Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 2, С. 75–84

УДК 539.3
DOI 10.46698/v3482-0047-3223-o

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕРМОУПРУГОСТИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ МАТЕРИАЛОВ

А. О. Ватульян[1,2], С. А. Нестеров[2]

[1] Южный федеральный университет,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: aovatulyan@sfedu.ru, 1079@list.ru

Аннотация. Приведена постановка коэффициентной обратной задачи термоупругости для конечных неоднородных тел. Для решения нелинейной обратной задачи на основе итерационного процесса получены операторные уравнения 1-го рода в трансформантах Лапласа. Решение обратных задач термоупругости в оригиналах, основано на обращении операторных соотношений в трансформантах при помощи теорем операционного исчисления о свертке и дифференцирования оригинала. Рассмотрена процедура реконструкции термомеханических характеристик стержня, слоя, цилиндра. Начальное приближение для итерационного процесса находят на основе двух подходов. При первом подходе начальное приближение находят в классе положительных ограниченных линейных функций. Коэффициенты линейных функций определяют из условия минимизации функционала невязки. Второй подход нахождения начального приближения основан на методе алгебраизации. Проведены вычислительные эксперименты по восстановлению как монотонных, так и немонотонных функций. Восстанавливалась одна характеристика при известных остальных. Монотонные функции восстанавливаются лучше немонотонных. В случае реконструкции характеристик слоистых материалов наибольшая погрешность возникала в окрестностях точек сопряжения. Процедура реконструкции оказалась устойчива к зашумлению входной информации.

Ключевые слова: обратная задача термоупругости, функционально-градиентные материалы, операторные уравнения, итерационный процесс, метод алгебраизации.

AMS Subject Classification: 74B05, 80A20, 80A23.

Образец цитирования: *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* Исследование обратных задач термоупругости для неоднородных материалов // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 2.—С. 75–84. DOI: 10.46698/v3482-0047-3223-o.

1. Введение

Для расчета прочности элементов конструкций, находящихся в условиях высокотемпературного окружения, необходимо решать задачи, связанные с нахождением напряженно-деформированного состояния. Такие расчеты обычно проводят для однородных материалов. Однако в настоящее время все шире применяются неоднородные материалы — слоистые композиты и функционально-градиентные материалы (ФГМ). При этом термомеханические характеристики неоднородных материалов являются функциями координат [1] и поэтому могут быть определены только на основе аппарата коэффициентных обратных задач (КОЗ).

В настоящее время проведено много исследований по решению КОЗ теплопроводности [2–6] и теории упругости [7–9]. Обычно исследование обратных задач сводится к решению соответствующих экстремальных задач [2, 3]. Для этого вводится функционал невязки, который минимизируется в конечномерном подпространстве при помощи градиентных методов [2].

Для некоторых материалов необходимо учитывать связанность полей и решать КОЗ термоупругости [10, 11], которые для неоднородных материалов в настоящий момент слабо изучены. Первоначально рассматривались обратные задачи термоупругости для слоистых тел. Так в [10] восстанавливаются термомеханические характеристики и толщина трехслойной пластины путем сведения обратной задачи термоупругости к экстремальной и применении градиентного метода минимизации функционала невязки.

В монографии [12] был развит новый подход к решению КОЗ механики связанных полей. Нелинейная обратная задача решается путем построения итерационного процесса, на каждом этапе которого решается операторное уравнение 1-го рода, полученное на основе слабой постановки, обобщенного соотношения взаимности и линеаризации.

Настоящая работа представляет собой обзор ранее полученных авторами результатов по решению КОЗ термоупругости для стержня, слоя, цилиндра на основе разработанного итерационного подхода.

2. Общая постановка КОЗ термоупругости для конечного тела

Рассмотрим неустановившиеся колебания конечного термоупругого тела [12]:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{u}_i, \tag{1}$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} u_{k,l} - \gamma_{ij}\theta, \tag{2}$$

$$(k_{ij}\theta_{,i})_{,j} = c\dot{\theta} + T_0 \gamma_{ij} \dot{u}_{i,j}, \tag{3}$$

$$\theta|_{S_T} = 0, \quad -k_{ij}\theta_{,i} n_j|_{S_q} = q, \tag{4}$$

$$u_i|_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j|_{S_\sigma} = p_i, \tag{5}$$

$$\theta(x,0) = u_i(x,0) = \dot{u}_i(x,0) = 0. \tag{6}$$

Здесь σ_{ij} — компоненты тензора напряжений, u_i — компоненты вектора перемещения, θ — приращение температуры от естественного состояния с температурой T_0, c_{ijkl} — компоненты тензора модулей упругости, ρ — плотность, c_ε — удельная объемная теплоемкость при постоянном тензоре деформации, k_{ij} — компоненты тензора коэффициента теплопроводности, γ_{ij} — компоненты тензора температурных напряжений, n_j — компоненты единичного вектора внешней нормали к S_σ, p_i — компоненты вектора активной механической нагрузки, приложенной к телу, q — плотность теплового потока.

Решение прямой задачи термоупругости заключается в определении функций $u_i(x,t)$ и $\theta(x,t)$ из (1)–(6) при известных термомеханических характеристиках c_{ijkl}, ρ, c_ε, k_{ij}, γ_{ij}.

Обратная задача состоит в определении законов изменения термомеханических характеристик ρ, c_{ijkl}, c_ε, k_{ij}, γ_{ij} из (1)–(6) по дополнительной информации о компонентах вектора перемещения, измеренных на части границы тела S_σ

$$u_i|_{S_\sigma} = g_i, \quad t \in [T_1, T_2], \tag{7}$$

или информации о приращении температуры, измеренной на части границы тела S_q

$$\theta|_{S_q} = f, \quad t \in [T_3, T_4]. \tag{8}$$

Применив к уравнениям (1)–(3) и граничным условиям (4), (5) преобразование Лапласа по переменной t, с учетом начального условия (6), получим:

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} = p^2 \rho \tilde{u}_i, \tag{9}$$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = c_{ijkl} \tilde{u}_{k,l} - \gamma_{ij} \tilde{\theta}, \tag{10}$$

$$(k_{ij} \tilde{\theta}_{,i})_{,j} = pc\tilde{\theta} + pT_0 \gamma_{ij} \tilde{u}_{i,j}, \tag{11}$$

$$\tilde{\theta}|_{S_T} = 0, \quad -k_{ij} \tilde{\theta}_{,i} n_j|_{S_q} = \tilde{q}, \tag{12}$$

$$\tilde{u}_i|_{S_u} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{ij} n_j|_{S_\sigma} = \tilde{p}_i. \tag{13}$$

КОЗ термоупругости является нелинейной задачей. Ее решение основано на построении итерационного процесса, операторные уравнения для которого в [12] получены на основе слабой постановки прямой задачи в трансформантах Лапласа (9)–(13) и ее линеаризации. Система интегральных уравнений Фредгольма (ИУФ) 1-го рода для нахождения поправок термомеханических характеристик $\delta\rho^{(n-1)}$, $\delta c_{ijkl}^{(n-1)}$, $\delta c_\varepsilon^{(n-1)}$, $\delta k_{ij}^{(n-1)}$, $\delta \gamma_{ij}^{(n-1)}$ на $(n-1)$-й итерации имеет вид:

$$\begin{aligned} \int\limits_V \delta c_{ijkl}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{u}_{k,l}^{(n-1)} \, dV + p^2 \int\limits_V \delta\rho^{(n-1)} \left(\tilde{u}_i^{(n-1)}\right)^2 dV \\ - \int\limits_V \delta\gamma_{ij}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{\theta}^{(n-1)} \, dV = - \int\limits_{S_\sigma} \tilde{p}_i \left(\tilde{g}_i - \tilde{u}_i^{(n-1)}\right) dS, \end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_V \delta k_{ij}^{(n-1)} \tilde{\theta}_i^{(n-1)} \tilde{\theta}_j^{(n-1)} \, dV + p \int\limits_V \delta c_\varepsilon^{(n-1)} \left(\tilde{\theta}^{(n-1)}\right)^2 dV \\ - pT_0 \int\limits_V \delta\gamma_{ij}^{(n-1)} \tilde{u}_{i,j}^{(n-1)} \tilde{\theta}^{(n-1)} \, dV = \int\limits_{S_q} \tilde{q} \left(\tilde{f} - \tilde{\theta}^{(n-1)}\right) dS. \end{aligned} \tag{15}$$

3. КОЗ термоупругости для стержня

В качестве первого примера рассмотрим задачу о продольных колебаниях жестко закрепленного на торце $x = 0$ неоднородного термоупругого стержня длины l и при этом будем различать два способа возбуждения колебаний — тепловой и механический. Начально-краевая задача при тепловом способе возбуждения колебаний имеет вид [13]:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = \varepsilon^2 \bar{\rho}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau_1^2}, \tag{16}$$

$$\Omega = \bar{E}(z) \frac{\partial U}{\partial z} - \bar{\gamma}(z) W, \tag{17}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{k}(z) \frac{\partial W}{\partial z}\right) = \bar{c}(z) \frac{\partial W}{\partial \tau_1} + \delta_0 \bar{\gamma}(z) \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \tau_1}, \tag{18}$$

$$U(0, \tau_1) = W(0, \tau_1) = 0, \quad -\bar{k}(1) \frac{\partial W}{\partial z}(1, \tau_1) = \omega \phi(\tau_1), \quad \Omega(1, \tau_1) = 0, \tag{19}$$

$$W(z, 0) = U(z, 0) = \frac{\partial U}{\partial \tau_1}(z, 0) = 0. \tag{20}$$

Здесь $z=\frac{x}{l}$, $\bar{k}(z)=\frac{k(zl)}{k_0}$, $\bar{c}(z)=\frac{c_\varepsilon(zl)}{c_0}$, $\bar{\rho}(z)=\frac{\rho(zl)}{\rho_0}$, $\bar{E}(z)=\frac{E(zl)}{E_0}$, $\bar{\gamma}(z)=\frac{\gamma(zl)}{\gamma_0}$, $t_1=\frac{l^2c_0}{k_0}$, $t_2=l\sqrt{\frac{\rho_0}{E_0}}$, $\tau_1=\frac{t}{t_1}$, $\tau_2=\frac{t}{t_2}$, $W=\frac{\gamma_0\theta}{E_0}$, $U=\frac{u}{l}$, $\Omega=\frac{\sigma_x}{E_0}$, $\delta_0=\frac{\gamma_0^2T_0}{c_0E_0}$, $\omega=\frac{q_0\gamma_0 l}{k_0E_0}$, $\varepsilon=\frac{t_2}{t_1}$, $k_0=\max\limits_{x\in[0,l]}k(x)$, $c_0=\max\limits_{x\in[0,l]}c_\varepsilon(x)$, $E_0=\max\limits_{x\in[0,l]}E(x)$, $\rho_0=\max\limits_{x\in[0,l]}\rho(x)$, $\gamma_0=\max\limits_{x\in[0,l]}\gamma(x)$, δ_0 — безразмерный параметр связанности, ε — отношение характерных времен звуковых и тепловых возмущений.

Прямая задача (16)–(20) после применения преобразования Лапласа решалась на основе сведения к системе интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода и обращении трансформант на основе теории вычетов.

В обратной задаче требуется восстановить одну из механических характеристик ($\bar{E}$, $\bar{\rho}$, $\bar{\gamma}$) из (16)–(20) по информации о смещении на торце стержня $z=1$:

$$U(1,\tau_2)=g(\tau_2),\quad \tau_2\in[c,d]\,, \tag{21}$$

и одну из теплофизических характеристик ($\bar{c}$, $\bar{k}$, $\bar{\gamma}$) из (16)–(20) по информации о приращении температуры на торце стержня:

$$W(1,\tau_1)=f(\tau_1),\quad \tau_1\in[a,b]\,. \tag{22}$$

Операторные уравнения в трансформантах Лапласа для нахождения поправок термомеханических характеристик стержня при нагрузке $\phi(\tau_1)=H(\tau_1)$ имеют вид [13]:

$$\int\limits_0^1 \delta\bar{E}^{(n-1)}\left(\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz}\right)^2 dz+p^2\int\limits_0^1 \delta\bar{\rho}^{(n-1)}\left(\tilde{U}^{(n-1)}\right)^2 dz \\ -\int\limits_0^1 \delta\bar{\gamma}^{(n-1)}\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz}\tilde{W}^{(n-1)}dz=-\frac{1}{p}\left(\tilde{g}(p)-\tilde{U}^{(n-1)}(1,p)\right), \tag{23}$$

$$\int\limits_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)}\left(\frac{dW^{(n-1)}}{dz}\right)^2 dz+p\int\limits_0^1 \delta\bar{c}^{(n-1)}\left(\tilde{W}^{(n-1)}\right)^2 dz \\ +\delta_0 p\int\limits_0^1 \delta\bar{\gamma}^{(n-1)}\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{dz}\tilde{W}^{(n-1)}\,dz=\frac{\omega}{p}\left(\tilde{f}(p)-\tilde{W}^{(n-1)}(1,p)\right). \tag{24}$$

В случае, если требуется восстановить только одну термомеханическую характеристику при известных остальных, полагая в (23) и (24) равными нулю все поправки остальных характеристик, получим ИУФ 1-го рода с гладкими ядрами. Так, для нахождения поправок $\delta\bar{k}^{(n-1)}(z)$ на $(n-1)$ имеем:

$$p\int\limits_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)}\left(\frac{d\tilde{W}^{(n-1)}}{dz}\right)^2 dz=\omega\left(\tilde{f}(p)-\tilde{W}^{(n-1)}(1,p)\right). \tag{25}$$

Решение обратных задач термоупругости в оригиналах основано на обращении операторных соотношений в трансформантах. Так, для нахождения поправок $\delta\bar{k}^{(n-1)}(z)$ на $(n-1)$ итерации имеем ИУФ 1-го рода:

$$\int\limits_0^1 \delta\bar{k}^{(n-1)}R(z,\tau_1)\,dz=\omega\left(f(\tau_1)-W^{(n-1)}(1,\tau_1)\right),\quad \tau_1\in[a,b], \tag{26}$$

где ядро уравнения (26) имеет вид:

$$R(z,\tau_1) = \int\limits_0^{\tau_1} \frac{\partial^2 W^{(n-1)}(z,\tau)}{\partial z\,\partial\tau} \frac{\partial W^{(n-1)}(z,\tau_1-\tau)}{\partial z}\,d\tau.$$

Решение уравнения (26) является некорректной задачей. Регуляризация таких уравнений осуществлялась на основе метода А. Н. Тихонова [14].

4. КОЗ термоупругости для слоя

В качестве второго примера рассмотрим задачу о неустановившихся колебаниях изотропного неоднородного по координате x_3 термоупругого слоя в условиях плоской деформации. Нижняя грань слоя жестко защемлена, а на верхней грани приложены механические и тепловые нагрузки.

В [12] для решения поставленной задачи к дифференциальным уравнениям и граничным условиям применяется преобразование Фурье по координате x_1. Положив параметр преобразования Фурье равным нулю, получим, что двумерная задача распадается на две более простые одномерные задачи. На первом этапе из решения первой обратной задачи при известной плотности определяется модуль сдвига. На втором этапе идентификации, исходя из известных функций плотности и модуля сдвига, из решения второй обратной задачи находятся либо одна из теплофизических характеристик (коэффициент теплопроводности, плотность, коэффициент температурного напряжения), либо коэффициент Ламе.

На основе модели термоупругого слоя были проведены вычислительные эксперименты по идентификации термомеханических характеристик: а) модуля сдвига термоупругого слоя при наличии зон деструкции; б) коэффициента теплопроводности кожного покрова; в) коэффициента теплопроводности и коэффициента Ламе функционально-градиентного покрытия.

5. КОЗ термоупругости для трубы

В качестве третьего примера рассмотрим задачу о радиальных колебаниях неоднородной трубы под действием равномерно распределенной тепловой и механической нагрузки, приложенной на внешней границе. Начально-краевая задача при механическом способе возбуждения колебаний имеет вид [15]:

$$\frac{\partial\Omega_{rr}}{\partial\xi} + \frac{\Omega_{rr}-\Omega_{\phi\phi}}{\xi} = \bar{\rho}\,\frac{\partial^2 U}{\partial\tau_2^2}, \tag{27}$$

$$\Omega_{rr} = \left(\bar{\lambda}+2\bar{\mu}\right)\frac{\partial U}{\partial\xi} + \bar{\lambda}\frac{U}{\xi} - \bar{\gamma}W, \quad \Omega_{\phi\phi} = \bar{\lambda}\frac{\partial U}{\partial\xi} + \left(\bar{\lambda}+2\bar{\mu}\right)\frac{U}{\xi} - \bar{\gamma}W, \tag{28}$$

$$\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\bar{k}(\xi)\xi\frac{\partial W}{\partial\xi}\right) = \frac{1}{\varepsilon}\,\bar{c}(\xi)\frac{\partial W}{\partial\tau_2} + \frac{\delta_0}{\varepsilon}\,\bar{\gamma}(\xi)\left(\frac{\partial^2 U}{\partial\xi\partial\tau_2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial U}{\partial\tau_2}\right), \tag{29}$$

$$\Omega_{rr}(\xi_0,\tau_2) = 0, \quad W(\xi_0,\tau_2) = 0, \tag{30}$$

$$\Omega_{rr}(1,\tau_2) = \chi_0\varphi(\tau_2), \quad W(1,\tau_2) = 0, \tag{31}$$

$$W(\xi,0) = U(\xi,0) = \frac{\partial U}{\partial\tau_2}(\xi,0) = 0. \tag{32}$$

Здесь $\xi=\frac{r}{r_2}$, $\xi_0=\frac{r_1}{r_2}$, $U=\frac{u_r}{r_2}$, $W=\frac{\gamma_0\theta}{\lambda_0}$, $v=\sqrt{\frac{\lambda_0+2\mu_0}{\rho_0}}$, $\tau_1=\frac{t}{t_1}$, $\tau_2=\frac{t}{t_2}$, $t_1=\frac{r_2c_0}{k_0}$, $t_2=\frac{r_2}{v}$, $\delta_0=\frac{\gamma_0^2T_0}{c_0\lambda_0}$, $\varepsilon=\frac{t_2}{t_1}$, $\Omega_{rr}=\frac{\sigma_{rr}}{\lambda_0}$, $\Omega_{\phi\phi}=\frac{\sigma_{\phi\phi}}{\lambda_0}$, $\bar{\lambda}=\frac{\lambda}{\lambda_0}$, $y_0=\frac{\mu_0}{\lambda_0}$, $\bar{\mu}=\frac{\mu}{\mu_0}$, $\bar{\rho}=\frac{\rho}{\rho_0}$, $\bar{\gamma}=\frac{\gamma}{\gamma_0}$, $\bar{k}=\frac{k}{k_0}$, $\bar{c}=\frac{c}{c_0}$, $\chi_0=\frac{p_0}{\lambda_0}$, $\omega_0=\frac{q_0r_2\gamma_0}{k_0\lambda_0}$.

Прямая задача (27)–(32) после преобразования Лапласа решалась на основе метода пристрелки.

В обратной задаче требуется восстановить одну из термомеханических характеристик при известных остальных из (27)–(32) по дополнительной информации о температуре или смещении, измеренной на внешней поверхности трубы.

Операторные уравнения в трансформантах Лапласа для нахождения поправок термомеханических характеристик трубы при нагрузке $\psi(\tau_2)=H(\tau_2)$ имеют вид [15]:

$$\begin{gathered}\int\limits_{\xi_0}^{1}\delta\bar{\lambda}^{(n-1)}\left(\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{d\xi}+\frac{\tilde{U}^{(n-1)}}{\xi}\right)^2\xi\,d\xi\\
+y_0\int\limits_{\xi_0}^{1}\delta\bar{\mu}^{(n-1)}\left(\left(\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{d\xi}\right)^2+\left(\frac{\tilde{U}^{(n-1)}}{\xi}\right)^2\right)\xi\,d\xi+p^2\int\limits_{\xi_0}^{1}\delta\bar{\rho}^{(n-1)}\left(\tilde{U}^{(n-1)}\right)^2\xi\,d\xi\\
-\delta_0\int\limits_{\xi_0}^{1}\delta\bar{\gamma}^{(n-1)}\left(\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{d}\xi+\frac{\tilde{U}^{(n-1)}}{\xi}\right)\tilde{W}^{(n-1)}\xi\,d\xi=-\frac{\chi_0}{p}\left(\tilde{g}(p)-\tilde{U}^{(n-1)}(1,p)\right),\end{gathered}\tag{33}$$

$$\begin{gathered}\int\limits_{\xi_0^1}\delta\bar{k}^{(n-1)}\left(\frac{d\tilde{W}^{(n-1)}}{d\xi}\right)^2\xi\,d\xi+p\int\limits_{\xi_0}^{1}\delta\bar{c}_{\varepsilon}^{(n-1)}\left(\tilde{W}^{(n-1)}\right)^2\xi\,d\xi\\
+\delta_0p\int\limits_{\xi_0}^{1}\delta\bar{\gamma}^{(n-1)}\left(\frac{d\tilde{U}^{(n-1)}}{d\xi}+\frac{\tilde{U}^{(n-1)}}{\xi}\right)\tilde{W}^{(n-1)}\xi\,d\xi=\frac{\omega_0}{p}\left(\tilde{f}(p)-\tilde{W}^{(n-1)}(1,p)\right).\end{gathered}\tag{34}$$

6. Об особенностях нахождения начального приближения

Предложены два подхода к нахождению начального приближения для итерационного процесса реконструкции термомеханических характеристик.

При первом подходе будем искать начальное приближение в классе положительных ограниченных линейных функций вида C_1+C_2z. Способ нахождения констант C_1 и C_2 основан на использовании априорной информации о границах изменении термомеханических характеристик. Исходя из априорной информации, можно построить ограничения на искомые константы, которые формируют область изменения коэффициентов C_1 и C_2 — компактное множество в R^2. Разбив эту область на сетку, из условия минимизации соответствующего функционала на построенном компактном множестве осуществляется подбор подходящей пары (C_1,C_2).

В случае теплового нагружения стержня функционал невязки имеет вид:

$$J_1=\int\limits_a^b\left(f(\tau_1)-W^{(n-1)}(1,\tau_1)\right)^2\,d\tau_1.\tag{35}$$

В случае механического нагружения стержня функционал невязки примет вид:

$$J_2 = \int\limits_c^d \left(g(\tau_2) - U^{(n-1)}(1,\tau_2) \right)^2 d\tau_2. \tag{36}$$

При втором подходе будем искать приближенное решение обратной задачи в виде разложения:

$$\bar{c}(z) = \sum_{j=1}^{m} s_j z^{j-1}, \quad j = 1,\ldots,m. \tag{37}$$

Представим трансформанты перемещений и температуры в виде разложения по системе базисных функций, аналогично как это сделано в [12]:

$$\tilde{W}_1(z,p) = \varphi_0(z,p) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{b}_i(p)\,\varphi_i(z), \quad \tilde{U}_1(z,p) = \phi_0(z,p) + \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i(p)\,\phi_i(z). \tag{38}$$

Здесь $\phi_0(z,p)$, $\varphi_0(z,p)$ — функция, удовлетворяющая неоднородным граничным условиям, $\phi_i(z)$, $\varphi_i(z)$, $i = 1,\ldots,n$, — ортогональные функции, удовлетворяющие однородным граничным условиям.

Подставим разложения (37), (38) в (16)–(20). Умножим уравнение (16) на $\phi_i(z)$, а (18) на $\varphi_i(z)$ и проинтегрируем по z от 0 до 1. Получим систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения $\tilde{a}_i(p)$, $\tilde{b}_i(p)$. Аналитическое выражение для определителя системы, найденное в Maple, представляет собой многочлен от параметра p и неизвестных $c_1,\ldots,c_m$. Для нахождения набора неизвестных коэффициентов разложения $c_1,\ldots,c_m$ воспользуемся дополнительной информацией (21), (22). Аппроксимируем дополнительную информацию, заданную таблично на информативном временном отрезке измерения, в виде линейной комбинации экспоненциальных функций. Показатели экспонент в полученном разложении находились по методу Прони, аналогично как в [12]. По найденному набору $c_1,\ldots,c_m$ восстанавливается неизвестная функция $\bar{c}(z)$ согласно (37).

7. Результаты вычислительных экспериментов

Проведены вычислительные эксперименты по реконструкции термомеханических характеристик стержня, слоя, цилиндра. При этом восстанавливалась одна характеристика при известных остальных. Выход из итерационного процесса осуществлялся по достижению функционалом невязки (35) или (36) предельного значения, равного 10^{-6}. В работе восстанавливались как гипотетические законы неоднородности в классах степенных, экспоненциальных и тригонометрических функций, так и законы, моделирующие материальные характеристики реальных ФГМ, созданных, например, на основе $Ni - TiC$.

В ходе вычислительных экспериментов выяснено, что: 1) при выборе начального приближения среди констант для достижения предельного значения в (35) или (36) требовалось большее количество итераций, чем при выборе среди линейных функций; 2) монотонные функции восстанавливаются лучше немонотонных; 3) максимальная погрешность реконструкции теплоемкости, плотности, коэффициента температурного напряжения возникала в окрестности торца $z = 0$, что связано с особенностями ядер соответствующих интегральных уравнений; 4) в случае реконструкции характеристик слоистых материалов наибольшая погрешность возникала в окрестностях точек сопряжения;

6) процедура реконструкции дает удовлетворительные результаты при зашумлении входной информации; 7) метод алгебраизации позволяет находить начальное приближение с меньшими затратами машинного времени, чем минимизация функционала невязки, однако он обладает неустойчивостью решения к зашумлению входной информации.

Литература

1. *Wetherhold R. C., Seelman S., Wang S.* The use of functionally graded materials to eliminated or control thermal deformation // Composites Science and Technology.—1996.—Vol. 56, № 9.—P. 1099–1104. DOI: 10.1016/0266-3538(96)00075-9.
2. *Алифанов О. М., Артюхин Е. А., Румянцев С. В.* Экстремальные методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1988.—288 с.
3. *Rahideh H., Malekzadeh P., Haghighi M. R. G., Vaghefi M.* Two-dimensional inverse transient heat conduction analysis of laminated functionally graded circular plates // Appl. Therm. Eng.—2019.—Vol. 154.—P. 63–75. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2019.03.068.
4. *Cao K., Lesnic D.* Determination of space-dependent coefficients from temperature measurements using the conjugate gradient method // Num. Methods Part. Different. Eq.—2018.—Vol. 43 (4).—P. 1370–1400. DOI:10.1002/num.22262.
5. *Dulikravich G. S., Reddy S. R., Pasqualette M. A., Colaco M. J., Orlande H. R., Coverston J.* Inverse determination of spatially varying material coefficients in solid objects // J. Inverse Ill-Posed Probl.—2016.—Vol. 24.—P. 181–194. DOI: 10.1515/jiip-2015-0057.
6. *Dmitriev O. S., Zhivenkova A. A.* Numerical-analytical solution of the nonlinear coefficient inverse heat conduction problem // Journal of Engineering Physics and Thermophysics.—2018.—Vol. 91, № 6.—P. 1353–1364. DOI: 10.1007/s10891-018-1869-x.
7. *Geymonat G., Pagano S.* Identification of mechanical properties by displacement field measurement: A variational approach // Meccanica.—2003.—Vol. 38.—P. 535–545. DOI: 10.1023/A:1024766911435.
8. *Jadamba B., Khan A. A., Racity F.* On the inverse problem of identifying Lame coefficients in linear elasticity // J. Comput. Math. Appl.—2008.—Vol. 56, № 2.—P. 431–443. DOI: 10.1023/A:1024766911435.
9. *Dudarev V. V., Vatulyan A. O., Mnukhin R. M., Nedin R. D.* Concerning an approach to identifying the Lame parameters of an elastic functionally graded cylinder // Math. Meth. Appl. Sci. —2020.—P. 1–10. DOI:10.1002/mma.6428.
10. *Lukasievicz S. A., Babaei R., Qian R. E.* Detection of material properties in a layered body by means of thermal effects // J. Thermal Stresses.—2003.—Vol. 26, № 1.—P. 13–23.
11. *Yang Y. C., Chen W. L., Chou H. M., Salazar J. L. L.* Inverse hyperbolic thermoelastic analysis of a functionally graded hollow circular cylinder in estimating surface heat flux and thermal stresses // Int. J. Heat Mass Transfer.—2013.—Vol. 60.—P. 125–133. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.
12. *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* Коэффициентные обратные задачи термомеханики.—Ростов н/Д–Таганрог: Изд-во Южного федерального ун-та, 2019.—146 с.
13. *Nedin R., Nesterov S., Vatulyan A.* On an inverse problem for inhomogeneous thermoelastic rod // International Journal of Solids and Structures.—2014.—Vol. 51 (3).—P. 767–773. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.11.003
14. *Тихонов А. Н., Гончарский А. В., Степанов В. В., Ягола А. Г.* Численные методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1990.—230 с.
15. *Ватульян А. О., Нестеров С. А.* О задаче идентификации термомеханических характеристик конечного функционально-градиентного цилиндра // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика.—2021.—Т. 21, вып. 1.—С. 35–47. DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-1-35-47.

Статья поступила 26 октября 2021 г.

Ватульян Александр Ованесович
Южный федеральный университет,
заведующий кафедрой теории упругости
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
заведующий отделом дифференц. уравнений
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53

E-mail: aovatulyan@sfedu.ru
https://orcid.org/0000-0003-0444-4496

Нестеров Сергей Анатольевич
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник отдела дифференц. уравнений
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: 1079@list.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 2, P. 75–84

STUDY OF INVERSE PROBLEM OF THERMOELASTICITY FOR INHOMOGENEOUS MATERIALS

Vatulyan, A. O.[1,2] and Nesterov, S. A.[2]

[1] Southern Federal University,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia
E-mail: aovatulyan@sfedu.ru, 1079@list.ru

Abstract. The formulation of the coefficient inverse problem of thermoelasticity for finite inhomogeneous bodies is given. Operator equations of the first kind in Laplace transforms are obtained to solve a nonlinear inverse problem on the basis of an iterative process. The solution of inverse problems of thermoelasticity in the originals is based on the inversion of operator relations in transformants using theorems of operational calculus on the convolution and differentiation of the original. The procedure for reconstruction of thermomechanical characteristics of a rod, layer, cylinder is considered. The initial approximation for the iterative process is found on the basis of two approaches. In the first approach, the initial approximation is found in the class of positive bounded linear functions. The coefficients of linear functions are determined from the condition of minimizing the residual functional. The second approach to finding the initial approximation is based on the method of algebraization. Computational experiments were carried out to recover both monotone and non-monotonic functions. One characteristic was restored while the others were known. Monotonic functions are restored better than non-monotonic ones. In the case of reconstructing the characteristics of layered materials, the greatest error occurred in the vicinity of the points of conjugate. The reconstruction procedure turned out to be resistant to noise in the input information.

Key words: inverse problem of thermoelasticity, functionally graded materials, operator equations, iterative process, algebraization method.

AMS Subject Classification: 74B05, 80A20, 80A23.

For citation: *Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A.* Study of Inverse Problem of Thermoelasticity for Inhomogeneous Materials, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 2, pp. 75–84 (in Russian). DOI: 10.46698/v3482-0047-3223-o.

References

1. *Wetherhold, R. C., Seelman, S. and Wang, S.* The use of Functionally Graded Materials to Eliminated or Control Thermal Deformation, *Composites Science and Technology*, 1996, vol. 56, no. 9, pp. 1099–1104. DOI: 10.1016/0266-3538(96)00075-9.
2. *Alifanov, O. M., Artyukhin, E. A. and Rumyantsev, S. V. Ekstremal'nye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Extreme Methods of Solving Ill-Posed Problems], Moscow, Nauka, 1988, 288 p. (in Russian).
3. *Rahideh, H., Malekzadeh, P., Haghighi, M. R. G. and Vaghefi, M.* Two-Dimensional Inverse Transient Heat Conduction Analysis of Laminated Functionally Graded Circular Plates, *Appl. Therm. Eng.*, 2019, vol. 154, pp. 63–75. DOI: 10.1016/j.applthermaleng.2019.03.068.

4. *Cao, K. and Lesnic, D.* Determination of Space-Dependent Coefficients from Temperature Measurements Using the Conjugate Gradient Method, *Num. Methods Part. Different. Eq.*, 2018, vol. 43, no. 4, pp. 1370–1400. DOI: 10.1002/num.22262.
5. *Dulikravich, G. S., Reddy, S. R., Pasqualette, M. A., Colaco, M. J., Orlande, H. R. and Coverston, J.* Inverse Determination of Spatially Varying Material Coefficients in Solid Objects, *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2016, vol. 24, pp. 181–194. DOI: 10.1515/jiip-2015-0057.
6. *Dmitriev, O. S. and Zhivenkova, A. A.* Numerical-Analytical Solution of the Nonlinear Coefficient Inverse Heat Conduction Problem, *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, 2018, vol. 91, no. 6, pp. 1353–1364. DOI: 10.1007/s10891-018-1869-x.
7. *Geymonat, G. and Pagano, S.* Identification of Mechanical Properties by Displacement Field Measurement: A Variational Approach, *Meccanica*, 2003, vol. 38, pp. 535–545. DOI: 10.1023/A:1024766911435.
8. *Jadamba, B., Khan, A. A. and Racity, F.* On the Inverse Problem of Identifying Lame Coefficients in Linear Elasticity, *J. Comput. Math. Appl.*, 2008, vol. 56, no. 2, pp. 431–443.
9. *Dudarev, V. V., Vatulyan, A. O., Mnukhin, R. M. and Nedin, R. D.* Concerning an Approach to Identifying the Lame Parameters of an Elastic Functionally Graded Cylinder, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2020, pp. 1–10. DOI: 10.1002/mma.6428.
10. *Lukasievicz, S. A., Babaei, R. and Qian, R. E.* Detection of Material Properties in a Layered Body by Means of Thermal Effects, *J. Thermal Stresses*, 2003, vol. 26, no. 1, pp. 13–23.
11. *Yang, Y. C., Chen, W. L., Chou, H. M. and Salazar, J. L. L.* Inverse Hyperbolic Thermoelastic Analysis of a Functionally Graded Hollow Circular Cylinder in Estimating Surface Heat Flux and Thermal Stresses, *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2013, vol. 60, pp. 125–133. DOI: 10.1016/j.ijheatmasstransfer.2012.
12. *Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A. Koeffitsiyentnye obratnye zadachi termomekhaniki* [Coefficient Inverse Problems of Thermomechanics], Rostov-on-Don, Taganrog, Southern Federal University Press, 2019, 1468 p. (in Russian).
13. *Nedin, R., Nesterov, S. and Vatulyan, A.* On an Inverse Problem for Inhomogeneous Thermoelastic Rod, *International Journal of Solids and Structures*, 2014, vol. 51, no. 3, pp. 767–773. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2013.11.003.
14. *Tikhonov, A. N., Goncharskiy, A. V., Stepanov, V. V. and Yagola, A. G. Chislennye metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Numerical Methods for Solving Ill-Posed Problems], Moscow, Nauka, 1990, 230 p. (in Russian).
15. *Vatulyan, A. O. and Nesterov, S. A.* On the Identification Problem of the Thermomechanical Characteristics of the Finite Functionally Graded Cylinder, *Izvestiya of Saratov University. New Series. Series: Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2021, vol. 21, no. 1, pp. 35–47. (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2021-21-1-35-47.

Received October 26, 2021

Alexander O. Vatulyan
Southern Federal University,
8 a Milchakova St., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Head of the Department of Theory of Elasticity
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Head of the Department of Differential Equations
E-mail: aovatulyan@sfedu.ru
https://orcid.org/0000-0003-0444-4496

Sergey A. Nesterov
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362025, Russia,
Senior Researcher of the Department of Differential Equations
E-mail: 1079@list.ru