*Владикавказский математический журнал*
*2022, Том 24, Выпуск 4, С. 5–18*

**УДК** 517.988.63
**DOI** 10.46698/z4764-9590-5591-k

# О КАЧЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ БЕСКОНЕЧНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[#]

**М. О. Аветисян[1], Х. А. Хачатрян[2]**

[1] Национальный аграрный университет Армении,
Армения, 0009, Ереван, ул. Теряна, 74;
[2] Ереванский государственный университет,
Армения, 0025, Ереван, ул. А. Манукяна, 1

E-mail: avetisyan.metaqsya@mail.ru, khachatur.khachatryan@ysu.am

**Аннотация.** Работа посвящена изучению и решению одного класса бесконечных систем алгебраических уравнений с монотонной нелинейностью и матрицами типа Теплица. При конкретных представлениях нелинейностей указанная система возникает в дискретных задачах динамической теории открыто-замкнутых $p$-адических струн для скалярного поля тахионов, математической теории пространственно-временного распространения эпидемии, теории переноса излучения в неоднородных средах и кинетической теории газов в рамках модифицированной модели Бхатнагара — Гросса — Крука. Отличительной особенностью указанных систем нелинейных уравнений является некомпактность соответствующего оператора в пространстве ограниченных последовательностей и свойство критичности (наличие тривиальных не физических решений). По этой причине использование известных классических принципов о существании неподвижных точек для таких уравнений не дают желаемых результатов. В настоящей работе с помощью методов построения инвариантных конусных отрезков для соответствующего нелинейного оператора доказывается существование и единственность нетривиального неотрицательного решения в пространстве ограниченных последовательностей. Изучается также асимптотическое поведение построенного решения на $\pm\infty$. В частности, доказывается конечность предела решения на $\pm\infty$, причем устанавливается, что разность между пределом и решением принадлежит пространству $l_1$. В конце работы приводятся специальные примеры прикладного характера для иллюстрации полученных результатов.

**Ключевые слова:** характеристическое уравнение, монотонность, выпуклость, нелинейность, итерации.

**AMS Subject Classification:** 47J05.

**Образец цитирования:** *Аветисян М. О., Хачатрян Х. А.* О качественных свойствах решения для одной системы нелинейных бесконечных алгебраических уравнений // Владикавк. мат. журн.—2022.—Т. 24, вып. 4.—С. 5–18. DOI: 10.46698/z4764-9590-5591-k.

## 1. Введение

Рассмотрим следующую бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$x_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j}\left(G(x_j) + h_j(x_j)\right), \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{1}$$

относительно искомого бесконечного вектора $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)^T$, где $T$ — знак транспонирования.

[#] Исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета по науке РА в рамках научного проекта № 21T-1A047.

В системе (1) последовательность $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет следующим условиям:

$$a_n > 0 \ (\forall\, n \in \mathbb{Z}), \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n = 1, \quad \sum_{j=0}^{\infty} j^2 a_j < +\infty, \tag{2}$$

$$a_{-j} = a_j \ (\forall\, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}), \quad a_{n+1} < a_n \ (\forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}), \tag{3}$$

а $G(u)$ — определенная на $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$ непрерывная функция, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $G(u)$ монотонно возрастающая на множестве $\mathbb{R}^+$, $G(0) = 0$;

2) $G(u)$ выпукла вверх на множестве $\mathbb{R}^+$;

3) число $\eta > 0$ является первым положительным корнем функционального уравнения $G(u) = u$.

Последовательность вещественных функций $\{h_j(u)\}_{j=-\infty}^{\infty}$ определены на множестве $\mathbb{R}^+$ и обладают следующими свойствами:

a) при всяком фиксированном $j \in \mathbb{Z}$ функции $h_j(u) \uparrow$ по $u$ на $\mathbb{R}^+$,

b) $h_j(0) = 0$, $j \in \mathbb{Z}$ и существует $\sup_{u \in \mathbb{R}^+} h_j(u) = \beta_j$, причем

$$\beta = (\ldots, \beta_{-1}, \beta_0, \beta_1, \ldots)^T \in m, \text{ где } m := \left\{ x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)^T, \ \sup_{j \in \mathbb{Z}} |x_j| < +\infty \right\},$$

c) $h_j \in C(\mathbb{R}^+)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Система (1), кроме чисто математического интереса, встречается в различных задачах математической физики и биологии. В частности такие системы, при конкретных представлениях матрицы $A = (a_{n-j})_{n,j=-\infty}^{\infty}$ и нелинейностей $G(u)$, $\{h_j(u)\}_{j=-\infty}^{\infty}$ возникают в дискретных задачах теории переноса излучения, в динамической теории $p$-адических струн, в математической теории пространственно-временного распространения эпидемии и в кинетической теории газов (см. [1–9]).

Следует отметить, что в случае, когда $h_j(u) \equiv 0$, $j \in \mathbb{Z}$, система (1) и ее двумерный аналог достаточно подробно было изучено в работе [10].

Соответствующая система на множестве $\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$ (т. е. когда суммирование в (1) совершается на множестве $\mathbb{Z}^+$) исследовалось в работе [11].

Настоящая работа посвящена исследованию вопросов существования и единственности нетривиального решения системы (1) в пространстве ограниченных последовательностей, а также изучению асимптотического поведения решения при $n \to \pm\infty$.

## 2. Вспомогательные факты

Заметим, что из свойств 1)–3) следует существование числа $\varepsilon \in (0, 1)$ такого, что функциональное уравнение $Q(u) = \varepsilon u$ имеет положительное решение $\xi_0$, где $Q = G^{-1}$. Зафиксируем число $\varepsilon \in (0, 1)$ (и, следовательно, $\xi_0$) для дальнейшего изложения.

Для фиксированного $q > 1$ рассмотрим следующее характеристическое уравнение:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n q^{-pn} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad p \geqslant 0, \tag{4}$$

относительно переменной $p$, где $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (2) и (3).

Из (2) и (3) согласно теореме Больцано — Коши [12], следует что уравнение (4) имеет единственное положительное решение: $p = p_\varepsilon > 0$.

Введем следующее обозначение:

$$B_n := \xi_0 \left(1 - q^{-p_\varepsilon |n|}\right), \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

В работе [10] доказано, что имеет место следующая оценка снизу:

$$\sum_{j=0}^{\infty}(a_{n-j}-a_{n+j})\,B_j \geqslant \varepsilon B_n, \quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}. \tag{6}$$

Заметим, что $\xi_0<\eta$. Последнее неравенство сразу следует из выпуклости функции $G(u)$.

Рассмотрим следующее характеристическое уравнение:

$$G(u)=u-\gamma, \tag{7}$$

где

$$\gamma:=\sup_{j\in\mathbb{Z}}\beta_j>0. \tag{8}$$

С использованием условий $1)-3)$ нетрудно доказать, что уравнение (7) имеет единственное положительное решение $\xi$, причем

$$\xi>\eta>\xi_0. \tag{9}$$

Мы займемся исследованием системы (1) в следующих двух случаях: I) $\beta\in l_1$,

II) $\overline{\gamma}-\beta\in l_1$, где $\overline{\gamma}:=(\dots,\gamma,\gamma,\gamma,\dots)^T$.

Обозначим через $\tilde{Q}(u)$ нечетное продолжение функции $Q(u)$ на отрицательной части числовой оси.

Рассмотрим следующую вспомогательную систему нелинейных бесконечных алгебраических уравнений:

$$\tilde{Q}(y_n)=\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}y_j, \quad n\in\mathbb{Z}, \tag{10}$$

относительно искомого бесконечного вектора $y=(\dots,y_{-1},y_0,y_1,\dots)^T$. Здесь последовательность $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяет условиям (2) и (3).

Из результатов работы [10] следует, что система (10) имеет ограниченное нетривиальное решение, причем

$$y_{-n}=-y_n, \quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \quad y_n\uparrow \text{ по } n \tag{11}$$

$$\lim_{n\to\pm\infty}y_n=\pm\eta, \quad y_n\geqslant B_n, \quad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}, \tag{12}$$

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}\cup\{0\}}(\eta+y_n)<+\infty, \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}(\eta-y_n)<+\infty. \tag{13}$$

В силу (11), (12) и (13) можно утверждать, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\eta-|y_n|)<+\infty, \tag{14}$$

$$B_n\leqslant|y_n|\leqslant\eta. \tag{15}$$

## 3. Разрешимость системы (1)

Для системы (2) рассмотрим следующие итерации:

$$x_n^{(p+1)}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}\left(G\left(x_j^{(p)}\right)+h_j\left(x_j^{(p)}\right)\right), \quad x_n^{(0)}=Q(|y_n|),\ n\in\mathbb{Z},\ p=0,1,2,\dots \tag{16}$$

Сначала индукцией по $p$ убедимся, что для любого $n\in\mathbb{Z}$

$$x_n^{(p)}\ \uparrow \text{ по } p, \quad p=0,1,2,\dots \tag{17}$$

Действительно, с учетом (10), (2), (3), $a), b)$ и 1) получим

$$x_n^{(1)} \geqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j} G\left(Q(|y_j|)\right) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j}|y_j| \geqslant \left|\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j} y_j\right| = \left|\tilde{Q}(y_n)\right| = Q(|y_n|) = x_n^{(0)}.$$

Предположим, что (17) имеет место при некотором натуральном $p$. Тогда, учитывая монотонность функций $G(u)$ и $h_j(u)$, из (16) будем иметь

$$x_n^{(p+1)} \geqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j} \left(G\left(x_j^{(p-1)}\right) + h_j\left(x_j^{(p-1)}\right)\right) = x_n^{(p)}.$$

Ниже индукцией по $p$ докажем, что последовательность $\{x_n^{(p)}\}_{p=0}^{\infty}$ при $n \in \mathbb{Z}$ ограничена сверху:

$$x_n^{(p)} \leqslant \xi, \quad n \in \mathbb{Z},\ p = 0, 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

где число $\xi$ единственном образом определяется из характеристического уравнения (7).

При $p = 0$ оценка (18) справедлива по определению нулевого приближения (16) с учетом (15), (9) и 3). Пусть (18) выполняется при некотором $p \in \mathbb{N}$. Тогда, учитывая (2), 1), a), из (16) имеем $x_n^{(p+1)} \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j}\big(G(\xi) + h_j(\xi)\big) \leqslant G(\xi) + \gamma = \xi$. Из (17) и (18) следует, что последовательность векторов $\left\{x^{(p)}\right\}_{p=0}^{\infty}$, где $x^{(p)} = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)^T$, имеет предел при $p \to +\infty$

$$\lim_{p\to+\infty} x^{(p)} = x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)^T, \tag{19}$$

причем предельный вектор $x$ удовлетворяет системе (1), при этом координаты предельного вектора $x$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$Q(|y_n|) \leqslant x_n \leqslant \xi, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{20}$$

Итак, доказана следующая

**Теорема 1.** *При условиях* (2), (3), 1)–3), *a)–c) система* (1) *имеет ограниченное нетривиальное неотрицательное решение* $x = (\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots)^T$ *такое, что имеет место оценка* (20).

## 4. Асимптотическое поведение решения

В этом разделе исследуем асимптотическое поведение построенного решения. Для этого отдельно рассмотрим случаи I) и II).

**I)** В этом случае докажем, что

$$\lim_{n\to\pm\infty} x_n = \eta, \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\eta - x_n| < +\infty. \tag{21}$$

Учитывая условия (2) и (3), рассмотрим разность

$$\eta - x_n = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j}\left(\eta - G(x_j)\right) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j} h_j(x_j).$$

Из последнего равенства сразу следует, что

$$|\eta - x_n| \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j}\left|\eta - G(x_j)\right| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j}\beta_j, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{22}$$

Сначала убедимся, что $\sum_{n=-\infty}^{-1}|\eta-x_n|<+\infty$. Из (20) и (15) следует, что при $n\leqslant -1$

$$x_n\geqslant Q(B_{-1})=Q\big(\xi_0\big(1-q^{-p}\big)\big):=\delta>0. \tag{23}$$

Рассмотрим следующую сумму $\sum_{n=N}^{-1}|\eta-x_n|$, где $N<-1$ — произвольное число. С учетом (22) будем иметь

$$\sum_{n=N}^{-1}|\eta-x_n|\leqslant \sum_{n=N}^{-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}\,|\eta-G(x_j)|+\sum_{n=N}^{-1}\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}\beta_j$$
$$\leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}\beta_j+\sum_{n=N}^{-1}\sum_{j=-\infty}^{-1}a_{n-j}\,|\eta-G(x_j)|+\sum_{n=N}^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}a_{n-j}\,|\eta-G(x_j)|$$
$$\leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}\beta_j+(G(\xi)+\eta)\sum_{n=N}^{-1}\sum_{j=0}^{\infty}a_{n-j}+\sum_{n=N}^{-1}\sum_{j=-\infty}^{-1}a_{n-j}\,|\eta-G(x_j)|$$
$$\leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}\beta_j+(G(\xi)+\eta)\sum_{n=-\infty}^{0}\sum_{j=-\infty}^{n}a_j+\sum_{n=N}^{-1}\sum_{j=-\infty}^{N}a_{n-j}\,|\eta-G(x_j)|$$
$$+\sum_{n=N}^{-1}\sum_{j=N+1}^{-1}a_{n-j}\,|\eta-G(x_j)|\leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}\beta_j+(G(\xi)+\eta)\sum_{j=-\infty}^{0}\sum_{n=j}^{0}a_j$$
$$+(G(\xi)+\eta)\sum_{n=N}^{-1}\sum_{j=n-N}^{\infty}a_j+\sum_{n=N}^{-1}\sum_{j=N+1}^{-1}a_{n-j}\,|\eta-G(x_j)|$$
$$\leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}\beta_j+(G(\xi)+\eta)\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)a_j+(G(\xi)+\eta)\sum_{n=N}^{0}\sum_{j=n-N}^{\infty}a_j$$
$$+\sum_{n=N}^{-1}\sum_{j=N+1}^{-1}a_{n-j}\,|\eta-G(x_j)|\leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}\beta_j$$
$$+(G(\xi)+\eta)\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)a_j+(G(\xi)+\eta)\sum_{n=0}^{-N}\sum_{j=n}^{\infty}a_j$$
$$+\sum_{n=N}^{-1}\sum_{j=N+1}^{-1}a_{n-j}\,|\eta-G(x_j)|\leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}\beta_j+(G(\xi)+\eta)\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)a_j$$
$$+(G(\xi)+\eta)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{j}a_j+\sum_{j=N+1}^{-1}|\eta-G(x_j)|\sum_{n=N}^{-1}a_{n-j}$$
$$\leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}\beta_j+2\,(\xi-\gamma+\eta)\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)a_j+\sum_{j=N+1}^{-1}|\eta-G(x_j)|$$
$$\leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}\beta_j+2\,(\xi-\gamma+\eta)\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)a_j+\sum_{j=N}^{-1}|\eta-G(x_j)|$$
$$=C+\sum_{j\in E_N^1}(\eta-G(x_j))+\sum_{j\in E_N^2}(G(x_j)-\eta),$$

где

$$C := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j}\beta_j + 2\,(\xi - \gamma + \eta) \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)a_j < +\infty, \tag{24}$$

$$E_N^1 := \big\{n \in \{N, N+1, \ldots, -1\} :\ x_n \leqslant \eta\big\}, \tag{25}$$

$$E_N^2 := \big\{n \in \{N, N+1, \ldots, -1\} :\ x_n > \eta\big\}, \quad N < -1,\ N \in \mathbb{Z}. \tag{26}$$

Таким образом, мы получили следующую оценку:

$$\sum_{n=N}^{-1} |\eta - x_n| \leqslant C + \sum_{j\in E_N^1} (\eta - G(x_j)) + \sum_{j\in E_N^2} (G(x_j) - \eta). \tag{27}$$

С учетом (20), когда $n \in E_N^1$ имеем

$$0 \leqslant \eta - G(x_n) \leqslant \eta - G(Q(|y_n|)) = \eta - |y_n|. \tag{28}$$

Если же $n \in E_N^2$, то в силу выпуклости $G$ получим

$$0 \leqslant G(x_n) - \eta \leqslant \frac{\eta - G(\delta)}{\eta - \delta}(x_n - \eta), \tag{29}$$

где число $\delta$ задается согласно формуле (23).

Учитывая (28), (29), (14), из (27) получаем

$$\sum_{n=N}^{-1} |\eta - x_n| \leqslant C + \sum_{j\in E_N^1} \big(\eta - |y_j|\big) + \frac{\eta - G(\delta)}{\eta - \delta} \sum_{j\in E_N^2} \big(x_j - \eta\big)$$

или

$$\sum_{n\in E_N^1} (\eta - x_n) + \sum_{n\in E_N^2} (x_n - \eta) \leqslant C + \sum_{j=-\infty}^{0} (\eta + y_j) + \frac{\eta - G(\delta)}{\eta - \delta} \sum_{j\in E_N^2} (x_j - \eta).$$

Из последнего неравенство следует, что

$$\sum_{n\in E_N^1} (\eta - x_n) + \frac{G(\delta) - \delta}{\eta - \delta} \sum_{n\in E_N^2} (x_n - \eta) \leqslant C + \sum_{j=-\infty}^{0} (\eta + y_j). \tag{30}$$

Поскольку $\frac{G(\delta)-\delta}{\eta-\delta} \in (0,1)$, тогда из (30) будем иметь

$$\frac{G(\delta) - \delta}{\eta - \delta} \sum_{n=N}^{-1} |\eta - x_n| \leqslant C + \sum_{j=-\infty}^{0} (\eta + y_j)$$

или

$$\sum_{n=N}^{-1} |\eta - x_n| \leqslant \frac{\Big(C + \sum\limits_{j=-\infty}^{0} (\eta + y_j)\Big)(\eta - \delta)}{G(\delta) - \delta}. \tag{31}$$

В (31) устремляя число $N \to -\infty$, заключаем, что

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} |\eta - x_n| \leqslant \frac{\Big(C + \sum\limits_{j=-\infty}^{0} (\eta + y_j)\Big)(\eta - \delta)}{G(\delta) - \delta}.$$

Следовательно, $\sum_{n=-\infty}^{-1}|\eta-x_n|<+\infty$. Аналогичными рассуждениями можно придти к выводу, что $\sum_{n=0}^{\infty}|\eta-x_n|<+\infty$.

Итак, мы доказали, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\eta-x_n|<+\infty. \tag{32}$$

Теперь докажем, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\eta-G(x_n)|<+\infty. \tag{33}$$

С учетом (20), используя выпуклость вверх функции $G(u)$, приходим к следующей оценке:

$$|\eta-G(x_n)|\leqslant\begin{cases}\eta-|y_n|, & n\in D;\\ x_n-\eta, & n\in\mathbb{Z}\setminus D,\end{cases} \tag{34}$$

где $D:=\{n\in\mathbb{Z},\ x_n\leqslant\eta\}$. Из (32), (34) и (14) следует, что имеет место (33).

Переходя к пределу в обеих частях (22) при $n\to\pm\infty$, с учетом известного предельного соотношения дискретных операторов типа свертки получим

$$\lim_{n\to\pm\infty}x_n=\eta. \tag{35}$$

**II)** В этом случае предположим, что компоненты последовательности $\{h_j(u)\}_{j=-\infty}^{\infty}$ удовлетворяют следующему дополнительному условию:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\big(\beta_n-h_n\big(Q(B_n)\big)\big)<+\infty. \tag{36}$$

Здесь мы докажем, что

$$\lim_{n\to\pm\infty}x_n=\xi,\qquad\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\xi-x_n)<+\infty. \tag{37}$$

Сперва докажем, что $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\xi-x_n)<+\infty$. Для этого, учитывая, что $\xi$ определяется из характеристического уравнения (7), и с учетом a), 1), II) (2), (15), (20), оценим следующую разность:

$$\begin{aligned}0\leqslant\xi-x_n&=G(\xi)+\gamma-\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}G(x_j)-\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}h_j(x_j)\\&=\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}\left(G(\xi)-G(x_j)\right)+\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}(\gamma-\beta_j)+\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}(\beta_j-h_j(x_j))\\&\leqslant\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}\left(G(\xi)-G(x_j)\right)+\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}\big(\gamma-\beta_j\big)+\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}\big(\beta_j-h_j(Q(B_j))\big),\end{aligned}$$

из которого следует, что

$$0\leqslant\xi-x_n\leqslant A_n+\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}\big(G(\xi)-G(x_j)\big), \tag{38}$$

где

$$A_n:=\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}\big(\gamma-\beta_j\big)+\sum_{j=-\infty}^{\infty}a_{n-j}\big(\beta_j-h_j(Q(B_j))\big)<+\infty. \tag{39}$$

Рассмотрим следующую сумму: $\sum_{n=N_1}^{N_2}(\xi - x_n)$, где $N_1 < 0$, $N_2 > 0$ — произвольные числа. С учетом (38) будем иметь

$$\sum_{n=N_1}^{N_2}(\xi - x_n) \leqslant \sum_{n=N_1}^{N_2} A_n + \sum_{n=N_1}^{N_2}\sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j}\big(G(\xi) - G(x_j)\big)$$

$$= \sum_{n=N_1}^{N_2} A_n + \sum_{n=N_1}^{N_2}\sum_{j=-\infty}^{N_1} a_{n-j}\big(G(\xi) - G(x_j)\big) + \sum_{n=N_1}^{N_2}\sum_{j=N_1+1}^{N_2-1} a_{n-j}\big(G(\xi) - G(x_j)\big)$$

$$+ \sum_{n=N_1}^{N_2}\sum_{j=N_2}^{\infty} a_{n-j}\big(G(\xi) - G(x_j)\big) \leqslant \sum_{n=N_1}^{N_2} A_n + G(\xi)\sum_{n=N_1}^{N_2}\sum_{j=-\infty}^{N_1} a_{n-j}$$

$$+ G(\xi)\sum_{n=N_1}^{N_2}\sum_{j=N_2}^{\infty} a_{n-j} + \sum_{n=N_1}^{N_2}\sum_{j=N_1+1}^{N_2-1} a_{n-j}\big(G(\xi) - G(x_j)\big)$$

$$\leqslant \sum_{n=N_1}^{N_2} A_n + G(\xi)\sum_{n=N_1}^{\infty}\sum_{j=n-N_1}^{\infty} a_j + G(\xi)\sum_{n=-\infty}^{N_2}\sum_{j=-\infty}^{n-N_2} a_j$$

$$+ \sum_{n=N_1}^{N_2}\sum_{j=N_1+1}^{N_2-1} a_{n-j}\big(G(\xi) - G(x_j)\big) \leqslant \sum_{n=N_1}^{N_2} A_n + G(\xi)\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} a_j$$

$$+ G(\xi)\sum_{k=-\infty}^{0}\sum_{j=-\infty}^{k} a_j + \sum_{n=N_1}^{N_2}\sum_{j=N_1+1}^{N_2-1} a_{n-j}\big(G(\xi) - G(x_j)\big)$$

$$\leqslant \sum_{n=N_1}^{N_2} A_n + G(\xi)\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{j} a_j + G(\xi)\sum_{j=-\infty}^{0}\sum_{k=j}^{0} a_j + \sum_{n=N_1}^{N_2}\sum_{j=N_1+1}^{N_2-1} a_{n-j}\big(G(\xi) - G(x_j)\big)$$

$$= \sum_{n=N_1}^{N_2} A_n + 2G(\xi)\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\,a_j + \sum_{n=N_1}^{N_2}\sum_{j=N_1+1}^{N_2-1} a_{n-j}\big(G(\xi) - G(x_j)\big)$$

$$= \sum_{n=N_1}^{N_2} A_n + 2(\xi - \gamma)\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)\,a_j + \sum_{n=N_1}^{N_2}\sum_{j=N_1+1}^{N_2-1} a_{n-j}\big(G(\xi) - G(x_j)\big).$$

Учитывая условие 2) и неравенство (9), имеем

$$0 \leqslant G(\xi) - G(x_n) \leqslant \frac{G(\xi)}{\xi}(\xi - x_n). \tag{40}$$

Из полученного выше неравенства в силу (40) будем иметь

$$\sum_{n=N_1}^{N_2}(\xi - x_n) \leqslant \sum_{n=N_1}^{N_2} A_n + 2(\xi - \gamma)\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)a_j$$
$$+ \frac{G(\xi)}{\xi}\sum_{n=N_1}^{N_2}\sum_{j=N_1+1}^{N_2-1} a_{n-j}\,(\xi - x_j) \leqslant \sum_{n=N_1}^{N_2} A_n + 2(\xi - \gamma)\sum_{j=0}^{\infty}(j+1)a_j$$
$$+ \frac{G(\xi)}{\xi}\sum_{n=N_1}^{N_2}(\xi - x_j)\sum_{j=N_1}^{N_2} a_{n-j}. \tag{41}$$

Из (41) в силу условия (2) следует, что

$$\sum_{n=N_1}^{N_2}(\xi - x_n) \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{n=N_1}^{N_2} A_n + 2(\xi-\gamma)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n\right)\xi}{\xi - G(\xi)}. \tag{42}$$

Переходя к пределу в обеих частях этого неравенства при $N_1 \to -\infty$, $N_2 \to +\infty$, имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\xi - x_n) \leqslant \frac{\left(\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n + 2(\xi-\gamma)\sum\limits_{n=0}^{\infty}(n+1)a_n\right)\xi}{\gamma}.$$

Откуда следует, что $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\xi - x_n) < +\infty$.

Аналогично случаю $I$) доказывается, что $\lim_{n\to\pm\infty} x_n = \xi$.

Итак, справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** *Пусть выполняются все условия теоремы* 1. *Тогда если* $\beta \in l_1$, *то* $\lim_{n\to\pm\infty} x_n = \eta$ *и* $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|\eta - x_n| < +\infty$. *Если же выполняются условия* (36) *и* $\overline{\gamma} - \beta \in l_1$, *где* $\overline{\gamma}$ *определяется из* (8), *то* $\lim_{n\to\pm\infty} x_n = \xi$ *и* $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\xi - x_n) < +\infty$.

## 5. Единственность решения системы (1)

Ниже докажем единственность решения системы (1) в определенном классе бесконечных векторов.

**Теорема 3.** *Пусть при условиях теоремы* 2 *функции* $h_j(u)$ *при каждом фиксированном* $j \in \mathbb{Z}$ *обладают свойством выпуклости вверх на множестве* $\mathbb{R}^+$. *Тогда, если выполняется хотя бы одно из следующих свойств:*

$$d_1)\ \ \beta \in l_1, \qquad d_2)\ \ \begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\big(\beta_n - h_n(Q(B_n))\big) < +\infty, \\ \overline{\gamma} - \beta \in l_1, \end{cases}$$

*то система* (1) *имеет единственное решение в классе бесконечных векторов*

$$\mathfrak{M} := \big\{x \in m,\ x_n \geqslant Q(B_n),\ n \in \mathbb{Z}\big\}, \tag{43}$$

*где* $B_n$ *задается согласно формуле* (5).

$\lhd$ Сначала убедимся, что если $x \in \mathfrak{M}$ является решением (1), то

$$x_n \leqslant \xi. \tag{44}$$

Обозначим $\alpha := \sup_{n\in\mathbb{Z}} x_n$. Тогда, учитывая монотонность функций $G(u)$ и $h_j(u)$, условия b), (2), (3) и (9), из (1), получим

$$x_n \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j}(G(\alpha) + \beta_j) \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j}(G(\alpha) + \gamma) \leqslant G(\alpha) + \gamma.$$

Откуда следует, что

$$\alpha \leqslant G(\alpha) + \gamma. \tag{45}$$

Заметим, что $\alpha \leqslant \xi$. Последнее неравенство следует из выпуклости вверх функции $G(u)$ и (45).

Предположим обратное: система (1) обладает двумя решениями

$$x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots), \quad \tilde{x} = (\dots, \tilde{x}_{-1}, \tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots).$$

Следовательно, существует $n_0 \in \mathbb{Z}$ такое, что $x_{n_0} \neq \tilde{x}_{n_0}$.

Введем следующее множество:

$$E := \{n \in \mathbb{Z},\ x_n \neq \tilde{x}_n,\ x_n \neq 0\}. \tag{46}$$

Поскольку $x$, $\tilde{x} \in \mathfrak{M}$ является решениями системы (1) и имеет место хотя бы одно из условий $d_1$), $d_2$), то по теореме 2 справедливо утверждение

$$x - \tilde{x} \in l_1. \tag{47}$$

Ниже докажем, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |G(x_n) - G(\tilde{x}_n)| < +\infty. \tag{48}$$

Пусть $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Тогда

$$x_n \geqslant \delta, \quad \tilde{x}_n \geqslant \delta, \quad n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \tag{49}$$

где число $\delta$ задается согласно формуле (23). Учитывая выпуклость вверх функции $G(u)$ и (49), имеем

$$0 \leqslant \big|G(x_n) - G(\tilde{x}_n)\big| \leqslant \frac{G(x_n)}{x_n}|x_n - \tilde{x}_n| \leqslant \frac{G(\xi)}{\delta}|x_n - \tilde{x}_n|. \tag{50}$$

Из (50) и (47) следует, что имеет место (48).

Теперь докажем, что

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|h_n(x_n) - h_n(\tilde{x}_n)\big| < +\infty. \tag{51}$$

Предположим, что имеет место условие $d_1$). Тогда будем иметь

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|h_n(x_n) - h_n(\tilde{x}_n)\big| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\beta_n < +\infty.$$

Из полученной оценки следует, что имеет место (51).

Пусть выполняется условие $d_2$). Тогда имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|h_n(x_n) - h_n(\tilde{x}_n)\big| \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|\gamma - h_n(x_n)\big| + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big|\gamma - h_n(\tilde{x}_n)\big|$$
$$\leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big(2(\gamma - \beta_n) + \beta_n - h_n(x_n) + \beta_n - h_n(\tilde{x}_n)\big)$$
$$\leqslant 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\gamma - \beta_n) + 2\sum_{n=-\infty}^{\infty} \big(\beta_n - h_n\big(Q(B_n)\big)\big).$$

В случае $d_2$) утверждение (51) также доказано.

Оценим следующую разность:

$$0 \leqslant |x_n - \tilde{x}_n| \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j}|G(x_j) - G(\tilde{x}_j)| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j}|h_j(x_j) - h_j(\tilde{x}_j)|, \qquad (52)$$

в виду того, что $x$ и $\tilde{x}$ являются решениями (1). Умножаем обе части неравенства (52) на сумму $G(x_n) + h_n(x_n)$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant (G(x_n) + h_n(x_n))|x_n - \tilde{x}_n| &\leqslant (G(x_n) + h_n(x_n)) \\ &\times \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j}|G(x_j) - G(\tilde{x}_j)| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j}|h_j(x_j) - h_j(\tilde{x}_j)| \right). \end{aligned} \qquad (53)$$

Рассмотрим сумму $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n - \tilde{x}_n|(G(x_n) + h_n(x_n))$. С учетом (53) будем иметь

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n - \tilde{x}_n|(G(x_n) + h_n(x_n)) &\leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big(G(x_n) + h_n(x_n)\big) \\ &\times \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j}\big|G(x_j) - G(\tilde{x}_j)\big| + \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_{n-j}\big|h_j(x_j) - h_j(\tilde{x}_j)\big| \right) \\ \leqslant \sum_{j=-\infty}^{\infty} \big(\big|G(x_j) - G(\tilde{x}_j)\big| + \big|h_j(x_j) - h_j(\tilde{x}_j)\big|\big) &\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{j-n}\big(G(x_n) + h_n(x_n)\big) \\ = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \big(\big|G(x_j) - G(\tilde{x}_j)\big| &+ \big|h_j(x_j) - h_j(\tilde{x}_j)\big|\big)\, x_j \end{aligned}$$

или

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x_n - \tilde{x}_n|\big(G(x_n) + h_n(x_n)\big) - \big|G(x_n) - G(\tilde{x}_n)\big|x_n - \big|h_n(x_n) - h_n(\tilde{x}_n)\big|x_n \leqslant 0.$$

В силу 1) и *a*) с учетом (46) последнее неравенство можно переписать в виде

$$\sum_{n\in E} |x_n - \tilde{x}_n| \left( G(x_n) - \frac{|G(x_n) - G(\tilde{x}_n)|x_n}{|x_n - \tilde{x}_n|} + h_n(x_n) - \frac{|h_n(x_n) - h_n(\tilde{x}_n)|x_n}{|x_n - \tilde{x}_n|} \right) \leqslant 0. \qquad (54)$$

Из выпуклости вверх функций $G(u)$ и $h_j(u)$ следует, что для всех $n \in E$ имеют место оценки

$$\frac{G(x_n)}{x_n} > \frac{|G(x_n) - G(\tilde{x}_n)|}{|x_n - \tilde{x}_n|}, \qquad (55)$$

$$\frac{h_n(x_n)}{x_n} > \frac{|h_n(x_n) - h_n(\tilde{x}_n)|}{|x_n - \tilde{x}_n|}. \qquad (56)$$

Из (54) с учетом (55) и (56) приходим к противоречию. $\rhd$

В конце работы приведем несколько примеров для функции $G(u)$ и последовательности функций $\{h_j(u)\}_{j=-\infty}^{\infty}$, удовлетворяющих всем условиям доказанной теоремы.

1) $G(u) = \frac{\sqrt[p]{u}}{p-\sqrt[p-1]{\eta}}$, $p \geqslant 2$, $u \geqslant 0$;

2) $G(u)=\frac{c\sqrt[p]{u}}{p-\sqrt[p]{\eta}}+(1-c)u$, $p\geqslant 2$, $u\geqslant 0$, $c\in(0,1)$;

3) $G(u)=\max\left\{\gamma^*(u-u^{1+\varepsilon}),u\right\}$, $u\geqslant 0$, $\gamma^*=\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}>1$, $0<\varepsilon<1$, $\eta=\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\right)^{1/\varepsilon}$;

4) $h_j(u)=\left(1-e^{\frac{u}{Q(B_j)}\ln\lambda_j}\right)\beta_j$, $u\geqslant 0$, $\beta_j\geqslant 0$, $0<\lambda_j<1$, $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}\lambda_j<+\infty$, $j\in\mathbb{Z}$;

5) $h_j(u)=\frac{2(1-\lambda_j)u\beta_j}{2(1-\lambda_j)u+\lambda_jQ(B_j)}$, $u\geqslant 0$, $\beta_j\geqslant 0$, $0<\lambda_j<1$, $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}\lambda_j<+\infty$, $j\in\mathbb{Z}$;

6) $h_j(u)=\frac{\beta_j}{2}\left[\left(1-e^{\frac{u}{Q(B_j)}\ln\lambda_j}\right)+\frac{2(1-\lambda_j)u}{2(1-\lambda_j)u+\lambda_jQ(B_j)}\right]$, $u\geqslant 0$, $\beta_j\geqslant 0$, $0<\lambda_j<1$, $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty}\lambda_j<+\infty$, $j\in\mathbb{Z}$.

## Литература


1. *Владимиров В. С., Волович Я. И.* О нелинейном уравнении динамики в теории $p$-адической струны // Теор. и мат. физика.—2004.—Т. 138, № 3.—С. 355–368. DOI: 10.4213/tmf36.
2. *Владимиров В. С.* Об уравнении $p$-адической открытой струны для скалярного поля тахионов // Изв. РАН. Сер. матем.—2005.—Т. 69, № 3.—С. 55–80. DOI: 10.4213/im640.
3. *Хачатрян Х. А.* О разрешимости некоторых классов нелинейных интегральных уравнений в теории $p$-адической струны // Изв. РАН. Сер. матем.—2018.—Т. 82, № 2.—С. 172–193. DOI: 10.4213/im8580.
4. *Хачатрян Х. А.* Существование и единственность решения одной граничной задачи для интегрального уравнения свертки с монотонной нелинейностью // Изв. РАН. Сер. матем.—2020.—Т. 84, № 4.—С. 198–207. DOI: 10.4213/im8898.
5. *Енгибарян Н. Б.* Об одной задаче нелинейного переноса излучения // Астрофизика.—1966.—Т. 2, № 1.—С. 31–36.
6. *Diekmann O., Kaper H.* On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications.—1978.—Vol. 2, № 6.—P. 721–737. DOI: 10.1016/0362-546X(78)90015-9.
7. *Сергеев А. Г., Хачатрян Х. А.* О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений в задаче распространения эпидемии // Тр. Моск. матем. об-ва.—2019.—Т. 80, № 1.—С. 113–131.
8. *Diekmann O.* Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection // J. Math. Biology.—1978.—Vol. 6, № 2.—P. 109–130. DOI: 10.1007/BF02450783.
9. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика.—М.: Наука, 1979.
10. *Хачатрян Х. А., Андриян С. М.* О разрешимости одного класса дискретных матричных уравнений с кубической нелинейностью // Украинский мат. журн.—2019.—Т. 71, № 12.—С. 1667–1683.
11. *Khachatryan Kh. A., Broyan M. F.* One-parameter family of positive solutions for a class of nonlinear infinite algebraic systems with Teoplitz-Hankel type matrices // J. Contemp. Mathemat. Anal.—2013.—Vol. 48, № 5.—P. 209–220. DOI: 10.3103/S1068362313050026.
12. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2.—М.: Физматлит, 1966.—800 с.


*Статья поступила 11 ноября 2021 г.*

Аветисян Метаксия Овнановна
Национальный аграрный университет Армении,
*ассистент кафедры высшей математики и физики*
АРМЕНИЯ, 0009, Ереван, ул. Теряна, 74
E-mail: `avetisyan.metaqsya@mail.ru`

Хачатрян Хачатур Агавардович
Ереванский государственный университет,
*профессор, заведующий кафедрой теории функций и дифференциальных уравнений*
АРМЕНИЯ, 0025, Ереван, ул. А. Манукяна, 1
E-mail: `khachatur.khachatryan@ysu.am`

*Vladikavkaz Mathematical Journal*
*2022, Volume 24, Issue 4, P. 5–18*

# ON THE QUALITATIVE PROPERTIES OF A SOLUTION FOR ONE SYSTEM OF INFINITE NONLINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

Avetisyan, M. H.[1] and Khachatryan, Kh. A.[2]

[1] Armenian National Agrarian University, 74 Teryan St., Yerevan 0009, Armenia;
[2] Yerevan State University, 1 A. Manukyan St., Yerevan 0025, Armenia
E-mail: avetisyan.metaqsya@mail.ru, khachatur.khachatryan@ysu.am

**Abstract.** The work is devoted to the study and solution of class of infinite systems of algebraic equations with monotone nonlinearity and Toeplitz type matrices. With specific representations of nonlinearities, this system arises in discrete problems of the dynamical theory of open-closed $p$-adic strings for a scalar field of tachyons, in the mathematical theory of the spatiotemporal propagation of an epidemic, in the theory of radiative transfer in inhomogeneous medium and in the kinetic theory of gases in the framework of a modified Bhatnagar–Gross–Krock models. A distinctive feature of these systems of nonlinear equations is the non-compactness of the corresponding operator in a space of bounded sequences and the criticality property (the presence of trivial non-physical solutions). For this reason, the use of well-known classical principles about the existence of fixed points for such equations does not give the desired results. In this paper, using methods for constructing invariant cone segments for the corresponding nonlinear operator, we prove the existence and uniqueness of a nontrivial nonnegative solution in the space of bounded sequences. The asymptotic behavior of the constructed solution on $\pm\infty$ is also studied. In particular, the finiteness of the limit of the solution on $\pm\infty$, is proved, and it is established that the difference between the limit and the solution belongs to the space $l_1$. At the end of the paper, special applied examples are given to illustrate the results obtained.

**Key words:** characteristic equation, monotonicity, convexity, nonlinearity, iteration.

**AMS Subject Classification:** 47J05.

**For citation:** *Avetisyan, M. H. and Khachatryan, Kh. A.* On the Qualitative Properties of a Solution for One System of Infinite Nonlinear Algebraic Equations, *Vladikavkaz Math. J.*, 2022, vol. 24, no. 4, pp. 5–18 (in Russian). DOI: 10.46698/z4764-9590-5591-k.

## References

1. *Vladimirov, V. S. and Volovich Ya. I.* Nonlinear Dynamics Equation in $p$-Adic String Theory, *Theoretical and Mathematical Physics*, 2004, vol. 138, no. 3, pp. 297–309. DOI: 10.1023/B:TAMP.0000018447.02723.29.
2. *Vladimirov, V. S.* The Equation of the $p$-Adic Open String for the Scalar Tachyon Field, *Izvestiya: Mathematics*, 2005, vol. 69, no. 3, pp. 487–512. DOI: 10.1070/IM2005v069n03ABEH000536.
3. *Khachatryan, Kh. A.* On the Solubility of Certain Classes of Non-Linear Integral Equations in $p$-Adic String Theory, *Izvestiya: Mathematics*, 2018, vol. 82, no. 2, pp. 407–427. DOI: 10.1070/IM8580.
4. *Khachatryan, Kh. A.* Existence and Uniqueness of Solution of a Certain Boundary-Value Problem for a Convolution Integral Equation with Monotone Non-Linearity, *Izvestiya: Mathematics*, 2020, vol. 84, no. 4, pp. 807–815. DOI: 10.1070/IM8898.
5. *Engibaryan, N. B.* On a Problem in Nonlinear Radiative Transfer, *Astrophysics*, 1966, vol. 2, pp. 12–14. DOI: 10.1007/BF01014505.
6. *Diekmann, O. and Kaper, H.* On the Bounded Solutions of a Nonlinear Convolution Equation, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 1978, vol. 2, no. 6, pp. 721–737. DOI: 10.1016/0362-546X(78)90015-9.
7. *Sergeev, A. G. and Khachatryan, Kh. A.* On the Solvability of a Class of Nonlinear Integral Equations in the Problem of a Spread of an Epidemic, *Transactions of the Moscow Mathematical Society*, 2019, pp. 95–111. DOI: 10.1090/mosc/286.
8. *Diekmann, O.* Thresholds and Travelling Waves for the Geographical Spread of Infection, *Journal of Mathematical Biology*, 1978, vol. 6, no. 2, pp. 109–130. DOI: 10.1007/BF02450783.
9. *Lifshitz, E. M. and Pitaevskii, L. P. Physical Kinetics. Course of Theoretical Physics*, vol. 10, Oxford, Pergamon Press, 1981.

10. *Khachatryan, Kh. A. and Andriyan, S. M.* On the Solvability of a Class of Discrete Matrix Equations with Cubic Nonlinearity, *Ukrainian Mathematical Journal*, 2020, vol. 71, pp. 1910–1928. DOI: 10.1007/s11253-020-01755-4.
11. *Khachatryan, Kh. A. and Broyan, M. F.* One-Parameter Family of Positive Solutions for a Class of Nonlinear Infinite Algebraic Systems with Teoplitz-Hankel Type Matrices, *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 2013, vol. 48, no. 5, pp. 209–220. DOI: 10.3103/S1068362313050026.
12. *Fikhtengolts, G. M. Fundamentals of Mathematical Analysis*, vol. 2, Elsevier, 1965.

*Received November 11, 2021*

Metaksya H. Avetisyan
Armenian National Agrarian University,
74 Teryan St., Yerevan 0009, Armenia,
*Assistant of the Department of Higher Mathematics and Physics*
E-mail: avetisyan.metaqsya@mail.ru

Khachatur A. Khachatryan
Yerevan State University,
1 A. Manukyan St., Yerevan 0025, Armenia,
*Professor, Head of the Department of Theory of Functions and Differential Equations, Professor*
E-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am