k)$ — некоторые заданные функции, $\sigma(m)=\{m_i\}_{i\in I_k}$ — мультииндекс, определяющий порядок дифференцирования по каждой из независимых переменных. Смысл обозначений X, X_k, I_k тот же, что и в п. 1. Предполагается также, что при всех m для каждого из слагаемых, входящих в (3.2), выполнено условие

$$\sum_{i\in I_k}m_i=m. \tag{3.2a}$$

Теорема 3.1. *Пусть в уравнении* (3.1) *при всех* k $\widehat{L}_{X_k}=\prod_{i\in I_k}\widehat{L}_{x_i}$, *а правая часть удовлетворяет условиям* (1.3). *Тогда уравнение* (3.1) *имеет множество решений следующего вида:*

$$u(X)=\sum_{s=1}^{S}\prod_{k\in\Omega_s}\prod_{i\in I_k}v_i(x_i). \tag{3.3}$$

Функции $v_i(x_i)$, *входящие в* (3.3), *удовлетворяют уравнениям*

$$[v_i(x_i)]^{K_s-1}\widehat{L}_{x_i}v_i=\lambda_i f_i(x_i), \tag{3.4}$$

где λ_i *— постоянные, удовлетворяющие условию* (2.8).

$\lhd$ Для произвольного k, используя функцию (3.3), определяющую предполагаемый вид решения, можно записать:

$$\widehat{L}_{X_k}u=\prod_{l\in\Omega_s}\prod_{j\in I_l}v_j(x_j)\prod_{i\in I_k}\frac{\widehat{L}_{x_i}v_i(x_i)}{v_i(x_i)}. \tag{3.5}$$

Учитывая (3.5), левую часть уравнения (3.1) представим в виде

$$\prod_{k=1}^{K}\big(\widehat{L}_{X_k}u\big)=\prod_{s=1}^{S}\left\{\left(\prod_{k\in\Omega_s}\prod_{l\in\Omega_s}\prod_{j\in I_l}v_j(x_j)\right)\left(\prod_{k\in\Omega_s}\prod_{i\in I_k}\frac{\widehat{L}_{x_i}v_i(x_i)}{v_i(x_i)}\right)\right\}. \tag{3.6}$$

Первый сомножитель в круглых скобках в правой части (3.6) можно преобразовать так:

$$\prod_{k\in\Omega_s}\prod_{l\in\Omega_s}\prod_{j\in I_l}v_j(x_j)=\prod_{k\in\Omega_s}\prod_{i\in I_k}[v_i(x_i)]^{K_s}. \tag{3.7}$$

Тогда, с учетом (3.6), (3.7) и (1.3), уравнение (3.1) приводим к виду

$$\prod_{i=1}^{N} \frac{[v_i(x_i)]^{K_s-1}\widehat{L}_{x_i} v_i(x_i)}{f_i(x_i)} = 1. \tag{3.8}$$

Разделяя переменные в (3.8), получаем уравнение (3.4) для функций $v_i(x_i)$. $\rhd$

Следствие 3.1. *Если все подмножества Ω_s содержат по одному элементу, т. е. $K_s = 1$ при всех $s = 1, \ldots, S$, то множество решений* (3.3) *имеет вид*

$$u(X) = \sum_{k=1}^{K} \prod_{i \in I_k} v_i(x_i), \tag{3.9}$$

а функции $v_i(x_i)$ удовлетворяют линейным ОДУ:

$$\widehat{L}_{x_i} v_i = \lambda_i f_i(x_i). \tag{3.10}$$

Данное утверждение непосредственно вытекает из теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть для всех $k \in \Xi$, $1 \leqslant m \leqslant M_k$ существуют такие постоянные c_i ($i \in I_k$), для которых выполняются соотношения*

$$\sum_{\sigma(m)} a_{\sigma(m)}(X_k) \prod_{i \in I_k} c_i^{m_i} = \xi_{mk}(z_k), \tag{3.11}$$

где $\xi_{mk}(z_k)$ — некоторые произвольные функции; z_k, $f(x_1, \ldots, x_N)$ определяются соотношениями (2.9). *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $g(u) = \exp(\gamma u)$, то уравнение* (3.1) *имеет решение*

$$u(X) = \sum_{k=1}^{K} U_k(z_k), \tag{3.12}$$

где $U_k(z_k)$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{m=1}^{M_k} \xi_{mk}(z_k) U_k^{(m)}(z_k) = \lambda_k \varphi_k(z_k) \exp(\gamma U_k(z_k)). \tag{3.13}$$

2. *Если $g(u) = u^{\gamma}$, то уравнение* (3.1) *имеет решение*

$$u(X) = \prod_{k=1}^{K} U_k(z_k), \tag{3.14}$$

где $U_k(z_k)$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{m=1}^{M_k} \xi_{mk}(z_k) U_k^{(m)}(z_k) = \lambda_k \varphi_k(z_k) [U_k(z_k)]^{\gamma+1-K}. \tag{3.15}$$

3. *Если $g(u) \equiv 1$, то уравнение* (3.1) *имеет множество решений вида*

$$u(X) = \sum_{s=1}^{S} \prod_{k \in \Omega_s} U_k(z_k), \tag{3.16}$$

где $U_k(z_k)$ удовлетворяют уравнениям

$$\sum_{m=1}^{M_k} \xi_{mk}(z_k) U_k^{(m)}(z_k) = \lambda_k \varphi_k(z_k) [U_k(z_k)]^{1-K_s}. \tag{3.17}$$

Постоянные λ_k во всех трех случаях должны удовлетворять условию (2.13).

$\triangleleft$ Предполагая выполненными условия (3.11), для всех $k \in \Xi$ можно записать:

$$\widehat{L}_{X_k} U_k(z_k) = \sum_{m=1}^{M_k} \xi_{mk}(z_k) U_k^{(m)}(z_k). \tag{3.18}$$

Рассмотрим частные случаи, перечисленные в условии теоремы.

1. При $g(u) = \exp(\gamma u)$, подставляя (3.12) в (3.1) и учитывая (2.9) и (3.18), приводим уравнение (3.1) к виду

$$\prod_{k=1}^{K} \left\{ \frac{\exp\left[-\gamma U_k(z_k)\right]}{\varphi_k(z_k)} \sum_{m=1}^{M_k} \xi_{mk}(z_k) U_k^{(m)}(z_k) \right\} = 1. \tag{3.19}$$

Разделяя переменные в (3.19), получаем уравнения (3.13) для функций $U_k(z_k)$ и условие (2.13) для постоянных λ_k.

2. При $g(u) = u^\gamma$ путем аналогичных рассуждений, получаем уравнение (3.15).

3. Подставляя выражение (3.16) в левую часть (3.1), получаем

$$\prod_{k=1}^{K} \widehat{L}_{X_k} u = \prod_{s=1}^{S} \prod_{k \in \Omega_s} \left\{ \frac{\widehat{L}_{X_k} U_k(z_k)}{U_k(z_k)} \prod_{l \in \Omega_s} U_l(z_l) \right\}. \tag{3.20}$$

Внутреннее произведение в правой части (3.20) преобразуется так:

$$\prod_{k \in \Omega_s} \left\{ \frac{\widehat{L}_{X_k} U_k(z_k)}{U_k(z_k)} \prod_{l \in \Omega_s} U_l(z_l) \right\} = \prod_{k \in \Omega_s} \left\{ [U_k(z_k)]^{K_s - 1} \widehat{L}_{X_k} U_k(z_k) \right\}. \tag{3.21}$$

Используя (3.18), (3.20), (3.21) и (2.9), уравнение (3.1) приводим к виду

$$\prod_{k=1}^{K} \left\{ \frac{[U_k(z_k)]^{K_s - 1}}{\varphi_k(z_k)} \sum_{m=1}^{M_k} \xi_{mk}(z_k) U_k^{(m)}(z_k) \right\} = 1. \tag{3.22}$$

Разделяя переменные в (3.22), получаем уравнение (3.17). $\triangleright$

Теорема 3.3. *Пусть в уравнении* (3.1) *при всех k $\widehat{L}_{X_k}$ — многомерный однородный по производным линейный оператор порядка M_k с постоянными коэффициентами, определяемый выражением*

$$\widehat{L}_{X_k} = \sum_{\sigma(M_k)} a_{\sigma(M_k)} \prod_{i \in I_k} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)^{m_i}, \tag{3.23}$$

где $\sigma(M_k)$ — мультииндекс, определенный выше, а для каждого слагаемого в правой части (3.23) *выполняется условие*

$$\sum_{i \in I_k} m_i = M_k. \tag{3.23a}$$

Пусть также для правой части (3.1) *удовлетворяется условие*

$$f(X)=\Phi(\zeta)\prod_{k=1}^{K}z_k^{\mu-M_k},\quad \zeta=\prod_{k=1}^{K}z_k, \tag{3.24}$$

где μ *— некоторая постоянная,* $\Phi(\zeta)$ *— заданная функция,* z_k *определяются выражением* (2.9). *Тогда уравнение* (3.1) *имеет решение вида* $u(X)=U(\zeta)$, *причем функция* $U(\zeta)$ *удовлетворяет уравнению*

$$\prod_{k=1}^{K}U^{(M_k)}(\zeta)=\frac{1}{C_0}\,\zeta^{\mu-M_\Sigma}\Phi(\zeta)g(U), \tag{3.25}$$

а величины M_Σ, C_0, *входящие в* (3.25), *определяются выражениями*

$$M_\Sigma=\sum_{k=1}^{K}M_k,\quad C_0=\prod_{k=1}^{K}\sum_{\sigma(M_k)}a_{\sigma(M_k)}\prod_{i\in I_k}c_i^{m_i}. \tag{3.25a}$$

$\lhd$ Для предполагаемого вида решения $u=U(\zeta)$ с учетом (3.23), (3.23а) можно записать следующее:

$$\widehat{L}_{X_k}u=C_kU^{(M_k)}(\zeta)\left(\frac{\zeta}{z_k}\right)^{M_k}, \tag{3.26}$$

где

$$C_k=\sum_{\sigma(M_k)}a_{\sigma(M_k)}\prod_{i\in I_k}c_i^{m_i}. \tag{3.26a}$$

Подставляя (3.26) в левую часть (3.1), приводим ее к виду

$$\prod_{k=1}^{K}(\widehat{L}_{X_k}u)=\prod_{k=1}^{K}\left\{C_kU^{(M_k)}(\zeta)z_k^{M_\Sigma-M_k}\right\}. \tag{3.27}$$

Далее, преобразуя уравнение (3.1) с учетом (3.24), (3.26), (3.26а) и (3.27), получаем уравнение (3.25) для $U(\zeta)$ и выражение (3.25а) для C_0. $\rhd$

Теорема 3.4. *Пусть в уравнении* (3.1) *при всех* k *операторы* $\widehat{L}_{X_k}$ *определяются выражением*

$$\widehat{L}_{X_k}=\sum_{i\in I_k}a_ix_i^{M_k}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^{M_k}, \tag{3.28}$$

а правая часть (3.1) *удовлетворяет условиям*

$$f(X)=\prod_{k=1}^{K}\psi_k(y_k),\quad y_k=\prod_{i\in I_k}x_i,\quad g(u)\equiv 1. \tag{3.29}$$

Тогда уравнение (3.1) *имеет множество решений вида*

$$u(X)=\sum_{s=1}^{S}\prod_{k\in\Omega_s}V_k(y_k), \tag{3.30}$$

причем функции $V_k(y_k)$ удовлетворяют уравнению

$$[V_k(y_k)]^{K_s-1}V_k^{(M_k)}(y_k) = \lambda_k y_k^{-M_k}\psi_k(y_k), \tag{3.31}$$

а постоянные λ_k связаны соотношением

$$\prod_{k=1}^{K}(A_k\lambda_k) = 1, \quad A_k = \sum_{i\in I_k} a_i. \tag{3.31a}$$

$\lhd$ Используя выражения (3.28) и (3.30), можно записать:

$$\widehat{L}_{X_k}u = A_k y_k^{M_k}\frac{V_k^{(M_k)}(y_k)}{V_k(y_k)}\prod_{l\in\Omega_s}V_l(y_l), \tag{3.32}$$

где A_k определяется второй формулой (3.31a). Подставляя (3.32) в (3.1) и учитывая (3.29), уравнение (3.1) представим в виде

$$\prod_{k=1}^{K}\frac{A_k y_k^{M_k}[V_k(y_k)]^{K_s-1}V_k^{(M_k)}(y_k)}{\psi_k(y_k)} = 1. \tag{3.33}$$

Разделяя переменные в (3.33), получаем уравнение для $V_k(y_k)$ в виде (3.31), и соотношение для постоянных λ_k в виде (3.31a). $\rhd$

Заключение

Таким образом, в данной работе исследованы мультипликативные дифференциальные уравнения в частных производных, содержащие произведение линейных дифференциальных выражений произвольного порядка. Рассмотрены уравнения, содержащие как одномерные, так и многомерные линейные дифференциальные операторы. Получены решения рассматриваемых уравнений для аддитивного, мультипликативного и комбинированного разделения переменных, а также решения в виде обобщенных полиномов, решения типа бегущих волн и автомодельные решения. При этом рассмотрены случаи, когда уравнение содержит операторы с постоянными коэффициентами, однородные операторы, а также факторизуемые многомерные операторы. Для всех найденных решений сформулированы условия, которым должна удовлетворять правая часть уравнения.

Литература

1. *Polyanin A. D., Zaytsev V. F.* Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations, 2nd ed.—Boca Raton–London: Chapman and Hall-CRC Press, 2012.
2. *Полянин А. Д., Журов А. И.* Методы разделения переменных и точные решения нелинейных уравнений математической физики.—М.: Изд-во ИПМех РАН, 2020.—384 с.
3. *Зайцев В. Ф., Полянин А. Д.* Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка.—М.: Физматлит, 2003.—416 с.
4. *Рахмелевич И. В.* О решениях многомерного дифференциального уравнения произвольного порядка со смешанной старшей частной производной и степенными нелинейностями // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, вып. 4.—С. 41–49. DOI: 10.23671/VNC.2016.4.5992.
5. *Рахмелевич И. В.* О двумерных гиперболических уравнениях со степенной нелинейностью по производным // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика.—2015.—№ 1 (33).—С. 12–19. DOI: 10.17223/19988621/33/2.

6. *Рахмелевич И. В.* О некоторых новых решениях многомерного уравнения в частных производных первого порядка со степенными нелинейностями // Вестн. Томск. гос. ун-та. Математика и механика.—2015.—№ 3 (35).—С. 18–25.
7. *Рахмелевич И. В.* О псевдополиномиальных решениях двумерного уравнения, содержащего произведение частных производных // Научные ведомости БелГУ. Сер. Математика. Физика.—2017.— № 13 (262), вып. 47.—С. 45–50.
8. *Рахмелевич И. В.* О многомерных уравнениях в частных производных со степенными нелинейностями по первым производным // Уфимск. мат. журн.—2017.—Т. 9, № 1.—С. 98–109.
9. *Рахмелевич И. В.* Многомерное неавтономное уравнение, содержащее произведение степеней частных производных // Вестн. СПбГУ. Математика. Механика. Астрономия.—2018.— Т. 5 (63), вып. 1.—С. 119–130. DOI: 10.21638/11701/spbu01.2018.113.
10. *Miller W., Rubel L. A.* Functional separation of variables for Laplace equations in two dimensions // J. of Phys. A: Math. Gen.—1993.—Vol. 26, № 8.—P. 1901–1913. DOI: 10.1088/0305-4470/26/8/017.
11. *Zhdanov R. Z.* Separation of variables in the nonlinear wave equation // J. of Phys. A: Math. Gen.— 1994.—Vol. 27, № 9.—P. L291–L297. DOI: 10.1088/0305-4470/27/9/009.
12. *Grundland A. M., Infeld E.* A family of non-linear Klein — Gordon equations and their solutions // J. Math. Phys.–1992.—Vol. 33, № 7.—P. 2498–2503.

Статья поступила 26 октября 2020 г.

Рахмелевич Игорь Владимирович
Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н. И. Лобачевского,
доцент кафедры математических и естественнонаучных дисциплин
РОССИЯ, 603950, Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2021, Volume 23, Issue 1, P. 43–59

ON MULTIPLICATIVE MULTI-DIMENSIONAL PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Rakhmelevich, I. V.[1]
[1] National Research Lobachevsky
State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru

Abstract. The class of multiplicative partial differential equations is considered. The left side of the equation is represented in the form of the product of linear differential expressions of arbitrary order. The right side of the equation is a function of independent variables and unknown function. The solutions with additive, multiplicative and combined separation of variables are received for the equation with one-dimensional linear operators and factorized right side. The initial equation is reduced either to ordinary differential equation or to partial differential equation of lower dimension. It is shown that if the operators in the left side are homogeneous then the equation has the solutions in the form of generalized polynomials. Also the self-similar solutions are founded and the sufficient conditions of their existence are formulated for the equation with homogeneous operators. The traveling wave type solutions are received for the case of operators with constant coefficients and the right side depending on the linear combination of independent variables. It is shown that if the right side of equation depends on several linear combinations on subsets of independent variables, then there are multi-dimensional traveling wave type solutions depending on these linear combinations. A solution is obtained in the form of an expansion with respect to eigenfunctions of the kernels of linear operators in the left side of equation. Also some equations with multi-dimensional linear operators are investigated. In particular, the solutions with separation of variables for the case of factorized multi-dimensional operators, the of multi-dimensional traveling wave type solutions, and the solutions in the form of functions on arguments of more complicated structure are obtained. The cases when the right side of equation contains power and exponential nonlinearities on unknown function are considered.

Key words: multiplicative differential equation, linear differential operator, separation of variables, solution of traveling wave type, self-similar solution.

Mathematical Subject Classification (2010): 35G20.

For citation: *Rakhmelevich, I. V.* On Multiplicative Multi-Dimensional Partial Differential Equations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 23, no. 1, pp. 43–59 (in Russian). DOI: 10.46698/u4295-5273-0507-x.

References

1. *Polyanin, A. D. and Zaytsev, V. F. Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd ed., Boca Raton–London, Chapman and Hall-CRC Press, 2012.
2. *Polyanin, A. D. and Zhurov, A. I. Metody razdeleniya peremennykh i tochnye resheniya nelineynykh uravneniy matematicheskoy fiziki* [Variables Separation Methods and Exact Solutions of Nonlinear Equations of Mathematical Physics], Moscow, IPMech Publ., 2020 (in Russian).
3. *Polyanin, A. D., Zaitsev, V. F., and Moussiaux, A. Handbook of First Order Partial Differential Equations*, London, Taylor Francis, 2002.
4. *Rakhmelevich, I. V.* On the Solutions of Multi-Dimensional Arbitrary Order Differential Equation with Mixed Senior Partial Derivative and Power-Law Non-Linearities, *Vladikavkaz Math. J.*, 2016, vol. 18, no. 4, pp. 41–49 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2016.4.5992.
5. *Rakhmelevich, I. V.* On Two-Dimensional Hyperbolic Equations with Power-Law Non-Linearity in the Derivatives, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2015, no. 1 (33), pp. 12–19 (in Russian). DOI: 10.17223/19988621/33/2.
6. *Rakhmelevich, I. V.* On Some New Solutions of Multi-Dimensional Partial Differential Equation of the First Order with Power-Law Non-Linearities, *Vestnik Tomskogo Gosudarstvennogo Universiteta. Matematika i Mekhanika*, 2015, no. 3 (35), pp. 18–25 (in Russian). DOI: 10.17223/19988621/35/3.
7. *Rakhmelevich, I. V.* On the Pseudo-Polynomial Solutions of Two-Dimensional Equation Containing the Production of Partial Derivatives, *Belgorod State University Scientific Bulletin. Applied Mathematics and Physics*, 2017, vol. 47, no. 13, pp. 45–50 (in Russian).
8. *Rakhmelevich, I. V.* On Multi-Dimensional Partial Differential Equations with Power Nonlinearities in First Derivatives, *Ufa Mathematical Journal*, 2017, vol. 9, no. 1, pp. 98–108. DOI: 10.13108/2017-9-1-98.
9. *Rakhmelevich, I. V.* A Multidimensional Nonautonomous Equation Containing a Product of Powers of Partial Derivatives, *Vestnik St. Petersburg University, Mathematics*, 2018, vol. 51, pp. 87–94. DOI: 10.3103/S1063454118010090.
10. *Miller, W. and Rubel, L. A.* Functional Separation of Variables for Laplace Equations in Two Dimensions, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1993, vol. 26, no. 8, pp. 1901–1913. DOI: 10.1088/0305-4470/26/8/017.
11. *Zhdanov, R. Z.* Separation of Variables in the Nonlinear Wave Equation, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1994, vol. 27, no. 9, pp. L291–L297. DOI: 10.1088/0305-4470/27/9/009.
12. *Grundland, A. M. and Infeld, E.* A Family of Non-Linear Klein–Gordon Equations and their Solutions, *Journal of Mathematical Physics*, 1992, vol. 33, no. 7, pp. 2498–2503.

Received October 26, 2020

Igor V. Rakhmelevich
National Research Lobachevsky
State University of Nizhny Novgorod,
23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia,
Assosiate Professor
E-mail: igor-kitpd@yandex.ru