Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 2, С. 62–74

УДК 517.928.7
DOI 10.46698/i7381-0821-3887-y

УСРЕДНЕНИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ НОРМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ОДУ С МНОГОТОЧЕЧНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Д. Бигириндавйи[1]**, В. Б. Левенштам**[1,2]
[1] Южный федеральный университет,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: `bigirindavyidaniel@gmail.com`, `vlevenshtam@yandex.com`

Аннотация. Рассматривается многоточечная краевая задача для нелинейной нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с быстро осциллирующей по времени правой частью. Некоторые слагаемые правой части могут иметь большую амплитуду — пропорциональную квадратному корню из частоты осцилляций. Для этой зависящей от большого параметра (высокой частоты осцилляций) задачи обоснован метод усреднения Крылова — Боголюбова. Именно, для указанной задачи, которую называют возмущенной, построена предельная (усредненная) многоточечная краевая задача и обоснован предельный переход (т. е. доказана асимптотическая близость решений возмущенной и усредненной задач) в гельдеровом пространстве определенных на рассматриваемом временном отрезке вектор-функций. Используемый в данной работе подход опирается на классическую теорему о неявной функции в банаховом пространстве; этот подход в теории метода усреднения впервые применил, по-видимому, И. Б. Симоненко (см. указанную в статье соответствующую ссылку) при обосновании этого метода для абстрактных параболических уравнений в случае задачи Коши и задачи о периодических по времени решениях. Метод усреднения Крылова — Боголюбова является одним из важнейших асимптотических методов. Он широко известен и разработан с большой полнотой для различных классов уравнений. В многочисленных работах, в которых рассматриваются системы обыкновенных дифференциальных уравнений, изучаются, в основном, задача Коши на отрезке и задачи о периодических, почти периодических и общих ограниченных на всей временной оси решениях. Краевые задачи — особенно многоточечные — представлены в литературе еще недостаточно.

Ключевые слова: нормальная система ОДУ, большие высокочастотные слагаемые, метод усреднения, многоточечная краевая задача.

AMS Subject Classification: 34C29, 34E15, 34E10.

Образец цитирования: *Бигириндавйи Д., Левенштам В. Б.* Усреднение высокочастотной нормальной системы ОДУ с многоточечными краевыми условиями // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 2.—С. 62–74. DOI: 10.46698/i7381-0821-3887-y.

1. Введение

Метод усреднения, который обычно связывают с именами Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова, является одним из важнейших асимптотических методов. Он широко известен и разработан с большой полнотой, прежде всего, для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, которые здесь и рассматриваются. В многочисленных монографиях и журнальных статьях изучались, в основном, задача Коши на отрезке и задачи о периодических, почти периодических и общих ограниченных на всей оси решениях (см., например [1–3] и имеющуюся там библиографию). Однако, для краевых задач — особенно многоточечных — он разработан еще недостаточно. Укажем здесь три работы, наиболее близкие к данной статье: это работы [4, 5], где метод усреднения обоснован для двухточечных краевых задач, а также работа [6], где он обоснован для многоточечных краевых задач при произвольном числе точек $m \geqslant 2$. В работах [4–6] используются разные подходы к изучению рассматриваемых задач. Исследования [4, 5] опираются на классическую теорему о неявной функции в банаховом пространстве; этот подход в теории метода усреднения впервые применил, по-видимому, И. Б. Симоненко в работе [7] при обосновании этого метода для абстрактных параболических уравнений в случае задачи Коши и задачи о периодических по времени решениях. В работе [6], в отличие от этого, используется классическая лемма Гронуолла.

Отметим, что в [6] постулируется существование решения не только усредненной задачи — это традиционное требование в теории метода усреднения, — но и существование решения значительно более сложной возмущенной задачи. В данной работе существование решения последней не требуется. Здесь существование и относительная единственность этого решения выводятся из соответствующих естественных условий. Кроме того, рассматриваемая в данной работе возмущенная система, в отличие от [6], может дополнительно содержать большие (пропорциональные положительным степеням частоты осцилляций) высокочастотные слагаемые. При этом, естественно, требования гладкости данных задачи здесь выше, нежели в [6].

Отметим еще, что усреднение систем, содержащих большие высокочастотные слагаемые, впервые начал изучать, по-видимому, В. И. Юдович (см., обзор [8]). Позднее многие такого рода задачи исследовал второй автор данной работы с учениками [9–11].

2. Основной результат

Пусть Ω — ограниченная область пространства $\mathbb{R}^n$, $T > 0$, $D = \{(x,t) : x \in \Omega,\ t \in [0,T]\}$ и $Q = \{(x,t,\tau) : (x,t) \in D,\ \tau \in [0,\infty)\}$. Рассмотрим многоточечную краевую задачу для нормальной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с большим параметром ω:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,t,\omega t) + \sqrt{\omega}\varphi(x,t,\omega t),\ \ t \in [0,T]; \\ \sum\limits_{i=1}^{m} P_i(\omega) x(t_i) = a(\omega). \end{cases} \tag{1}$$

Здесь m, n — натуральные числа, $P_i(\omega)$, $i = 1,\dots,m$, — квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами, $0 = t_1 < t_2 \dots < t_m = T$, $a(\omega) \in \mathbb{R}^n$. Вектор-функции $f(x,t,\tau)$ и $\varphi(x,t,\tau)$ определены на множестве Q, принимают значения в $\mathbb{R}^n$ и удовлетворяют следующим условиям:

1. Вектор-функции $f(x,t,\tau)$, $\varphi(x,t,\tau)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial t}(x,t,\tau)$ и матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial t\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t,\tau)$ определены и непрерывны на множестве Q. Здесь $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)$ — якобиева матрица, т. е. $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau) = \left(\frac{\partial\varphi_i(x,t,\tau)}{\partial x_j}\right)_{i,j=1}^n$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t,\tau) = \left(\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial x_i\partial x_j}(x,t,\tau)\right)_{k,i,j=1}^n$ — матрица размера $n \times n^2$, где k — номер строки.

2. Вектор-функция $\varphi(x,t,\tau)$ 2π-периодична по τ с нулевым средним по периоду:

$$\langle\varphi(x,t,\tau)\rangle_\tau = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \varphi(x,t,\tau)\,d\tau = 0.$$

Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\chi(x,t,\tau) \equiv \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,t,\tau)\left[\int\limits_0^{\tau}\varphi(x,t,s)\,ds - \left\langle\int\limits_0^{\tau}\varphi(x,t,s)\,ds\right\rangle_{\tau}\right],$$

которая в силу условий 1, 2 вместе с производной $\frac{\partial\chi}{\partial x}(x,t,\tau)$ определена и непрерывна на множестве Q.

3. Для любых двух точек (x,t_1,τ) и $(x,t_2,\tau) \in Q$ выполняются неравенства $|z(x,t_2,\tau) - z(x,t_1,\tau)| \leqslant \gamma(|t_2 - t_1|)$, где $z = f, \frac{\partial f}{\partial x}$, $\gamma(r)$, $r \geqslant 0$, — непрерывная в нуле функция такая, что $\gamma(0) = 0$.

В данной работе символами $|x|$ и $\|A\|$ обозначены нормы вектора $x \in \mathbb{R}^n$ и квадратной матрицы A порядка n, которые согласованы, т. е. $|Ax| \leqslant \|A\||x|$.

Можно, например, считать, что $|x| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|$, $\|A\| = \max_{1\leqslant i,j\leqslant n}|a_{ij}|$, где x_i и a_{ij} — компоненты вектора x и элементы матрицы A соответственно.

4. Вектор-функция $f(x,t,\tau)$ и матрица-функция $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$ равномерно ограничены на множестве Q.

5. Матрица-функции $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial t}(x,t,\tau)$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(x,t,\tau)$ удовлетворяют равномерному условию Липшица по x.

6. Вектор-функция $f(x,t,\tau)$ имеет равномерное среднее по τ, а потому существует вектор-функция $\Psi(x,t)$, определенная на D, со значениями в $\mathbb{R}^n$ такая, что равномерно относительно $(x,t) \in D$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int\limits_0^T\big(f(x,t,\tau) + \chi(x,t,\tau)\big)\,\mathrm{d}\tau = \Psi(x,t).$$

Будем предполагать, что формально продифференцировав последнее равенство по x, мы получим также равномерное относительно $(x,t) \in D$ предельное равенство.

7. Для некоторых квадратных матриц S_i, $0 \leqslant i \leqslant m$, и вектора a_0 имеют место предельные соотношения: $\|P_i(\omega) - S_i\| \to 0$, $|a(\omega) - a_0| \to 0$ при $\omega \to \infty$.

Рассмотрим усредненную (предельную) задачу

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \Psi(\xi,t), \quad t \in [0,T], \\ \sum\limits_{i=1}^{m} S_i\xi(t_i) = a_0. \end{cases} \tag{2}$$

8. Задача (2) имеет решение $\overset{o}{\xi}(t)$, $t \in [0,T]$, и существует[1] такая строго внутренняя выпуклая подобласть Ω_0 области Ω, что $\overset{o}{\xi}(t) \in \Omega_0$ при $t \in [0,T]$.

9. Справедливо соотношение:

$$\Delta = \det\left[\sum_{i=1}^{m} S_i\Phi(t_i)\right] \neq 0,$$

где $\Phi(t)$ — матрицант системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \left[\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\big(\overset{o}{\xi},t\big)\right]x.$$

[1] Предположение о существовании указанной подобласти Ω_0 не является принципиальным, а принято лишь для упрощения дальнейшего изложения.

Далее нам понадобится известное банахово пространство $C_\mu([0,T])$, $\mu \in (0,1)$, т. е. пространство непрерывных вектор-функций $w : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ($w \in C([0,T])$), удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем μ и снабженных нормой

$$||w||_{C_\mu([0,T])} = \max_{0\leqslant t\leqslant T}|w(t)| + \sup_{0\leqslant t_1<t_2\leqslant T}\frac{|w(t_2)-w(t_1)|}{(t_2-t_1)^\mu} < \infty.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Для любого* $\mu \in (0,\frac{1}{2})$ *найдется такое* $\omega_0 > 0$, *что задача* (1) *при* $\omega > \omega_0$ *имеет единственное в некоторой* $C_\mu([0,T])$*-окрестности вектор-функции* $\overset{o}{\xi}(t)$ *решение* $x_\omega(t)$ *и справедливо предельное равенство* $\lim_{\omega\to\infty}\|x_\omega(t) - \overset{o}{\xi}(t)\|_{C_\mu([0,T])} = 0$.

3. Доказательство теоремы

Схема доказательства теоремы следующая. Вначале с помощью замены переменных, типа классической замены Н. М. Крылова и Н. Н. Боголюбова [1–3], в уравнении (1) избавимся от слагаемого, пропорционального $\sqrt{\omega}$. Затем осуществим переход от полученной в результате указанной замены переменных задачи к интегральному уравнению и, наконец, к последнему применим теорему о неявной функции в банаховом пространстве, из которой и будет следовать утверждение теоремы.

Вначале отметим два вспомогательных результата.

В силу непрерывности матрица-функции $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,t,\tau)$ и 2π-периодичности ее по τ с нулевым средним найдется такое $\omega_1 > 0$[2], что для всех $(y,t) \in \Omega_0 \times [0,T] \equiv D_0$ при $\omega > \omega_1$ и $t \in [0,T]$ выполняется оценка

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{\omega}}\int\limits_0^{\omega t}\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,t,\tau)\,d\tau\right\| < \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Пусть вектор-функция $g(\tau)$, определенная при $\tau \geqslant 0$ и принимающая значения в $\mathbb{R}^n$, непрерывна и 2π-периодична с нулевым средним:

$$\langle g(\tau)\rangle_\tau = 0.$$

Тогда уравнение

$$\frac{dx}{d\tau} = g(\tau), \tag{4}$$

как известно, имеет единственное 2π-периодическое с нулевым средним решение, причем последнее имеет вид

$$x(\tau) = \int\limits_0^\tau g(s)\,ds - \left\langle\int\limits_0^\tau g(s)\,ds\right\rangle_\tau.$$

Рассмотрим теперь вектор-функцию $\alpha(y,t,\tau)$, которая определена на множестве $Q_0 = D_0 \times [0,\infty)$, 2π-периодична по τ с нулевым средним и удовлетворяет равенству

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\tau}(y,t,\tau) = \varphi(y,t,\tau). \tag{5}$$

[2] В работе символом ω_1 мы обозначаем, вообще говоря, различные достаточные большие числа.

Уравнение (5) согласно предыдущему результату имеет единственное 2π-периодическое по τ с нулевым средним решение

$$\alpha(y,t,\tau) = \int\limits_0^\tau \varphi(y,t,s)\,ds - \left\langle \int\limits_0^\tau \varphi(y,t,s)\,ds \right\rangle_\tau . \tag{6}$$

Поскольку вектор-функции $\varphi(y,t,\tau)$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,t,\tau)$ непрерывны на множестве Q_0 и 2π-периодичны по τ с нулевым средним, то в силу (6) на этом множестве вектор-функции $\alpha(y,t,\tau)$ и $\frac{\partial\alpha}{\partial y}(y,t,\tau)$ ограничены.

Обозначим через S_0 множество непрерывно-дифференцируемых вектор-функций $y:[0,T]\to\Omega_0$ таких, что для некоторого $\delta>0$ значения $y(t)$ лежат в Ω_0 вместе с δ-окрестностью.

В задаче (1) при достаточно больших ω сделаем замену переменных:

$$x(t) = y(t) + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\alpha(y(t),t,\omega t) \equiv y(t) + \beta(y,t,\omega), \quad y\in S_0. \tag{7}$$

Из теоремы о неявной функции в банаховом пространстве следует существование таких содержащихся в S_0 шаров S_1 и S_2 с центром $\xi_0(t)$ в $C[0,T]$ — пространстве и таких положительных чисел ω_1 и ω_2, что при $\omega>\omega_1$ соотношение (7) каждому $x\in S_1$ ставит в соответсвие единственный вектор $y\in S_2$, а при $\omega>\omega_2$ каждому $y\in S_2$ ставит в соответствие единственый вектор $x\in S_1$. При этом из соотношения $x\in C_1([0,T])$ следует $y\in C_1([0,T])$, и наоборот. Производная y', например, может быть определена из уравнения

$$\left[I + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right] y' = x' - \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial\alpha}{\partial s_1}(y(t),s_1,\omega t)\Big|_{s_1=t} - \sqrt{\omega}\frac{\partial\alpha}{\partial s_2}(y(t),t,s_2)\Big|_{s_2=\omega t}, \quad \omega>\omega_1,$$

где I — единичная матрица.

Задача (1) в результате замены переменных (7) примет вид:

$$\begin{cases} \left[I + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right]\frac{dy}{dt} = [f(y,t,\omega t) + \chi(y,t,\omega t)] + f(y+\beta,t,\omega t) - f(y,t,\omega t) \\ -\frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial\alpha}{\partial s}(y,s,\omega t)|_{s=t} + \sqrt{\omega}\left(\varphi(y+\beta,t,\omega t) - \varphi(y,t,\omega t) - \frac{1}{\sqrt{\omega}}\chi(y,t,\omega t)\right) \\ \equiv \Gamma(y,t,\omega t) + r(y,t,\omega); \\ \sum\limits_{i=1}^m P_i(\omega)\left[y(t_i) + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\int\limits_0^{\omega t_i}\varphi(y(t_i),t_i,s)\,ds - \left\langle\int\limits_0^\tau \varphi(y(t_i),t_i,s)\,ds\right\rangle_\tau\right)\right] \\ = a(\omega), \quad \omega\gg 1, \end{cases} \tag{8}$$

где $\Gamma(y,t,\tau) = f(y,t,\tau) + \chi(y,t,\tau)$. Учитывая неравенство (3), от задачи (8) перейдем к задаче

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = \left(I + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial\alpha}{\partial y}\right)^{-1}[\Gamma(y,t,\omega t) + r(y,t,\omega)] \equiv \Gamma(y,t,\omega t) + R(y,t,\omega) \equiv F(y,t,\omega); \\ \sum\limits_{i=1}^m P_i(\omega)\left[y(t_i) + \frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\int\limits_0^{\omega t_i}\varphi(y(t_i),t_i,s)\,ds - \left\langle\int\limits_0^\tau \varphi(y(t_i),t_i,s)\,ds\right\rangle_\tau\right)\right] = a(\omega). \end{cases} \tag{9}$$

Здесь $R(y,t,\omega) = (I+\mu_\omega)^{-1}[\Gamma(y,t,\omega t) + r(y,t,\omega)] - \Gamma(y,t,\omega)$, где $\mu_\omega(y,t,\omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{\omega}}\int_0^{\omega t}\frac{\partial\varphi}{\partial y}(y,t,s)\,ds$, $(y,t)\in D_0$.

Лемма 1. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\omega_1 > 0$ такое, что при всех $(y,t) \in D_0$ и $\omega > \omega_1$ для вектор-функции R выполняются неравенства:*

$$|R(y,t,\omega)| < \varepsilon, \tag{10}$$

$$\left\| \frac{\partial R}{\partial y}(y,t,\omega) \right\| < \varepsilon. \tag{11}$$

$\lhd$ Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим

$$R(y,t,\omega) = R_1(y,t,\omega) + R_2(y,t,\omega),$$

где

$$R_1(y,t,\omega) = [(I+\mu_\omega)^{-1} - I]\Gamma(y,t,\omega t),$$
$$R_2(y,t,\omega) = (I+\mu_\omega)^{-1}\, r(y,t,\omega t).$$

В силу (3), очевидного равенства

$$(I+\mu_\omega)^{-1} - I = -\mu_\omega (I+\mu_\omega)^{-1} \tag{12}$$

и условий теоремы найдется $\omega_1 > 0$ такое, что при всех $\omega > \omega_1$ и $(y,t) \in D_0$ выполняется неравенство

$$|R_1(y,t,\omega)| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{13}$$

Перейдем к оценке слагаемого R_2. Поскольку вектор-функция $f(y,t,\tau)$ в области Q_0 удовлетворяет равномерному условию Липшица по y, а вектор-функция $\alpha(y,t,\tau)$ равномерно ограничена, то найдется $\omega_1 > 0$ такое, что при всех $\omega > \omega_1$ и $(y,t) \in D_0$ справедливо неравенство

$$\|\, (I+\mu_\omega)^{-1}\, [f(y+\beta,t,\omega t) - f(y,t,\omega t)]\, \| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Далее, с помощью формулы конечных приращений получаем соотношения:

$$\left| \sqrt{\omega} \left(\varphi(y+\beta,t,\omega t) - \varphi(y,t,\omega t) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\beta \right) \right| = \sqrt{\omega} \left\| \int\limits_0^1 \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y+\theta\beta,t,\omega t)\, d\theta \cdot \beta - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y,t,\omega t)\beta \right\|$$
$$\leqslant \left\| \int\limits_0^1 \left[\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y+\theta\beta,t,\omega t) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}(y,t,\omega t) \right] d\theta \right\| \cdot \sqrt{\omega}|\beta|.$$

Поскольку матрица-функция $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(y,t,\tau)$ удовлетворяет равномерному условию Липшица по y на Q_0, то существует $\omega_1 > 0$ такое, что при всех $\omega > \omega_1$ и $(y,t) \in D_0$ выполняется неравенство

$$\left| \sqrt{\omega}\, (I+\mu_\omega)^{-1} \left[\varphi(y+\beta,t,\omega t) - \varphi(y,t,\omega t) - \frac{\partial \varphi}{\partial y}\beta \right] \right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Очевидно, что в силу неравенства (3) и ограниченности $\frac{\partial \alpha}{\partial s}(y,s,\tau)|_{s=t}$ на Q_0 существует $\omega_1 > 0$ такое, что при всех $\omega > \omega_1$ и $(y,t) \in D_0$ выполняется неравенство

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{\omega}}\, (I+\mu_\omega)^{-1}\, \frac{\partial \alpha}{\partial s}(y,s,\tau) \Big|_{s=t} \right\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Таким образом, найдется $\omega_1 > 0$ такое, что при всех $(y,t) \in D_0$ и $\omega > \omega_1$ справедливо неравенство
$$|R_2(y,t,\omega)| < \frac{3\varepsilon}{4}. \tag{14}$$

Итак, согласно (13), (14) существует (достаточно большое) число ω_1 такое, что при всех $\omega > \omega_1$ и $(y,t) \in D_0$ выполняется неравенство (10). Неравенство (11) доказывается аналогично, поэтому мы приводить его здесь не будем, а укажем лишь два простых соотношения, которые непосредственно не использовались при доказательстве (10).

1. Существует $\omega_1 > 0$ такое, что при всех $(y,t) \in D_0$

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\partial}{\partial y}(I+\mu_\omega(y,t))^{-1}\right\| &= \left\|[I+\mu_\omega(y,t)]^{-1}\frac{\partial \mu_\omega}{\partial y}(y,t)[I+\mu_\omega(y,t)]^{-1}\right\| \\ &\leqslant \left\|\left((I+\mu_\omega)^{-1}\right)\right\|^2\left\|\frac{\partial \mu_\omega}{\partial y}(y,t)\right\| = O(\omega^{-\frac{1}{2}}), \quad \omega\to\infty.\end{aligned}$$

2. Справедливо равенство

$$\begin{aligned}\frac{\partial r_i}{\partial y_k}(y,t,\omega) &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right)(y+\beta,t,\omega t) - \left(\frac{\partial f_i}{\partial y_k}\right)(y,t,\omega t) \\ &\quad + \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial y_s}\right)(y+\beta,t,\omega t)\frac{\partial \beta_s}{\partial y_k} - \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{\partial^2\alpha_i(y,s,\omega t)}{\partial y_k\partial s}\bigg|_{s=t} \\ &+ \sqrt{\omega}\left[\left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\right)(y+\beta,t,\omega t) - \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_k}\right)(y,t,\omega t) - \sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial y_k\partial y_s}\right)(y,t,\omega t)\beta_s(y,t,\omega t)\right] \\ &\quad + \sum_{s=1}^{n}\left[\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_s}(y+\beta,t,\omega t)\frac{\partial \alpha_s}{\partial y_k} - \frac{\partial \varphi_i(y,t,\omega t)}{\partial y_s}\frac{\partial \alpha_s}{\partial y_k}\right], \quad i,k=1,\dots,n. \ \triangleright\end{aligned} \tag{15}$$

Перейдем теперь к непосредственному доказательству теоремы. Вначале в возмущенной задаче (9) и в усредненной задаче (2) сделаем замену переменных:
$$y = u + \overset{o}{\xi}, \quad \xi = v + \overset{o}{\xi}. \tag{16}$$

Полученные задачи запишем в виде
$$\begin{cases}\frac{du}{dt} - \left[\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\left(\overset{o}{\xi},t\right)\right]u = F\left(u+\overset{o}{\xi},t,\omega\right) - \Psi\left(\overset{o}{\xi},t\right) - \left[\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\left(\overset{o}{\xi},t\right)\right]u \equiv F_1(u,t,\omega);\\ \sum\limits_{i=1}^{m}P_i(\omega)\left\{u(t_i)+\overset{o}{\xi}(t_i)+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\left(\int\limits_0^{\omega t_i}\varphi(y(t_i),t_i,s)\,ds - \left\langle\int\limits_0^{\tau}\varphi(y(t_i),t_i,s)\,ds\right\rangle_\tau\right)\right\} = a_\omega,\end{cases} \tag{17}$$
и
$$\begin{cases}\frac{dv}{dt} - \left[\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}(\overset{o}{\xi},t)\right]v = \Psi\left(v+\overset{o}{\xi},t\right) - \Psi\left(\overset{o}{\xi},t\right) - \left[\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}\left(\overset{o}{\xi},t\right)\right]v \equiv \Psi_1(u,t);\\ \sum\limits_{i=1}^{m}S_i v(t_i) = 0.\end{cases} \tag{18}$$

От задач (17), (18) известным способом перейдем к эквивалентным интегральным уравнениям. Так, решение задачи (17) удовлетворяет уравнению
$$u(t) = \Phi(t)u_0 + \int\limits_0^t \Phi(t,s)F_1(u(s),s,\omega)\,ds,$$

где

$$\Phi(t,s)\equiv\Phi(t)\Phi^{-1}(s),\quad 0\leqslant s\leqslant t\leqslant T,$$

$$u_0=\left[\sum_{i=1}^{m}P_i(\omega)\Phi(t_i)\right]^{-1}\left\{a(\omega)-\sum_{i=1}^{m}P_i(\omega)\overset{o}{\xi}(t_i)-\sum_{i=1}^{m}P_i(\omega)\int\limits_0^{t_i}\Phi(t_i,s)F_1(u(s),s,\omega)\,ds\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sum_{i=1}^{m}P_i(\omega)\left[\int\limits_0^{\omega t_i}\varphi(y(t_i),t_i,s)\,ds-\left\langle\int\limits_0^{\tau}\varphi(y(t_i),t_i,s)\,ds\right\rangle_{\tau}\right]\right\}.$$

Таким образом, задача (17) эквивалентна уравнению

$$u(t)=\Phi(t)\left[\sum_{i=1}^{m}P_i(\omega)\Phi(t_i)\right]^{-1}\left\{a(\omega)-\sum_{i=1}^{m}P_i(\omega)\overset{o}{\xi}(t_i)\right.$$
$$-\sum_{i=1}^{m}P_i(\omega)\int\limits_0^{t_i}\Phi(t_i,s)F_1(u(s),s,\omega)\,ds-\frac{1}{\sqrt{\omega}}\sum_{i=1}^{m}P_i(\omega)\left[\int\limits_0^{\omega t_i}\varphi(y(t_i),t_i,s)\,ds\right.$$
$$\left.\left.-\left\langle\int\limits_0^{\tau}\varphi(y(t_i),t_i,s)\,ds\right\rangle_{\tau}\right]\right\}+\int\limits_0^{t}\Phi(t,s)F_1(u(s),s,\omega)\,ds$$
$$\equiv A(u,t,\omega)+\int\limits_0^{t}\Phi(t,s)F_1(u(s),s,\omega)\,ds\equiv H_0(u,t,\omega),\quad u\in C_1([0,t]),\qquad(19)$$

а задача (18) эквивалентна аналогичному уравнению

$$v(t)=-\Phi(t)\left[\sum_{i=1}^{m}S_i\Phi(t_i)\right]^{-1}\sum_{i=1}^{m}S_i\int\limits_0^{t_i}\Phi(t_i,s)\Psi_1(v(s),s)\,ds+\int\limits_0^{t}\Phi(t,s)\Psi_1(v(s),s)\,ds$$
$$\equiv B(v,t)+\int\limits_0^{t}\Phi(t,s)\Psi_1(v(s),s)\,ds\equiv H_0(u,t,\infty),\quad v\in C_1([0,t]).\qquad(20)$$

Напомним, что в (19), (20)

$$F_1(u,t,\omega)=f\Big(u+\overset{o}{\xi},t,\omega\Big)+\chi\Big(u+\overset{o}{\xi},t,\omega\Big)+R\Big(u+\overset{o}{\xi},t,\omega\Big)-\Psi\Big(\overset{o}{\xi},t\Big)-\left[\frac{\partial\Psi\Big(\overset{o}{\xi},t\Big)}{\partial\xi}\right]u,\quad(21)$$

$$\Psi_1(u,t)=\Psi\Big(u+\overset{o}{\xi},t\Big)-\Psi\Big(\overset{o}{\xi},t\Big)-\left[\frac{\partial\Psi\Big(\overset{o}{\xi},t\Big)}{\partial\xi}\right]u.\qquad(22)$$

Введем в рассмотрение оператор

$$H:C_\mu([0,T])\times[1,\infty]\to C_\mu([0,T]),\quad \mu\in\left(0,\frac{1}{2}\right),$$

определенный в некоторой окрестности точки $(0,\infty)$ и действующий по правилу

$$H(u,\omega)(t)=\begin{cases}u(t)-H_0(u,t,\omega), & \omega\neq\infty;\\ u(t)-H_0(u,t,\infty), & \omega=\infty.\end{cases}\tag{23}$$

Лемма 2 (Основная). *Оператор $H(u,\omega)$ непрерывен и непрерывно дифференцируем по u в точке $(0,\infty)$. При этом $H(0,\infty)=0$, а производная Фреше $D_uH(0,\infty)=I$ — тождественный оператор.*

$\lhd$ Равенства

$$H(0,\infty)=0,\quad D_uH(0,\infty)=I$$

легко следуют из представлений (20), (22) и очевидных равенств: $\Psi_1(0,t)=0$, $D_u\Psi_1(0,t)=0$.

Перейдем к доказательству непрерывности оператора $H(u,\omega)$ в точке $(0,\infty)$. Вначале отметим простую оценку (см. (19)–(22)):

$$\sup_{\substack{\|u\|_{C_\mu([0,T])\leqslant 1},\\ t\in[0,T],\,\omega\in[1,\infty]}}\left\|\frac{\partial[H_0(u,\omega)](t)}{\partial t}\right\|\leqslant C_0,$$

где C_0 — константа. Из этой оценки и известного интерполяционного неравенства [7]

$$\|u\|_{C_\mu([0,T])}\leqslant\|u\|_{C([0,T])}+\big(2\|u\|_{C([0,T])}\big)^{1-\mu}\,\|u\|^{\mu}_{C_1([0,T])},\quad u\in C_1([0,T]),$$

следует, что непрерывность оператора $H(u,\omega)$ в точке $(0,\infty)$ достаточно установить, рассматривая H как оператор, действующий из пространства $C_\mu[0,T]\times[1,\infty]$ в пространство $C([0,T])$). Таким образом, нам нужно доказать, что для любого $\varepsilon>0$ найдутся $\delta_1\in(0,1)$ и $\omega_1>0$ такие, что при

$$\|u\|_{C_\mu([0,T])}<\delta_1,\quad \omega>\omega_1\tag{24}$$

выполняется неравенство

$$\left\|u(t)-A(u,t,\omega)-\int\limits_0^t\Phi(t,s)F_1(u(s),s,\omega)\,ds\right\|_{C([0,T])}<\varepsilon.\tag{25}$$

Докажем вначале, что при некоторых δ_1, ω_1 и u, ω, удовлетворяющих (24), справедливо неравенство

$$\left\|\int\limits_0^t\Phi(t,s)F_1(u(s),s,\omega)\,ds\right\|_{C([0,T])}<\frac{\varepsilon}{3}.\tag{26}$$

Для этого вектор-функцию $F_1(u(s),s,\omega)$ представим в виде

$$\begin{gathered}F_1(u(s),s,\omega)=\Big[\Gamma\Big(u+\overset{o}{\xi},s,\omega s\Big)-\Psi\Big(u+\overset{o}{\xi},s\Big)-\Gamma\Big(\overset{o}{\xi},s,\omega s\Big)+\Psi\Big(\overset{o}{\xi},s\Big)+R\Big(u+\overset{o}{\xi},s,\omega s\Big)\Big]\\ +\Big[\Gamma\Big(\overset{o}{\xi},s,\omega s\Big)-\Psi\Big(\overset{o}{\xi},s\Big)\Big]+\left\{\Psi\Big(u+\overset{o}{\xi},s\Big)-\Psi\Big(\overset{o}{\xi},s\Big)-\left[\frac{\partial\Psi\Big(\overset{o}{\xi},s\Big)}{\partial\xi}u\right]\right\}\\ \equiv M_1(u,\omega)+M_2\Big(\overset{o}{\xi},\omega\Big)+M_3(u).\end{gathered}\tag{27}$$

Из формулы конечных приращений и леммы 1 следует существования столь малого $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon)$ и столь большого ω_1, что при $\|u\|_{C_\mu([0,T])} < \delta_1$ и $\omega > \omega_1$ справедлива оценка

$$\left\| \int\limits_0^t \Phi(t,s) M_1[u(s),s]\, ds \right\|_{C([0,T])} + \left\| \int\limits_0^t \Phi(t,s) M_3[u(s)]\, ds \right\|_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{28}$$

С помощью стандартной для теории метода усреднения техники (см., например, [4–5]), устанавливается существование столь большого $\omega_1 = \omega_1(\varepsilon)$, что при $\omega > \omega_1$

$$\left\| \int\limits_0^t \Phi(t,s) M_2 \left[\overset{o}{\xi}(s), \omega \right] \, ds \right\|_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{29}$$

Из соотношений (27)–(29) следует оценка (26).

На следующем этапе доказывается, что если найденные на предыдущем этапе числа δ_1 и ω_1 достаточно мало и достаточно велико соответственно, то при выполнении неравенств (24) имеет место оценка

$$\|A(u,t,\omega)\|_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{30}$$

При доказательстве (30) мы используем представление (см. (19)):

$$\begin{aligned} A(u,t,\omega) = K(t) &\left[a(\omega) - \sum_{i=1}^m P_i(\omega) \overset{o}{\xi}(t_i) \right] \\ &- K(t) \sum_{i=1}^m P_i(\omega) \int\limits_0^{t_i} \Phi(t_i) \Phi^{-1}(s) F_1(u(s),s,\omega)\, ds \\ &- \frac{1}{\sqrt{\omega}} K(t) \sum_{i=1}^m P_i(\omega) \left[\int\limits_0^{\omega t_i} \varphi(y(t_i),t_i,s)\, ds - \left\langle \int\limits_0^{\tau} \varphi(y(t_i),t_i,s)\, ds \right\rangle_{\tau} \right] \\ &\equiv A_1 + A_2 + A_3, \end{aligned}$$

где $K(t) = \Phi(t) \left[\sum_{i=1}^m P_i(\omega) \Phi(t_i) \right]^{-1}$, и технику из работ [4–5], а также учитываем равенство

$$\sum_{i=1}^m S_i \overset{o}{\xi}(t_i) = a_0.$$

Отсюда следует, что для достаточно большого $\omega_1 = \omega_1(\varepsilon)$ при $\|u\|_{C_\mu([0,T])} < 1$ и $\omega > \omega_1$

$$\|A_1\|_{C([0,T])} + \|A_3\|_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{31}$$

Оценка слагаемого A_2 совершенно аналогична оценке (26). На этом пути, устанавливается, что при $\|u\|_{C_\mu([0,T])} < \delta_1$ и $\omega > \omega_1$, где δ_1 и ω_1 достаточно мало и достаточно велико соответственно, имеет место оценка

$$\|A_2\|_{C([0,T])} < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{32}$$

Из (31), (32) следует (30).

Итак, пусть δ_1, ω_1 — такая пара чисел, что при выполнении соотношений (24) справедливы оценки (26), (30). Пусть еще $\delta_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Тогда, очевидно, имеет место оценка (25). Непрерывность оператора $H(u,\omega)$ в точке $(0,\infty)$ доказана.

Непрерывность оператора $(D_u H)(u,\omega)$ в точке $(0,\infty)$ доказывается аналогично. При этом дополнительно используются равенства (12) и (15). $\rhd$

Из леммы 2 в силу теоремы о неявной функции в банаховом пространстве следует существование положительных чисел δ^* и ω^* таких, что задача (17) при $\omega > \omega^*$ в шаре $\|u\|_{C_\mu([0,T])} \leqslant \delta^*$ имеет единственное решение u_ω, причем

$$\lim_{\omega\to\infty} \|u_\omega(t)\|_{C_\mu([0,T])} = 0, \tag{33}$$

отсюда, в силу (16) следует предельное равенство

$$\lim_{\omega\to\infty} \Big\| y_\omega - \overset{o}{\xi} \Big\|_{C_\mu([0,T])} = 0. \tag{34}$$

Из неравенства треугольника

$$\Big\| x_\omega(t) - \overset{o}{\xi}(t) \Big\|_{C_\mu([0,T])} \leqslant \|x_\omega(t) - y_\omega(t)\|_{C_\mu([0,T])} + \Big\| y_\omega(t) - \overset{o}{\xi}(t) \Big\|_{C_\mu([0,T])},$$

равенства (34) и соотношения (7), связывающего x_ω с y_ω, следует указанное в теореме соотношение

$$\lim_{\omega\to\infty} \Big\| x_\omega - \overset{o}{\xi} \Big\|_{C_\mu([0,T])} = 0, \quad \mu \in \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Декларируемая в теореме относительная единственность решения x_ω при больших ω почти очевидна. Действительно, пусть δ^* и ω^* — те же числа, что фигурируют в предложении, содержащим равенство (33). Из равенства (7) следует существования δ_0 и $\omega_0 (\geqslant \omega^*)$ таких, что при $\omega > \omega_0$ для каждого решения x_ω задачи (1), удовлетворяющего оценке $\|x_\omega\|_{C_\mu([0,T])} < \delta_0$, найдется решение y_ω задачи (9), удовлетворяющее неравенству $\|y_\omega\|_{C_\mu([0,T])} < \delta^*$, причем двум различным решениям $x_{\omega 1}$ и $x_{\omega 2}$ отвечают различные решения $y_{\omega 1}$ и $y_{\omega 2}$. Теорема доказана.

Литература

1. *Боголюбов Н. Н.* О некоторых статистических методах в математической физике.—М.: Изд-во Академии наук УССР, 1945.—137 с.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.—М.: Физматлит, 1974.—410 с.
3. *Митропольский Ю. А.* Метод усреднения в нелинейной механике.—Киев: Наукова думка, 1971.—440 с.
4. *Левенштам В. Б., Шубин П. Е.* Обоснование метода усреднения для дифференциальных уравнений с большими быстро осциллирующими слагаемыми и краевыми условиями // Мат. заметки.—2016.—Т. 100, № 1.—С. 94–104.
5. *Бигириндавйи Д., Левенштам В. Б.* Принципа усреднения для системы быстро осциллирующих оду с краевыми условиями // Вестник ВГУ. Сер. Физика. Математика.—2020.—Т. 58, № 3.—С. 553–572.
6. *Константинов М. М., Байнов Д. Д.* О применении метода усреднения к некоторым многоточечным краевым задачам // Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de la Republique Socialiste de Roumanie.—1974. —Т. 18 (66), № 3/4.—С. 307–310.
7. *Симоненко И. Б.* Обоснование метода осреднения для абстрактных параболических уравнений // Мат. сб.—1970.—Т. 81 (123), № 1.—С. 53–61. DOI: 10.1070/SM1970v010n01ABEH002152.
8. *Юдович В. И.* Вибродинамика и виброгеометрия систем со связями // Успехи механики.—2006.—Ч. I–III, № 4.—С. 26–158.

9. *Левенштам В. Б.* Дифференциальные уравнения с большими высокочастотными слагаемыми.—Ростов н/Д.: Изд-во ЮФУ, 2010.—416 с.
10. *Левенштам В. Б.* Асимптотические разложения периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений с большими высокочастотными слагаемыми // Диф. уравнения.—2008.—Т. 44, № 3.—С. 52–68.
11. *Левенштам В. Б.* Асимптотическое разложение решения задачи о вибрационной конвекции // Журн. вычисл. матем. и матем. физ.—2000.—Т. 40, № 9.—С. 1416—1424.

Статья поступила 29 июля 2021 г.

Бигириндавйи Даниэль
Южный федеральный университет,
аспирант
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
E-mail: `bigirindavyidaniel@gmail.com`

Левенштам Валерий Борисович
Южный федеральный университет,
профессор кафедры алгебры и дискретной математики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: `vlevenshtam@yandex.com`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 2, P. 62–74

AVERAGING FOR HIGH-FREQUENCY NORMAL SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH MULTIPOINT BOUNDARY VALUE PROBLEMS

Bigirindavyi, D.[1] and Levenshtam, V. B.[1,2]

[1] Southern Federal University,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia

E-mail: `bigirindavyidaniel@gmail.com`, `vlevenshtam@yandex.com`

Abstract. A multipoint boundary value problem for a nonlinear normal system of ordinary differential equations with a right-hand side rapidly oscillating in time is considered. Some terms on the right-hand side can have a large amplitude — proportional to the square root of the oscillation frequency. For this problem, which depends on a large parameter (high frequency of oscillations), the averaging method of Krylov–Bogolyubov is justified. Namely, for this problem, which is called perturbed, a limiting (averaged) multipoint boundary value problem is constructed and the passage to the limit (i. e., the asymptotic closeness of the solution of the perturbed and averaged problems is proved) in the Hölder space of vector functions defined on the considered time interval. The used approach in this paper is based on the classical implicit function theorem in Banach space; this approach in the theory of the averaging method was apparently first used by I. B. Simonenko (see the corresponding reference indicated in the article) when justifying this method for abstract parabolic equations in the case of the Cauchy problem and the problem of time-periodic solutions. The averaging method of Krylov–Bogolyubov is one of the most important asymptotic methods. It is widely known and developed with great completeness for various classes of equations. In numerous papers in which systems of ordinary differential equations are considered, mainly the Cauchy problem on an interval and the problems of periodic, almost periodic, and general solutions bounded on the entire time axis are studied. Boundary-value problems, especially multi-point boundary value problems, are still insufficiently represented in the literature.

Key words: normal system of ordinary differential equations, large high-frequency terms, averaging method, multipoint boundary value problem.

AMS Subject Classification: 34C29, 34E15, 34E10.

For citation: *Bigirindavyi, D. and Levenshtam, V. B.* Averaging for High-Frequency Normal System of Ordinary Differential Equations with Multipoint Boundary Value Problems, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 2, pp. 62–74 (in Russian). DOI: 10.46698/i7381-0821-3887-y.

References

1. *Bogolyubov, N. N. O nekotorykh statisticheskikh metodakh v matematicheskoy fizike* [On Some Statistical Methods in Mathematical Physics], Moscow, Izdatel'stvo AN USSR, 1945, 137 p. (in Russian).
2. *Bogolyubov, N. N. and Mitropol'skiy, Yu. A. Asimptoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations], Moscow, Fizmatlit, 1974, 410 p. (in Russian).
3. *Mitropol'skiy, Yu. A. Metod usredneniya v nelineynoy mekhanike* [Averaging Method in Nonlinear Mechanics], Kiev, Naukova dumka, 1971, 440 p. (in Russian).
4. *Levenshtam, V. B. and Shubin, P. Ye.* Justification of the Averaging Method for Differential Equations with Large Rapidly Oscillating Terms and Boundary Conditions, *Mathematical Notes*, 2016, vol. 100, no. 1, pp. 94–104.
5. *Bigirindavyi, D. and Levenshtam, V. B.* The Averaging Principle for a System of Rapidly Oscillating Ode with Boundary Conditions, *Vestnik VGU. Series Physics. Mathematics*, 2020, vol. 58, no. 3, pp. 553–572.
6. *Konstantinov, M. M. and Bainov, D. D.* On the Application of the Averaging Method to Some Multipoint Boundary Value Problems, *Mathematical Bulletin of the Society of Mathematical Sciences of the Socialist Republic of Romania*, 1974, vol. 18 (66), no. 3/4, pp. 307–310.
7. *Simonenko, I. B.* Justification of the Averaging Method for Abstract Parabolic Equations, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, 1970, vol. 10, no. 1, pp. 53–61. DOI: 10.1070/SM1970v010n01ABEH002152.
8. *Yudovich, V. I.* Vibrodynamics and Vibrogeometry of Systems with Constraints, *Advances in Mechanics*, 2006, part I–III, no. 4, pp. 26–158.
9. *Levenshtam, V. B. Differentsial'nyye uravneniya s bol'shimi vysokochastotnymi slagayemymi* [Differential Equations with Large High-Frequency Terms], Rostov-on-Don, Izd-vo YUFU, 2010, 416 p. (in Russian).
10. *Levenshtam, V. B.* Asymptotic Expansions of Periodic Solutions of Ordinary Differential Equations with Large High-Frequency Terms, *Differential Equations*, 2008, vol. 44, no. 3, pp. 52–68.
11. *Levenshtam, V. B.* Asymptotic Expansion of the Solution to the Problem of Vibrational Convection, *Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 2000, vol. 40, no. 9, pp. 1416–1424.

Received Jule 29, 2021

Daniel Bigirindavyi
Southern Federal University,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Graduate Student
E-mail: bigirindavyidaniel@gmail.com

Valery B. Levenshtam
Southern Federal University,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Professor

Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Leading Researcher
E-mail: vlevenshtam@yandex.com