

УДК 517.983

DOI 10.46698/f5525-0005-3031-h

ОБ ОПЕРАТОРАХ, МАЖОРИРУЕМЫХ ОПЕРАТОРАМИ
КАНТОРОВИЧА — БАНАХА И ОПЕРАТОРАМИ ЛЕВИ
В ЛОКАЛЬНО СОЛИДНЫХ РЕШЕТКАХ[#]

С. Г. Горохова¹, Э. Ю. Емельянов²

¹ Южный математический институт — филиал ВЦ РАН,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;

² Институт математики им. С. Л. Соболева,
Россия, 630090, Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4

E-mail: lanagor71@gmail.com, emelanov@math.nsc.ru

Аннотация. Линейный оператор T , действующий в локально солидной векторной решетке (E, τ) , называется: лебеговым оператором, если $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ для любой сети $x_\alpha \downarrow 0$ в E ; KB -оператором, если для всякой τ -ограниченной возрастающей сети x_α в E_+ существует $x \in E$ такой, что $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} Tx$; квази KB -оператором, если он переводит τ -ограниченные возрастающие сети в E_+ в τ -фундаментальные; оператором Леви, если для всякой τ -ограниченной возрастающей сети x_α в E_+ существует $x \in E$ такой, что $Tx_\alpha \xrightarrow{o} Tx$; оператором квази Леви, если T переводит τ -ограниченные возрастающие сети в E_+ в o -фундаментальные. В данной заметке рассматривается проблема мажорирования операторов в локально солидных решетках с помощью квази KB -операторов и операторов квази Леви. Кроме того, исследуются некоторые свойства операторов Лебега, Леви и KB -операторов. В частности, установлено, что пространство операторов Лебега является подалгеброй алгебры всех регулярных операторов.

Ключевые слова: локально солидная решетка, оператор Лебега, оператор Леви, B -оператор, решеточный гомоморфизм.

AMS Subject Classification: 46A40, 46B42, 47L05.

Образец цитирования: Горохова С. Г., Емельянов Э. Ю. Об операторах, мажорируемых операторами Канторовича — Банаха и операторами Леви в локально солидных решетках // Владикавк. мат. журн.—2021.—Т. 24, вып. 3.—С. 55–61. DOI: 10.46698/f5525-0005-3031-h.

Все векторные решетки, о которых пойдет речь в данной заметке, предполагаются вещественными и архимедовыми, а векторные топологии — хаусдорфовыми. Главная тема заметки: проблема мажорирования операторов в локально солидных решетках с помощью решеточных гомоморфизмов Канторовича — Банаха, квази KB -операторов и операторов квази Леви. Интерес к этой тематике возник недавно (см. [1]). Напомним, что локально солидная решетка (E, τ) называется:

i) *лебеговой* (σ -*лебеговой*), если для любой сети (последовательности) $x_\alpha \downarrow 0$ в E выполняется $x_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$;

ii) *решеткой Леви* (σ -*Леви*), если любая возрастающая τ -ограниченная сеть (последовательность) в E_+ обладает точной верхней гранью в E .

Условие $x_\alpha \downarrow 0$ в i) можно заменить на $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$.

[#]Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект № FWNF-2022-0004.

© 2022 Горохова С. Г., Емельянов Э. Ю.

Нормированная решетка $(E, \|\cdot\|)$ называется *пространством Канторовича — Банаха* (или коротко *KB-пространством*), если всякое ограниченное по норме направленное вверх множество в E_+ сходится по норме. Каждое KB-пространство является решеткой Леви с порядково-непрерывной полной нормой; всякая нормированная решетка Леви (σ -Леви) является K -пространством (K_σ -пространством).

iii) Локально солидная решетка (E, τ) называется *KB (σ -KB) решеткой*, если всякая возрастающая τ -ограниченная сеть (последовательность) в E_+ τ -сходится.

Известно, что каждая KB (σ -KB) решетка является решеткой Леви (σ -Леви), а всякая решетка Леви (σ -Леви) является K -пространством (K_σ -пространством) (см., например, [2, Теорема 2.21(c)]). Линейный оператор T , действующий в локально солидной решетке (E, τ) , называется *от-непрерывным (σ -от-непрерывным)*, если $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ для любой сети (последовательности) x_α такой, что $x_\alpha \xrightarrow{o} 0$ [3]. Различные локально солидные версии свойств банаховых решеток, вроде свойства быть KB-пространством, изучались недавно многими авторами (см., например, [3–6]). Основная идея операторных версий свойств топологических векторных решеток заключается в перераспределении топологических и порядковых свойств между областью определения и областью значения исследуемого оператора. Поскольку порядковая сходимость в общем случае не топологична, наиболее важные операторные версии возникают, когда o - и τ -сходимости вовлекаются одновременно. Следующее определение в общем виде можно найти в [1].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Линейный оператор T , действующий в локально солидной решетке E , называется:

(а) *лебеговым (σ -лебеговым)*, если $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ для любой сети (последовательности) $x_\alpha \downarrow 0$ в E ;

(б) *от-ограниченным (от-компактным)*, если множество $T[0, x]$ τ -ограничено (τ -вполне ограничено) в E для каждого $x \in E_+$;

(с) оператором (σ -) Канторовича — Банаха (далее (σ -) KB-оператором), если для всякой τ -ограниченной возрастающей сети (последовательности) x_α в E_+ существует $x \in E$ такой, что $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} Tx$;

(д) *квази KB (квази σ -KB) оператором*, если он переводит τ -ограниченные возрастающие сети (последовательности) в E_+ в τ -фундаментальные сети;

(е) оператором *Леви (σ -Леви)*, если для всякой τ -ограниченной возрастающей сети (последовательности) x_α в E_+ существует $x \in E$ такой, что $Tx_\alpha \xrightarrow{o} Tx$;

(ф) оператором *квази Леви (квази σ -Леви)*, если T переводит τ -ограниченные возрастающие сети (последовательности) в E_+ в o -фундаментальные сети.

Предложение 1 (ср. [1, Предложение 2.7]). *Всякий непрерывный линейный оператор T в локально солидной решетке (E, τ) является от-ограниченным.*

Утверждение сформулированного выше предложения непосредственно вытекает из двух классических фактов:

1) в локально солидной решетке (E, τ) порядково ограниченные множества τ -ограничены;

2) всякий τ -непрерывный линейный оператор переводит τ -ограниченные множества в τ -ограниченные.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 (см. [7, Определение 2]). Пусть P — некоторое множество линейных операторов, действующих между полуупорядоченными векторными пространствами X и Y . Оператор $T : X \rightarrow Y$ называется *регулярным P -оператором* (коротко *г- P -оператором*), если существуют два положительных P -оператора $T_1, T_2 : X \rightarrow Y$ такие,

что $T = T_1 - T_2$. Множество всех r - P -операторов из X в Y будет обозначаться через $r\text{-}P(X, Y)$.

Предложение 2. *Всякий регулярно лебегов (регулярно σ -лебегов) оператор T в локально солидной решетке (E, τ) является порядково непрерывным (порядково σ -непрерывным).*

◁ Без ограничения общности предположим, что $T \geq 0$. Пусть $x_\alpha \downarrow 0$ — сеть (последовательность) в E . Тогда $Tx_\alpha \downarrow$ и $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$. Следовательно, $Tx_\alpha \downarrow 0$ в силу, например, [2, Теорема 2.21(с)]. ▷

Следствие 1. *Множество $r\text{-}L_{Leb}(E)$ ($r\text{-}L_{Leb}^\sigma(E)$) регулярно лебеговых (регулярно σ -лебеговых) операторов в локально солидной решетке (E, τ) является подалгеброй алгебры $L_r(E)$ регулярных операторов в E . Более того, $I \in r\text{-}L_{Leb}(E)$ ($I \in r\text{-}L_{Leb}^\sigma(E)$) тогда и только тогда, когда решетка (E, τ) лебегова (σ -лебегова), где I — тождественный оператор в E .*

◁ Достаточно установить, что множество $r\text{-}L_{Leb}(E)$ замкнуто относительно композиции операторов. Пусть $T, S \in r\text{-}L_{Leb}(E)$. Без ограничения общности предположим, что $T, S \geq 0$. Возьмем сеть $x_\alpha \downarrow 0$. Тогда, по Предложению 2, $Sx_\alpha \downarrow 0$ и, значит, $TSx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$. В случае регулярно σ -лебеговых операторов доказательство аналогичное, а оставшаяся часть следствия тривиальна. ▷

Лемма 1 (ср. [1, Лемма 2.1]). *Линейный оператор T в локально солидной решетке (E, τ) является регулярно лебеговым (регулярно σ -лебеговым) тогда и только тогда, когда T регулярно σ -от-непрерывен (регулярно σ -от-непрерывен).*

◁ Не ограничивая общности, предположим, что $T \geq 0$ и, поскольку случай σ -лебегового оператора сходный, рассмотрим только лебегов оператор. Достаточность доказывается непосредственной проверкой. Чтобы установить необходимость, допустим, что оператор T лебегов, и $x_\alpha \xrightarrow{\sigma} 0$ в E . Возьмем в E сеть $y_\beta \downarrow 0$ такую, что для каждого β существует α_β удовлетворяющее $|x_\alpha| \leq y_\beta$ при $\alpha \geq \alpha_\beta$. Поскольку $T \geq 0$, имеем $|Tx_\alpha| \leq T|x_\alpha| \leq Ty_\beta$ при $\alpha \geq \alpha_\beta$. И, так как оператор T лебегов, $Ty_\beta \xrightarrow{\tau} 0$. Следовательно, $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$, поскольку топология τ локально солидная. ▷

Предложение 3 (см. [1, Предложение 2.1]). *Всякий регулярный оператор T в локально солидной решетке (E, τ) σ -ограничен.*

Приведем список полезных свойств рассматриваемых операторов.

а) Тождественный оператор в E лебегов/ KV /Леви тогда и только тогда, когда решетка E — лебегова/ KV /Леви соответственно. Всякий σ -от-непрерывный (σ -от-непрерывный) оператор является лебеговым (σ -лебеговым) и, согласно лемме 1, всякий регулярно лебегов (регулярно σ -лебегов) оператор в E является регулярно σ -от-непрерывным (регулярно σ -от-непрерывным). Авторам неизвестно, является ли всякий регулярный лебегов (σ -лебегов) оператор σ -от-непрерывным (σ -от-непрерывным).

б) Разрывный оператор $Tx := (\sum_{k=1}^\infty x_k)e_1$ в нормированной решетке $(c_{00}, \|\cdot\|_\infty)$ является σ -от-компактным и σ -от-непрерывным, однако T не компактен. Всякий непрерывный линейный оператор T в локально солидном локально выпуклом лебеговом дискретном K -пространстве σ -от-компактен, ввиду [2, Следствие 6.57].

с) Всякий KV -оператор является квази KV -оператором, и всякий непрерывный линейный оператор в KV -пространстве — KV -оператор. Хорошо известно, что тождественный оператор I в банаховой решетке является KV -оператором тогда и только тогда, когда I — σ - KV -оператор, тогда и только тогда, когда I — квази KV -оператор. Предложение 4 ниже показывает, что понятия квази KV и квази σ - KV операторов совпада-

ют. Всякий порядково ограниченный оператор в KB -пространстве является квази KB -оператором.

d) Всякий компактный оператор T в банаховой решетке σ -компактен. При этом, компактный оператор не обязан быть лебеговым (см. Пример 1 ниже). В частности, σ -компактный оператор не обязательно σ -непрерывен.

ПРИМЕР 1 (ср. [1, Пример 3.1]). Пусть $E = (c_\omega(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ — банахова решетка всех ограниченных вещественных функций на \mathbb{R} таких, что каждая $f \in E$ отличается от константы a_f на не более, чем счетном подмножестве \mathbb{R} .

Определим положительный оператор T в E следующим образом: Tf — постоянная функция $a_f \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}} \in E$, для которой множество $\{d \in \mathbb{R} : f(d) \neq a_f\}$ не более, чем счетно.

(1) T — непрерывный оператор ранга 1 (и, следовательно, KB компактный и σ -компактный) в E . Пусть $f_n \xrightarrow{o} 0$. Поскольку для всякого $\varepsilon > 0$ существует n_ε такое, что множество $\cup_{n \geq n_\varepsilon} \{d \in \mathbb{R} : |f_n(d)| \geq \varepsilon\}$ не более, чем счетно, то $\|Tf_n\|_\infty < \varepsilon$ для всех $n \geq n_\varepsilon$. Таким образом, оператор T является σ - σ -непрерывным и, значит, σ -лебеговым по отношению к топологии нормы на E .

(2) Оператор T не является лебеговым. В самом деле, для сети $f_\alpha := \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \alpha} \in E$, индексированной семейством Δ всех конечных подмножеств \mathbb{R} , упорядоченных по включению, имеем $f_\alpha \downarrow 0$, при том, что $\|Tf_\alpha\|_\infty = \|\mathbb{1}_{\mathbb{R}}\|_\infty = 1$ для всех $\alpha \in \Delta$.

Предложение 4 (ср., например, [1, Предложение 1.2]). Оператор T в локально солидной решетке будет квази KB -оператором тогда и только тогда, когда T квази σ - KB .

Отсюда следует, что всякая топологически полная σ - KB решетка (E, τ) является KB решеткой (см. [1, Следствие 1.1]). Заметим, что множества $L_{\sigma\tau}(E)$, $L_{\sigma\tau b}(E)$ и $L_{\sigma\tau c}(E)$ σ -непрерывных, σ -ограниченных и σ -компактных операторов в локально солидной решетке E суть векторные пространства, удовлетворяющие $L_{\sigma\tau c}(E) \subseteq L_{\sigma\tau b}(E)$.

Решетка E называется латерально (σ -)полной, если любое (счетное) подмножество попарно дизъюнктивных векторов из E_+ имеет супремум. Латерально полная векторная решетка дискретна тогда и только тогда, когда она решеточно изоморфна \mathbb{R}^S для некоторого множества S .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 (ср., например, [1, Определение 2.1]). Локально солидная решетка (E, τ) является τ -латерально (σ -) полной, если всякое τ -ограниченное (счетное) подмножество попарно дизъюнктивных векторов из E_+ обладает точной верхней гранью.

Всякая латерально (σ -) полная локально солидная решетка (E, τ) τ -латерально (σ -) полна, и всякое порядково полное AM -пространство X с порядковой единицей τ -латерально полно по отношению к норме.

ПРИМЕР 2 (ср. [1, Пример 2.1]). Рассмотрим векторную решетку E вещественных функций на \mathbb{R} таких, что каждая $f \in E$ отличается от константы a_f на не более, чем счетном подмножестве \mathbb{R} , и $f - a_f \mathbb{1}_{\mathbb{R}} \in \ell_1(\mathbb{R})$ для каждой $f \in E$. Векторная решетка E полна по отношению к норме $\|f\| := |a_f| + \|f - a_f \mathbb{1}_{\mathbb{R}}\|_1$. Ясно, что E не является K_σ -пространством, поскольку $f_n := \mathbb{1}_{\mathbb{R} \setminus \{1, 2, \dots, n\}} \downarrow \not\geq 0$, при том, что точной нижней грани $\inf_{n \in \mathbb{N}} f_n$ в E не существует. Отметим, что E не является τ -латерально σ -полной по отношению к топологии, порожденной нормой на E . В самом деле, ограниченное по норме счетное множество попарно дизъюнктивных ортов $e_n = \mathbb{1}_{\{n\}} \in E_+$ не имеет супремума в E .

В силу [1, Предложение 2.4], всякая решетка Леви (σ -Леви) является τ -латерально (σ -) полным $K(K_\sigma)$ пространством.

Рассмотрим теперь проблему мажорирования для положительных операторов. А именно, пусть T и S — положительные операторы в E такие, что $0 \leq S \leq T$. При каких условиях из предположения, что оператор T лебегов, σ -ограниченный, σ -компактный,

KB или Леви, вытекает, что оператор S обладает тем же свойством? Ясно, что проблема имеет положительное решение для лебеговых, σ -лебеговых и σ -ограниченных операторов.

Напомним, что всякий порядково ограниченный сохраняющий дизъюнктность оператор T в векторной решетке E имеет модуль $|T|$, удовлетворяющий $|T||x| = |T|x| = |Tx|$ для всех $x \in E$ (см., например, [8, Теорема 2.40]); более того, существуют два решеточных гомоморфизма $R_1, R_2 : E \rightarrow E$ такие, что $T = R_1 - R_2$ (см. [8, Exer. 1, p. 130]).

Предложение 5 (ср. [1, Теорема 2.5]). *Пусть T — порядково ограниченный сохраняющий дизъюнктность KB (σ - KB) оператор в локально солидной решетке (E, τ) . Если $|S| \leq |T|$, тогда S также является KB (σ - KB) оператором.*

◁ Возьмем τ -ограниченную возрастающую сеть (последовательность) x_α в E_+ . Тогда $T(x_\alpha - x) \xrightarrow{\tau} 0$ для некоторого $x \in E$. И, значит,

$$|S(x_\alpha - x)| \leq |S||x_\alpha - x| \leq |T||x_\alpha - x| = |Tx_\alpha - Tx| \xrightarrow{\tau} 0.$$

Следовательно, $Sx_\alpha \xrightarrow{\tau} Sx$. ▷

Поскольку для решеточного гомоморфизма T всякий оператор S , удовлетворяющий $0 \leq S \leq T$, является решеточным гомоморфизмом (см., например, [8, Теорема 2.14]), следующая теорема вытекает непосредственно из предложения 5.

Теорема 1 (ср. [1, Следствие 2.3]). *Пусть T — решеточный KB (σ - KB) гомоморфизм в локально солидной решетке. Тогда всякий оператор S , удовлетворяющий условию $0 \leq S \leq T$, является решеточным KB (σ - KB) гомоморфизмом.*

Следующий результат обобщает [4, Предложение 2.9] на локально солидные решетки.

Теорема 2 (ср. [1, Теорема 2.6]). *Пусть T — положительный квази KB -оператор в локально солидной решетке (E, τ) . Тогда всякий оператор S , удовлетворяющий условию $0 \leq S \leq T$, также является квази KB -оператором.*

◁ Пусть x_α — возрастающая τ -ограниченная сеть в E_+ . Тогда $Tx_\alpha \uparrow$ и, поскольку T — квази KB -оператор, сеть Tx_α будет τ -фундаментальной. Возьмем $U \in \tau(0)$ и солидную окрестность $V \in \tau(0)$ такую, что $V - V \subseteq U$. Существует α_0 , удовлетворяющая $T(x_\alpha - x_\beta) \in V$ для всех $\alpha, \beta \geq \alpha_0$. В частности, $T(x_\alpha - x_{\alpha_0}) \in V$ для всех $\alpha \geq \alpha_0$. Поскольку $0 \leq S \leq T$, и V солидна, то $S(x_\alpha - x_{\alpha_0}) \in V$ для всех $\alpha \geq \alpha_0$. Таким образом, получаем

$$Sx_\alpha - Sx_\beta = S(x_\alpha - x_{\alpha_0}) - S(x_\beta - x_{\alpha_0}) \in V - V \subseteq U$$

для всех $\alpha, \beta \geq \alpha_0$. Поскольку окрестность $U \in \tau(0)$ выбрана произвольно, сеть Sx_α τ -фундаментальна. ▷

Теорема 3 (ср., например, [1, Теорема 2.7]). *Пусть T — положительный квази Леви оператор в локально солидной решетке (E, τ) . Тогда всякий оператор S , удовлетворяющий условию $0 \leq S \leq T$, тоже является квази Леви оператором.*

◁ Возьмем возрастающую τ -ограниченную сеть x_α в E_+ . Тогда сеть Tx_α σ -фундаментальна. Значит, существует сеть $y_\beta \downarrow 0$ в E такая, что для каждого β найдется α_β такое, что $|Tx_{\alpha_1} - Tx_{\alpha_2}| \leq y_\beta$ при всех $\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_\beta$. Тогда при $\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_\beta$ имеем

$$Sx_{\alpha_1} - Sx_{\alpha_2} \leq S(x_{\alpha_1} - x_{\alpha_\beta}) \leq T(x_{\alpha_1} - x_{\alpha_\beta}) \leq y_\beta,$$

$$Sx_{\alpha_2} - Sx_{\alpha_1} \leq S(x_{\alpha_2} - x_{\alpha_\beta}) \leq T(x_{\alpha_2} - x_{\alpha_\beta}) \leq y_\beta.$$

Таким образом, $|Sx_{\alpha_1} - Sx_{\alpha_2}| \leq y_\beta$ для всех $\alpha_1, \alpha_2 \geq \alpha_\beta$, и значит S тоже будет оператором квази Леви. ▷

Литература

1. Alpay S., Emelyanov E., Gorokhova S. σ -Continuous, Lebesgue, KB , and Levi operators between vector lattices and topological vector spaces // Results Math.—2022.—Vol. 77, № 3, Article number 117.—P. 1–25. DOI: 10.1007/s00025-022-01650-3.
2. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics / 2nd edition.—Providence, RI: American Mathematical Society, 2003.—(Mathematical Surveys and Monographs; Vol. 105).
3. Jalili S. A., Azar K. H., Moghimi M. B. F. Order-to-topology continuous operators // Positivity.—2021.—Vol. 25.—P. 1313–1322. DOI: 10.1007/s11117-021-00817-6.
4. Bahramnezhad A., Azar K. H. KB -operators on Banach lattices and their relationships with Dunford–Pettis and order weakly compact operators // University Politehnica of Bucharest Scientific Bulletin, Ser. A: Applied Mathematics and Physics.—2018.—Vol. 80, № 2.—P. 91–98.
5. Altın B., Machrafi, N. Some characterizations of KB -operators on Banach lattices and ordered Banach spaces // Turkish. J. Math.—2020.—Vol. 44.—P. 1736–1743. DOI: 10.3906/mat-2004-106.
6. Turan B., Altın B. The relation between b -weakly compact operator and KB -operator // Turkish. J. Math.—2019.—Vol. 43.—P. 2818–2820. DOI: 10.3906/mat-1908-11.
7. Emelyanov E. Algebras of Lebesgue and KB regular operators on Banach lattices.—URL: <https://arxiv.org/abs/2203.08326v2>
8. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. Positive Operators.—Dordrecht: Springer, 2006.

Статья поступила 10 октября 2021 г.

ГОРОХОВА СВЕТЛАНА ГЕОРГИЕВНА
Южный математический институт — филиал ВНИЦ РАН,
научный сотрудник
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Ватутина, 53
E-mail: lanagor71@gmail.com

ЕМЕЛЬЯНОВ ЭДУАРД ЮРЬЕВИЧ
Институт математики им. С. Л. Соболева,
ведущий научный сотрудник
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. ак. Коптюга, 4
E-mail: emelanov@math.nsc.ru

*Vladikavkaz Mathematical Journal
2022, Volume 24, Issue 3, P. 55–61*

ON OPERATORS DOMINATED BY KANTOROVICH–BANACH OPERATORS
AND LÉVY OPERATORS IN LOCALLY SOLID LATTICES

Gorokhova, S. G.¹ and Emelyanov, E. Yu.²

¹Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362027, Russia;

²Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyga Ave., Novosibirsk 630090, Russia
E-mail: lanagor71@gmail.com, emelanov@math.nsc.ru

Abstract. A linear operator T acting in a locally solid vector lattice (E, τ) is said to be: a Lebesgue operator, if $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} 0$ for every net in E satisfying $x_\alpha \downarrow 0$; a KB -operator, if, for every τ -bounded increasing net x_α in E_+ , there exists an $x \in E$ with $Tx_\alpha \xrightarrow{\tau} Tx$; a quasi KB -operator, if T takes τ -bounded increasing nets in E_+ to τ -Cauchy ones; a Lévi operator, if, for every τ -bounded increasing net x_α in E_+ , there exists an $x \in E$ such that $Tx_\alpha \xrightarrow{o} Tx$; a quasi Lévi operator, if T takes τ -bounded increasing nets in E_+ to o -Cauchy ones. The present article is devoted to the domination problem for the quasi KB -operators and the quasi Lévi operators in locally solid vector lattices. Moreover, some properties of Lebesgue operators, Lévi operators,

and *KB*-operators are investigated. In particular, it is proved that the vector space Lebesgue operators is a subalgebra of the algebra of all regular operators.

Key words: locally solid lattice, Lebesgue operator, Lévi operator, *KB*-operator, lattice homomorphism.

AMS Subject Classification: 46A40, 46B42, 47L05.

For citation: Gorokhova, S. G. and Emelyanov, E. Y. On Operators Dominated by Kantorovich–Banach Operators and Lévy Operators in Locally Solid Lattices, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 3, pp. 55–61 (in Russian). DOI: 10.46698/f5525-0005-3031-h.

References

1. Alpay, S., Emelyanov, E. and Gorokhova, S. σ -Continuous, Lebesgue, *KB*, and Levi Operators between Vector Lattices and Topological Vector Spaces, *Results in Mathematics*, 2022, vol. 77, no. 3, Article number 117, pp. 1–25. DOI: 10.1007/s00025-022-01650-3.
2. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. *Locally Solid Riesz Spaces with Applications to Economics*, 2nd edition, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 105, Providence, RI, American Mathematical Society, 2003.
3. Jalili, S. A., Azar, K. H. and Moghimi, M. B. F. Order-to-topology Continuous Operators, *Positivity*, 2021, vol. 25, pp. 1313–1322. DOI: 10.1007/s11117-021-00817-6.
4. Bahramnezhad, A. and Azar, K. H. *KB*-Operators on Banach Lattices and their Relationships with Dunford–Pettis and Order Weakly Compact Operators, *University Politehnica of Bucharest Scientific Bulletin, Ser. A: Applied Mathematics and Physics*, 2018, vol. 80, no. 2, pp. 91–98.
5. Altın, B. and Machrafi, N. Some Characterizations of *KB*-Operators on Banach Lattices and Ordered Banach Spaces, *Turkish Journal of Mathematics*, 2020, vol. 44, pp. 1736–1743. DOI: 10.3906/mat-2004-106.
6. Turan, B. and Altın, B. The Relation between *b*-Weakly Compact Operator and *KB*-Operator, *Turkish Journal of Mathematics*, 2019, vol. 43, pp. 2818–2820. DOI: 10.3906/mat-1908-11.
7. Emelyanov E. Algebras of Lebesgue and *KB* regular operators on Banach lattices, ArXiv: <https://arxiv.org/abs/2203.08326v2>.
8. Aliprantis, C. D. and Burkinshaw, O. *Positive Operators*, Dordrecht, Springer, 2006.

Received October 10, 2021

SVETLANA G. GOROKHOVA
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
53 Vatutina St., Vladikavkaz 362027, Russia,
Researcher
E-mail: lanagor71@gmail.com

EDUARD YU. EMELIANOV
Sobolev Institute of Mathematics,
4 Koptyga Ave., Novosibirsk 630090, Russia,
Leading Researcher
E-mail: emelianov@math.nsc.ru