Владикавказский математический журнал
2021, Том 23, Выпуск 3, С. 91–112

УДК 517.98
DOI 10.46698/l0779-9998-4272-b

ПОРЯДКОВЫЕ СВОЙСТВА ОДНОРОДНЫХ ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНЫХ ПОЛИНОМОВ[#]

З. А. Кусраева[1, 2]

[1]Региональный научно-образовательный центр
«Северо-Кавказский центр математических исследований» ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22;
[2]Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
E-mail: `zali13@mail.ru`

Посвящается профессору
Стефану Григорьевичу Самко
по случаю его 80-летнего юбилея

Аннотация. Статья представляет собой обзор результатов автора о строении ортогонально аддитивных однородных полиномов в векторных, банаховых и квазибанаховых решетках. В ходе изложения приводится сравнительный анализ с результатами других авторов, занимающихся данным направлением. Метод исследования, основанный на линеаризации посредством степени векторной решетки и канонического ортогонально аддитивного полинома, представлен в § 1. Далее, в § 2 приводится несколько непосредственных приложений этого метода к ортогонально аддитивным однородным полиномам: критерий интегральной представимости, существование одновременного продолжения с мажорирующей подрешетки, характеризация крайних продолжений. § 3 содержит полное описание и мультипликативное представление однородных полиномов, сохраняющих дизъюнктность. § 4 посвящен решению проблемы компактного и слабо компактного доминирования (мажорации) для однородных полиномов в банаховых решетках. В § 5 рассматриваются свойства выпуклости и вогнутости индивидуального ортогонально аддитивного однородного полинома между квазибанаховыми решетками, а в § 6 выясняются условия, при которых квазибанахова решетка однородных ортогонально аддитивных полиномов является (p,q)-выпуклой, (p,q)-вогнутой, геометрически выпуклой. В § 7 дается характеризация и аналитическое описание полиномов, допускающих представление в виде конечной суммы полиномов, сохраняющих дизъюнктность. Наконец, в § 8 сформулированы нерешенные задачи, представляющие существенный интерес для дальнейшего развития теории.

Ключевые слова: векторная решетка, квазибанахова решетка, степень векторной решетки, полиморфизм, линеаризация, факторизация, проблема доминирования, интегральное представление.

Mathematical Subject Classification (2010): 46A16; 46B42; 46G25; 47A40; 47H60.

Образец цитирования: *Кусраева З. А.* Порядковые свойства однородных ортогонально аддитивных полиномов // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 23, вып. 3.—С. 91–112. DOI: 10.46698/l0779-9998-4272-b.

Введение

Полиномы от бесконечного числа переменных или, точнее, полиномы, определенные в бесконечномерных пространствах, исследовались с конца XIX века, см. [1]. Однако, изучение порядковых свойств полиномов в векторных решетках начато сравнительно

[#]Исследование выполнено в рамках гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских ученых — кандидатов наук (грант № МК-4347.2021.1.1).

недавно. Важная роль отношения порядка при изучении структуры полиномов в банаховых решетках была впервые обнаружена в работе [2]. Прогресс, достигнутый к 2013 году, представлен в обзорной статье [3] и диссертациях [4, 5, 6]; дальнейшее развитие отражено в литературе, цитируемой в статьях [7]–[11]. К настоящему времени наибольшее продвижение достигнуто в изучении класса ортогонально аддитивных полиномов в векторных и квазибанаховых решетках.

Цель настоящей статьи — представить обзор результатов автора о строении ортогонально аддитивных однородных полиномов, полученных в цикле работ [7]–[17]. В § 1 представлены результаты о линеаризации ортогонально аддитивных однородных полиномов, а в § 2 дано несколько приложений к теореме о линеаризации. § 3 посвящен результатам о строении сохраняющих дизъюнктность полиномов в векторных решетках. В § 4 представлены решения проблем компактного и слабо компактного доминирования для ортогонально аддитивных однородных полиномов в банаховых решетках. В § 5 рассмотрены вопросы вогнутости и выпуклости однородного ортогонально аддитивного полинома в квазибанаховых решетках, а в § 6 — условия, при которых квазибанахова решетка регулярных полиномов, действующих между квазибанаховыми решетками, является (p,q)-выпуклой, (p,q)-вогнутой, геометрически выпуклой. В § 7 дается полное описание однородных полиномов (полилинейных операторов), представимых в виде суммы сохраняющих дизъюнктность однородных полиномов (полилинейных операторов). Наконец, в § 8 сформулированы нерешенные задачи.

Необходимые сведения об однородных полиномах, векторных и квазибанаховых решетках можно найти в [1], [18] и [19] соответственно. Все рассматриваемые ниже векторные решетки считаются вещественными и архимедовыми.

Приведем несколько базовых определений.

Определение 0.1. *Векторной решеткой* называют вещественное векторное пространство E, снабженное отношением (частичного) порядка $\leqslant$, причем для любой пары векторов $x,y \in E$ существуют *супремум* $x \vee y$ и *инфимум* $x \wedge y$, *положительный конус* $E_+ := \{x \in E : 0 \leqslant x\}$ замкнут относительно сложения векторов и умножения на положительные скаляры, а неравенсто $x \leqslant y$ равносильно включению $y - x \in E_+$. Модуль $|x| \in X$ вектора $x \in E$ определяется формулой $|x| = x \vee (-x)$; два вектора $x, y \in E$ называют *дизъюнктными* и пишут $x \perp y$, если $|x| \wedge |y| = 0$. Линейный оператор $T : E \to F$ между векторными решетками называют *решеточным гомоморфизмом*, если для любых $x, y \in E$ имеет место равенство $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$. Векторные решетки *изоморфны*, если между ними существует биективный решеточный гомоморфизм.

Определение 0.2. Пусть E и F — векторные решетки, Y — произвольное векторное пространство, s — целое число $\geqslant 1$. Отображение $P : E \to Y$ называется *однородным полиномом степени* s (или s-*однородным полиномом*), если существует симметричный s-линейный оператор $\check{P} : E^s \to Y$, именуемый *ассоциированным оператором* полинома P, такой, что $P(x) = \check{P}(x, \dots, x)$ для всех $x \in E$. Говорят, что полином $P : E \to Y$ *ортогонально аддитивен*, если для любых дизъюнктных $x, y \in E$ выполняется

$$P(x+y) = P(x) + P(y). \tag{1}$$

Однородный полином $P : E \to F$ называют *положительным*, если $\check{P}(x_1, \dots, x_s) \geqslant 0$ для всех $0 \leqslant x_1, \dots, x_s \in E$, и *регулярным*, если P представим в виде разности двух положительных однородных полиномов. Полином P называют *полиморфизмом*, если ассоциированный оператор $\check{P}$ является решеточным гомоморфизмом по каждой переменной, при условии, что остальным переменным приписаны положительные значения, см. ниже определения 3.1, 3.2.

Определение 0.3. *Квазинормированным пространством* называют пару $(X, \|\cdot\|)$, в которой X — пространство вещественных чисел и $\|\cdot\|$ — *квазинорма*, а именно, функция, действующая из X в $\mathbb{R}$ такая, что выполнены следующие условия:

(1) $\|x\| \geqslant 0$ для всех $x \in X$ и $\|x\| = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;

(2) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ для всех $x \in X$ и $\lambda \in \mathbb{R}$;

(3) существует константа $C \geqslant 1$, называемая *квазитреугольной константой*, такая, что $\|x+y\| \leqslant C(\|x\| + \|y\|)$ для всех $x, y \in X$.

Как видно, при $C = 1$ получаем определение нормированного пространства.

По теореме Аоки — Ролевича каждая квазинорма эквивалентна квазинорме $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$, обладающей тем дополнительным свойством, что $|\!|\!|x+y|\!|\!|^p \leqslant |\!|\!|x|\!|\!|^p + |\!|\!|y|\!|\!|^p$ $(x, y \in X)$ для некоторого $0 < p \leqslant 1$ (см. [19]). Квазинормированное пространство представляет собой локально ограниченное топологическое векторное пространство, если взять за базу окрестностей нуля семейство множеств $\{x \in X : \|x\| < \varepsilon\}$ $(0 < \varepsilon \in \mathbb{R})$. Более того, эта топология порождается метрикой $d(x, y) := |\!|\!|x-y|\!|\!|^p$ $(x, y \in X)$.

Определение 0.4. *Квазибанахово пространство* — это квазинормированное пространство, полное в своей метрической топологии. *Квазибанаховой решеткой* называют квазибанахово пространство $(X, \|\cdot\|)$, если X — векторная решетка и квазинорма $\|\cdot\|$ монотонна, в том смысле, что неравенство $|x| \leqslant |y|$ влечет $\|x\| \leqslant \|y\|$ для всех $x, y \in X$. (Если $C = 1$, то говорят о *банаховых пространствах и банаховых решетках.*)

В квазибанаховом пространстве X не выполняется теорема Хана — Банаха. В частности, может оказаться, что $X \neq \{0\}$, но при этом $X' = \{0\}$. Поэтому не применим метод двойственности. В то же время, многое из теории банаховых пространств переносится на квазибанахов контекст и на этом пути развиты новые эффективные методы исследования (см. обозорные статьи Н. Кэлтона [20] и Л. Малигранды [19]).

1. Линеаризация

В этом параграфе изложим результат о линеаризации ограниченных ортогонально аддитивных однородных полиномов, установленный в работе [12, теорема 4], а также некоторые его следствия.

Основная идея состоит в том, что для линеаризации ортогонально аддитивного однородного полинома область определения и область значений неравноправны: от первой требуется конструкция *степени векторной решетки*, для второй основную роль играет ни порядок, ни топология, а только лишь *борнология.*

Определение 1.1. *Борнологией* на множестве X называют возрастающий (относительно отношения $\subset$) фильтр $\mathscr{B}$, элементы которого образуют покрытие множества X. При этом множества из $\mathscr{B}$ называют *ограниченными.* Базой борнологии $\mathscr{B}$ на X называют любую базу фильтра $\mathscr{B}$. Отображение, действующее между множествами с борнологией, называется *ограниченным оператором*, если оно каждое ограниченное множество отображает в ограниченное множество.

Определение 1.2. *Борнологическим векторным пространством* называют пару $(X, \mathscr{B})$, состоящую из векторного пространства X и борнологии $\mathscr{B}$ на X, если отображения сложения $X \times X \to X$ и умножения на скаляры $\mathbb{R} \times X \to X$ ограничены. Борнологическое векторное пространство $(X, \mathscr{B})$ называют *выпуклым борнологическим пространством*, если $\mathscr{B}$ устойчива относительно образования выпуклых оболочек; *отделимым*, если $\{0\}$ — единственное ограниченное векторное подпространство X.

Векторная решетка рассматривается с борнологией порядково ограниченных подмножеств, а топологическое векторное пространство (и, в частности, квазинормированное пространство) — с борнологией топологически (метрически) ограниченных подмножеств. Рассмотрим теперь понятие s-степени векторной решетки, где $s \in \mathbb{N}$.

Определение 1.3. *s-Степенью векторной решетки E* именуют пару $(E^{s\odot}, \jmath_s)$, если

(a) $E^{s\odot}$ — векторная решетка, а $\jmath_s : E \to E^{s\odot}$ — s-однородный полиморфизм;

(b) для любой векторной решетки F и любого s-однородного полиморфизма $P : E \to F$ имеется единственный решеточный гомоморфизм $\hat{P} : E^{s\odot} \to F$ такой, что $P = \hat{P} \circ \jmath_s$.

Решеточный гомоморфизм $\hat{P}$ называют *линеаризацией* P, а $\jmath_s$ — *каноническим ортогонально аддитивным полиномом;* используются также обозначения $\jmath_{s,E} := \jmath_s$ и $\jmath_s(x) = x^{s\odot}$.

Для каждой векторной решетки E и любого натурального числа $s \geqslant 1$ существует единственная (с точностью до решеточного изоморфизма) s-степень $E^{s\odot}$ (см. [7, 21]). При этом для данной векторной решетки E при некоторых условиях универсальное свойство s-степени $E^{s\odot}$ из определения 1.3 (b) (существование линеаризации) имеет место не только для полиморфизмов, но и для любых ограниченных ортогонально аддитивных s-однородных полиномов со значениями в борнологических пространствах (с одним и тем же каноническим полиномом $j_{s,E}$).

Обозначим символом $\mathscr{P}_o^b({}^sE, Y)$ пространство всех ограниченных s-однородных ортогонально аддитивных полиномов из E в Y и положим $\mathscr{L}^b(E, Y) := \mathscr{P}_o^b({}^1E, Y)$. Следующий результат утверждает, что ортогонально аддитивный ограниченный однородный полином из равномерно полной векторной решетки в выпуклое отделимое борнологическое пространство допускает линеаризацию с помощью линейного ограниченного оператора и канонического полинома.

Теорема 1.1 (Теорема о линеаризации)**.** *Пусть E — равномерно полная векторная решетка, а F — выпуклое отделимое борнологическое пространство. Тогда для любого ортогонально аддитивного ограниченного s-однородного полинома $P : E \to F$ существует единственный ограниченный линейный оператор $S : E^{s\odot} \to F$ такой, что*

$$P(x) = S(x^{s\odot}) \quad (x \in E). \tag{2}$$

Более того, соответствие $P \longleftrightarrow S$ есть изоморфизм: $\mathscr{P}_o{}^b({}^sE, F) \simeq \mathscr{L}^b(E^{s\odot}, F)$.

◁ Доказательство см. [12, теорема 4]. ▷

Замечание 1.1. Бен Амор [22, теорема 26] показал, что в теореме 1.1 можно опустить требование выпуклости борнологического пространства. Тем самым, этот факт имеет место и для квазинормированных пространств.

Пусть $\mathscr{P}_o({}^sE, Y)$ и $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ обозначают пространства соответственно непрерывных и регулярных ортогонально аддитивных s-однородных полиномов из E в Y и из E в F.

Следствие 1.1. *Пусть E — квазибанахова решетка, Y — квазинормированное пространство и $P : E \to Y$ — ограниченный по квазинорме ортогонально аддитивный s-однородный полином. Тогда существует единственный огрниченный по квазинорме линейный оператор $T : E^{s\odot} \to Y$ такой, что справедливо представление* (2)*. Более того, соответствие $T \mapsto T \circ \jmath_s$ является изометрическим изоморфизмом квазинормированных пространств $\mathscr{L}(E^{s\odot}, Y)$ и $\mathscr{P}_o({}^sE, Y)$.*

Следствие 1.2. *Пусть E — квазибанахова решетка, F — квазинормированная решетка, а $P : E \to F$ — регулярный ортогонально аддитивный s-однородный полином.*

Тогда существует единственный регулярный линейный оператор $T : E^{s\odot} \to F$ такой, что имеет место представление (2). *Более того, соответствие $T \mapsto T \circ \jmath_s$ является изометрическим изоморфизмом упорядоченных квазинормированных пространств $\mathscr{L}^r(E^{s\odot}, F)$ и $\mathscr{P}^r_o({}^sE, F)$. Если F — порядково полна, то $\mathscr{L}^r(E^{s\odot}, F)$ и $\mathscr{P}^r_o({}^sE, F)$ являются изометрически решеточно изоморфными порядково полными квазинормированными решетками.*

Замечание 1.2. Теорема 1.1 вместе с замечанием 1.1 содержат в себе все предшествующие результаты о линеаризации ортогонально аддитивных полиномов (см., например, Беньямини, Лассаль и Лавона [23]). Отметим также работы, в которых позже передоказаны частные случае теоремы 1.1: Иборт, Линарес и Лавона в [24, теорема 3.3] установили теорему 1.1 для векторных решеток E и F, а в работе Бу и Бускеса [3, теоремы 4.3 и 5.4] доказаны следствия 1.1 и 1.2 для случая банаховых решеток E и F и банахова пространства Y.

2. Некоторые приложения

Теорема 1.1 о линеаризации позволяет некоторые задачи об ортогонально аддитивных однородных полиномах решать путем сведения к случаю линейных операторов. Рассмотрим несколько таких приложений, полученных в работах [13, 14, 15]. Начнем с классической задачи об интегральном представлении.

Определение 2.1. Пусть (Ω, Σ, μ) — пространство с мерой, а $L^0 := L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ — пространство (классов эквивалентности) всех вещественнозначных функций на множестве Ω. *Идеальным пространством* над (Ω, Σ, μ) называется любой порядковый идеал векторной решетки L^0, т. е. такое подпространство $E \subset L^0$, что если $f \in L^0$, $g \in E$ и $|f| \leqslant |g|$, то $f \in E$, см. [25, гл. IV, §3].

Определение 2.2. Пусть E и F — идеальные пространства над σ-конечными пространствами с мерами $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ и $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$ соответственно. Говорят, что однородный полином $P : E \to F$ степени s *допускает интегральное представление,* если существует $\mu_1 \otimes \mu_2$-измеримая функция двух переменных $K : \Omega_2 \times \Omega_1 \to \mathbb{R}$ такая, что для каждой функции $x \in E$ для μ_1-почти всех $s \in \Omega_2$ функция $t \mapsto K(s,t)x^s(t)$ μ_1-интегрируема на Ω_1 и

$$(Px)(s) = \int\limits_{\Omega_1} K(s,t)\, x^s(t)\, d\mu_1(t) \quad (x \in E) \tag{3}$$

(см. [25, гл. XI, §1]).

Теорема 2.1 (Критерий интегральной представимости)**.** *Пусть $P : E \to F$ — ортогонально аддитивный s-однородный полином. Эквивалентны утверждения:*

(1) *P допускает интегральное представление* (3)*;*

(2) *если $0 \leqslant x_n \leqslant x \in E$ $(n \in \mathbb{N})$ и $x_n \to 0$ по мере μ_1, то $Px_n \to 0$ μ_2-п. в.;*

(3) *полином P удовлетворяет следующим условиям:*
  (a) *если $\mu_1(B_n) \to 0$ $(B_n \in \Sigma_1)$ и $\chi_{B_n} \leqslant x \in E$ $(n \in \mathbb{N})$, то $P(\chi_{B_n}) \to 0$ μ_2-п. в.;*
  (b) *если $0 \leqslant x_n \leqslant x \in E$ $(n \in \mathbb{N})$ и $x_n \to 0$ μ_1-п. в.;, то $Px_n \to 0$ μ_2-п. в.*

$\lhd$ Доказательство см. [14, теорема 4]. $\rhd$

Замечание 2.1. Проблема интегральной представимости линейного оператора, восходящая к Джон фон Нейману, была решена А. В. Бухваловым в 1984 г.; это решение содержится в качестве частного случая $s = 1$ в теореме 2.1. В свою очередь, теорема 2.1 выводится из теоремы Бухвалова с помощью теоремы 1.1 о линеаризации.

Обратимся теперь к проблеме продолжения. Пусть E, F и G — произвольные векторные решетки, причем F порядково полна, а G — мажорирующая подрешетка в E. Как и выше, $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ обозначает пространство регулярных ортогонально аддитивных s-однородных полиномов из E в F, упорядоченное конусом положительных полиномов, т. е. $P_1 \geqslant P_2$ означает, что полином $P_1 - P_2$ положителен. Применив теорему Канторовича [18, теорема 1.32] о продолжении положительных операторов к линейной части положительного ортогонально аддитивного однородного полинома, получим результат о продолжении полинома $0 \leqslant P \in \mathscr{P}_o^r({}^sG, F)$ до полинома $0 \leqslant \hat{P} \in \mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$. Более того, множество $\mathscr{E}_+(P)$ всех таких продолжений является выпуклым множеством и в нем имеются крайние точки, называемые *крайними продолжениями* (см. [18, теорема 1.33]). Здесь возникают две интересные задачи: о существовании оператора продолжения и о характеризации крайних продолжений.

Определение 2.3. Символом $\mathscr{R}$ обозначим *оператор ограничения*, т. е. линейный оператор из $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$ в $\mathscr{P}_o^r({}^sG, F)$, сопоставляющий полиному P его ограничение $P|_G$ на подрешетку G. *Оператором одновременного продолжения* называют правый обратный к оператору $\mathscr{R}$, т. е. такой оператор $\mathscr{E}$ из $\mathscr{P}_o^r({}^sG, F)$ в $\mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$, что $\mathscr{R}_p \circ \mathscr{E}$ — тождественный оператор на $\mathscr{P}_o^r({}^sG, F)$.

Теорема 2.2 (Существование оператора продолжения)**.** *Пусть G — мажорирующая подрешетка векторной решетки E и F — порядково полная векторная решетка. Тогда существует оператор одновременного продолжения $\mathscr{E} : \mathscr{P}_o^r({}^sG, F) \to \mathscr{P}_o^r({}^sE, F)$, являющийся порядково непрерывным решеточным гомоморфизмом.*

$\lhd$ Доказательство см. [13, теорема 4]. $\rhd$

Теорема 2.3 (Характеризация крайних продолжений)**.** *Пусть E, F и G — те же, что и выше, причем E и G равномерно полны. Тогда полином $\widehat{P} \in \mathscr{E}_+(P)$ является крайним продолжением полинома $0 \leqslant P \in \mathscr{P}_o^r({}^sG, F)$ в том и только в том случае, когда для любого $x \in E$ выполняется*

$$\inf\left\{\widehat{P}\Big(\Big|\big(x^s + u^s\big)^{\frac{1}{s}}\Big|\Big) : \ u \in G\right\} = 0.$$

$\lhd$ Доказательство см. [13, теорема 6]. $\rhd$

Замечание 2.2. Теорема 2.2 верна и для решетки всех регулярных однородных полиномов $\mathscr{P}^r({}^sE, F)$; при $s = 1$ она утверждает существование одновременного продолжения линейных регулярных операторов с мажорирующей подрешетки — результат, полученный А. Г. Кусраевым [26, теорема 3.4.11]. Линейный случай теоремы 2.3 при $s = 1$ совпадает с теоремой Липецкого — Плахки — Томсена (см. [18, теорема 1.31]). Обе теоремы 2.2 и 2.3 доказываются редукцией к линейному случаю с помощью теоремы 1.1 о линеаризации.

Определение 2.4. Пусть E — равномерно полная векторная решетка, $N \in \mathbb{N}$, $m = \max\{s, N\}$ и $x_1, \dots, x_m \in E$. *Степенные суммы* $\mathfrak{S}_s(x_1, \dots, x_s)$ и *средние геометрические* $\mathfrak{G}(x_1, \dots, x_N)$ определяются в E с помощью однородного функционального исчисления (см. [27, теорема 2.1.20]):

$$\mathfrak{S}_s(x_1, \dots, x_N) := \left(\sum_{i=1}^N |x_i|^s\right)^{\frac{1}{s}}, \quad \mathfrak{G}(x_1, \dots, x_N) := \left(\prod_{i=1}^N |x_i|\right)^{\frac{1}{N}}.$$

Теорема 2.4 (Тождества для степенных сумм и средних геометрических)**.** *Пусть E — равномерно полная векторная решетка, Y — квазиполное локально выпуклое пространство, $P : E \to Y$ — ортогонально аддитивный ограниченный s-однородный полином,*

$\check{P} : E^s \to Y$ — порождающий его симметричный s-линейный оператор. Тогда для любых $x_1, \dots, x_s \in E_+$ имеют место следующие равенства:

$$\begin{gathered} P(\mathfrak{S}_s(x_1, \dots, x_N)) = P(x_1) + \dots + P(x_N); \\ P(\mathfrak{G}(x_1, \dots, x_s)) = \check{P}(x_1, \dots, x_s). \end{gathered} \tag{4}$$

$\lhd$ Доказательство см. в [15, теорема (основной результат)]. $\rhd$

Замечание 2.3. Бускес и Шванке [28, теорема 2.3] установили, что справедливость каждого из равенств (4) для ограниченного s-однородного полинома P влечет за собой ортогональную аддитивность полинома P. В этой же работе найдены другие равенства, также характеризующие класс ограниченных ортогонально аддитивных однородных полиномов. В [29] равенства (4) названы *«тождествами Кусраевой»*.

3. Однородные полиномы, сохраняющие дизъюнктность

В этом параграфе изложены результаты о строении сохраняющих дизъюнктность полиномов в векторных решетках, опубликованные в [16]. Этот класс можно рассматривать как абстрактное описание наименьшего множества полиномов, которые можно сконструировать, комбинируя операции взвешенного сдвига, возведения в степень и суммирования.

Определение 3.1. Полилинейный оператор $\varphi : E_1 \times \dots \times E_s \to F$ называется *сохраняющим дизъюнктность*, если линейный оператор $\varphi_{\overline{a}_k} : E_k \to F$, $k = 1, \dots, s$, где $\varphi_{\overline{a}_k}(x) := \varphi(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, x_s)$, причем a_0 и a_{s+1} опускаются, сохраняет дизъюнктность, каковы бы ни были фиксированные $a_i \in E_i$, $i \neq k$, т. е.

$$(\forall\, x, y \in E_k)\ x \perp y \Rightarrow \varphi_{\overline{a}_k}(x) \perp \varphi_{\overline{a}_k}(y) \quad (k = 1, \dots, s).$$

Введем теперь основной объект изучения. Как и выше, E и F — векторные решетки.

Определение 3.2. Однородный полином $P : E \to F$ степени s называют *сохраняющим дизъюнктность*, если таковым является порождающий его симметричный полилинейный оператор $\check{P} : E^s \to F$. При этом решеточный полиморфизм — сохраняющий дизъюнктность положительный однородный полином.

Следующий результат дает характеризацию сохраняющих дизъюнктность порядково ограниченных однородных полиномов. Из него следует, в частности, что всякий такой полином является ортогонально аддитивным.

Теорема 3.1. *Пусть E и F — векторные решетки, $P : E \to F$ — порядково ограниченный однородный полином степени s. Эквивалентны утверждения:*

(1) *P сохраняет дизъюнктность;*

(2) *$x \perp y$ влечет $\hat{d}^n P(x)(y) = 0$ и $Px \perp Py$ для всех $x, y \in E$ и $1 \leqslant n < s$;*

(3) *P ортогонально аддитивен и $x \perp y$ влечет $Px \perp Py$ для всех $x, y \in E$;*

(4) *существуют векторная решетка G и решеточные гомоморфизмы $S_1, S_2 : E \to G$ такие, что $G^{s\odot} \subset F$, $S_1(E) \perp S_2(E)$ и $Px = (S_1 x)^{s\odot} - (S_2 x)^{s\odot}$ для всех $x \in E$;*

(5) *существует сохраняющий дизъюнктность порядково ограниченный линейный оператор $T : E^{s\odot} \to F$ такой, что $Px = T(x^{s\odot})$ для всех $x \in E$.*

$\lhd$ Доказательство см. [16, теорема 3.3]. $\rhd$

Для полиномов имеет место вариант теорема Мейера [16, предложение 3.2]. В частности, полином, сохраняющий дизъюнктность, имеет модуль, являющийся решеточным полиморфизмом. Характеризация решеточных полиморфизмов содержится в следующем следствии.

Следствие 3.1. *Пусть E и F — векторные решетки, $P : E \to F$ — однородный полином степени s. Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *P — решеточный полиморфизм;*

(2) *P ортогонально аддитивен и $P(x \vee y) = P(x) \vee P(y)$ для всех $x, y \in E_+$;*

(3) *P ортогонально аддитивен и $P(x \wedge y) = P(x) \wedge P(y)$ для всех $x, y \in E_+$;*

(4) *P ортогонально аддитивен и $x \wedge y = 0$ влечет $P(x) \wedge P(y) = 0$ для всех $x, y \in E$;*

(5) *существует решеточный гомоморфизм $T : E^{s\odot} \to F$ такой, что справедливо представление $Px = T(x^{s\odot})$ для всех $x \in E$;*

(6) *существуют векторная решетка G и решеточный гомоморфизм $S : E \to G$ такие, что $G^{s\odot} \subset F$ и имеет место представление $Px = (Sx)^{s\odot}$ для всех $x \in E$.*

$\lhd$ Доказательство см. [16, следствие 3.10]. $\rhd$

Дальнейшее развитие связано с комбинированием полученной характеризации полиномов, сохраняющих дизъюнктность, с теорией А. Е. Гутмана сохраняющих дизъюнктность линейных операторов. Предположим, что E и F — фундаменты универсально полных векторных решеток $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ соответственно. В пространствах $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ зафиксируем порядковые единицы $\mathbb{1}_{\mathscr{E}}$ и $\mathbb{1}_{\mathscr{F}}$, служащие одновременно кольцевыми единицами соответствующих f-алгебр. При этом ортоморфизм представляет собой оператор умножения на элементы f-алгебры и отождествляется с соответствующим мультипликатором [18, с. 128].

Для произвольного $f \in \mathscr{E}$ существует единственный элемент $g \in \mathscr{E}$, для которого $fg = [f]\mathbb{1}_{\mathscr{E}}$ и $[f]^{\perp} g = 0$, где $[f]$ — проектор на полосу $\{f\}^{\perp\perp}$. Этот элемент g будем обозначать символом $1/f := \mathbb{1}_{\mathscr{E}}/f$. Произведение $e(1/f)$ обозначается также символом e/f. Обозначим через $\mathbb{P}(E)$ булеву алгебру порядковых проекторов в E.

Определение 3.3. Решеточный гомоморфизм $S : \mathscr{E}_0 \to \mathscr{F}$ называют *сдвигом полинома P*, если $\mathscr{E}_0$ — порядковый идеал в $\mathscr{E}$, содержащий $E \subset \mathscr{E}_0$, и $\operatorname{im}(P\pi)^{\perp\perp} = \operatorname{im}(S\pi)^{\perp\perp}$ для всех $\pi \in \mathbb{P}(E)$ (булевы алгебры $\pi \in \mathbb{P}(E)$ и $\pi \in \mathbb{P}(\mathscr{E}_0)$ отождествляются).

Теперь все готово для формулировки основной теоремы о представлении ортогонально аддитивных однородных полиномов, сохраняющих дизъюнктность.

Теорема 3.2. *Пусть E и F — порядково полные векторные решетки, $P : E \to F$ — s-однородный порядково ограниченный полином, сохраняющий дизъюнктность. Тогда существует разбиение единицы $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в булевой алгебре $\mathfrak{P}(F)$ и семейство положительных элементов $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в E такие, что имеет место представление*

$$P(x) = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} W \circ \rho_\xi S(x/e_\xi)^{s\odot} \quad (x \in E), \tag{5}$$

где оператор S — сдвиг полинома P, а ортоморфизм $W : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ представляет собой оператор умножения на $o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \rho_\xi P(e_\xi)$.

$\lhd$ Доказательство см. [16, теорема 4.7]. $\rhd$

Переходя к мультипликативному представлению сохраняющих дизъюнктность полиномов, рассмотрим экстремально несвязные компакты K и Q. Пусть E и F — фундаменты в расширенных K-пространствах $\mathscr{E} := C_\infty(K)$ и $\mathscr{F} := C_\infty(Q)$ соответственно. Пусть

$C_0(Q,K)$ обозначает множество всех непрерывных функций $\sigma : Q_0 \to K$, определенных на открыто-замкнутых подмножествах $\mathrm{dom}(\sigma) := Q_0 \subset Q$.

Определение 3.4. Для произвольного $\sigma \in C_0(Q,K)$ и $x \in C_\infty(K)$ определим функцию $x \bullet \sigma : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ формулой:

$$(x \bullet \sigma)(q) := \begin{cases} x(\sigma(q)), & \text{если } q \in \mathrm{dom}(\sigma), \\ 0, & \text{если } q \in Q \setminus \mathrm{dom}(\sigma). \end{cases}$$

Замечание 3.1. Функция $x \bullet \sigma$, как очевидно, непрерывна, но не принадлежит, вообще говоря, пространству $C_\infty(Q)$, поскольку она может принимать бесконечные значения на некотором подмножестве $U \in Q$ с непустой внутренностью. Несмотря на это, произведение $W(x \bullet \sigma)$ корректно определяет функцию из $C_\infty(Q)$, если W обращается в ноль на внутренности U (подробности см. [30, 5.8.5]).

Теперь можем сформулировать теорему о мультипликативном представлении однородных полиномов, сохраняющих дизъюнктность.

Теорема 3.9 (Мультипликативное представление). *Пусть E и F — фундаменты в пространствах $C_\infty(K)$ и $C_\infty(Q)$ соответственно, а $P : E \to F$ — порядково ограниченный ортогонально аддитивный s-однородный полином, сохраняющий дизъюнктность. Тогда существуют отображение $\sigma \in C_0(Q,K)$, семейство $(w_\xi)_{\xi\in\Xi}$ положительных функций в $C_\infty(K)$ и семейство $(W_\xi)_{\xi\in\Xi}$ попарно дизъюнктных функций из $C_\infty(Q)$ такие, что $1/w_\xi \in E$ для всех $\xi \in \Xi$, и справедливо представление*

$$P(x) = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} W_\xi((w_\xi x)^s \bullet \sigma) \quad (x \in E). \tag{6}$$

$\lhd$ Доказательство см. [16, теорема 4.9]. $\rhd$

Замечание 3.10. Теоремы 3.2 и 3.3 при $s = 1$ представляют собой результаты А. Е. Гутмана для линейных операторов, сохраняющих дизъюнктность. В то же время, соединив теорему 1.1 о линеаризации с линейной теорией А. Е. Гутмана [30], приходим к полному описанию класса однородных полиномов, сохраняющих дизъюнктность.

4. Проблема доминирования

В этом параграфе представлено решение проблем компактного и слабо компактного доминирования для ограниченных по норме ортогонально аддитивных однородных полиномов в банаховых решетках, полученное в [17]. Случай линейных операторов покрывается знаменитыми теоремами Доддса — Фремлина и Висктеда.

Определение 4.1. Проблемой *доминирования* (или *мажорации*) для полиномов, действующих в банаховых решетках, называют вопрос: сохраняет ли однородный полином то или иное свойство (компактность, слабую компактность и т. д.), которым обладает его мажоранта? Точнее, если однородный полином P мажорируется однородным полиномом Q (т. е. $|P| \leqslant Q$ или $0 \leqslant P \leqslant Q$) и Q компактен (слабо компактен), то будет ли P также компактен (слабо компактен)? Проблема доминирования рассматривается и для других свойств помимо компактности и слабой компактности. Проблема доминирования хорошо изучена для линейных операторов. Решения, полученные для различных классов линейных операторов, представлены в книгах [18, 27] и обзорных статьях [31, 32].

Определение 4.2. Пусть $0 < p \leqslant q \leqslant \infty$ и $p < \infty$. Квазибанахову решетку E называют (p,q)-*выпуклой*, если существует константа C такая, что

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^q \right)^{1/q} \right\| \leqslant C \left(\sum_{k=1}^{m} \|x_k\|^p \right)^{1/p},$$

для любого конечного набора $\{x_1, \ldots, x_m\}$ в E, см. [33]. При $p = q$ говорят о p-выпуклости E. Наименьшая возможная константа C в этом неравенстве обозначается символом $M^{(p,q)}(C)$.

Сформулируем наш результат о компактном доминировании ортогонально аддитивных однородных полиномов в банаховых решетках.

Теорема 4.1. *Пусть $1 \leqslant p \in \mathbb{R}$, $s \leqslant p$ и $s \in \mathbb{N}$, а E и F — банаховы решетки, причем E — p-выпукла. Равносильны следующие утверждения:*

(1) *для любой пары s-однородных ортогонально аддитивных полиномов P, Q из E в F, удовлетворяющих условию $0 \leqslant P \leqslant Q$, компактность Q влечет компактность P;*

(2) *выполняется одно из следующих (не взаимоисключающих) условий:*

(a) *E не содержит банаховых подрешеток, изоморфных l_s, а F порядково непрерывна;*

(b) *$\mathscr{P}^r_o({}^sE, \mathbb{R})$ атомична, E не содержит банаховых подрешеток, изоморфных l_s;*

(c) *F атомична и порядково непрерывна.*

$\lhd$ Доказательство см. [17, теорема 1]. $\rhd$

Замечание 4.1. Проблему компактного доминирования поставил в 1976 г. известный специалист по математической физике Б. Саймон в связи с исследованием резольвенты оператора Шрёдингера и теорией рассеяния. В 1978 г. П. Доддс и Д. Фремлин [18, теорема 5.20] доказали импликацию (2)(a) $\Longrightarrow$ (1) теоремы 4.1 при $s = 1$, причем в (2)(a) фигурирует условие порядковой непрерывности нормы в E. Последнее равносильно тому, что E не содержит подрешеток, изоморфных l_1 [18, теорема 4.69]. Оставшуюся часть теоремы 4.1 при $s = 1$ установил Э. Викстед [34].

Теорема 4.2. *Пусть $s \in \mathbb{N}$ и $s \leqslant p \in \mathbb{R}$. Предположим, что E и F — банаховы решетки, причем E p-выпукла. Равносильны следующие утверждения:*

(1) *для любой пары s-однородных ортогонально аддитивных полиномов P и Q из E в F, удовлетворяющих условию $0 \leqslant P \leqslant Q$, слабая компактность Q влечет слабую компактность P;*

(2) *либо E не содержит банаховых подрешеток, изоморфных l_s, либо F порядково непрерывна.*

Замечание 4.2. Теорема 4.2 для линейных операторов ($p = s = 1$) установлена в [35]: для того чтобы произвольный линейный положительный оператор из E в F, мажорируемый каким-нибудь слабо компактным линейным оператором, был слабо компактным, необходимо и достаточно, чтобы по крайней мере одна из банаховых решеток E и F была порядково непрерывной. Из этого факта выводится требуемое, с привлечением теоремы 1.1 о линеаризации.

Замечание 4.3. Теорема 4.2 верна также для положительных однородных полиномов (не обязательно ортогонально аддитивных) (см. [36, следствие 3.3]). В то же время, проблема компактного доминирования в классе регулярных однородных полиномов остается открытой. Частные результаты получены в работе [36, следствия 4.2 и 4.4]. Неясно также, какой вариант теоремы 4.1 имеет место в квазибанаховых решетках. Некоторое продвижение в этом направлении достигнуто в [37], однако не ясно до конца, в какой мере существенна двойственность для решения проблемы компактного доминирования.

5. Вогнутость и выпуклость однородного ортогонально аддитивного полинома

В этом параграфе изложены результаты, полученные в [7].

Определение 5.1. Для любой конечной последовательности $(x_1, \dots, x_N)$ в равномерно полной векторной решетке E выражение вида $\hat{f}(x_1, \dots, x_N)$ может быть корректно определено, если только $f \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^N)$, т. е. f — положительно однородная ($f(\lambda x) = \lambda f(x)$ для всех $x \in \mathbb{R}^N$ и $\lambda \in \mathbb{R}$) непрерывная функция на $\mathbb{R}^N$. Изучение таких выражений называется *однородным функциональным исчислением* (см. [27, теорема 2.1.20]). Следующие утверждения позволяют однородное функциональное исчисление в степени квазинормированной решетки описать в терминах исходной решетки.

Теорема 5.1. *Для данного $\varphi \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^n)$ и $0 < s \in \mathbb{R}$ определим $\varphi_s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, полагая $\varphi_s(t_1, \dots, t_n) := \varphi(t_1^s, \dots, t_n^s)^{\frac{1}{s}}$ для всех $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\varphi_s \in \mathscr{H}(\mathbb{R}^n)$ и для всякой равномерно полной векторной решетки E и конечной последовательности $x_1, \dots, x_n \in E$ верно следующее представление:*

$$\varphi(x_1^{s\odot}, \dots, x_n^{s\odot}) = \varphi_s(x_1, \dots, x_n)^{s\odot}.$$

$\lhd$ Доказательство см. [7, предложение 3.9]. $\rhd$

Следствие 5.1. *Пусть E — равномерно полная векторная решетка, $s \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant r \in \mathbb{R}$, и $0 \leqslant \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ таковы, что $\sum_{k=1}^n \alpha_k = 1$. Тогда для любого конечного набора $x_1, \dots, x_s \in E$ имеют место представления:*

$$\left(\sum_{k=1}^n |x_k^{s\odot}|^r\right)^{\frac{1}{r}} = \left[\left(\sum_{k=1}^n |x_k|^{rs}\right)^{\frac{1}{rs}}\right]^{s\odot},$$

$$\prod_{k=1}^n |x_k^{s\odot}|^{\alpha_k} = \left(\prod_{k=1}^n |x_k|^{\alpha_k}\right)^{s\odot}.$$

Пользуясь однородным функциональным исчислением, введем общие понятия (p,q)-*выпуклого* и (p,q)-*вогнутого* однородного полинома и рассмотрим некоторые взаимосвязи для этого специального класса однородных ортогонально аддитивных полиномов.

Определение 5.2. Пусть X — квазибанахово пространство, F — квазибанахова решетка и $0 < p \leqslant q \leqslant \infty$. Непрерывный s-однородный полином $P : E \to F$ называют (p,q)-*выпуклым*, если существует такая константа $C \in \mathbb{R}_+$, что

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^m |P(x_k^+) - P(x_k^-)|^{q/s} \right)^{s/q} \right\| \leqslant C \left(\sum_{k=1}^m \|x_k\|^p \right)^{s/p} \tag{7}$$

для любого конечного набора $x_1, \dots, x_m \in E$. Наилучшая константа C в (7) обозначается $M^{(p,q)}(P)$. При $p = q$ говорят о p-выпуклых полиномах.

Определение 5.3. Пусть E — квазибанахова решетка, Y — квазибанахово пространство и $0 < p \leqslant q \leqslant \infty$. Непрерывный s-однородный полином $P : E \to F$ называют

(p,q)-*вогнутым*, если существует константа $C \in \mathbb{R}_+$ такая, что

$$\left(\sum_{k=1}^{m} \|P(x_k^+) - P(x_k^-)\|^{q/s}\right)^{1/q} \leqslant C \left\| \left(\sum_{k=1}^{m} |x_k|^p\right)^{1/p} \right\| \tag{8}$$

для любого конечного набора $x_1, \dots, x_m \in E$. Наилучшая константа C в (8) обозначается $M_{(p,q)}(P)$. При $p = q$ говорят о p-вогнуты полиномах.

Если тождественный оператор $I_E : E \to E$ является (p,q)-выпуклым ((p,q)-вогнутым), то квазибанахову решетку E называют (p,q)-*выпуклой* ((p,q)-*вогнутой*) (ср. определение 4.2).

Теорема 5.2. *Пусть E — квазибанахова решетка, $s \in \mathbb{N}$ и $0 < p, q \in \mathbb{R}$. Тогда следующие утверждения эквиваленты:*

(1) E (p,q)-выпукла;

(2) s-степень $E^{s\odot}$ $(p/s, q/s)$-выпукла;

(3) канонический полином $x \mapsto x^{s\odot}$, действующий из E в $E^{s\odot}$, (p,q)-выпуклый.

Если, сверх того, $s \leqslant q$, то утверждения (1)–(3) эквивалентны следующим:

(4) для всякой квазибанаховой решетки F любой положительный ортогонально адитивный s-однородный полином P, действующий из E в F, является (p,q)-выпуклым;

(5) для всякой квазибанаховой решетки F любой положительный линейных оператор T, действующий из $E^{s\odot}$ в F, является $(p/s, q/s)$-выпуклым;

(6) для всякой квазибанаховой решетки F любой положительный линейный оператор T, действующий из E в F, является (p,q)-выпуклым.

$\lhd$ Доказательство см. [7, теорема 4.6]. $\rhd$

С. Рейзнер [38], а также И. Рено и П. Традасет в [39] охарактеризовали p-вогнутые линейные операторы, как операторы, факторизуемые через p-вогнутые банаховые решетки. Этот факт допускает обобщение на случай ортогонально аддитивных однородных полиномов, действующих из квазибанаховых решеток в квазибанаховы пространства.

Теорема 5.3 (Факторизация). *Пусть E — квазибанахова решетка, Y — квазибанахово пространство, $s \in \mathbb{N}$ и $0 < p \leqslant \infty$. s-Однородный ортогонально аддитивный полином $P : E \to Y$ является p-вогнутым тогда и только тогда, когда существует p/s-вогнутая квазибанахова решетка F, линейный ограниченный оператор $S : F \to Y$ и решеточный мультиморфизм, сохраняющий порядковые интервалы, $Q : E \to F$ такой, что $Q(E_+)$ плотно в F_+ и $P = S \circ Q$.*

$\lhd$ Доказательство см. [7, теорема 4.8]. $\rhd$

Следующее приложение связно с знаменитым неравенством Гротендика, установленным в 1953 г. и по настоящее время оказывающим существенное влияние на теорию банаховых пространств (см. [40]). Среди различных обобщений имеется вариант *неравенства Гротендика* для банаховых решеток, установленный Ж.-Л. Кривином [41]: Если $T : E \to F$ — ограниченный оператор, действующий между банаховыми решетками, то для любого конечного набора элементов $x_1, \dots, x_n \in E$ имеет место неравенство:

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{n} |T(x_k)|^2\right)^{1/2} \right\| \leqslant K_G \|T\| \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2\right)^{1/2} \right\|, \tag{9}$$

где K_G — постоянная Гротендика. Н. Кэлтон в [42] доказал, что аналогичное неравенство верно и для ограниченных операторов, действующих из квазибанаховой решетки в L-выпуклую квазибанахову решетку, однако уже с другой константой. (Квазибанахова решетка E называется *L-выпуклой*, если E p-выпукла для некоторого $0 < p < \infty$.) Результат Кэлтона вместе с теоремой 1.1 о линеаризации позволяют получить аналог неравенства Гротендика для полиномов.

Теорема 5.4. *Пусть F — L-выпуклая квазибанахова решетка. Тогда существует константа A, зависящая только от F, такая, что если E — квазибанахова решетка и $P : E \to F$ — ограниченный ортогонально аддитивный s-однородный полином, то для всякой конечной последовательности элементов $x_1, \ldots, x_n \in E$ справедливо неравенство:*

$$\left\| \left(\sum_{k=1}^{n} |\bar{P}(x_k)|^2 \right)^{1/2} \right\| \leqslant A\|P\| \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^{2s} \right)^{1/(2s)} \right\|^s, \tag{10}$$

где $\bar{P}(x) = P(x^+) - P(x^-)$ для всех $x \in E$.

$\lhd$ Доказательство см. [8, теорема 4.9]. $\rhd$

6. Условия вогнутости и выпуклости решетки ортогонально аддитивных полиномов

Хорошо известен следующий результат о двойственности: (p, q)-выпуклость (соответственно, (p, q)-вогнутость) банаховой решетки E равносильна (p', q')-вогнутости (соответственно, (p', q')-выпуклости) двойственной банаховой решетки E', где $p' = p/(1-p)$ и $q' = q/(1-q)$ (см. [43, теорема 16.21]). Если в этом утверждении заменить функционалы на регулярные ортогонально аддитивные однородные полиномы, то условия его справедливости — нетривиальная задача. В этом параграфе представим вариант решения этой задачи, полученный в работе [8]. Приведем необходимые определения.

Пусть E — квазинормированная решетка и F — квазибанахова решетка, тогда каждый регулярный полином из E в F непрерывен (см. [7, предложение 2.6]). Тем самым $\mathscr{P}^r({}^sE, F)$ является упорядоченным пространством с регулярной нормой

$$\|P\|_r := \inf\{\|Q\| : \ \pm P \leqslant Q \in \mathscr{P}^r({}^sE, F)\}.$$

Обозначим, как и ранее, символом $\mathscr{P}^r_o({}^sE, F)$ часть $\mathscr{P}^r({}^sE, F)$, состоящую из ортогонально аддитивных полиномов. Будем рассматривать $\mathscr{P}^r_o({}^sE, F)$ с индуцированными квазинормой и упорядочением.

Теорема 6.1. *Пусть E — квазинормированная решетка и F — квазибанахова решетка. Если $\mathscr{P}^r({}^sE, F)$ — векторная решетка, то $(\mathscr{P}^r({}^sE, F), \|\cdot\|_r)$ — квазибанахова решетка и $\|P\|_r = \|\,|P|\,\|$ для всех $P \in \mathscr{P}^r({}^sE, F)$. В частности, $\mathscr{P}^r({}^sE, F)$ — порядково полная квазибанахова решетка с регулярной нормой, если F порядково полна.*

Замечание 6.1. Бу, Бускес и Ли в [44, теоремы 3.1 и 3.3] доказали, что если E и F являются банаховыми решетками, то верны следующие два утверждения: (1) $\mathscr{P}^r({}^sE, F)$ является AM-пространством, как только E — AL-пространство и F является порядково полным AM-пространством; (2) $\mathscr{P}^r({}^sE, F)$ является AL-пространством, как только E — AM-пространство и F — AL-пространство. Учитывая, что AL- и AM-пространств определяются условиями 1-вогнутости и ∞-выпуклости соответственно, было бы интересно получить аналогичные результаты для пространств однородных полиномов $\mathscr{P}^r({}^sE, F)$ в квазибанаховом антураже. В общем случае эта задача не решена. Имеющиеся решения для ортогонально аддитивных операторов приводятся ниже. Теоремы 6.2, 6.3 и 6.4 являются новыми даже в случае линейных операторов (см. [8]).

Теорема 6.2. *Пусть E и F — квазибанаховы решетки, причем F порядково полна. Тогда $\mathscr{P}^r_o({}^sE,F)$ является (p,q)-вогнутой квазибанаховой решеткой для некоторого $1 \leqslant p,q < \infty$, если F — 1-вогнута и E — (sp',sq')-выпукла. Более того, выполняется следующее неравенство: $M_{(p,q)}(\mathscr{P}^r_o({}^sE,F)) \leqslant M_{(1)}(F)M^{(sq',sp')}(E)$.*

$\lhd$ Доказательство см. [8, теорема 4.9]. $\rhd$

Определение 6.1. Квазибанахову решетку E называют *квази-AM-пространством*, если E ∞-выпукла, т. е. существует константа $C \geqslant 0$ такая, что

$$\Big\| \bigvee_{k=1}^{n} |x_k| \Big\| \leqslant C \bigvee_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

для любого конечного набора $x_1,\dots,x_n$ в E. Наименьшую константу C в этом неравенстве обозначают символом $M^{(\infty)}(E)$.

Определение 6.2. Говорят, что квазибанахова решетка $(E,\|\cdot\|)$ обладает *слабым свойством Фату*, если существует константа $K > 0$ такая, что для любой сети (x_α) в E и любого $x \in E$ из $0 \leqslant x_\alpha \uparrow x$ следует $\|x\| \leqslant K \sup_\alpha \|x_\alpha\|$.

Теорема 6.3. *Пусть E — квазибанахова решетка и F — порядково полное квази-AM-пространство, обладающее слабым свойством Фату с константой K. Тогда пространство регулярных s-однородных ортогонально аддитивных полиномов $\mathscr{P}^r_o({}^sE,F)$ является (p,q)-выпуклой квазибанаховой решеткой для некоторого $1 \leqslant p,q < \infty$, если E — (sq',sp')-вогнута с $p' = p/(p-1)$ и $q' = q/(q-1)$. Более того, имеет место следующее неравенство: $M^{(p,q)}(\mathscr{P}^r_o({}^sE,F)) \leqslant KM^{(\infty)}(F)M_{(sp',sq')}(E)$.*

$\lhd$ Доказательство см. [8, теорема 4.10]. $\rhd$

Определение 6.3. Квазибанахову решетку называют 0^+-*выпуклой* или *геометрически выпуклой*, если существует константа $M > 0$ такая, что

$$\bigg\| \bigg(\prod_{k=1}^{n} |x_k| \bigg)^{1/n} \bigg\| \leqslant M \bigg(\prod_{k=1}^{n} \|x_k\| \bigg)^{1/n}$$

для любого конечного набора $x_1,\dots,x_n$ в E. Наименьшая возможная константа M в этом неравенстве обозначается символом $M^{(0^+)}$.

Теорема 6.4. *Пусть E и F — квазибанаховы решетки, причем F порядкова полна. Если F геометрически выпукла, то $\mathscr{P}^r_o({}^sE,F)$ также геометрически выпукло. Более того, выполняется следующее неравенство: $M^{(0^+)}(\mathscr{P}^r_o({}^sE,F)) \leqslant M^{(0^+)}(F)$.*

$\lhd$ Доказательство см. [8, теорема 4.11]. $\rhd$

Замечание 6.2. Если $p = q$, то говорят о p-выпуклости и p-вогнутости. Вопрос о p-выпуклости и p-вогнутости для пространства линейных регулярных операторов в банаховых решетках впервые был рассмотрен Н. Данетом в [47]. Теоремы 6.2 и 6.3 показывают, в частности, что полученный им результат [47, теорема 1.5] имеет место для более широких классов квазибанаховых решеток и ортогонально аддитивных полиномов. Аналогичные результаты для квазибанаховой решетки общих регулярных полиномов будут опубликованы в одной из ближайших статей автора.

7. Суммы порядково ограниченных однородных полиномов, сохраняющих дизъюнктность

В этом параграфе дается полное описание полилинейных операторов и однородных полиномов, представимых в виде суммы сохраняющих дизъюнктность полилинейных операторов и однородных полиномов, соответственно, полученное в работах [10, 11]. Для линейных операторов эту проблему решили Бернау, Гюйсманс и де Пахте [46].

Определение 7.1. n-Линейный оператор $T : E_1 \times \dots \times E_n \to F$ называют *положительным* (обозначение $T \geqslant 0$), если $T(x_1, \dots, x_n) \geqslant 0$ для всех $0 \leqslant x_1 \in E_1, \dots, 0 \leqslant x_n \in E_n$; *решеточным мультиморфизмом* или *решеточным n-морфизмом,* если линейный оператор $x \mapsto T(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_n)$ является решеточным гомоморфизмом для любых $1 \leqslant j \leqslant n$, $0 \leqslant x_k \in E_k$, $j \neq k \leqslant n$. (При этом x_0 и x_{n+1} опускаются.)

Определение 7.2. Будем говорить, что конечный набор элементов $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ $(j = 0, \dots, m)$ в $E_1 \times \dots \times E_n$ назвается *спорадически дизъюнктным*, если для любого $0 \leqslant k, l \leqslant m$, $k \neq l$, существует $1 \leqslant i \leqslant n$ с $x_{i,k} \perp x_{i,l}$. n-Линейный оператор $T \in L(E_1 \times \dots \times E_n; G)$ называется *m-дизъюнктным*, если для любого спорадически дзъюнктного набора конечных последовательностей $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ $(j = 0, \dots, m)$ в $E_1 \times \dots \times E_n$ выполняется равенство

$$|T(x_{1,0}, \dots, x_{n,0})| \wedge |T(x_{1,1}, \dots, x_{n,1})| \wedge \dots \wedge |T(x_{1,m}, \dots, x_{n,m})| = 0.$$

Скажем, что T *полидизъюнктен*, если T m-дизъюнктен для некоторого $m \in \mathbb{N}$.

Очевидно, 1-дизъюнктный оператор — это сохраняющий дизъюнктность оператор.

Теорема 7.1. *Пусть $E_1, \dots, E_n$ и F — векторные решетки, причем F — K-пространство, а T — регулярный n-линейный оператор из $E_1 \times \dots \times E_n$ в F. Если T — m-дизъюнктный, тогда существует m сохраняющих дизъюнктность регулярных n-линейных операторов $T_j : E_1 \times \dots \times E_n \to F$ таких, что $T = T_1 + \dots + T_m$ и $T_j \perp T_k$ для всех $1 \leqslant j, k \leqslant n$, $k \neq j$.*

$\lhd$ Доказательство см. [10, теорема 4.1]. $\rhd$

Определим полилинейный оператор $S_1 \circledast \ldots \circledast S_n$ из $E_1 \times \ldots \times E_n$ в F, полагая

$$S_1 \circledast \ldots \circledast S_n(x_1, \dots, x_n) := S_1(x_1) * \ldots * S_n(x_n) \quad (x_1 \in E_1, \dots, x_n \in E_n).$$

где $*$ — умножение в универсальном расширении F^u.

Теорема 7.2. *Пусть $E_1, \dots, E_n, F$ — векторные решетки, причем F — K-пространство, а T — регулярный m-дизъюнктный n-линейный оператор из $E_1 \times \dots \times E_n$ в F. Тогда существуют порядковые проекторы π_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ в F, векторные решетки $F_1, \dots, F_n$, допускающие умножение в F, и $n \times m$-матрица $(S_{j,k})$, чьими элементами являются $S_{j,k} : E_k \to F_k$ — решеточные гомоморфизмы такие, что имеет место представление:*

$$T = \sum_{j=1}^{m} (\pi_j - \pi_j^{\perp}) S_{j,1} \circledast \dots \circledast S_{j,n}.$$

$\lhd$ Доказательство см. [10, теорема 4.5]. $\rhd$

Замечание 7.1. Из теорем 7.1 и 7.2 следует, что множество всех m-дизъюнктных n-линейных операторов (при переменном m и фиксированном n) из декартова произведения векторных решеток в порядково полную векторную решетку представляет собой порядковый идеал в векторной решетке регулярных n-линейных операторов и совпадает с векторным подпространством, порожденным множеством всех произведений n-решеточных гомоморфизмов, определенных на векторных решетках — сомножителях декартова произведения (см. [10, следствие 6]).

Далее введем два понятия m-дизъюнктности для однородных полиномов.

Определение 7.3. Однородный полином является *m-дизъюнктным*, если он ортогонально аддитивен, и ассоциированный симметричный полилинейный оператор является m-дизъюнктным и *слабо m-дизъюнктным*, когда он имеет m-дизъюнктный порождающий (не обязательно симметричный) полилинейный оператор.

Теорема 7.3. *Пусть E и F — векторные решетки, $T : E^{s\odot} \to F$ — порядково ограниченный линейный оператор и $P : E \to F$ — однородный полином, определенный формулой $P(x) = T(x^{s\odot})$ для $x \in E$. Рассмотрим утверждения:*

(1) *P m-дизъюнктен;*

(2) *T m-дизъюнктен;*

(3) *для любых попарно дизъюнктных элементов $x_0, \dots, x_m \in E$ выполняется*

$$|P(x_0^+) - P(x_0^-)| \wedge \dots \wedge |P(x_m^+) - P(x_m^-)| = 0;$$

(4) *для любых попарно дизъюнктных элементов $x_0, \dots, x_m \in E_+$ выполняется*

$$P(x_0 \vee \ldots \vee x_m) = \bigvee_{k=0}^{m} P(x_0 \vee \ldots \vee x_{k-1} \vee x_{k+1} \vee \ldots \vee x_m), \tag{11}$$

где $x_{-1} := x_0$ и $x_{m+1} := x_m$ опускаются.

Тогда (1) $\Longleftrightarrow$ (2) *и* (2) $\Longrightarrow$ (3). *Более того, если E равномерно полна то первые три утверждения эквивалентны. Если же, сверх того, оператор T положителен, то равносильны все четыре утверждения.*

$\lhd$ Доказательство см. [11, теорема 3.7]. $\rhd$

Как и ожидалось, m-дизъюнктный полином представлен в виде суммы m сохраняющих дизъюнктность полиномов.

Теорема 7.4. *Пусть E и F — векторные решетки, причем F — порядково полна и $P : E \to F$ — порядково ограниченный ортогонально аддитивный s-однородный полином. Тогда эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *P — m-дизъюнктен;*

(2) *существуют порядково ограниченные сохраняющие дизъюнктность s-однородные полиномы $P_1, \dots, P_m : E \to F$ такие, что $P_k \perp P_l$ $(k \neq l)$ и $P = P_1 + \dots + P_m$;*

(3) *существуют порядковые проекторы $\pi_1, \dots, \pi_m$ в $\mathbb{P}(F)$ и решеточные гомоморфизмы $T_1, \dots, T_m$ из E в $F_{(1/s)}$ такие, что $T_k \perp T_l$ $(1 \leqslant k, l \leqslant m,\ k \neq l)$ и имеет место представление*

$$P(x) = \sum_{k=1}^{m} (\pi_k - \pi_k^{\perp}) T_k(x)^{s\odot} \quad (x \in E). \tag{12}$$

$\lhd$ Доказательство см. [11, теорема 3.11]. $\rhd$

Следствие 7.1. *Пусть E и F — векторные решетки, причем F порядково полна. Тогда порядковый идеал порядково ограниченных s-однородных полиномов из E в F, порожденный полиномами вида $x \mapsto T(x)^{s\odot}$, где $T : E \to F_{(1/s)}$ — решеточный гомоморфизм, состоит в точности из порядково ограниченных s-однородных полиномов из E в F, m-дизъюнктных для некоторого натурального m.*

Замечание 7.2. Слабо m-дизъюнктные полиномы имеют существенно иное строение, чем m-дизъюнктные полиномы. Порядково ограниченные слабо m-дизъюнктные однородные полиномы (m пробегает $\mathbb{N}$) из E в F образуют порядковый идеал, порожденный полиномами вида $x \mapsto T_1(x)^{k_1\odot} * \ldots * T_l(x)^{k_l\odot}$, где $T_j : E \to F_j$ — решеточный гомоморфизм и F_j — подрешетка в F^u. Комбинируя эти результаты с теорией Гутмана [30], так же, как и в разделе 3, приходим к мультипликативному представлению слабо m-дизъюнктных полиномов (ср. замечание 3.10 настоящей статьи). Соответствующие результаты изложены в [11].

8. Нерешенные задачи

В этом, заключительном, параграфе приведем несколько нерешенных задач. Обозначим символом $\mathscr{P}^r({}^sE, F)$ пространство регулярных (не обязательно ортогонально аддитивных) s-однородных полиномов из E в F. Линеаризация полиномов из $\mathscr{P}^r({}^sE, F)$ осуществляется с помощью *n-кратного симметричного тензорного произведения по Фремлину* $\widehat{\bigotimes}_{s,n,|\pi|}E$, см. [3]. Последнее имеет более сложное строение, чем степень $E^{s\odot}$, и с этим обстоятельством связаны значительные трудности изучения порядковых свойств как индивидуального регулярного полинома, так и пространства полиномов $\mathscr{P}^r({}^sE, F)$.

Задача 8.1. Пусть E и F — идеальные пространства над σ-конечными пространствами с мерой, см. определение 2.2. Найти необходимые и достаточные условия, при которых регулярный однородный полином $P : E \to F$ допускает интегральное представление ($\mu_1^{(n)} = \mu_1 \times \dots \times \mu_1$ — n-кратное произведение меры μ_1):

$$(Px)(s) = \int\limits_{\Omega_1} K(s, t_1, \dots, t_n)\, x(t_1) \dots x(t_n)\, d\mu_1^{(n)}(t_1 \cdot \dots \cdot t_n) \quad (x \in E).$$

Задача 8.2. Дать описание крайних точек единичного шара банаховой решетки $\mathscr{P}^r({}^sE, F)$ для различных E и F (F порядково полна).

Имеющиеся результаты для класса интегральных полиномов см. в [47, 48].

Задача 8.3. Каковы должны быть банаховы решетки E и F, чтобы упорядоченное банахово пространство $\mathscr{P}^r({}^sE, F)$ было банаховой решеткой?

Для линейных операторов ($s = 1$) полный ответ известен лишь в том случае, когда E либо сепарабельна либо порядково непрерывна, см. [49] и указанную там литературу.

Задача 8.4. Каковы должны быть банаховы решетки E и F, чтобы для любых однородных полиномов из $P, Q : E \to F$, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant P \leqslant Q$, из компактности Q следовала бы компактность P?

В этом направлении имеются лишь частичные результаты (см. замечание 4.2 и [36, 37]).

Задача 8.5. Какие условия на банахову решетку E обеспечивают (p, q)-выпуклость или (p, q)-вогнутость банаховой решетки $\widehat{\bigotimes}_{s,n,|\pi|}E$?

Задача 8.6. Пусть E и F — квазибанаховы решетки. При каких условиях на E и F квазибанахова решетка $\mathscr{P}^r({}^nE, F)$ будет (p, q)-выпуклой, (p, q)-вогнутой?

Мотивация постановок и достигнутые результаты по задачам 8.5 и 8.6 отражены в замечании 6.2 и работах [16, 44, 47].

Задача 8.7. Получить результаты о факторизации однородного полинома через p-выпуклый и q-вогнутый полиномы в духе работ [38, 39, 41].

Литература

1. *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces.—Berlin: Springer, 1999.—xv+543 p.
2. *Grecu B. C., Ryan R. A.* Polynomials on Banach spaces with unconditional bases // Proc. Amer. Math. Soc.—2005.—Vol. 133, № 4.—P. 1083–1091. DOI: 10.1090/S0002-9939-04-07738-X.
3. *Bu Q., Buskes G.* Polynomials on Banach lattices and positive tensor products // J. Math. Anal. Appl.—2012.—Vol. 388, № 2.—P. 845–862. DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.10.001.

4. *Loane J.* Polynomials on Riesz spaces // Thesis, Department of Math.—Galway: Nat. Univ. of Ireland, 2007.
5. *Linares P.* Orthogonal additive polynomials and applications // Thesis, Departamento de Analisis Matematico.—Madrid: Universidad Complutense de Madrid, 2009.
6. *Кусраева З. А.* Ортогонально аддитивные полиномы в векторных решетках: Дисс. ... к.ф.-м.н.—Новосибирск: Ин-т мат-ки им. С. Л. Соболева СО РАН, 2013.
7. *Kusraeva Z. A.* Powers of quasi-banach lattices and orthogonally additive polynomials // J. Math. Anal. and Appl.—2018.—Vol. 458, № 1.—P. 767–780. DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.09.019.
8. *Kusraeva Z. A.* Convexity conditions for the space of regular operators // Positivity.—2019.—Vol. 23, № 2.—P. 445–459. DOI: 10.1007/s11117-018-0616-z.
9. *Кусраев А. Г., Кусраева З. А.* Суммы порядково ограниченных операторов, сохраняющих дизъюнктность // Сиб. матем. журн.—2019.—Vol. 60, №1.—P. 148–161. DOI: 10.33048/smzh.2019.60.113
10. *Kusraeva Z. A.* Monomial decomposition of homogeneous polynomials in vector lattices // Advances in Operator Theory.—2019.—Vol. 4, № 2.—P. 428–446. DOI: 10.15352/aot.1807-1394.
11. *Kusraeva Z. A.* Sums of disjointness preserving multilinear operators // Positivity.—2021.—Vol. 25, № 2.—P. 669–678. DOI: 10.1007/s11117-020-00781-7.
12. *Кусраева З. А.* О представлении ортогонально аддитивных полиномов // Сиб. мат. журн.—2011.—Т. 52, № 2.—С. 315–325.
13. *Кусраева З. А.* О продолжении ортогонально аддитивных регулярных полиномов // Владикавк. мат. журн.—2011.—Т. 13, № 4.—С. 28–34.
14. *Кусраева З. А.* Однородные ортогонально аддитивные полиномы в векторных решетках // Мат. заметки.—2012.—Т. 91, №5.—С. 704–710. DOI: 10.4213/mzm8790.
15. *Кусраева З. А.* Однородные полиномы, средние степенные и средние геометрические в векторных решетка // Владикавк. мат. журн.—2014.—Т. 16, № 4.—С. 49–53. DOI: 10.23671/VNC.2014.4.10260.
16. *Кусраева З. А.* Характеризация и мультипликативное представление однородных полиномов, сохраняющих дизъюнктность // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, № 1.—С. 51–62. DOI: 10.23671/VNC.2016.1.5951.
17. *Кусраева З. А.* О компактной мажорации однородных ортогонально аддитивных полиномов // Сиб. матем. журн.—2016.—Т. 57, № 3.—С. 658–665. DOI: 10.17377/smzh.2016.57.313.
18. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—London etc.: Acad. Press Inc., 1985.—xvi+367 p.
19. *Maligranda L.* Type, cotype and convexity properties of quasi-banach spaces // Proc. of the International Symposium on Banach and Function Spaces (Kitakyushu, Japan).—Yokohama: Yokohama Publ., 2004.—P. 83–120.
20. *Kalton N. J.* Quasi-Banach spaces / Eds.: W. B. Johnson and J. Lindenstrauss // Handbook of the Geometry of Banach Spaces.—Amsterdam: Elsevier, 2003.—Vol. 2.—P. 1118–1130.
21. *Boulabiar K., Buskes G.* Vector lattice powers: f-algebras and functional calculus // Comm. Algebra.—2006.—Vol. 34, № 4.—P. 1435–1442. DOI: 10.1080/00927870500454885.
22. *Ben Amor F.* Orthogonally additive homogenous polynomials on vector lattices // Comm. Algebra.—2015.—Vol. 43, № 3.—P. 1118–1134. DOI: 10.1080/00927872.2013.865038.
23. *Benyamini Y., Lassalle S., Llavona J. G.* Homogeneous orthogonally additive polynomials on Banach lattices // Bull. London Math. Soc.—2006.—Vol. 38, № 3.—P. 459–469. DOI: 10.1112/S0024609306018364.
24. *Ibort A., Linares P., Llavona J. G.* A representation theorem for orthogonally additive polynomials on Riesz spaces // Rev. Mat. Complut.—2012.—Vol. 25.—P. 21–30. DOI: 10.1007/s13163-010-0053-4.
25. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—СПб.: Невский Диалект; БХВ-Петербург, 2004.—816 с.
26. *Kusraev A. G.* Dominated Operators.—Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2000.—xiv+446 p. DOI: 10.1007/978-94-015-9349-6.
27. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1991.—xv+395 p. DOI: 10.1007/978-3-642-76724-1.
28. *Buskes G., Schwanke C.* Characterizing bounded orthogonally additive polynomials on vector lattices // Arch. Math.—2019.—Vol. 112.—P. 181–190. DOI: 10.1007/s00013-018-1251-4.
29. *Schwanke C.* Some notes on orthogonally additive polynomials // Functional Analysis.—2020.—arXiv:2012.13124.
30. *Gutman A. E.* Disjointness preserving operators // Vector Lattices and Integral Operators / Ed.: S. S. Kutateladze.—Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publ., 1996.—P. 359–454.—(Mathematics and its Applications, vol 358.). DOI: 10.1007/978-94-009-0195-7_5.
31. *Abramovich Y. A., Aliprantis C. D.* Positive operators // Handbook of the Geometry of Banach Spaces. Vol. 1 / Eds.: W. B. Johnson and J. Lindenstrauss.—Amsterdam a. o.: Elsevier, 2001.—P. 85–122.

32. *Flores J., Hernández F. L., Tradacete P.* Domination problems for strictly singular operators and other related classes // Positivity.—2011.—Vol. 15, № 4.—P. 595–616. DOI: 10.1007/s11117-010-0100-x.
33. *Cuartero B., Triana M.A.*(p, q)-Convexity in quasi-Banach lattices and applications // Stud. Math.—1986.—Vol. 84.—P. 113–124. DOI: 10.4064/sm-84-2-113-124.
34. *Wickstead A. W.* Converses for the Dodds–Fremlin and Kalton–Saab theorems // Math. Proc. Camb. Phil. Soc.—1996.—Vol. 120, № 1.—P. 175–179. DOI: 10.1017/S0305004100074752.
35. *Wickstead A. W.* Extremal structure of cones of operators // Quart. J. Math. Oxford Ser.—1981.—Vol. 32, № 2.—P. 239–253.
36. *Li Y., Bu Q.* Majorization for compact and weakly compact polynomials on Banach lattices / Eds.: Buskes at al. // Positivity and Noncommutative Analysis, Trends in Mathematics.—Cham: Birkhauser/Springer, 2019.—P. 339–348. DOI: 10.1007/978-3-030-10850-2_18.
37. *Kusraev A. G., Kusraeva Z. A.* Compact disjointness preserving polynomials on quasi-Banach lattices // J. Math. Anal. Appl.—2021.—Vol. 498. № 1.—Article: 124924. DOI: 10.1016/j.jmaa.2021.124924.
38. *Reisner S.* Operators which factor through convex Banach lattices // Canad. J. Math.—1980.—Vol. 32, № 6.—P. 1482–1500. DOI: 10.4153/CJM-1980-117-5.
39. *Raynaud Y., Tradacete P.* Interpolation of Banach lattices and factorization of p-convex and q-concave operators // Integral Equat. and Oper. Theory.—2010.—Vol. 66.—P. 79–112. DOI: 10.1007/s00020-009-1733-7.
40. *Pisier G.* Grothendieck's theorem, past and present // Bull. Amer. Math. Soc.—2012.—Vol. 49, № 2.—P. 237–323. DOI: 10.1090/S0273-0979-2011-01348-9.
41. *Krivine J. L.* Théorèmes de factorization dans les espaces réticules // Seminaire Analyse Fonctionalle (dit. "Maurey-Schwartz").—1973–1974.—№ 22–23.—P. 1–22.
42. *Kalton N. J.* Convexity conditions for non-locally convex lattices // Glasgow Math. J.—1984.—Vol. 25, № 2.—P. 141–152. DOI: 10.1017/S0017089500005553.
43. *Diestel J., Jarchow H., Tonge A.* Absolutely Summing Operators.—N. Y.: Cambridge Univ. Press, 1995. DOI: 10.1017/CBO9780511526138.
44. *Bu Q., Buskes G., Li Y.* Abstract M- and abstract L-spaces of polynomials on Banach lattices // Proc. Edinb. Math. Soc.—2015.—Vol. 58, № 3.—P. 617–629.
45. *Dănet N.* p-Convexity (p-concavity) of some Banach lattices of operators // Analele Universitatii din Craiova Seria Matematică–Fizică–Chimie.—1985.—Vol. 13.—P. 38–45.
46. *Bernau C. B., Huijsmans C. B., de Pagter B.* Sums of lattice homomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc.—1992.—Vol. 115, № 1.—P. 151–156. DOI: 10.1090/S0002-9939-1992-1086322-8.
47. *Dineen S.* Extreme integral polynomials on a complex Banach space // Math. Scand.—2003.—Vol. 92, № 1.—P. 129–140. DOI: 10.7146/math.scand.a-14397.
48. *Dimant V., Galicer D. and García R.* Geometry of integral polynomials, M-ideals and unique norm preserving extensions // J. of Funct. Anal.—2012.—Vol. 262, № 5.—P. 1987–2012. DOI: 10.1016/j.jfa.2011.12.021.
49. *Wickstead A. W., When do the regular operators between two Banach lattices form a lattices* // Positivity and Noncommutative Analysis / Eds. G. Buskes et al. Trends in Mathematics.—Springer, 2019.—P. 591–599.

Статья поступила 7 мая 2021 г.

Кусраева Залина Анатольевна
Региональный научно-образовательный математический
центр «Северо-Кавказский центр математических исследований» ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
E-mail: zali13@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-8817-1888

Vladikavkaz Mathematical Journal
2021, Volume 23, Issue 3, P. 91–112

ORDER PROPERTIES OF HOMOGENEOUS ORTHOGONALLY ADDITIVE POLYNOMIALS

Kusraeva, Z. A. [1,2]
[1]North-Caucasian Center for Mathematical Research,
22 Markus St., Vladikavkaz 362027, Russia;
[2]Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Markus St., Vladikavkaz 362027, Russia
E-mail: `zali13@mail.ru`

Dedicated to the 80-th anniversary
of Professor Stefan Samko

Abstract. This is a survey of author's results on the structure of orthogonally additive homogeneous polynomials in vector, Banach and quasi-Banach lattices. The research method is based on the linearization by means of the power of a vector lattice and the canonical polynomial, presented in Section 1. Next, in Section 2, some immediate applications are given: criterion for kernel representability, existence of a simultaneous extension and multiplicative representation from a majorizing sublattice, a characterization of extreme extensions. Section 3 provides a complete description and multiplicative representation for homogeneous disjointness preserving polynomials. Section 4 is devoted to the problem of compact and weakly compact domination for homogeneous polynomials in Banach lattices. Section 5 deals with convexity and concavity of homogeneous polynomials between quasi-Banach lattices, while Section 6 handle the condition under which the quasi-Banach lattice of orthogonally additive homogeneous polynomials is (p,q)-convex, or (p,q)-concave, or geometrically convex. Section 7 provides a characterization and analytic description of polynomials representable as a finite sum of disjointness preserving polynomials. Finally, some challenging open problems are listed in Section 8.

Key words: vector lattice, quasi-Banach lattice, the power of a vector lattice, polymorphism, linearization, factorization, domination problem, integral representations.

Mathematical Subject Classification (2010): 46A16; 46B42; 46G25; 47A40; 47H60.

For citation: *Kusraeva, Z. A.* Order Properties of Homogeneous Orthogonally Additive Polynomials, *Vladikavkaz Math. J.*, 2021, vol. 23, no. 3, pp. 91–112 (in Russian). DOI: 10.46698/l0779-9998-4272-b.

References

1. *Dineen, S. Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces*, Berlin, Springer, 1999.
2. *Grecu, B. C. and Ryan, R. A.* Polynomials on Banach Spaces with Unconditional Bases, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 2005, vol. 133, no. 4, pp. 1083–1091. DOI: 10.1090/S0002-9939-04-07738-X.
3. *Bu, Q. and Buskes, G.* Polynomials on Banach Lattices and Positive Tensor Products, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2012, vol. 388, no 2, pp. 845–862. DOI: 10.1016/j.jmaa.2011.10.001.
4. *Loane, J.* Polynomials on Riesz Spaces, *Thesis, Department of Mathematics National Univercity of Ireland*, Galway, 2007.
5. *Linares, P.* Orthogonal Additive Polynomials and Applications *Thesis, Departamento de Analisis Matematico, Universidad Complutense de Madrid*, 2009.
6. *Kusraeva, Z. A. Orthogonally Additive Polynomials on Vector Lattices*: PhD Thesis, Novosibirsk, Sobolev Institute of Mathematics, 2013.
7. *Kusraeva, Z. A.* Powers of Quasi-Banach Lattices and Orthogonally Additive Polynomials, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2018, vol. 458, no. 1, pp. 767–780. DOI: 10.1016/j.jmaa.2017.09.019.

8. *Kusraeva, Z. A.* Convexity Conditions for the Space of Regular Operators, *Positivity*, 2019, vol. 23, no. 2, pp. 445–459. DOI: 10.1007/s11117-018-0616-z.
9. *Kusraev A. G., Kusraeva Z. A.* Sums of Order Bounded Disjointness Preserving Linear Operators, *Siberian Mathematical Journal*, 2019, vol. 60, no. 1, pp. 114–123. DOI: 10.1134/S0037446619010130.
10. *Kusraeva, Z. A.* Monomial Decomposition of Homogeneous Polynomials in Vector Lattices, *Advances in Operator Theory*, 2019, vol. 4, no. 2, pp. 428–446. DOI: 10.15352/aot.1807-1394.
11. *Kusraeva, Z. A.* Sums of Disjointness Preserving Multilinear Operators, *Positivity*, 2021, vol. 25, no. 2, pp. 669–678. DOI: 10.1007/s11117-020-00781-7.
12. *Kusraeva, Z. A.* Representation of Orthogonally Additive Polynomials, *Siberian Mathematical Journal*, 2011, vol. 52, article number: 248. DOI: 10.1134/S003744661102008X.
13. *Kusraeva, Z. A.* On Extension of Regular Homogeneous Orthogonally Additive Polynomials, *Vladikavkaz Math. J.*, 2011, vol. 13, no. 4, pp. 28–34.
14. *Kusraeva, Z. A.* Homogeneous Orthogonally Additive Polynomials on Vector Lattices, *Mathematical Notes*, 2012, vol. 91, no. 5, pp. 657–662. DOI: 10.1134/S0001434612050069.
15. *Kusraeva, Z. A.* Homogeneous Polynomials, Root Mean Power, and Geometric Means in Vector Lattices, *Vladikavkaz Math. J.*, 2014, vol. 16, no. 4, pp. 49–53. DOI: 10.23671/VNC.2014.4.10260.
16. *Kusraeva, Z. A.* Characterization and Multiplicative Representation of Homogeneous Disjointness Preserving Polynomials, *Vladikavkaz Math. J.*, 2016, vol. 18, no. 1, pp. 51–62. DOI: 10.23671/VNC.2016.1.5951.
17. *Kusraeva, Z. A.* On Compact Domination of Homogeneous Orthogonally Additive Polynomials, *Siberian Mathematical Journal*, 2016, vol. 57, no. 3, pp. 519–524. DOI: 10.17377/smzh.2016.57.313.
18. *Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. Positive Operators*, London etc., Acad. Press Inc., 1985.
19. *Maligranda, L.* Type, Cotype and Convexity Properties of Quasi-Banach Spaces, *Proceedings of the International Symposium on Banach and Function Spaces* (Kitakyushu, Japan), Yokohama, Yokohama Publ., 2004, pp. 83–120.
20. *Kalton, N. J.* Quasi-Banach Spaces / Eds. W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, Amsterdam, Elsevier, 2003, vol. 2, pp. 1118–1130.
21. *Boulabiar, K. and Buskes, G.* Vector Lattice Powers: f-Algebras and Functional Calculus, *Communications in Algebra*, 2006, vol. 34, no. 4, pp. 1435–1442. DOI: 10.1080/00927870500454885.
22. *Ben Amor, F.* Orthogonally Additive Homogenous Polynomials on Vector Lattices, *Communications in Algebra*, 2015, vol. 43, no. 3, pp. 1118–1134. DOI: 10.1080/00927872.2013.865038.
23. *Benyamini, Y., Lassalle, S. and Llavona, J. G.* Homogeneous Orthogonally Additive Polynomials on Banach Lattices, *Bulletin of the London Mathematical Society*, 2006, vol. 38, no. 3, pp. 459–469. DOI: 10.1112/S0024609306018364.
24. *Ibort, A., Linares, P. and Llavona, J. G.* A Representation Theorem for Orthogonally Additive Polynomials on Riesz Spaces, *Revista Matemática Complutense*, 2012, vol. 25, pp. 21–30. DOI: 10.1007/s13163-010-0053-4.
25. *Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P. Functional Analysis*, St. Petersburg, Nevsky Dialect; BHV-Petersburg, 2004.
26. *Kusraev, A. G. Dominated Operators*, Dordrecht, Kluwer Academic Publ., 2000. DOI: 10.1007/978-94-015-9349-6.
27. *Meyer-Nieberg, P. Banach Lattices*, Berlin etc., Springer-Verlag, 1991. DOI: 10.1007/978-3-642-76724-1.
28. *Buskes, G. and Schwanke, C.* Characterizing Bounded Orthogonally Additive Polynomials on Vector Lattices, *Archiv der Mathematik*, 2019, vol. 112, pp. 181–190. DOI: 10.1007/s00013-018-1251-4.
29. *Schwanke, C.* Some Notes on Orthogonally Additive Polynomials, *Functional Analysis*, 2020, arXiv:2012.13124.
30. *Gutman, A. E. Disjointness Preserving Operators*, *Vector Lattices and Integral Operators* / Ed.: S. S. Kutateladze, *Mathematics and Its Applications*, vol. 358, Dordrecht etc., Kluwer Academic Publ., 1996, pp. 359–454. DOI: 10.1007/978-94-009-0195-7_5.
31. *Abramovich, Y. A. and Aliprantis, C. D.* Positive Operators, *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*, vol. 1 / Eds. W. B. Johnson and J. Lindenstrauss, Amsterdam a. o., Elsevier, 2001, pp. 85–122.
32. *Flores, J., Hernández, F. L. and Tradacete, P.* Domination Problems for Strictly Singular Operators and Other Related Classes, *Positivity*, 2011, vol. 15, no. 4, pp. 595–616. DOI: 10.1007/s11117-010-0100-x.
33. *Cuartero B. and Triana M. A.* (p, q)-Convexity in Quasi-Banach Lattices and Applications, *Studia Mathematica*, 1986, vol. 84, pp. 113—124. DOI: 10.4064/sm-84-2-113-124.
34. *Wickstead, A. W.* Converses for the Dodds–Fremlin and Kalton—Saab Theorems, *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 1996, vol. 120, no. 1, pp. 175–179. DOI: 10.1017/S0305004100074752.

35. *Wickstead, A. W.* Extremal Structure of Cones of Operators, *The Quarterly Journal of Mathematics*, 1981, vol. 32, no. 2, pp. 239–253.
36. *Li, Y. and Bu, Q.* Majorization for Compact and weakly Compact Polynomials on Banach Lattices /Eds.: Buskes at al., *Positivity and Noncommutative Analysis, Trends in Mathematics*, Cham, Birkhauser/Springer, 2019, pp. 339–348. DOI: 10.1007/978-3-030-10850-2_18.
37. *Kusraev, A. G. and Kusraeva, Z. A.* Compact Disjointness Preserving Polynomials on Quasi-Banach Lattices, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 2021, vol. 498, no. 1, article: 124924. DOI: 10.1016/j.jmaa.2021.124924.
38. *Reisner, S.* Operators which Factor Through Convex Banach Lattices, *Canadian Journal of Mathematics*, 1980, vol. 32, no. 6, pp. 1482–1500. DOI: 10.4153/CJM-1980-117-5.
39. *Raynaud, Y. and Tradacete, P.* Interpolation of Banach Lattices and Factorization of p-Convex and q-Concave Operators, *Integral Equations and Operator Theory*, 2010, vol. 66, pp. 79–112. DOI: 10.1007/s00020-009-1733-7.
40. *Pisier, G.* Grothendieck's Theorem, Past and Present, *Bulletin of the American Mathematical Society*, 2012, vol. 49, no. 2, pp. 237–323. DOI: 10.1090/S0273-0979-2011-01348-9.
41. *Krivine J. L.* Théorèmes de Factorization dans les Espaces Réticules, *Seminaire Analyse Fonctionalle* (*dit. "Maurey-Schwartz"*), 1973-1974, pp. 12–13.
42. *Kalton, N. J.* Convexity Conditions for Non-Locally Convex Lattices, *Glasgow Mathematical Journal*, 1984, vol. 25, no. 2, pp. 141–152. DOI: 10.1017/S0017089500005553.
43. *Diestel, J., Jarchow, H. and Tonge, A. Absolutely Summing Operators*, N. Y., Cambridge Univ. Press, 1995. DOI: 10.1017/CBO9780511526138.
44. *Bu, Q., Buskes, G. and Li, Y.* Abstract M- and Abstract L-Spaces of Polynomials on Banach Lattices, *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 2015, vol. 58, no. 3, pp. 617–629.
45. *Dănet, N.* p-Convexity (p-Concavity) of Some Banach Lattices of Operators, *Analele Universitatii din Craiova Seria Matematică–Fizică–Chimie*, 1985, vol. 13, p. 38–45.
46. *Bernau, C. B., Huijsmans, C. B. and de Pagter, B.* Sums of Lattice Homomorphisms, *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1992, vol. 115, no. 1, pp. 151–156. DOI: 10.1090/S0002-9939-1992-1086322-8.
47. *Dineen S.* Extreme Integral Polynomials on a Complex Banach Space, *Mathematica Scandinavica*, 2003, vol. 92, no. 1, pp. 129–140. DOI: 10.7146/math.scand.a-14397.
48. *Dimant V., Galicer D. and García R.* Geometry of Integral Polynomials, M-Ideals and Unique Norm Preserving Extensions, Journal Of Functional Analysis, 2012, vol. 262, no 5, pp. 1987–2012. DOI: 10.1016/j.jfa.2011.12.021.
49. *Wickstead, A. W.* When do the Regular Operators Between two Banach Lattices form a Lattices, *Positivity and Noncommutative Analysis* / Eds. G. Buskes et al., Trends in Mathematics, Springer, 2019, pp. 591—599.

Received May 7, 2021

Zalina A. Kusraeva
North-Caucasian Center for Mathematical Research,
22 Markus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Leading Researcher
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Markus St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Leading Researcher
E-mail: zali13@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-8817-1888