Владикавказский математический журнал
2022, Том 24, Выпуск 2, С. 101–116

УДК 517.5
DOI 10.46698/g5860-8517-3109-i

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МНОГОЧЛЕНОВ $\hat{l}_{n,n}^{\alpha}(x)$, ОРТОГОНАЛЬНЫХ НА ПРОИЗВОЛЬНЫХ СЕТКАХ

З. М. Магомедова[1], **А. А. Нурмагомедов**[2]

[1] Филиал Российского государственного университета туризма и сервиса,
Россия, 367000, Махачкала, пр. им. Али-Гаджи Акушинского, 401;
[2] Дагестанский государственный аграрный университет им. М. М. Джамбулатова,
Россия, 367032, Махачкала, пр. М. Гаджиева, 180

E-mail: mzarina79@mail.ru, alimn@mail.ru

Аннотация. Пусть $\Omega = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_j, \dots\}$ — дискретная система точек, таких что $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_j < \dots$, $\lim_{j\to\infty} x_j = +\infty$ и $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$, $\delta = \sup_{0\leqslant j<+\infty} \Delta x_j < \infty, N = 1/\delta$. В данной работе исследуются асимптотические свойства многочленов $\hat{l}_{n,N}^{\alpha}(x)$, образующих ортонормированную систему с весом $\rho_1^{\alpha}(x_j) = e^{-x_j}(x_{j+1}^{\alpha+1} - x_j^{\alpha+1})/(\alpha+1)$ при $-1 < \alpha \leqslant 0$ и с весом $\rho_2^{\alpha}(x_j) = e^{-x_{j+1}}(x_{j+1}^{\alpha+1} - x_j^{\alpha+1})/(\alpha+1)$ при $\alpha > 0$ на произвольных сетках, состоящих из бесконечного числа точек полуоси $[0, +\infty)$. А именно, установлена асимптотическая формула, в которой при возрастании n вместе с N, асимптотическое поведение этих многочленов близко к асимптотическому поведению ортонормированных многочленов Лагерра $\hat{L}_n^{\alpha}(x)$.

Ключевые слова: многочлен, ортогональная система, сетка, вес, асимптотическая формула.

AMS Subject Classification: 33C45, 42C05.

Образец цитирования: *Магомедова З. М., Нурмагомедов А. А.* Асимптотические свойства многочленов $\hat{l}_{n,N}^{\alpha}(x)$, ортогональных на произвольных сетках // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 2.—С. 101–116. DOI: 10.46698/g5860-8517-3109-i.

1. Введение

В различных прикладных и теоретических задачах широкое применение находят разложения в ряды Фурье. При этом в качестве базисов для разложений используют многочлены, которые образуют ортогональную систему на дискретных системах точек. Однако при практической реализации этих разложений возникает новая задача — исследовать асимптотические свойства этих многочленов.

Заметим, что одним из способов проведения этого исследования является сравнение многочленов, ортогональных на дискретных системах точек с соответствующими классическими ортогональными многочленами, где это возможно. А поскольку последние изучены достаточно хорошо, то ряд их свойств может быть перенесен и на дискретные их аналоги.

Далее заметим, что существенный вклад в асимптотическую теорию многочленов, ортогональных на дискретных системах точек, внесен И. И. Шарапудиновым [1], в частности, классических многочленов Чебышева, Мейкснера и Кравчука, ортогональных на равномерных сетках. В работах И. И. Шарапудинова [2–5], А. А. Нурмагомедова [6–7], М. С. Султанахмедова [8] и других исследованы асимптотические свойства многочленов, ортогональных на неравномерных сетках числовой оси.

В монографии [1, гл. 4, § 4.9, с. 88–90] И. И. Шарапудиновым для ортонормированных на равномерной сетке многочленов Мейкснера $m_{n,N}^{\alpha}(x)$ доказана следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть* $0 \leqslant \alpha$ — *целое,* $\lambda, \delta > 0$, $N = 1/\delta$, $x \in [0, \infty)$. *Тогда имеет место асимптотичекая формула*

$$m_{n,N}^{\alpha}(x) = \hat{L}_n^{\alpha}(x) + v_{n,N}^{\alpha}(x),$$

для остаточного члена $v_{n,N}^{\alpha}(x)$ *которой при* $0 < \delta < 1$, $1 \leqslant n \leqslant \lambda N$ *справедлива оценка*

$$|v_{n,N}^{\alpha}(x)| \leqslant c(\alpha, \lambda) A_n^{\alpha}(x) \sqrt{\frac{n}{N}}\, n^{-\frac{\alpha}{2}},$$

где

$$A_n^{\alpha}(x) = \begin{cases} e^{\frac{x}{2}} s^{\alpha}, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{s}; \\ e^{\frac{x}{2}} s^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} x^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}, & \dfrac{1}{s} \leqslant x \leqslant \dfrac{s}{2}; \\ e^{\frac{x}{2}} \left[s\left(s^{\frac{1}{3}} + |x - s|\right)\right]^{-\frac{1}{4}}, & \dfrac{s}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{3s}{2}; \\ e^{\frac{x}{4}}, & x \geqslant \dfrac{3s}{2}, \end{cases} \tag{1.1}$$

$s = 4n + 2\alpha + 2$, $\alpha > -1$, $\hat{L}_n^{\alpha}(x)$ — *ортонормированный многочлен Лагерра.*

При $\alpha > -1$ нам удалось перенести эту теорему на случай неравномерной сетки.

Итак, пусть $\alpha > -1$ — произвольное действительное число, а $\Omega = \{x_j\}_{j=0}^{\infty}$ — дискретное множество (сетка), состоящее из бесконечного числа различных точек полуоси $[0, +\infty) : 0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$ Обозначим $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$, $j = 0, 1, \ldots$, причем предполагается, что

$$\delta = \sup_{0 \leqslant j < \infty} \Delta x_j < \infty, \quad N = \frac{1}{\delta}, \quad \lim_{j \to \infty} x_j = +\infty.$$

Через

$$\hat{l}_{k,N}^{\alpha}(x) = \hat{l}_{k,N}^{\alpha}(x, \Omega), \quad k = 0, 1, \ldots, \tag{1.2}$$

обозначим последовательность многочленов, образующих ортонормированную систему с весом

$$\rho^{\alpha}(x_j) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x_j}(x_{j+1}^{\alpha+1} - x_j^{\alpha+1})}{\alpha + 1}; & -1 < \alpha \leqslant 0\,, \\ \dfrac{e^{-x_{j+1}}(x_{j+1}^{\alpha+1} - x_j^{\alpha+1})}{\alpha + 1}, & \alpha > 0, \end{cases} \tag{1.3}$$

на сетке Ω в следующем смысле $(n, m = 0, 1, \ldots)$:

$$\left(\hat{l}_{n,N}^{\alpha}, \hat{l}_{m,N}^{\alpha}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{\alpha}(x_j)\, \hat{l}_{n,N}^{\alpha}(x_j)\, \hat{l}_{m,N}^{\alpha}(x_j) = \delta_{nm}, \quad -1 < \alpha \leqslant 0, \tag{1.4}$$

$$\left(\hat{l}_{n,N}^{\alpha}, \hat{l}_{m,N}^{\alpha}\right) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^{\alpha}(x_j)\, \hat{l}_{n,N}^{\alpha}(x_{j+1})\, \hat{l}_{m,N}^{\alpha}(x_{j+1}) = \delta_{nm}, \quad \alpha > 0. \tag{1.5}$$

Для определенности будем считать, что старший коэффициент многочлена $\hat{l}^{\alpha}_{n}(x)$ положителен, т. е.

$$l^{\alpha}_{n,N}(x) = k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \ldots + k_0, \quad k_n > 0. \tag{1.6}$$

Далее, пусть P_n — множество всех алгебраических многочленов степени не выше n, $\hat{L}^{\alpha}_{n}(x)$ — ортонормированный многочлен Лагерра, $\omega_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x}$ — весовая функция Лагерра и $\|\cdot\|_{\omega_\alpha}$ — норма в пространстве L_2, т. е.

$$\|f\|_{\omega_\alpha} = \left(\int\limits_0^\infty \omega_\alpha(x)|f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что если $p_n \in \mathsf{P}_n$, то

$$\|p'_n\|_{\omega_\alpha} \leqslant M_n(\alpha)\|p_n\|_{\omega_\alpha}, \tag{1.7}$$

где

$$M_n(\alpha) = \sup_{p_n \in \mathsf{P}_n} \frac{\|p'_n\|_{\omega_\alpha}}{\|p_n\|_{\omega_\alpha}}.$$

Отметим, что согласно результатам работы [9], $M_n(\alpha)/n \to [j_{(\alpha-1)/2,1}]^{-1}$ при $n \to \infty$, где $j_{\nu,1}$ есть первый положительный нуль функции Бесселя $J_\nu(z)$.

Всюду в дальнейшем через c, $c(\alpha)$, $c(\alpha,\lambda)$, … будут обозначаться постоянные, зависящие лишь от указанных параметров, вообще говоря, разные в разных местах.

В настоящей работе исследуются асимптотические свойства многочлена $\hat{l}^{\alpha}_{n,N}(x)$ при $n, N \to \infty$. Здесь следует отметить, что данная работа есть обобщение ранее полученного нами результата [10].

2. Некоторые свойства многочленов Лагерра

Здесь мы приведем некоторые сведения о многочленах Лагерра. Определим многочлены Лагерра с помощью обобщенной формулы Родрига

$$L^{\alpha}_{n}(x) = \frac{1}{n!}\, e^x x^{-\alpha}\, \frac{d^n}{dx^n}\,(e^{-x}x^{n+\alpha}), \tag{2.1}$$

где α — произвольное действительное число. Ниже нам понадобятся следующие свойства многочленов Лагерра [11]:

ортонормированность:

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}x^\alpha \hat{L}^{\alpha}_{n}(x)\hat{L}^{\alpha}_{m}(x)\,dx = \delta_{nm}, \quad \alpha > -1, \tag{2.2}$$

где $\hat{L}^{\alpha}_{n}(x) = (h^{\alpha}_{n})^{-1/2}L^{\alpha}_{n}(x)$, $h^{\alpha}_{n} = \Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}$;

равенства:

$$L^{\alpha}_{n}(x) = L^{\alpha+1}_{n}(x) - L^{\alpha+1}_{n-1}(x), \tag{2.3}$$

$$\frac{d}{dx}\,L^{\alpha}_{n}(x) = -L^{\alpha+1}_{n-1}(x), \tag{2.4}$$

$$L^{\alpha-1}_{n}(x) = \frac{\alpha}{n+\alpha}\,L^{\alpha}_{n}(x) - \frac{x}{n+\alpha}\,L^{\alpha+1}_{n-1}(x); \tag{2.5}$$

весовая оценка:

$$|L_n^\alpha(x)| \leqslant c(\alpha) A_n^\alpha(x), \quad 0 \leqslant x < \infty, \tag{2.6}$$

где $A_n^\alpha(x)$ определяется равенством (1.1).

Ниже нам также понадобится формула Кристоффеля — Дарбу для многочленов Лагерра [11, § 5.1, с. 110]

$$\Gamma(\alpha+1) K_n^\alpha(x,y) = \sum_{\nu=0}^{n} \left\{ \binom{\nu+\alpha}{\nu} \right\}^{-1} L_\nu^\alpha(x) L_\nu^\alpha(y)$$

$$= (n+1) \left\{ \binom{n+\alpha}{n} \right\}^{-1} \frac{L_n^\alpha(x) L_{n+1}^\alpha(y) - L_{n+1}^\alpha(x) L_n^\alpha(y)}{x-y}. \tag{2.7}$$

3. Некоторые вспомогательные утверждения

Мы здесь докажем некоторые утверждения, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Лемма 3.1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на $[0,\infty)$. Тогда, если сходятся ряд $\sum_{j=0}^\infty |f(x_j)|(x_{j+1}^{\alpha+1} - x_j^{\alpha+1})$ и интегралы $\int_0^\infty x^\alpha |f(x)|\,dx$, $\int_0^\infty x^\alpha |f'(x)|\,dx$, то имеют место следующие равенства:*

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx = \frac{1}{\alpha+1} \sum_{j=0}^\infty f(x_j)\bigl(x_{j+1}^{\alpha+1} - x_j^{\alpha+1}\bigr) + r^{(1)}(f), \quad -1 < \alpha \leqslant 0, \tag{3.1}$$

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx = \frac{1}{\alpha+1} \sum_{j=0}^\infty f(x_{j+1})\bigl(x_{j+1}^{\alpha+1} - x_j^{\alpha+1}\bigr) + r^{(2)}(f), \quad \alpha > 0, \tag{3.2}$$

в которых для остаточных членов $r^{(1)}(f)$ и $r^{(2)}(f)$ имеют место оценки:

$$\bigl|r^{(i)}(f)\bigr| \leqslant \delta \int_0^\infty t^\alpha |f'(t)|\,dt, \quad i = 1, 2, \tag{3.3}$$

где

$$\delta = \sup_{0 \leqslant j < \infty} \Delta x_j. \tag{3.4}$$

◁ Мы имеем

$$\int_0^\infty x^\alpha f(x)\,dx = \sum_{j=0}^\infty \int_{x_j}^{x_{j+1}} x^\alpha f(x)\,dx. \tag{3.5}$$

Далее, воспользовавшись формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме и формулой Ньютона — Лейбница, мы можем записать при $-1 < \alpha \leqslant 0$

$$\int_{x_j}^{x_{j+1}} x^\alpha f(x)\,dx = \int_{x_j}^{x_{j+1}} x^\alpha \left[f(x_j) + \int_{x_j}^{x} f'(t)\,dt \right] dx = f(x_j)\,\frac{x_{j+1}^{\alpha+1} - x_j^{\alpha+1}}{\alpha+1}$$

$$+ \int_{x_j}^{x_{j+1}} x^\alpha \int_{x_j}^{x} f'(t)\,dt\,dx = f(x_j)\,\frac{x_{j+1}^{\alpha+1} - x_j^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(t) \int_{t}^{x_{j+1}} x^\alpha\,dx\,dt \tag{3.6}$$

$$= f(x_j)\,\frac{x_{j+1}^{\alpha+1} - x_j^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f'(t)\,t^\alpha (x_{j+1} - t)\,dt.$$

В силу (3.4) имеем

$$\left|\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f'(t)\,t^{\alpha}(x_{j+1}-t)\,dt\right| \leqslant \delta \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} |f'(t)|\,t^{\alpha}\,dt. \tag{3.7}$$

Тогда из (3.5)–(3.7) мы находим

$$\int\limits_0^{\infty} x^{\alpha} f(x)\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^{\infty} f(x_j)\big(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1}\big) + r^{(1)}(f),$$

где

$$\big|r^{(1)}(f)\big| \leqslant \delta \sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} |f'(t)|\,t^{\alpha}\,dt = \delta\int\limits_0^{\infty} |f'(t)|\,t^{\alpha}\,dt.$$

При $\alpha > 0$ имеем

$$\begin{aligned}
\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} x^{\alpha} f(x)\,dx &= \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} x^{\alpha}\left[f(x_{j+1}) + \int\limits_{x_{j+1}}^{x} f'(t)\,dt\right]dx = f(x_{j+1})\,\frac{x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1}}{\alpha+1} \\
&+ \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} x^{\alpha}\int\limits_{x_{j+1}}^{x} f'(t)\,dt\,dx = f(x_{j+1})\,\frac{x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f'(t)\int\limits_{x_j}^{t} x^{\alpha}\,dx\,dt \\
&= f(x_{j+1})\,\frac{x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f'(t)\,t^{\alpha}(t-x_j)\,dt.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

В силу (3.4) имеем

$$\left|\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} f'(t)\,t^{\alpha}(t-x_j)\,dt\right| \leqslant \delta \int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} |f'(t)|\,t^{\alpha}\,dt. \tag{3.9}$$

Тогда из (3.5), (3.8) и (3.9) имеем

$$\int\limits_0^{\infty} x^{\alpha} f(x)\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^{\infty} f(x_{j+1})\big(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1}\big) + r^{(2)}(f),$$

где

$$\big|r^{(2)}(f)\big| \leqslant \delta \sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_{x_j}^{x_{j+1}} |f'(t)|\,t^{\alpha}\,dt = \delta\int\limits_0^{\infty} |f'(t)|\,t^{\alpha}\,dt. \quad \triangleright$$

Лемма 3.2. *Для ортонормированного многочлена Лагерра*

$$\hat{L}^{\alpha}_n(x) = \sqrt{\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}}\,L^{\alpha}_n(x) \tag{3.10}$$

имеют место формулы

$$\frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^{\infty}e^{-x_j}\left(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1}\right)\left(\hat{L}_n^\alpha(x_j)\right)^2=1+r_n^{(1)},\quad -1<\alpha\leqslant 0,\tag{3.11}$$

$$\frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^{\infty}e^{-x_{j+1}}\left(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1}\right)\left(\hat{L}_n^\alpha(x_{j+1})\right)^2=1+r_n^{(2)},\quad \alpha>0,\tag{3.12}$$

в которых

$$\left|r_n^{(i)}\right|\leqslant c(\alpha)\,\delta\ln(n+1),\quad i=1,2.\tag{3.13}$$

$\lhd$ Полагая $f(x)=e^{-x}(\hat{L}_n^\alpha(x))^2$, воспользуемся леммой 3.1. Тогда

$$\begin{gathered}1=\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha\left(\hat{L}_n^\alpha(x)\right)^2dx=\frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^{\infty}e^{-x_j}\left(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1}\right)\left(\hat{L}_n^\alpha(x_j)\right)^2+r_n^{(1)},\\ -1<\alpha\leqslant 0,\end{gathered}\tag{3.14}$$

$$\begin{gathered}1=\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha\left(\hat{L}_n^\alpha(x)\right)^2dx=\frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^{\infty}e^{-x_{j+1}}\left(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1}\right)\left(\hat{L}_n^\alpha(x_{j+1})\right)^2+r_n^{(2)},\\ \alpha>0,\end{gathered}\tag{3.15}$$

где $r_n^{(i)}=r^{(i)}(e^{-x}(\hat{L}_n^\alpha(x))^2)$, и, стало быть,

$$\left|r_n^{(i)}\right|\leqslant\delta\int_0^\infty x^\alpha\left|\left(e^{-x}\left(\hat{L}_n^\alpha(x)\right)^2\right)'\right|dx,\quad i=1,2.\tag{3.16}$$

Далее, в силу (2.4) имеем

$$\begin{aligned}\left(e^{-x}\left(\hat{L}_n^\alpha(x)\right)^2\right)'&=\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\left(e^{-x}(L_n^\alpha(x))^2\right)'\\&=\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\left(-e^{-x}(L_n^\alpha(x))^2+2e^{-x}(L_n^\alpha(x))'L_n^\alpha(x)\right)\\&=\frac{n!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\left(-2e^{-x}L_n^\alpha(x)L_{n-1}^{\alpha+1}(x)-e^{-x}(L_n^\alpha(x))^2\right).\end{aligned}\tag{3.17}$$

Поэтому в силу весовой оценки (2.6) получим

$$\left|\left(e^{-x}\left(\hat{L}_n^\alpha(x)\right)^2\right)'\right|\leqslant c(\alpha)\,n^{-\alpha}\,e^{-x}\Big[A_n^\alpha(x)A_{n-1}^{\alpha+1}(x)+(A_n^\alpha(x))^2\Big].$$

Тогда

$$\int_0^\infty x^\alpha\left|\left(e^{-x}\left(\hat{L}_n^\alpha(x)\right)^2\right)'\right|dx\leqslant c(\alpha)n^{-\alpha}\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha\Big[A_n^\alpha(x)A_{n-1}^{\alpha+1}(x)+(A_n^\alpha(x))^2\Big]dx.\tag{3.18}$$

Исходя из (1.1) имеем

$$n^{-\alpha}\, e^{-x}\, x^{\alpha} A_n^{\alpha}(x) A_{n-1}^{\alpha+1}(x) \leqslant c(\alpha) \begin{cases} s^{\alpha+1} x^{\alpha}, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{s}; \\ x^{-1}, & \dfrac{1}{s} \leqslant x \leqslant \dfrac{s}{2}; \\ s^{-\frac{1}{2}-\alpha}\big(s^{\frac{1}{3}} + |x-s|\big)^{-\frac{1}{2}} x^{\alpha}, & \dfrac{s}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{3s}{2}; \\ s^{-\alpha}\, e^{-\frac{x}{2}} x^{\alpha}, & x \geqslant \dfrac{3s}{2}; \end{cases}$$

$$n^{-\alpha} e^{-x} x^{\alpha} (A_n^{\alpha}(x))^2 = \begin{cases} s^{\alpha}\, x^{\alpha}, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{s}; \\ s^{-\frac{1}{2}}\, x^{-\frac{1}{2}}, & \dfrac{1}{s} \leqslant x \leqslant \dfrac{s}{2}; \\ s^{-\frac{1}{2}-\alpha}\big(s^{\frac{1}{3}} + |x-s|\big)^{-\frac{1}{2}} x^{\alpha}, & \dfrac{s}{2} \leqslant x \leqslant \dfrac{3s}{2}; \\ s^{-\alpha}\, e^{-\frac{x}{2}} x^{\alpha}, & x \geqslant \dfrac{3s}{2}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} n^{-\alpha} \int_0^{\infty} & e^{-x} x^{\alpha} A_n^{\alpha}(x) A_{n-1}^{\alpha+1}(x)\, dx \\ & \leqslant c(\alpha)\, n^{-\alpha} \left(\int_0^{\frac{1}{s}} + \int_{\frac{1}{s}}^{\frac{s}{2}} + \int_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}} + \int_{\frac{3s}{2}}^{\infty} \right) e^{-x} x^{\alpha} A_n^{\alpha}(x) A_{n-1}^{\alpha+1}(x)\, dx \\ & \leqslant s^{\alpha+1} \int_0^{\frac{1}{s}} x^{\alpha}\, dx + \int_{\frac{1}{s}}^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} + s^{-\frac{1}{2}-\alpha} \int_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}} \big(s^{\frac{1}{3}} + |x-s|\big)^{-\frac{1}{2}} x^{\alpha}\, dx \\ & \qquad + s^{-\alpha} \int_{\frac{3s}{2}}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} x^{\alpha}\, dx = J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Оценим J_1, J_2, J_3, J_4. Имеем

$$J_1 = s^{\alpha+1} \int_0^{\frac{1}{s}} x^{\alpha}\, dx \leqslant c(\alpha), \quad J_2 = \int_{\frac{1}{s}}^{\frac{s}{2}} \frac{dx}{x} \leqslant c(\alpha) \ln(s+1),$$

$$\begin{aligned} J_3 = s^{-\frac{1}{2}-\alpha} \int_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}} x^{\alpha} \left(s^{\frac{1}{3}} + |x-s|\right)^{-\frac{1}{2}} dx &= s^{-\frac{1}{2}-\alpha} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} (s+t)^{\alpha} \left(s^{\frac{1}{3}} + |t|\right)^{-\frac{1}{2}} dt \\ &= 2s^{-\frac{1}{2}-\alpha} \int_0^{\frac{s}{2}} (s+t)^{\alpha} \left(s^{\frac{1}{3}} + t\right)^{-\frac{1}{2}} dt. \end{aligned}$$

Ввиду того, что $\frac{s}{2} \leqslant s+t \leqslant \frac{3s}{2}$, имеем

$$2s^{-\frac{1}{2}-\alpha} \int\limits_0^{\frac{s}{2}} (s+t)^\alpha \left(s^{\frac{1}{3}}+t\right)^{-\frac{1}{2}} dt \leqslant c(\alpha)\, s^{-\frac{1}{2}-\alpha} \int\limits_0^{\frac{s}{2}} s^\alpha \left(s^{\frac{1}{3}}+t\right)^{-\frac{1}{2}} dt \leqslant c(\alpha)\, s^{-\frac{1}{2}} s^{\frac{1}{2}} = c(\alpha).$$

Очевидно, $0 \leqslant e^{-x/4} x^\alpha \leqslant C$ при $x \geqslant 3s/2$. Следовательно,

$$J_4 = s^{-\alpha} \int\limits_{\frac{3s}{2}}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} x^\alpha\, dx \leqslant c(\alpha)\, s^{-\alpha} \int\limits_{\frac{3s}{2}}^{\infty} e^{-\frac{x}{4}}\, dx \leqslant c(\alpha)\, s^{-\alpha} e^{-\frac{3s}{8}}.$$

Следовательно,

$$n^{-\alpha} \int\limits_0^\infty e^{-x} x^\alpha A_n^\alpha(x) A_{n-1}^{\alpha+1}(x)\, dx \leqslant c(\alpha) \ln(n+1). \tag{3.20}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} n^{-\alpha} \int\limits_0^\infty e^{-x} x^\alpha (A_n^\alpha(x))^2\, dx &= n^{-\alpha} \left(\int\limits_0^{\frac{1}{s}} + \int\limits_{\frac{1}{s}}^{\frac{s}{2}} + \int\limits_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}} + \int\limits_{\frac{3s}{2}}^{\infty} \right) e^{-x} x^\alpha (A_n^\alpha(x))^2\, dx \\ &= s^\alpha \int\limits_0^{\frac{1}{s}} x^\alpha\, dx + s^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\frac{1}{s}}^{\frac{s}{2}} x^{-\frac{1}{2}}\, dx + s^{-\frac{1}{2}\alpha} \int\limits_{\frac{s}{2}}^{\frac{3s}{2}} \left(s^{\frac{1}{3}} + |x-s|\right)^{-\frac{1}{2}} x^\alpha\, dx \\ &\quad + s^{-\alpha} \int\limits_{\frac{3s}{2}}^{\infty} e^{-\frac{x}{2}} x^\alpha\, dx = I_1 + I_2 + I_3 + I_4, \end{aligned} \tag{3.21}$$

где

$$I_1 = s^\alpha \int\limits_0^{\frac{1}{s}} x^\alpha\, dx = \frac{s^{-1}}{\alpha+1} \leqslant c(\alpha), \quad I_2 = s^{-\frac{1}{2}} \int\limits_{\frac{1}{s}}^{\frac{s}{2}} x^{-\frac{1}{2}}\, dx \leqslant c(\alpha),$$

$$I_3 \leqslant c(\alpha), \quad I_4 \leqslant c(\alpha)\, s^{-\alpha} e^{-\frac{3s}{8}}.$$

Следовательно,

$$n^{-\alpha} \int\limits_0^\infty e^{-x} x^\alpha (A_n^\alpha(x))^2\, dx \leqslant c(\alpha). \tag{3.22}$$

Итак, сопоставляя (3.18)–(3.22), получим

$$\int\limits_0^\infty x^\alpha \left| \left(e^{-x} \left(\hat{L}_n^\alpha(x)\right)^2 \right)' \right| dx \leqslant c(\alpha) \ln(n+1). \tag{3.23}$$

Отсюда и из (3.16) следует, что

$$\left|r_n^{(i)}\right| \leqslant \delta \int\limits_0^\infty x^\alpha \left| \left(e^{-x} \left(\hat{L}_n^\alpha(x)\right)^2 \right)' \right| dx \leqslant c(\alpha) \delta \ln(n+1), \quad i = 1, 2. \quad \triangleright$$

Лемма 3.3. *Пусть* $n < c(\alpha)/\delta$. *Для ортонормированного многочлена* (1.2) *имеют место следующие формулы:*

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha\big(\hat{l}_{n,N}^\alpha(x)\big)^2\,dx = 1 + R_n^{(1)}, \quad -1 < \alpha \leqslant 0, \tag{3.24}$$

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha\big(\hat{l}_{n,N}^\alpha(x)\big)^2\,dx = 1 + R_n^{(2)}, \quad \alpha > 0, \tag{3.25}$$

в которых

$$\big|R_n^{(i)}\big| \leqslant \frac{c(\alpha)\delta n}{1 - c(\alpha)\delta n}, \quad i = 1, 2. \tag{3.26}$$

$\lhd$ В силу леммы 3.1

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha\big(\hat{l}_{n,N}^\alpha(x)\big)^2\,dx = \sum_{j=0}^\infty e^{-x_j}\,\frac{x_{j+1}^{\alpha+1} - x_j^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,\big(\hat{l}_{n,N}^\alpha(x_j)\big)^2 + R_n^{(1)}, \quad -1 < \alpha \leqslant 0, \tag{3.27}$$

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha\big(\hat{l}_{n,N}^\alpha(x)\big)^2\,dx = \sum_{j=0}^\infty e^{-x_{j+1}}\,\frac{x_{j+1}^{\alpha+1} - x_j^{\alpha+1}}{\alpha+1}\,\big(\hat{l}_{n,N}^\alpha(x_{j+1})\big)^2 + R_n^{(2)}, \quad \alpha > 0, \tag{3.28}$$

где $R_n^{(i)} = r^{(i)}(e^{-x}(\hat{l}_{n,N}^\alpha(x))^2)$, $i = 1, 2$. В силу (3.3) имеем

$$\big|R_n^{(i)}\big| \leqslant \delta\int_0^\infty x^\alpha\Big|\Big(e^{-x}\big(\hat{l}_{n,N}^\alpha(x)\big)^2\Big)'\Big|\,dx, \quad i = 1, 2. \tag{3.29}$$

Далее, находим

$$\int_0^\infty x^\alpha\Big(e^{-x}\big(\hat{l}_{n,N}^\alpha(x)\big)^2\Big)'\,dx = 2\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\big(\hat{l}_{n,N}^\alpha(x)\big)'\hat{l}_{n,N}^\alpha(x)\,dx - \int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\big(\hat{l}_{n,N}^\alpha(x)\big)^2\,dx. \tag{3.30}$$

Применяя к первому интегралу в равенстве (3.30) неравенство Коши — Буняковского

$$\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha\big|\big(\hat{l}_{n,N}^\alpha(x)\big)'\hat{l}_{n,N}^\alpha(x)\big|\,dx \leqslant \left(\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha\big(\hat{l}_{n,N}^\alpha(x)\big)'^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha\big(\hat{l}_{n,N}^\alpha(x)\big)^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

в силу неравенства (1.7) из (3.30) получаем

$$\int_0^\infty x^\alpha\Big(e^{-x}\big(\hat{l}_{n,N}^\alpha(x)\big)^2\Big)'\,dx \leqslant c(\alpha)n\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\big(\hat{l}_{n,N}^\alpha(x)\big)^2\,dx$$

$$+ \int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\big(\hat{l}_{n,N}^\alpha(x)\big)^2\,dx \leqslant c(\alpha)n\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\big(\hat{l}_{n,N}^\alpha(x)^2\big)\,dx. \tag{3.31}$$

Сопоставляя (3.29)–(3.31), получим

$$\left|R_n^{(i)}\right| \leqslant c(\alpha)\delta n\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\big(\hat{l}^\alpha_{n,N}(x)\big)^2\,dx,\quad i=1,2. \tag{3.32}$$

Кроме того, из (3.27), (3.28) и (3.32) следует неравенство

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}\big(\hat{l}^\alpha_{n,N}(x)\big)^2\,dx = 1+R_n^{(i)},\quad i=1,2, \tag{3.33}$$

и оценка (3.26) для $R_n^{(i)}$. $\triangleright$

Лемма 3.4. *Пусть k_n — старший коэффициент полинома $\hat{l}^\alpha_{n,N}(x)$, а λ_n — старший коэффициент полинома Лагерра $\hat{L}^\alpha_n(x)$. Тогда*

$$\frac{k_n}{\lambda_n} \geqslant \frac{1}{1+c(\alpha)\delta\ln(n+1)}\,. \tag{3.34}$$

$\triangleleft$ Как известно [11], минимум сумм

$$\frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^\infty e^{-x_j}\left(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1}\right)p_n{}^2(x_j)$$

и

$$\frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^\infty e^{-x_{j+1}}\left(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1}\right)p_n{}^2(x_{j+1})$$

по всевозможным полиномам $p_n(x)$ со старшим коэффициентом, равным единице, доставляет $\frac{\hat{l}^\alpha_{n,N}(x)}{k_n}$, т. е. при $-1<\alpha\leqslant 0$

$$\frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^\infty \frac{e^{-x_j}(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1})(\hat{l}^\alpha_{n,N}(x_j))^2}{k_n^2} \leqslant \frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^\infty e^{-x_j}\big(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1}\big)p_n{}^2(x_j), \tag{3.35}$$

при $\alpha>0$

$$\frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^\infty \frac{e^{-x_{j+1}}(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1})(\hat{l}^\alpha_{n,N}(x_{j+1}))^2}{k_n^2} \leqslant \frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^\infty e^{-x_{j+1}}\big(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1}\big)p_n{}^2(x_{j+1}). \tag{3.36}$$

Беря $p_n(x)=\frac{\hat{L}^\alpha_n(x)}{\lambda_n}$, получим при $-1<\alpha\leqslant 0$

$$\frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^\infty \frac{e^{-x_j}(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1})(\hat{l}^\alpha_{n,N}(x_j))^2}{k_n^2} \leqslant \frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^\infty \frac{e^{-x_j}(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1})(\hat{L}^\alpha_n(x_j))^2}{\lambda_n^2}, \tag{3.37}$$

при $\alpha>0$

$$\frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^\infty \frac{e^{-x_{j+1}}(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1})(\hat{l}^\alpha_{n,N}(x_{j+1}))^2}{k_n^2} \leqslant \frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^\infty \frac{e^{-x_{j+1}}(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1})(\hat{L}^\alpha_n(x_{j+1}))^2}{\lambda_n^2}. \tag{3.38}$$

Отсюда, учитывая, что при $-1<\alpha\leqslant 0$

$$\frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^{\infty} e^{-x_j}\big(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1}\big)\big(\hat{l}^{\alpha}_{n,N}(x_j)\big)^2=1,$$

при $\alpha>0$

$$\frac{1}{\alpha+1}\sum_{j=0}^{\infty} e^{-x_{j+1}}\big(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1}\big)\big(\hat{l}^{\alpha}_{n,N}(x_{j+1})\big)^2=1,$$

получим при $-1<\alpha\leqslant 0$

$$\frac{{k_n}^2}{{\lambda_n}^2}\geqslant\frac{\alpha+1}{\sum\limits_{j=0}^{\infty} e^{-x_j}(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1})(\hat{L}^{\alpha}_n(x_j))^2},\tag{3.39}$$

при $\alpha>0$

$$\frac{{k_n}^2}{{\lambda_n}^2}\geqslant\frac{\alpha+1}{\sum\limits_{j=0}^{\infty} e^{-x_{j+1}}(x_{j+1}^{\alpha+1}-x_j^{\alpha+1})(\hat{L}^{\alpha}_n(x_{j+1}))^2}.\tag{3.40}$$

Ввиду леммы 3.2 отсюда имеем

$$\frac{{k_n}^2}{{\lambda_n}^2}\geqslant\frac{1}{1+c(\alpha)\delta\ln(n+1)}.$$

Отсюда ввиду неравенства

$$(1+h)^{\frac12}\leqslant 1+\frac12\,h,\quad h\geqslant -1,$$

имеем (3.34). $\triangleright$

4. Асимптотические свойства многочленов $\hat{l}^{\alpha}_{n,N}(x)$

Здесь мы получим асимптотическую формулу для многочленов $\hat{l}^{\alpha}_{n,N}(x)$, ортонормированных на Ω в смысле (1.4) и (1.5).

Теорема 4.1. *Пусть $\alpha>-1$, $0<\lambda<1$, $0<\delta<1$, $N=1/\delta$, $x\in[0,+\infty)$. Тогда имеет место асимптотическая формула*

$$\hat{l}^{\alpha}_{n,N}(x)=\hat{L}^{\alpha}_n(x)+v^{\alpha}_{n,N}(x),\tag{4.1}$$

для остаточного члена $v^{\alpha}_{n,N}(x)$ которой при $1\leqslant n\leqslant\lambda N^{1/2}$ справедлива оценка

$$\big|v^{\alpha}_{n,N}(x)\big|\leqslant c(\alpha,\lambda)\,\frac{n^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{N}}\,A^{\alpha}_n(x),\tag{4.2}$$

где $A^{\alpha}_n(x)$ определяется равенством (1.1).

$\triangleleft$ Оценим следующий интеграл:

$$\int\limits_0^{\infty} x^{\alpha}e^{-x}\big(v^{\alpha}_{n,N}(x)\big)^2\,dx=\int\limits_0^{\infty} x^{\alpha}e^{-x}\big(\hat{L}^{\alpha}_n(x)-\hat{l}^{\alpha}_{n,N}(x)\big)^2\,dx=\int\limits_0^{\infty} x^{\alpha}e^{-x}\big(\hat{L}^{\alpha}_n(x)\big)^2\,dx$$

$$-2\int\limits_0^{\infty} x^{\alpha}e^{-x}\hat{L}^{\alpha}_n(x)\,\hat{l}^{\alpha}_{n,N}(x)\,dx+\int\limits_0^{\infty} x^{\alpha}e^{-x}\big(\hat{l}^{\alpha}_{n,N}(x)\big)^2\,dx=I_1-I_2+I_3.$$

Ясно, что

$$I_1 = 1, \quad I_2 = \frac{2k_n}{\lambda_n}.$$

А по лемме 3.3

$$I_3 \leqslant 1 + \frac{c(\alpha)\delta n}{1 - c(\alpha)\delta n}.$$

Если теперь $0 < \delta < 1$ и $1 \leqslant n \leqslant \lambda N^{1/2} = \lambda\delta^{-1/2}$, то

$$\int\limits_0^\infty x^\alpha e^{-x}\big(v_{n,N}^\alpha(x)\big)^2\,dx \leqslant \frac{c_1(\alpha)\delta\ln(n+1)}{1 + c_1(\alpha)\delta\ln(n+1)} + \frac{c_2(\alpha)\delta n}{1 - c_2(\alpha)\delta n} \leqslant c(\alpha,\lambda)\delta n. \tag{4.3}$$

Отсюда и из результатов [11, с. 189–190] следует, что

$$\big|v_{n,N}^\alpha(x)\big| \leqslant \left(c(\alpha,\lambda)\delta n \sum_{\nu=0}^n \big|\hat{L}_\nu^\alpha(x)\big|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{4.4}$$

Далее, в силу (2.3) формулу Кристоффеля — Дарбу можно переписать в виде

$$\begin{gathered} K_n^\alpha(t,x) = \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)(x-t)}\left[L_{n+1}^\alpha(x)L_{n+1}^{\alpha-1}(t) - L_{n+1}^{\alpha-1}(x)L_{n+1}^\alpha(t)\right] \\ = \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\left[L_{n+1}^\alpha(x)\,\frac{L_{n+1}^{\alpha-1}(x) - L_{n+1}^{\alpha-1}(t)}{t-x} - L_{n+1}^{\alpha-1}(x)\,\frac{L_{n+1}^\alpha(x) - L_{n+1}^\alpha(t)}{t-x}\right]. \end{gathered}$$

Переходя здесь к пределу при $t \to x$ и используя равенство (2.4), имеем

$$\begin{gathered} K_n^\alpha(x,x) = \sum_{\nu=0}^n \big|\hat{L}_\nu^\alpha(x)\big|^2 = \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\Big[-L_{n+1}^\alpha(x)\big[L_{n+1}^{\alpha-1}(x)\big]' - L_{n+1}^{\alpha-1}(x)\big[L_{n+1}^\alpha(x)\big]'\Big] \\ = \frac{(n+1)!}{\Gamma(n+\alpha+1)}\left[L_{n+1}^\alpha(x)L_n^\alpha(x) - L_{n+1}^{\alpha-1}(x)L_n^{\alpha+1}(x)\right]. \end{gathered} \tag{4.5}$$

Сопоставляя (4.5) с (4.4), имеем

$$\big|v_n^\alpha(x)\big| \leqslant c(\alpha,\lambda)\,\frac{n^{1-\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt{N}}\left[\big|L_n^\alpha(x)L_{n+1}^\alpha(x)\big| + \big|L_n^{\alpha+1}(x)L_{n+1}^{\alpha-1}(x)\big|\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{4.6}$$

Далее, оценим многочлены Лагерра с помощью неравенства (2.6). Вначале заметим, что

$$c_1\big|A_n^\alpha(x)\big| \leqslant |A_{n+1}^\alpha(x)| \leqslant c_2|A_n^\alpha(x)|, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

равномерно относительно $x \in [0,\infty)$. Поэтому в силу этого неравенства и (2.6) получаем

$$\big(|L_n^\alpha(x)L_{n+1}^\alpha(x)|\big)^{\frac{1}{2}} \leqslant c(\alpha)A_n^\alpha(x), \quad 0 \leqslant x < \infty. \tag{4.7}$$

Кроме того, из (1.1) при $\alpha > 0$ также следует, что

$$A_n^{\alpha+1}(x)A_{n+1}^{\alpha-1}(x) \leqslant C(\alpha)\big[A_n^\alpha(x)\big]^2, \quad x \geqslant 0. \tag{4.8}$$

Поэтому в этом случае

$$\big(|L_n^{\alpha+1}(x)L_{n+1}^{\alpha-1}(x)|\big)^{\frac{1}{2}} \leqslant c(\alpha)A_n^\alpha(x). \tag{4.9}$$

Если $-1 < \alpha \leqslant 0$, то в силу (2.5) имеем

$$L_{n+1}^{\alpha-1}(x) = \frac{\alpha}{n+\alpha+1}\, L_{n+1}^{\alpha}(x) - \frac{x}{n+\alpha+1}\, L_n^{\alpha+1}(x).$$

Следовательно,

$$\left(\left|L_n^{\alpha+1}(x) L_{n+1}^{\alpha-1}(x)\right|\right)^{\frac12} \leqslant \left[\frac{\alpha}{n+\alpha+1}\left|L_n^{\alpha+1}(x)L_{n+1}^{\alpha}(x)\right| + \frac{x}{n+\alpha+1}\left|L_n^{\alpha+1}(x)\right|^2\right]^{\frac12}. \tag{4.10}$$

Заметим, что

$$\frac{\alpha}{n+\alpha+1}\, A_n^{\alpha+1}(x) \leqslant c(\alpha) A_n^{\alpha}(x), \quad 0 \leqslant x < \infty.$$

Поэтому

$$\left[\frac{\alpha}{n+\alpha+1}\left|L_n^{\alpha+1}(x)L_{n+1}^{\alpha}(x)\right|\right]^{\frac12} \leqslant c(\alpha) A_n^{\alpha}(x). \tag{4.11}$$

Далее покажем, что при всех $x > 0$ справедливо неравенство

$$\left[\frac{x}{n+\alpha+1}\left|L_n^{\alpha+1}(x)\right|^2\right]^{\frac12} \leqslant c(\alpha)\left(\frac{x}{n}\right)^{\frac12} A_n^{\alpha+1}(x) \leqslant c(\alpha) A_n^{\alpha}(x). \tag{4.12}$$

Воспользуемся формулой (2.1) и интегральной формулой Коши. Тогда при $x > 0$ имеем

$$\left|L_n^{\alpha+1}(x)\right| = \frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\gamma} \frac{e^{x-t} t^{n+\alpha}}{(x-t)^{n+\alpha+1}}\,\frac{t}{x}\,dt\right|,$$

где γ — замкнутый контур, охватывающий точку $t = x$. Составим контур γ из отрезка $t = 5x/6 + i\tau$ ($\tau_{-1} \leqslant \tau \leqslant \tau_1$) и дуги окружности $|t| = 7x/6$, где τ_{-1} и τ_1 означают точки пересечения прямой $t = 5x/6 + i\tau$ и окружности $|t| = 7x/6$. Будем иметь:

$$\left|L_n^{\alpha+1}(x)\right| \leqslant \frac{7}{12\pi}\int\limits_{\gamma}\left|e^{x-t}\left(\frac{t}{x-t}\right)^{n+\alpha}\right|\frac{dt}{|x-t|} \leqslant \frac16\, e^{\frac{x}{6}}\, 7^{n+\alpha+2} = \frac{49}{6}\, 7^{n+\alpha}\, e^{-\frac{x}{12}}\, e^{\frac{x}{4}}. \tag{4.13}$$

Пусть $x \geqslant (12\ln 7)n$. Тогда

$$\left(\frac{x}{n+\alpha+1}\right)^{\frac12} 7^{n+\alpha}\, e^{-\frac{x}{12}} = \exp\left[\frac{(12\ln 7)n - x}{12} + \frac12\,\ln\frac{x}{n+\alpha+1}\right] \leqslant c. \tag{4.14}$$

Из (4.13) и (4.14) находим

$$\left(\frac{x}{n+\alpha+1}\right)^{\frac12}\left|L_n^{\alpha+1}(x)\right| \leqslant c\, e^{\frac{x}{4}} \leqslant c A_n^{\alpha}(x), \quad x \geqslant (12\ln 7)n.$$

Отсюда следует оценка (4.12). Утверждение теоремы вытекает из (4.6), (4.7), (4.9) и (4.10)–(4.12). $\triangleright$

В качестве следствия теоремы 4.1 приведем следующее утверждение.

Теорема 4.2. *Пусть* $\alpha > -1$, $0 < \lambda < 1$, $0 < \delta < 1$, $N = 1/\delta$, $x \in [0, +\infty)$. *Тогда существует постоянная* $c(\alpha, \lambda)$ *такая, что*

$$\left|\hat{l}_{n,N}^{\alpha}(x)\right| \leqslant c(\alpha,\lambda)\left(\frac{n}{\sqrt{N}} + 1\right) n^{-\frac{\alpha}{2}} A_n^{\alpha}(x).$$

Литература

1. *Шарапудинов И. И.* Смешанные ряды по ортогональным полиномам. Теория и приложения.—Махачкала: ДНЦ РАН, 2004.—276 с.
2. *Шарапудинов И. И.* Асимптотика полиномов, ортогональных на сетках из единичной окружности и числовой прямой // Современные проблемы математики, механики, информатики: материалы междунар. науч. конф.—Тула: Изд-во ТулГУ, 2009.—С. 10–19.
3. *Шарапудинов И. И.* Некоторые свойства полиномов, ортогональных на неравномерных сетках из единичной окружности и отрезка // Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 15-й Сарат. зим. шк., посвящ. 125-летию со дня рождения В. В. Голубева и 100-летию СГУ.—Саратов: Науч. кн., 2010.—С. 187.
4. *Шарапудинов И. И.* Асимптотические свойства полиномов, ортогональных на конечных сетках единичной окружности // Вестник ДНЦ РАН.—2011.—№ 42.—С. 5–14.
5. *Шарапудинов И. И.* Полиномы, ортогональные на сетках из единичной окружности и числовой оси // Дагестан. электрон. мат. изв.—2013.—Т. 1.—С. 1–55. DOI: 10.31029/demr.1.1.
6. *Нурмагомедов А. А.* Асимптотические свойства многочленов $\hat{p}_n^{\alpha,\beta}(x)$, ортогональных на произвольных сетках в случае целых α и β // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2010.—Т. 10, № 2.—С. 10–19. DOI: 10.18500/1816-9791-2010-10-2-10-19.
7. *Нурмагомедов А. А.* Многочлены, ортогональные на неравномерных сетках // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2011.—Т. 11, № 3 (2).—С. 29–42. DOI: 10.18500/1816-9791-2011-11-3-2-29-42.
8. *Султанахмедов М. С.* Асимптотические свойства и весовые оценки полиномов, ортогональных на неравномерной сетке с весом Якоби // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2014.—Т. 14, № 1.—С. 38–47. DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-38-47.
9. *Dorfler P.* Asymptotics of the best constant in a certain Markov-type inequality // J. Approx. Theory.—2002.—Vol. 114, № 1.—С. 84–97. DOI: 10.1006/jath.2001.3638.
10. *Магомедова З. М.* Об асимптотике многочленов, ортогональных на произвольных сетках // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2011.—Т. 11, № 3 (1).—С. 32–41. DOI: 10.18500/1816-9791-2011-11-3-1-32-41.
11. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены.—М.: Физматгиз, 1962.—500 с.

Статья поступила 8 декабря 2020 г.

Магомедова Зарина Магомедовна
Филиал Российского государственного университета туризма и сервиса,
старший преподаватель кафедры экономики, бухучета, финансов и аудита
РОССИЯ, 367000, Махачкала, пр. им. Али-Гаджи Акушинского, 401
E-mail: mzarina79@mail.ru

Нурмагомедов Алим Алаутдинович
Дагестанский государственный аграрный университет им. М. М. Джамбулатова,
доцент кафедры информатики и цифровых технологий
РОССИЯ, 367032, Махачкала, пр. М. Гаджиева, 180
E-mail: alimn@mail.ru
https://orcid.org/0000-0002-0033-8699

Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 2, P. 101–116

APPROXIMATION PROPERTIES OF POLYNOMIALS $\hat{l}^{\alpha}_{n,N}(x)$, ORTHOGONAL ON ANY SETS

Magomedova, Z. M.[1] and Nurmagomedov, A. A.[2]

[1] Branch of the Russian State University of Tourism and Service,
401 A–G. Akushinsky Ave., Makhachkala 367000, Russia;
[2] M. M. Dzhambulatov Dagestan State Agrarian University,
180 M. Gadzhiev St., Makhachkala 367032, Russia
E-mail: mzarina79@mail.ru, alimn@mail.ru

Abstract. Let $\Omega = \{x_0, x_1, \ldots, x_j, \ldots\}$ — discrete system of points such that $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_j < \ldots$, $\lim_{j\to\infty} x_j = +\infty$ and $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$, $\delta = \sup_{0\leqslant j<\infty} \Delta x_j < \infty, N = 1/\delta$. Asymptotic properties of polynomials $\hat{l}^{\alpha}_{n,N}(x)$ orthogonal with weight $\rho^{\alpha}_1(x_j) = e^{-x_j}(x^{\alpha+1}_{j+1} - x^{\alpha+1}_j)/(\alpha+1)$ in the case $-1 < \alpha \leqslant 0$ and $\rho^{\alpha}_2(x_j) = e^{-x_{j+1}}(x^{\alpha+1}_{j+1} - x^{\alpha+1}_j/(\alpha+1)$ in the case $\alpha > 0$ on arbitrary grids consisting of an infinite many points on the semi-axis $[0, +\infty)$ are investigated. Namely an asymptotic formula is proved in which asymptotic behavior of these polynomials as n tends to infinity together with N is closely related to asymptotic behavior of the orthonormal Laguerre polynomials $\hat{L}^{\alpha}_n(x)$.

Key words: polynomial, orthogonal system, set, weight, asymptotic formula.

AMS Subject Classification: 33C45, 42C05.

For citation: *Magomedova, Z. M. and Nurmagomedov, A. A.* Approximation Properties of Polynomials $\hat{l}^{\alpha}_{n,N}(x)$, Orthogonal on Any Sets, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 2, pp. 101–116 (in Russian). DOI: 10.46698/g5860-8517-3109-i.

References

1. *Sharapudinov, I. I. Smeshannye ryady po ortogonal'nym polinomam. Teoriya i prilozheniya* [Mixed Series of Orthogonal Polynomials. Theory and Applications], Makhachkala, DSC RAS, 2004, 276 p. (in Russian).
2. *Sharapudinov, I. I.* Asymptotics of Polynomials Orthogonal on Grids of the Unit Circle and the Number Line, *Sovremennye Problemy Matematiki, Mekhaniki, Informatiki: Materialy Mezhdunarodnoy Nauchnoy Konferentsii*, Tula, Izd-vo TulGU, 2009, pp. 100–106 (in Russian).
3. *Sharapudinov, I. I.* Some Properties of Polynomials Orthogonal on Nonuniform Grids of the Unit Circle and the Segment, *Sovremennye Problemy Teorii Funktsiy i ikh Prilozheniya: Materialy 15-i Saratovskoi Zimney Shkoly, Posviashchennoi 125-letiyu so Dnya Rozhdeniya V. V. Golubeva i 100-Letiyu SGU*, Saratov, Nauchnaya Kniga, 2010, p. 187 (in Russian).
4. *Sharapudinov, I. I.* Asymptotic Properties of the Polynomials Orthogonal on the Finite Nets of the Unite Circle, *Vestnik Dagestanskogo Nauchnogo Centra*, 2011, no. 42, pp. 5–14 (in Russian).
5. *Sharapudinov, I. I.* Polynomials, Orthogonal on Grids From Unit Circle and Number Axis, *Daghestan Electronic Mathematical Reports*, 2013, vol. 1, pp. 1–55 (in Russian). DOI: 10.31029/demr.1.1.
6. *Nurmagomedov, A. A.* Asymptotic Properties of Polynomials $\hat{p}^{\alpha,\beta}_n(x)$, Orthogonal on Any Sets in the Case of Integers α and β, *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2010, vol. 10, no. 2, pp. 10–19 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2010-10-2-10-19.
7. *Nurmagomedov, A. A.* Polynomials, Orthogonal on Non-Uniform Grids, *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2011, vol. 11, no. 3 (2), pp. 29–42 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2011-11-3-2-29-42.
8. *Sultanakhmedov, M. S.* Asymptotic Properties and Weighted Estimation of Polynomials, Orthogonal on the Nonuniform Grids with Jacobi Weight, *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2014, vol. 14, no. 1, pp. 38–47 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2014-14-1-38-47.
9. *Dorfler, P.* Asymptotics of the Best Constant in a Certain Markov-Type Inequality, *Journal of Approximation Theory*, 2002, vol. 114, no. 1, pp. 84–97. DOI: 10.1006/jath.2001.3638.

10. *Magomedova, Z. M.* About Asymptotic Polynomials, Orthogonal on Any Grids, *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, 2011, vol. 11, no. 3 (1), pp. 32–41 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2011-11-3-1-32-41.
11. *Szegö, G. Ortogonal'nye mnogochleny* [Orthogonal Polynomials], Moscow, Fizmatgiz, 1962, 500 p. (in Russian).

Received December 8, 2020

Zarina M. Magomedova
Branch of the Russian State University of Tourism and Service,
401 A–G. Akushinsky Ave., Makhachkala 367000, Russia,
Senior Lecturer
E-mail: mzarina79@mail.ru

Alim A. Nurmagomedov
M. M. Dzhambulatov Dagestan State Agrarian University,
180 M. Gadzhiev St., Makhachkala 367032, Russia,
Associate Professor
E-mail: alimn@mail.ru