

### Главный редактор

А. Г. КУСРАЕВ

Южный математический институт — филиал ВЦ РАН;  
Северо-Осетинский госуниверситет им. К. Л. Хетагурова

### Редакционная коллегия

- |  |   |
|--|---|
| А. В. АБАНИН<br>Южный федеральный университет;<br>Южный математический<br>институт — филиал ВЦ РАН                             | С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ<br>Институт математики<br>Сибирского отделения РАН  |
| Н. А. ВАВИЛОВ<br>Санкт-Петербургский госуниверситет  | В. Д. МАЗУРОВ<br>Институт математики<br>Сибирского отделения РАН  |
| А. О. ВАТУЛЬЯН<br>Южный федеральный университет;<br>Южный математический<br>институт — филиал ВЦ РАН                           | А. М. НАХУШЕВ<br>Институт прикладной математики<br>и автоматизации КБНЦ РАН   |
| С. К. ВОДОПЬЯНОВ<br>Институт математики<br>Сибирского отделения РАН  | С. Г. САМКО<br>Южный федеральный университет;<br>Университет Алгарве, Португалия  |
| Е. И. ГОРДОН<br>Иллинойский университет,<br>Урбана, США  | В. Г. ТРОИЦКИЙ<br>Альбертский университет,<br>Эдмонтон, Канада  |
| А. И. КОЖАНОВ<br>Институт математики<br>Сибирского отделения РАН   | Ш. С. ХУБЕЖТЫ<br>Южный математический<br>институт — филиал ВЦ РАН   |
| В. А. КОЙБАЕВ<br>Южный математический<br>институт — филиал ВЦ РАН;<br>Северо-Осетинский госуниверситет<br>им. К. Л. Хетагурова | А. Б. ШАБАТ<br>Институт теоретической физики<br>им. Л. Д. Ландау РАН;<br>Карачаево-Черкесский государственный<br>университет им. У. Д. Алиева |
| Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК<br>Южный федеральный университет;<br>Южный математический<br>институт — филиал ВЦ РАН                         | И. И. ШАРАПУДИНОВ<br>Дагестанский государственный<br>педагогический университет;<br>Южный математический — филиал<br>институт ВЦ РАН          |

### Ответственный секретарь

Е. К. БАСАЕВА

Южный математический институт — филиал ВЦ РАН;  
Северо-Осетинский госуниверситет им. К. Л. Хетагурова

Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год  
ЭЛЕКТРОННАЯ ВЕРСИЯ: [www.vmj.ru](http://www.vmj.ru)

© Южный математический институт —  
филиал ВЦ РАН, 2017

# ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

---

Том 19, выпуск 4

октябрь–декабрь, 2017

---

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Абрамова Е. В.</b> Наилучшее восстановление решения задачи Дирихле по неточно заданному спектру граничной функции .....	3
<b>Бештоков М. Х., Канчукоев В. З., Эржибова Ф. А.</b> О сходимости разностных схем, аппроксимирующих краевую задачу для псевдопараболического уравнения с вырождением .....	13
<b>Kusraev A. G., Kutateladze S. S.</b> Calculus of Tangents and Beyond .....	27
<b>Митрохин С. И.</b> Периодическая краевая задача для дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемым потенциалом .....	35
<b>Pandey P. K.</b> A Numerical Method for the Solution of Fifth Order Boundary Value Problem in Ordinary Differential Equations .....	50
<b>Переварюха А. Ю.</b> Сценарий невынужденной деструкции популяции в модификации уравнения Хатчинсона .....	58
<b>Saburov M.</b> A Note on Surjective Polynomial Operators .....	70
<b>Хасанов Ю. Х.</b> О приближении почти-периодических функций некоторыми суммами .....	76
<b>Хачатрян Р. А.</b> Об одной теореме о неявных функциях в негладком случае .....	86

УДК 517.9

## НАИЛУЧШЕЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ПО НЕТОЧНО ЗАДАННОМУ СПЕКТРУ ГРАНИЧНОЙ ФУНКЦИИ

Е. В. Абрамова

Во многих прикладных задачах возникает ситуация, когда требуется восстановить значение функции по некоторой информации (обычно не точной и не полной). Общая задача об оптимальном восстановлении линейного функционала на классе функций по конечной информации впервые появилась в работе С. А. Смоляка. В дальнейшем эта тематика получила достаточно широкое развитие в самых разных направлениях. Существует множество подходов к решению подобных задач. Здесь мы следуем подходу, который предполагает наличие априорной информации об объекте, характеристики которого требуется восстановить. Это позволяет поставить задачу о нахождении наилучшего метода восстановления данной характеристики среди всех возможных методов восстановления. Такой взгляд на задачи восстановления идеологически восходит к работам А. Н. Колмогорова 30-х гг. прошлого века о нахождении наилучших средств приближения для классов функций. Математическая теория, где изучаются задачи восстановления на основе указанного подхода, активно развивается в последние десятилетия, обнаруживая тесные связи с классическими задачами теории приближений и имея различные приложения к задачам практики. Работа посвящена задаче наилучшего восстановления решения задачи Дирихле в метрике  $L_2$  на прямой в верхней полуплоскости, параллельной оси абсцисс, по следующей информации о граничной функции: граничная функция принадлежит некоторому соболевскому пространству функций, а ее преобразование Фурье известно приближенное (в метрике  $L_\infty$ ) на конечном отрезке, симметричном относительно нуля. Построен оптимальный метод восстановления и найдено точное значение погрешности оптимального восстановления. Следует отметить, что оптимальный метод использует, вообще говоря, не всю доступную информацию, а ту, которую использует, определенным образом «сглаживает».

**Ключевые слова:** задача Дирихле, оптимальное восстановление, экстремальная задача, преобразование Фурье.

### Введение

Работа посвящена задаче наилучшего восстановления решения задачи Дирихле в метрике  $L_2$  на прямой в верхней полуплоскости, параллельной оси абсцисс, по следующей информации о граничной функции: граничная функция принадлежит некоторому соболевскому пространству функций, а ее преобразование Фурье известно приближенное (в метрике  $L_\infty$ ) на конечном отрезке, симметричном относительно нуля. Построен оптимальный метод восстановления и найдено точное значение погрешности оптимального восстановления. Следует отметить, что оптимальный метод использует, вообще говоря, не всю доступную информацию, а ту, которую использует, определенным образом «сглаживает».

Общая задача об оптимальном восстановлении линейного функционала на классе функций по конечной информации впервые появилась в работе [1]. В дальнейшем эта тематика получила достаточно широкое развитие в самых разных направлениях (укажем лишь обзоры [2–4]). Отметим еще работы [5–7], где рассматриваются близкие по постановкам задачи.

## 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u(x, y) = 0, & (x, y) \in \mathbb{R}^2, y > 0, \\ u(\cdot, 0) = f(\cdot), \end{cases} \quad (1.1)$$

закрывающуюся в нахождении гармонической функции  $u(\cdot, \cdot)$  в верхней полуплоскости, для которой  $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$  является граничной функцией. Равенство  $u(\cdot, 0) = f(\cdot)$  понимается так:  $u(\cdot, y) \rightarrow f(\cdot)$  при  $y \rightarrow 0$  в метрике  $L_2(\mathbb{R})$ .

Мы будем требовать еще, чтобы  $\sup_{y>0} \|u(\cdot, y)\|_{L_2(\mathbb{R})} < \infty$ . В этом случае решение задачи Дирихле единственно и задается интегралом Пуассона

$$u(x, y) = \int_{\mathbb{R}} P(x - t, y) f(t) dt,$$

где  $P(x, y) = \frac{y}{\pi(x^2 + y^2)}$  (см., например, [8]).

Рассмотрим пространство функций

$$\mathscr{W}_{2\infty}^r(\mathbb{R}) = \{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}) : f^{(r-1)}(\cdot) \in \text{LAC}(\mathbb{R}), f^{(r)}(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}), F[f](\cdot) \in L_\infty(\mathbb{R})\},$$

где  $\text{LAC}(\mathbb{R})$  обозначает множество функций на  $\mathbb{R}$ , абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке,  $F[f](\cdot)$  — преобразование Фурье функции  $f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})$ .

Обозначим через  $W_{2\infty}^r(\mathbb{R})$  соболевский класс функций на прямой

$$W_{2\infty}^r(\mathbb{R}) = \left\{ f(\cdot) \in \mathscr{W}_{2\infty}^r(\mathbb{R}) : \|f^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1 \right\}.$$

Ставится задача о наилучшем восстановлении функции  $u(\cdot, Y)$  — решении задачи Дирихле на прямой  $y = Y$ , где  $Y > 0$ , по следующей информации о граничной функции  $f(\cdot) \in W_{2\infty}^r(\mathbb{R})$ : задано приближенно ее преобразование Фурье  $F[f](\cdot)$  на отрезке  $[-\sigma, \sigma]$ ,  $\sigma > 0$ , в метрике  $L_\infty([-\sigma, \sigma])$ , т. е. известна функция  $g(\cdot) \in L_\infty([-\sigma, \sigma])$  такая, что  $\|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty([-\sigma, \sigma])} \leq \delta$ , где  $\delta > 0$ .

Задача оптимального восстановления  $u(\cdot, Y)$  понимается следующим образом. Любое отображение  $m: L_\infty[-\sigma, \sigma] \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  объявляется *методом восстановления*. *Погрешность* этого метода определяется величиной

$$e(Y, W_{2\infty}^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m) = \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_{2\infty}^r(\mathbb{R}), \\ g(\cdot) \in L_\infty[-\sigma, \sigma], \\ \|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty[-\sigma, \sigma]} \leq \delta}} \|u(\cdot, Y) - m(g(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})}.$$

Нас интересует величина

$$E(Y, W_{2\infty}^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = \inf_{m: L_\infty[-\sigma, \sigma] \rightarrow L_2(\mathbb{R})} e(Y, W_{2\infty}^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m),$$

которая называется *погрешностью оптимального восстановления*, и те методы  $\hat{m}$ , на которых нижняя грань достигается:

$$E(Y, W_{2\infty}^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = e(Y, W_{2\infty}^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, \hat{m}).$$

Эти методы мы называем *оптимальными методами восстановления*.

Целью работы является построение оптимального метода и нахождение соответствующей погрешности оптимального восстановления в поставленной задаче.

## 2. Формулировка основного результата

**Теорема 1.** Пусть  $\delta > 0$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\hat{\sigma} = \left(\frac{\pi(2r+1)}{\delta^2}\right)^{1/(2r+1)}$ ,  $\sigma_0 = \min\{\sigma, \hat{\sigma}\}$ . Метод  $\hat{m} : L_\infty[-\sigma, \sigma] \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ , действующий в образах Фурье по правилу

$$F[\hat{m}(g(\cdot))](\xi) = \begin{cases} e^{-Y|\xi|} \left(1 - e^{-2Y(\sigma_0 - |\xi|)} \left(\frac{\xi}{\sigma_0}\right)^{2r}\right) g(\xi), & |\xi| \leq \sigma_0, \\ 0, & |\xi| > \sigma_0, \end{cases}$$

является оптимальным. Погрешность оптимального восстановления имеет вид

$$E(Y, W_{2\infty}^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) = \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi Y} (1 - e^{-2Y\sigma_0}) + e^{-2Y\sigma_0} \left(\frac{1}{\sigma_0^{2r}} - \frac{\delta^2 \sigma_0}{\pi(2r+1)}\right)}.$$

## 3. Доказательство теоремы 1

**Оценка снизу погрешности оптимального восстановления.** Покажем, что погрешность оптимального восстановления  $E(Y, W_{2\infty}^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma)$  не меньше значения следующей экстремальной задачи:

$$\|u(\cdot, Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow \max, \quad f(\cdot) \in W_{2\infty}^r(\mathbb{R}), \quad \|F[f](\cdot)\|_{L_\infty([-\sigma, \sigma])} \leq \delta, \quad (3.1)$$

т. е. верхней грани максимизируемого функционала при данных ограничениях.

Пусть  $f(\cdot)$  — допустимая функция в задаче (3.1). Заметим, что если  $f(\cdot)$  допустима, то и  $-f(\cdot)$  тоже допустима и ей соответствует решение  $-u(\cdot, Y)$ . Тогда для любого метода  $m$  имеем

$$\begin{aligned} 2 \|u(\cdot, Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} &= \|u(\cdot, Y) - m(0) - (-u(\cdot, Y) - m(0))\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ &\leq \|u(\cdot, Y) - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R})} + \|-u(\cdot, Y) - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ &\leq 2 \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_{2\infty}^r(\mathbb{R}), \\ \|F[f](\cdot)\|_{L_\infty([-\sigma, \sigma])} \leq \delta}} \|u(\cdot, Y) - m(0)\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ &\leq 2 \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_{2\infty}^r(\mathbb{R}), \\ g(\cdot) \in L_\infty([-\sigma, \sigma]), \\ \|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty([-\sigma, \sigma])} \leq \delta}} \|u(\cdot, Y) - m(g(\cdot))\|_{L_2(\mathbb{R})} = 2e(Y, W_{2\infty}^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|u(\cdot, Y)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq e(Y, W_{2\infty}^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, m).$$

Переходя слева к верхней грани по всем допустимым функциям  $f(\cdot)$ , а справа к нижней грани по всем методам  $m : L_\infty([-\sigma, \sigma]) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$ , получаем

$$E(Y, W_{2\infty}^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) \geq \sup_{\substack{f(\cdot) \in W_{2\infty}^r(\mathbb{R}), \\ \|F[f](\cdot)\|_{L_\infty([-\sigma, \sigma])} \leq \delta}} \|u(\cdot, Y)\|_{L_2(\mathbb{R})},$$

т. е.

$$E(Y, W_{2\infty}^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) \geq S, \quad (3.2)$$

где  $S$  — значение задачи (3.1).

Найдем величину  $S$ , решив задачу (3.1). Так как  $F[u(\cdot, Y)](\xi) = e^{-Y|\xi|} F[f](\xi)$  для всех  $\xi \in \mathbb{R}$  (см., например, [8]), то согласно теореме Планшереля, квадрат значения задачи (3.1) равен значению следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} |F[f](\xi)|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ |F[f](\xi)|^2 \leq \delta^2 \quad \text{для п. в. } \xi \in [-\sigma, \sigma], \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F[f](\xi)|^2 d\xi \leq 1. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Сопоставим данной задаче функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} L(f(\cdot), \lambda_1(\cdot), \lambda_2) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} |F[f](\xi)|^2 d\xi \\ & + \int_{-\sigma}^{\sigma} \lambda_1(\xi) (|F[f](\xi)|^2 - \delta^2) d\xi + \lambda_2 \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F[f](\xi)|^2 d\xi - 1 \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

**Лемма 1.** Если найдутся функция  $\hat{\lambda}_1(\cdot) \in L_\infty([-\sigma, \sigma])$ ,  $\hat{\lambda}_1(\cdot) \geq 0$ , число  $\hat{\lambda}_2 \geq 0$  и допустимая в задаче (3.3) функция  $\hat{f}(\cdot)$  такие, что

$$(a) \quad L(\hat{f}(\cdot), \hat{\lambda}_1(\cdot), \hat{\lambda}_2) = \min_{f(\cdot) \in L_2(\mathbb{R})} L(f(\cdot), \hat{\lambda}_1(\cdot), \hat{\lambda}_2),$$

$$(b) \quad \int_{-\sigma}^{\sigma} \hat{\lambda}_1(\xi) (|F[\hat{f}](\xi)|^2 - \delta^2) d\xi = 0,$$

$$(c) \quad \hat{\lambda}_2 \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F[\hat{f}](\xi)|^2 d\xi - 1 \right) = 0,$$

то  $\hat{f}(\cdot)$  — решение задачи (3.3).

◁ Пусть  $f(\cdot)$  — допустимая функция в (3.3). Тогда, учитывая это обстоятельство, а также неотрицательность  $\lambda_1(\cdot)$  и  $\lambda_2$ , условия (a), (b), (c), получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} |F[f](\xi)|^2 d\xi & \geq -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} |F[f](\xi)|^2 d\xi + \int_{-\sigma}^{\sigma} \hat{\lambda}_1(\xi) (|F[f](\xi)|^2 - \delta^2) d\xi \\ & + \hat{\lambda}_2 \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F[f](\xi)|^2 d\xi - 1 \right) = L(f(\cdot), \hat{\lambda}_1(\cdot), \hat{\lambda}_2) \stackrel{(a)}{\geq} L(\hat{f}(\cdot), \hat{\lambda}_1(\cdot), \hat{\lambda}_2) \\ & = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} |F[\hat{f}](\xi)|^2 d\xi + \int_{-\sigma}^{\sigma} \hat{\lambda}_1(\xi) (|F[\hat{f}](\xi)|^2 - \delta^2) d\xi \\ & + \hat{\lambda}_2 \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F[\hat{f}](\xi)|^2 d\xi - 1 \right) \stackrel{(b), (c)}{=} -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} |F[\hat{f}](\xi)|^2 d\xi, \end{aligned}$$

т. е.  $\hat{f}(\cdot)$  — решение задачи (3.3). ▷

Воспользуемся теперь леммой 1, чтобы найти решение задачи (3.3). Рассмотрим два случая.

1. Пусть  $\sigma \geq \hat{\sigma}$ . Положим

$$\hat{\lambda}_1(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left( e^{-2Y|\xi|} - e^{-2Y\hat{\sigma}} \left( \frac{\xi}{\hat{\sigma}} \right)^{2r} \right), & |\xi| \leq \hat{\sigma}, \\ 0, & |\xi| \geq \hat{\sigma}, \end{cases}$$

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{e^{-2Y\hat{\sigma}}}{\hat{\sigma}^{2r}},$$

функция  $\hat{f}(\cdot)$  такова, что ее преобразование Фурье имеет вид

$$|F[\hat{f}](\xi)| = \begin{cases} \delta, & |\xi| \leq \hat{\sigma}, \\ 0, & |\xi| > \hat{\sigma}. \end{cases}$$

Проверим выполнение условий леммы. Очевидно, что  $\hat{\lambda}_1(\cdot) \geq 0$ ,  $\hat{\lambda}_2 > 0$ , и простая проверка показывает, что функция  $\hat{f}(\cdot)$  допустима в задаче (3.3) и выполнены условия (b) и (c) леммы. Проверим выполнение условия (a). Для этого запишем функцию Лагранжа (3.4) в виде

$$\begin{aligned} L(f(\cdot), \lambda_1(\cdot), \lambda_2) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} |F[f](\xi)|^2 d\xi \\ &+ \int_{-\sigma}^{\sigma} \lambda_1(\xi) \left( |F[f](\xi)|^2 - \delta^2 \right) d\xi + \lambda_2 \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F[f](\xi)|^2 d\xi - 1 \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( -e^{-2Y|\xi|} + 2\pi\lambda_1(\xi) \chi[-\sigma, \sigma](\xi) + \lambda_2 \xi^{2r} \right) |F[f](\xi)|^2 d\xi - \left( \delta^2 \int_{-\sigma}^{\sigma} \lambda_1(\xi) d\xi + \lambda_2 \right), \end{aligned}$$

где  $\chi[-\sigma, \sigma](\cdot)$  — характеристическая функция отрезка  $[-\sigma, \sigma]$ .

Оценим первое слагаемое полученного выражения с  $\lambda_1(\cdot) = \hat{\lambda}_1(\cdot)$  и  $\lambda_2 = \hat{\lambda}_2$ :

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( -e^{-2Y|\xi|} + 2\pi\hat{\lambda}_1(\xi) \cdot \chi[-\sigma, \sigma](\xi) + \hat{\lambda}_2 \xi^{2r} \right) |F[f](\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\hat{\sigma}}^{\hat{\sigma}} \left( -e^{-2Y|\xi|} + 2\pi\hat{\lambda}_1(\xi) + \hat{\lambda}_2 \xi^{2r} \right) |F[f](\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\hat{\sigma}; \hat{\sigma}]} \left( -e^{-2Y|\xi|} + \hat{\lambda}_2 \xi^{2r} \right) |F[f](\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\hat{\sigma}}^{\hat{\sigma}} \left( -e^{-2Y|\xi|} + 2\pi \frac{1}{2\pi} \left( e^{-2Y|\xi|} - \hat{\lambda}_2 \xi^{2r} \right) + \hat{\lambda}_2 \xi^{2r} \right) |F[f](\xi)|^2 d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\hat{\sigma}; \hat{\sigma}]} \left( -e^{-2Y|\xi|} + \hat{\lambda}_2 \xi^{2r} \right) |F[f](\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R} \setminus [-\hat{\sigma}; \hat{\sigma}]} e^{-2Y\hat{\sigma}} \left( \left( \frac{\xi}{\hat{\sigma}} \right)^{2r} - e^{-2Y(|\xi| - \hat{\sigma})} \right) |F[f](\xi)|^2 d\xi \geq 0. \end{aligned}$$

Но если  $f(\cdot) = \widehat{f}(\cdot)$ , то

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( -e^{-2Y|\xi|} + 2\pi \widehat{\lambda}_1(\xi) \chi_{[-\sigma, \sigma]}(\xi) + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2r} \right) |F[\widehat{f}](\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} \left( -e^{-2Y|\xi|} + 2\pi \frac{1}{2\pi} (e^{-2Y|\xi|} - \widehat{\lambda}_2 \xi^{2r}) + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2r} \right) \delta^2 d\xi = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, выполнено и условие (а) леммы, и тем самым  $\widehat{f}(\cdot)$  — решение задачи (3.3). Таким образом,

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} |F[\widehat{f}](\xi)|^2 d\xi = -L(\widehat{f}(\cdot), \widehat{\lambda}_1(\cdot), \widehat{\lambda}_2) \\ &= \delta^2 \int_{-\sigma}^{\sigma} \widehat{\lambda}_1(\xi) d\xi + \widehat{\lambda}_2 = \frac{\delta^2}{2\pi Y} (1 - e^{-2Y\sigma}). \end{aligned}$$

Вместе с формулой (3.2) это означает, что в рассматриваемом случае

$$E(Y, W_{2\infty}^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) \geq \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi Y} (1 - e^{-2Y\sigma})}. \quad (3.5)$$

2. Пусть  $\sigma < \widehat{\sigma}$ . Положим

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_1(\xi) &= \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \left( e^{-2Y|\xi|} - e^{-2Y\sigma} \left( \frac{\xi}{\sigma} \right)^{2r} \right), & |\xi| \leq \sigma, \\ 0, & |\xi| \geq \sigma, \end{cases} \\ \widehat{\lambda}_2 &= \frac{e^{-2Y\sigma}}{\sigma^{2r}}, \\ |F[\widehat{f}](\xi)| &= \begin{cases} \delta, & |\xi| < \sigma, \\ C \delta (\xi \pm \sigma), & |\xi| = \sigma, \\ 0, & |\xi| > \sigma, \end{cases} \end{aligned}$$

где  $C^2 = \frac{\pi}{\sigma^{2r}} - \frac{\delta^2 \sigma}{2r+1}$ , а  $\delta(\cdot)$  — дельта-функция в точке  $\xi_0$ .

Проверим выполнение условий леммы 1. Очевидно, что  $\widehat{\lambda}_1(\cdot) \geq 0$  и  $\widehat{\lambda}_2 > 0$ . Функция  $f(\cdot)$  допустима в (3.3). Действительно,  $|F[\widehat{f}](\xi)|^2 \leq \delta^2$  для п. в.  $\xi \in [-\sigma, \sigma]$ . Далее,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F[\widehat{f}](\xi)|^2 d\xi &= \frac{1}{2\pi} \left( 2\delta^2 \frac{\sigma^{2r+1}}{2r+1} + 2C^2 \sigma^{2r} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left( 2\delta^2 \frac{\sigma^{2r+1}}{2r+1} + 2 \left( \frac{\pi}{\sigma^{2r}} - \frac{\delta^2 \sigma}{2r+1} \right) \sigma^{2r} \right) = 1. \end{aligned}$$

Очевидно, что условия (b) и (c) леммы выполняются. Проверим выполнение условия (а).

Как и раньше, преобразуем функцию Лагранжа к виду

$$\begin{aligned} L(f(\cdot), \lambda_1(\cdot), \lambda_2) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( -e^{-2Y|\xi|} + 2\pi \lambda_1(\xi) \chi_{[-\sigma, \sigma]}(\xi) + \lambda_2 \xi^{2r} \right) |F[f](\xi)|^2 d\xi \\ &\quad - \left( \delta^2 \int_{-\sigma}^{\sigma} \lambda_1(\xi) d\xi + \lambda_2 \right). \end{aligned}$$



Оценивая первое слагаемое полученного выражения с  $\lambda_1(\cdot) = \widehat{\lambda}_1(\cdot)$  и  $\lambda_2 = \widehat{\lambda}_2$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left( -e^{-2Y|\xi|} + 2\pi\widehat{\lambda}_1(\xi) \chi[-\sigma, \sigma] + \widehat{\lambda}_2 \xi^{2r} \right) |F[f](\xi)|^2 d\xi \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \geq \sigma} e^{-2Y\sigma} \left( \left( \frac{\xi}{\sigma} \right)^{2r} - e^{-2Y(|\xi|-\sigma)} \right) |F[f](\xi)|^2 d\xi \geq 0. \end{aligned}$$

При этом значение этого слагаемого на функции  $\widehat{f}(\cdot)$ , как нетрудно проверить, равно нулю. Следовательно,  $\widehat{f}(\cdot)$  — решение задачи (3.3), и, значит,

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} |F[f](\xi)|^2 d\xi = -L(\widehat{f}(\cdot), \widehat{\lambda}_1(\cdot), \widehat{\lambda}_2) \\ &= \delta^2 \int_{-\sigma}^{\sigma} \widehat{\lambda}_1(\xi) d\xi + \widehat{\lambda}_2 = \frac{\delta^2}{2\pi Y} (1 - e^{-2Y\sigma}) + e^{-2Y\sigma} \left( \frac{1}{\sigma^{2r}} - \frac{\sigma}{\widehat{\sigma}^{2r+1}} \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из формулы (3.2) следует, что в рассматриваемом случае

$$E(Y, W_{2\infty}^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma) \geq \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi Y} (1 - e^{-2Y\sigma}) + e^{-2Y\sigma} \left( \frac{1}{\sigma^{2r}} - \frac{\sigma}{\widehat{\sigma}^{2r+1}} \right)}. \quad (3.6)$$

**Оценка сверху и оптимальный метод.** Покажем, что метод  $\widehat{m}$  из формулировки теоремы является оптимальным. Снова рассмотрим два случая.

1. Пусть  $\sigma \geq \widehat{\sigma}$ . Выше для данного случая были определены функция  $\widehat{\lambda}_1(\cdot)$  и число  $\widehat{\lambda}_2$ . Обозначим

$$a_1(\xi) = \begin{cases} 1 - e^{-2Y(\widehat{\sigma}-|\xi|)} \left( \frac{\xi}{\widehat{\sigma}} \right)^{2r}, & |\xi| \leq \widehat{\sigma}, \\ 0, & |\xi| \geq \widehat{\sigma}. \end{cases}$$

Погрешность метода  $\widehat{m}$  равна, по определению, значению следующей экстремальной задачи:

$$\|u(\cdot, Y) - \widehat{m}(g)(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \rightarrow \max, \quad \|F[f](\cdot) - g(\cdot)\|_{L_\infty([-\sigma, \sigma])} \leq \delta, \quad \|f^{(r)}(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leq 1.$$

Применяя теорему Планшереля, получим, что квадрат значения этой задачи равен значению следующей задачи:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |e^{-Y|\xi|} (F[f](\xi) - a_1(\xi)g(\xi))|^2 d\xi \rightarrow \max, \\ |F[f](\xi) - g(\xi)|^2 \leq \delta^2 \quad \text{при п. в. } |\xi| \leq \sigma, \quad \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F[f](\xi)|^2 d\xi \leq 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Максимизируемый в (3.7) функционал представим в виде суммы двух интегралов:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} |F[f](\xi) - a_1(\xi)g(\xi)|^2 d\xi \\ = \frac{1}{2\pi} \int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} e^{-2Y|\xi|} |F[f](\xi) - a_1(\xi)g(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \widehat{\sigma}} e^{-2Y|\xi|} |F[f](\xi)|^2 d\xi. \end{aligned}$$

Оценим подынтегральное выражение в первом слагаемом, используя неравенство Коши — Буняковского:

$$\begin{aligned} e^{-2Y|\xi|} |(F[f](\xi) - a_1(\xi)g(\xi))|^2 &= e^{-2Y|\xi|} |(1 - a_1(\xi))F[f](\xi) + a_1(\xi)(F[f](\xi) - g(\xi))|^2 \\ &= e^{-2Y|\xi|} \left| \frac{1 - a_1(\xi)}{\sqrt{\widehat{\lambda}_2 \xi^r}} \sqrt{\widehat{\lambda}_2 \xi^r} F[f](\xi) + \frac{a_1(\xi)}{\sqrt{2\pi \widehat{\lambda}_1(\xi)}} \sqrt{2\pi \widehat{\lambda}_1(\xi)} (F[f](\xi) - g(\xi)) \right|^2 \\ &\leq e^{-2Y|\xi|} \left( \frac{|1 - a_1(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2r}} + \frac{|a_1(\xi)|^2}{2\pi \widehat{\lambda}_1(\xi)} \right) (\widehat{\lambda}_2 \xi^{2r} |F[f](\xi)|^2 + 2\pi \widehat{\lambda}_1(\xi) |F[f](\xi) - g(\xi)|^2). \end{aligned}$$

Непосредственный подсчет показывает, что

$$e^{-2Y|\xi|} \left( \frac{|1 - a_1(\xi)|^2}{\widehat{\lambda}_2 \xi^{2r}} + \frac{|a_1(\xi)|^2}{2\pi \widehat{\lambda}_1(\xi)} \right) = 1.$$

Интегрируя полученное неравенство с учетом этого обстоятельства и учитывая ограничения в задаче (3.7), приходим к следующей оценке для интеграла слева в (2.5):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} |F[f](\xi) - a_1(\xi)g(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{\widehat{\lambda}_2}{2\pi} \int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} \xi^{2r} |F[f](\xi)|^2 d\xi + \int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} \widehat{\lambda}_1(\xi) |F[f](\xi) - g(\xi)|^2 d\xi + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \widehat{\sigma}} \frac{e^{-2Y|\xi|}}{\xi^{2r}} \xi^{2r} |F[f](\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{\widehat{\lambda}_2}{2\pi} \int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} \xi^{2r} |F[f](\xi)|^2 d\xi + \delta^2 \int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} \widehat{\lambda}_1(\xi) d\xi + \frac{1}{2\pi} \frac{e^{-2Y\widehat{\sigma}}}{\widehat{\sigma}^{2r}} \int_{|\xi| > \widehat{\sigma}} \xi^{2r} |F[f](\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{\widehat{\lambda}_2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi^{2r} |F[f](\xi)|^2 d\xi + \delta^2 \int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} \widehat{\lambda}_1(\xi) d\xi \leq \frac{e^{-2Y\widehat{\sigma}}}{\widehat{\sigma}^{2r}} + \frac{\delta^2}{2\pi} \int_{-\widehat{\sigma}}^{\widehat{\sigma}} \left( e^{-2Y|\xi|} - e^{-2Y\widehat{\sigma}} \left( \frac{\xi}{\widehat{\sigma}} \right)^{2r} \right) d\xi \\ &= \frac{\delta^2}{2\pi Y} (1 - e^{-2Y\widehat{\sigma}}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$e(Y, W_{2\infty}^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, \widehat{m}) \leq \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi Y} (1 - e^{-2Y\widehat{\sigma}})}.$$

Вместе с оценкой (3.2) это означает, что при  $\sigma \geq \widehat{\sigma}$  метод  $\widehat{m}$  из формулировки теоремы является оптимальным и справедливо нужно выражение для погрешности оптимального восстановления.

2. Пусть  $\sigma < \widehat{\sigma}$ . Обозначим

$$a_2(\xi) = \begin{cases} 1 - e^{-2Y(\sigma - |\xi|)} \left( \frac{\xi}{\sigma} \right)^{2r}, & |\xi| \leq \sigma, \\ 0, & |\xi| \geq \sigma. \end{cases}$$

Рассуждения совершенно аналогично предыдущему случаю, получаем, что

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-2Y|\xi|} |(F[f](\xi) - a_2(\xi)g(\xi))|^2 d\xi \leq \frac{\delta^2}{2\pi Y} (1 - e^{-2Y\sigma}) + e^{-2Y\sigma} \left( \frac{1}{\sigma^{2r}} - \frac{\sigma}{\widehat{\sigma}^{2r+1}} \right),$$

и поэтому

$$e(Y, W_{2\infty}^r(\mathbb{R}), \delta, \sigma, \hat{m}) \leq \sqrt{\frac{\delta^2}{2\pi Y} (1 - e^{-2Y\sigma}) + e^{-2Y\sigma} \left( \frac{1}{\sigma^{2r}} - \frac{\sigma}{\hat{\sigma}^{2r+1}} \right)}.$$

Отсюда и из (3.6) следует, что при  $\sigma < \hat{\sigma}$  метод  $\hat{m}$  из формулировки теоремы оптимален и справедлива нужное выражение для погрешности оптимального восстановления. Теорема 1 доказана.

### Литература

1. Смоляк С. А. Об оптимальном восстановлении функций и функционалов от них: Дисс. ... канд. физ.-мат. наук.—М.: МГУ, 1965.
2. Micchelli C. A., Rivlin T. J. A survey of optimal recovery // Optimal Estimation in Approximation Theory / Eds. C. A. Micchelli, T. J. Rivlin.—N. Y.: Plenum Press, 1977.—P. 1–54.
3. Melkman A. A., Micchelli C. A. Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data // SIAM J. Numer. Anal.—1979.—Vol. 16.—P. 87–105.
4. Micchelli C. A., Rivlin T. J. Lectures on Optimal Recovery // Lect. Notes Math.—Berlin: Springer-Verlag, 1985.—Vol. 1129.—P. 21–93.
5. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Оптимальное восстановление функций и их производных по приближенной информации о спектре и неравенства для производных // Функцион. анализ и его прил.—2003.—Т. 37.—С. 51–64. DOI: 10.4213/faa157.
6. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. О восстановлении операторов сверточного типа по неточной информации // Тр. МИАН.—2010.—Т. 269.—С. 181–192.
7. Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю. Об оптимальном гармоническом синтезе по неточно заданному спектру // Функцион. анализ и его прил.—2010.—Т. 44.—С. 76–79. DOI: 10.4213/faa2999.
8. Стейн И., Вейс Г. Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.—М., 1974.
9. Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М. Выпуклый анализ и его приложения / 3-е изд.—М.: Эдиториал УРСС, 2011.
10. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа / 4-е изд.—М.: Наука, 1976.

*Статья поступила 23 ноября 2016 г.*

АБРАМОВА ЕЛЕНА ВЛАДИМИРОВНА  
ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет «МЭИ»,  
старший преподаватель кафедры высшей математики  
РОССИЯ, 111250, Москва, ул. Красноказарменная, 14  
E-mail: e.l.v.abramova@gmail.com

THE BEST RECOVERY OF THE SOLUTION OF THE DIRICHLET PROBLEM  
FROM INACCURATE SPECTRUM OF THE BOUNDARY FUNCTION

Abramova E. V.

In many applied problems appears a situation where it is necessary to recover the value of a function from some information (usually not exact or complete). The general problem of the optimal recovery of a linear functional on a class of functions from finite information first appeared in the works of S. A. Smolyak. In the future this subject has received a fairly wide development in a variety of ways. There are many approaches which solve similar problems. Here we follow the approach that assumes the existence of a priori information about the object whose characteristics are to be recovered. This allows us to set the problem of finding the best method for recovering this characteristic among all possible recovery methods. This view of reconstruction tasks ideologically goes back to Kolmogorov's work in the years 1930s on finding the best means of approximation for classes of functions. The mathematical theory, where recovery problems are studied on the basis of this approach, has been actively developing in recent decades, revealing close links with the classical problems of approximation theory and having various applications to the problems of practice. This paper is devoted to the problem of best recovery of the solution of the Dirichlet problem in the  $L_2$  metric on the line in the upper half-plane parallel to the abscissa axis, according to the following information about the boundary function: the boundary function belongs to some Sobolev space of functions, and its Fourier transform knows an approximate (in the  $L_\infty$  metric) on finite segment symmetric with respect to zero. An optimal recovery method is constructed and the exact value of the optimum recovery error is found. It should be noted that the optimal method uses, generally speaking, not all available information, and the one that uses it, in a certain way, "smoothes out".

**Key words:** Dirichlet problem, optimal recovery, extremal problem, Fourier transform.

### References

1. Smolyak S. A. *Ob optimalnom vosstanovlenii funktsii i funktsionalov ot nikh* [On Optimal Reconstruction of Functions and Functionals of Them], Kand. diss., Moscow, MGU, 1965 (in Russian).
2. Micchelli C. A., Rivlin T. J. A Survey of optimal recovery, *Optimal Estimation in Approximation Theory* (eds. C. A. Micchelli and T. J. Rivlin), N. Y., Plenum Press, 1977, pp. 1–54.
3. Melkman A. A., Micchelli C. A. Optimal estimation of linear operators in Hilbert spaces from inaccurate data, *SIAM J. Numer. Anal.*, 1979, vol. 16, pp. 87–105.
4. Micchelli C. A., Rivlin T. J. Lectures on Optimal Recovery, *Lect. Not. Math.*, Berlin: Springer-Verlag, 1985, vol. 1129, pp. 21–93.
5. Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Y. Optimal recovery of functions and their derivatives from inaccurate information about the spectrum and inequalities for derivatives, *Funktsional'nyi Analiz i ego Prilozheniya* [Functional Analysis and Its Applications], 2003, vol. 37, no. 3, pp. 51–64 (in Russian).
6. Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Y. On the Reconstruction of Convolution-type operators from inaccurate information, *Proc. Steklov Instit. Math.*, 2010, vol. 269, pp. 174–185. DOI: 10.1134/S008154381002015X.
7. Magaril-Il'yaev G. G., Osipenko K. Y. On Optimal Harmonic Synthesis from Inaccurate Spectral Data, *Funktsional'nyi Analiz i ego Prilozheniya* [Functional Analysis and Its Applications], 2010, vol. 44, no. 3, pp. 76–79. DOI: 10.4213/faa2999 (in Russian).
8. Stein E., Weiss G. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton, Princeton Univ. Press, 1971.
9. Magaril-Il'yaev G. G., Tikhomirov V. M. *Vypuklyi analiz i ego prilozheniya* [Convex Analysis and its Applications]. Moscow, Editorial URSS, 2011 (in Russian).
10. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elementy teorii funktsii i funktsionalnogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis], Moscow, Nauka, 1976 (in Russian).

*Received November 23, 2016*

ABRAMOVA ELENA VLADIMIROVNA  
National Research University "Moscow Power Engineering Institute",  
14 Krasnokazarmennaya st., Moscow, 111250, Russia  
E-mail: el.v.abramova@gmail.com

УДК 519.635

## О СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ, АППРОКСИМИРУЮЩИХ КРАЕВУЮ ЗАДАЧУ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

М. Х. Бештоков, В. З. Канчукоев, Ф. А. Эржибова

В работе исследуется псевдопараболическое уравнение в трехмерной области. Уравнение такого вида предполагает наличие цилиндрической или сферической симметрии, что сразу позволяет перейти от трехмерной задачи к одномерной задаче, но с вырождением. В этой связи проводится исследование разрешимости устойчивости решений краевой задачи для вырождающегося псевдопараболического уравнения третьего порядка общего вида с переменными коэффициентами с условием третьего рода, а также разностных схем, аппроксимирующих эту задачу на равномерных сетках. Основной результат работы заключается в доказательстве априорных оценок, полученных методом энергетических неравенств, для решения задачи как в дифференциальном, так и в разностном виде. Полученные неравенства означают устойчивость решения относительно начальных данных и правой части. В силу линейности рассматриваемых задач эти неравенства позволяют утверждать, что приближенное решение сходится к точному решению рассматриваемой дифференциальной задачи в предположении существования самого решения в классе достаточно гладких функций. На тестовых примерах проведены численные эксперименты, подтверждающие теоретические результаты, полученные в работе.

**Ключевые слова:** уравнение с вырождением, краевая задача, условие третьего рода, априорная оценка, разностная схема, устойчивость и сходимость разностной схемы, уравнение влагопереноса, псевдопараболическое уравнение.

### Введение

Исследованию уравнений псевдопараболического типа посвящено большое количество работ из-за того, что многие вопросы физики, механики, биологии сводятся к таким уравнениям. Например, вопросы фильтрации жидкости в пористых средах [1] передачи тепла в гетерогенной среде [2, 3], влагопереноса в почво-грунтах (см. [4], [5, с. 137]) приводят к модифицированным уравнениям диффузии, которые являются уравнениями в частных производных псевдопараболического типа.

В работе Г. И. Баренблатта, Ю. П. Желтова, И. Н. Кочкиной [6] получено линейное псевдопараболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (k(x, t)u_x)_x + (\eta(x, t)u_x)_{xt},$$

описывающее нестационарный процесс фильтрации жидкости в трещиноватой пористой среде. Там же было получено рассматриваемое нами в данной работе вырождающееся псевдопараболическое уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x}(xk(x, t)u_x)_x + \frac{1}{x}(x\eta(x, t)u_x)_{xt}.$$

В работах [7–10] предложены разностные методы решения локальных и нелокальных краевых задач для псевдопараболического уравнения.

В настоящей работе приводится исследование решения трехмерного псевдопараболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (*)$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^3 L_{\alpha}u, \quad x = (x_1, x_2, x_3),$$

$$L_{\alpha}u = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( k_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left( \eta_{\alpha}(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) - q_{\alpha}(x, t)u.$$

Переходя к цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  в случае, когда решение  $u = u(r)$  не зависит ни от  $z$ , ни от  $\varphi$  (имеет место осевая симметрия),  $(*)$  принимает вид (обозначим  $x = r$ ):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x} (xk(x, t)u_x)_x + \frac{1}{x} (x\eta(x, t)u_x)_{xt} - q(x, t)u + f(x, t),$$

а в случае сферической симметрии уравнение  $(*)$  примет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x^2} (x^2k(x, t)u_x)_x + \frac{1}{x^2} (x^2\eta(x, t)u_x)_{xt} - q(x, t)u + f(x, t).$$

## 1. Постановка задачи

В замкнутом цилиндре  $\overline{Q}_T = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, 0 \leq t \leq T\}$  рассмотрим следующую нелокальную краевую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x, t), \quad 0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \quad (1.1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^m \Pi(x, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.2)$$

$$-\Pi(l, t) = \beta(t)u(l, t) - \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (1.3)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (1.4)$$

где

$$Lu = \frac{1}{x^m} (x^m k(x, t)u_x)_x + \frac{1}{x^m} (x^m \eta(x, t)u_x)_{xt} - q(x, t)u.$$

Коэффициенты уравнения (1.1) и граничных условий (1.2)–(1.4) удовлетворяют следующим условиям:

$$0 < c_0 \leq k(x, t), \quad \eta(x, t) \leq c_1, \quad |k_t(x, t), \eta_t(x, t), q(x, t), \beta(t)| \leq c_2. \quad (1.5)$$

Предполагается, что задача (1.1)–(1.4) имеет единственное решение, обладающее нужным по ходу изложения производными. Будем также считать, что коэффициенты уравнения (1.1) и граничных условий (1.2)–(1.4) удовлетворяют необходимым по ходу

изложения условиям гладкости, обеспечивающей нужный порядок аппроксимации разностной схемы. Заметим, что при построении разностных схем требуется более высокая, чем гладкость решения и коэффициентов уравнения:

$$u \in C^{4,3}(\overline{Q}_T), \quad \eta \in C^{3,3}(\overline{Q}_T), \quad k \in C^{3,2}(\overline{Q}_T), \quad q, f \in C^{2,2}(\overline{Q}_T),$$

$\beta(t)$ ,  $\mu(t)$  — функции, непрерывные на  $[0, T]$ ,  $\Pi(x, t) = ku_x + (\eta u_x)_t$  — полный поток,  $Q_T = \{(x, t) : 0 < x < l, 0 < t \leq T\}$ ,  $c_0, c_1, c_2$  — положительные числа,  $0 \leq m \leq 2$ .

По ходу изложения будем использовать положительные постоянные числа  $M_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , зависящие только от входных данных задачи (1.1)–(1.4).

Заметим, что при  $x = 0$  ставится условие ограниченности решения  $|u(0, t)| < \infty$ , которое эквивалентно условию (1.2), если коэффициенты уравнения  $q(0, t)$ ,  $f(0, t)$  — конечны, то условие (1.2) можно заменить требованием  $\Pi(0, t) = 0$ .

## 2. Априорная оценка в дифференциальной трактовке

**Лемма 1** [12], [13, с. 73]. Для любой функции  $u(x) \in C^1[x_0, l]$ , имеющей суммируемую с квадратом на  $[0, l]$  производную с весом  $x^{\frac{m}{2}}u_x$ , справедливо неравенство

$$\max_{x \in [x_0, l]} u^2(x) \leq \frac{\varepsilon}{x_0^m} \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 + c_\varepsilon \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2,$$

где  $\varepsilon > 0$ ,  $c_\varepsilon = \frac{1}{x_0^m} \left( \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{l-x_0} \right)$ ,  $x_0 \geq \delta > 0$ .

**Теорема 1.** Пусть выполнены условия (1.5). Тогда для решения дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) справедлива априорная оценка

$$\|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_{Q_t}^2 \leq M \left( \int_0^t \left( \|x^{\frac{m}{2}}f\|_0^2 + \mu^2(\tau) \right) d\tau + \|x^{\frac{m}{2}}u_0\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u'_0\|_0^2 \right),$$

где  $M$  зависит только от входных данных задачи (1.1)–(1.4).

◁ В предположении существования решения дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) в цилиндре  $\overline{Q}_T$  получим априорную оценку для ее решения. Для этого воспользуемся методом энергетических неравенств. Умножим уравнение (1.1) скалярно на  $x^m u$ :

$$(u_t, x^m u) = ((x^m k u_x)_x, u) + ((x^m \eta u_x)_{xt}, u) - (qu, x^m u) + (f, x^m u), \quad (2.1)$$

где

$$(u, v) = \int_0^l uv \, dx, \quad \|u\|_0^2 = (u, u).$$

$$(u_t, x^m u) = \int_0^l x^m u_t u \, dx = \frac{1}{2} \int_0^l x^m (u^2)_t \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l x^m u^2 \, dx = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2. \quad (2.2)$$

$$((x^m k u_x)_x, u) = \int_0^l (x^m k u_x)_x u \, dx = x^m k u_x u \Big|_0^l - \int_0^l x^m k u_x^2 \, dx. \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned}
((x^m \eta u_x)_{xt}, u) &= \int_0^l (x^m \eta u_x)_{xt} u \, dx = (x^m \eta u_x)_t u \Big|_0^l - \int_0^l (x^m \eta u_x)_t u_x \, dx \\
&= (x^m \eta u_x)_t u \Big|_0^l - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l x^m \eta u_x^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_0^l x^m \eta_t u_x^2 \, dx.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Учитывая преобразования (2.2)–(2.4), граничные условия (1.2)–(1.4) и пользуясь неравенством Коши с  $\varepsilon$ , из (2.1) получим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l x^m \eta u_x^2 \, dx + c_0 \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 \\
\leq l^m \Pi(l, t) u(l, t) + M_1 \left( \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 \right) + \frac{1}{2} \|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

С помощью леммы 1, неравенства Коши с  $\varepsilon$  и условия (1.3) оценим первое слагаемое в правой части неравенства (2.5) следующим образом:

$$\begin{aligned}
l^m \Pi(l, t) u(l, t) &= l^m u(l, t) (\mu(t) - \beta(t) u(l, t)) \\
&\leq \frac{l^m}{2} \left( \mu^2(t) + u^2(l, t) - \beta^2(t) u^2(l, t) \right) \leq \frac{l^m}{2} \mu^2(t) + M_2 \left( \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 \right).
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Учитывая оценку (2.6), из (2.5) находим

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \frac{d}{dt} \int_0^l x^m \eta u_x^2 \, dx + 2c_0 \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 \\
\leq M_3 \left( \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 \right) + M_4 \left( \|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2 + \mu^2(t) \right).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Проинтегрировав (2.7) по  $\tau$  от 0 до  $t$ , получаем

$$\begin{aligned}
\|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_{Q_t}^2 &\leq M_5 \int_0^t \left( \|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 \right) d\tau \\
&+ M_6 \int_0^t \left( \|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2 + \mu^2(\tau) \right) d\tau + M_7 \left( \|x^{\frac{m}{2}} u_0\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u'_0\|_0^2 \right),
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где

$$\|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_{Q_t}^2 = \int_0^t \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 d\tau.$$

На основании леммы Гронуолла (см. [13, с. 152]) из (2.8) получим искомую априорную оценку

$$\|x^{\frac{m}{2}} u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u_x\|_{Q_t}^2 \leq M \left( \int_0^t \left( \|x^{\frac{m}{2}} f\|_0^2 + \mu^2(\tau) \right) d\tau + \|x^{\frac{m}{2}} u_0\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} u'_0\|_0^2 \right),$$

где  $M$  — зависит только от входных данных задачи (1.1)–(1.4).



Из полученной априорной оценки следует единственность решения исходной задачи (1.1)–(1.4), а также непрерывная зависимость решения задачи от входных данных на каждом временном слое в норме  $\|x^{\frac{m}{2}}u\|_1^2 = \|x^{\frac{m}{2}}u\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}}u_x\|_{Q_t}^2$ .  $\triangleright$

### 3. Устойчивость и сходимость разностной схемы

Для решения задачи (1.1)–(1.4) применим метод конечных разностей. В замкнутом цилиндре  $\overline{Q}_T$  введем равномерную сетку [11]:

$$\overline{\omega}_{h\tau} = \overline{\omega}_h \times \overline{\omega}_\tau = \{(x_i, t_j), x \in \overline{\omega}_h, t \in \overline{\omega}_\tau\},$$

$$\overline{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 0, 1, \dots, N, Nh = l\},$$

$$\overline{\omega}_\tau = \{t_j = j\tau, j = 0, 1, \dots, m_0, m_0\tau = T\}.$$

На равномерной сетке  $\overline{\omega}_{h,\tau}$  дифференциальной задаче (1.1)–(1.4) поставим в соответствие разностную схему порядка аппроксимации  $O(h^2 + \tau^{m_\sigma})$ :

$$\overline{\varkappa}y_{t,i} = \Lambda(\overline{t})y_i^{(\sigma)} + \Lambda^*(t)y_i + \varphi_i, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \quad (3.1)$$

$$a_1y_{x,0}^{(\sigma)} + (\gamma_1y_{x,0})_t = \frac{0.5h}{m+1} \left( y_{t,0} + d_0y_0^{(\sigma)} \right) - \tilde{\mu}_1, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \quad (3.2)$$

$$-\left( a_Ny_{\overline{x},N}^{(\sigma)} + (\gamma y_{\overline{x}})_{t,N} \right) = \tilde{\varkappa}\overline{\beta}y_N^{(\sigma)} + 0.5h\tilde{\varkappa}y_{t,N} - \tilde{\mu}_2, \quad t \in \overline{\omega}_\tau, \quad (3.3)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \overline{\omega}_h, \quad (3.4)$$

где

$$\Lambda(\overline{t})y_i^{(\sigma)} = \frac{1}{x_i^m} \left( x_{i-0.5}^m a_i^j y_{\overline{x},i}^{(\sigma)} \right)_x - d_i^j y_i^{(\sigma)}, \quad \Lambda^*(t)y = \frac{1}{x_i^m} \left( x_{i-0.5}^m \gamma_i^j y_{\overline{x},i} \right)_{xt},$$

$$\overline{\varkappa}_i = 1 + \frac{m(m-1)h^2}{24x_i^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad m_\sigma = \begin{cases} 2, & \sigma = 0.5, \\ 1, & \sigma \neq 0.5, \end{cases}$$

$y^{(\sigma)} = \sigma\hat{y} + (1-\sigma)y$ ,  $\sigma$  – параметр, от которого зависит точность разностной схемы по  $\tau$ . В дальнейшем будем считать, что  $\sigma = 0.5$ ,  $y^{(0.5)} = 0.5(\hat{y} + y)$ ,  $Y = \hat{y} + y$ .

$$y = y_i^j = y(x_i, t_j), \quad \tilde{\varkappa} = 1 + \frac{0.5hm}{l}, \quad \hat{y} = y^{j+1}, \quad y = y^j, \quad y_{\overline{x}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h},$$

$$y_x = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}, \quad y_t = \frac{y^{j+1} - y^j}{\tau}, \quad \overline{t} = t_{j+0.5} = t_j + 0.5\tau,$$

$$a_i = k(x_{i-0.5}, \overline{t}_j), \quad \gamma_i^j = \eta(x_{i-0.5}, t_j), \quad \overline{\beta} = \beta + 0.5hd_N,$$

$$d_i^j = \begin{cases} \overline{\varkappa}q(x_i, \overline{t}_j), & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ q(x_i, \overline{t}_j), & i = 0, N, \end{cases} \quad \varphi_i^j = \begin{cases} \overline{\varkappa}f(x_i, \overline{t}_j), & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ f(x_i, \overline{t}_j), & i = 0, N, \end{cases}$$

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{0.5h}{m+1}\varphi_0^j, \quad \tilde{\mu}_2 = \tilde{\varkappa} \left( \mu^{j+0.5} + 0.5h\varphi_N^j \right), \quad x_{i-0.5} = x_i - 0.5h,$$

где  $h, \tau$  – шаги сетки.

Априорную оценку решения разностной схемы (3.1)–(3.4) получим методом энергетических неравенств. Для этого перепишем схему при  $\sigma = 0.5$ :

$$\bar{x}y_t = \frac{1}{2}\Lambda(\bar{t})Y + \Lambda^*(t)y + \varphi, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{2}a_1Y_{x,0} + (\gamma_1y_{x,0})_t = \frac{0.5h}{m+1} \left( y_{t,0} + \frac{1}{2}d_0Y_0 \right) - \tilde{\mu}_1, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad (3.6)$$

$$-\left( \frac{1}{2}a_NY_{\bar{x},N} + (\gamma y_{\bar{x}})_{t,N} \right) = \frac{\tilde{x}\bar{\beta}}{2}Y_N + 0.5h\tilde{x}y_{t,N} - \tilde{\mu}_2, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad (3.7)$$

$$y(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (3.8)$$

где

$$\Lambda(\bar{t})Y_i = \frac{1}{x_i^m} \left( x_{i-0.5}^m a_i Y_{\bar{x},i} \right)_x - dY_i, \quad \Lambda^*(t)y = \frac{1}{x_i^m} \left( x_{i-0.5}^m \gamma_i^j y_{\bar{x},i} \right)_{xt}.$$

Перепишем задачу (3.5)–(3.8) в операторной форме

$$\bar{x}y_t = \bar{\Lambda}(\bar{t})y + \bar{\Lambda}^* y + \bar{\Phi}, \quad (3.9)$$

$$y(x, 0) = 0, \quad (3.10)$$

где

$$\bar{\Lambda}(\bar{t})y = \begin{cases} \Lambda y = \frac{1}{2x_i^m} \left( x_{i-0.5}^m a_i (\hat{y} + y)_{\bar{x},i} \right)_x - \frac{d_i}{2} (\hat{y} + y)_i, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ \Lambda^- y = \frac{(m+1) \left( \frac{1}{2} a_1 (\hat{y} + y)_{x,0} - \frac{0.5h}{2(m+1)} d_0 (\hat{y} + y)_0 \right)}{0.5h}, & x = 0, \\ \Lambda^+ y = \frac{-\frac{1}{2} a_N (\hat{y} + y)_{\bar{x},N} - \frac{\tilde{x}\bar{\beta}}{2} (\hat{y} + y)_N}{0.5h\tilde{x}}, & x = l, \end{cases}$$

$$\bar{\Lambda}^* y = \begin{cases} \Lambda^* y = \frac{1}{x_i^m} \left( x_{i-0.5}^m \gamma_i y_{\bar{x},i} \right)_{xt}, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ \Lambda^* - y = \frac{(m+1) (\gamma_1 y_{x,0})_t}{0.5h}, & x = 0, \\ \Lambda^* + y = -\frac{(\gamma y_{\bar{x}})_{t,N}}{0.5h\tilde{x}}, & x = l, \end{cases} \quad \bar{\Psi} = \begin{cases} \varphi_i, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ \varphi^- = \frac{(m+1)\tilde{\mu}_1}{0.5h}, & x = 0, \\ \varphi^+ = \frac{\tilde{\mu}_2}{0.5h\tilde{x}}, & x = l, \end{cases}$$

$$\bar{x} = \begin{cases} \tilde{x}, & (x, t) \in \omega_{h\tau}, \\ 1, & x = 0, l. \end{cases}$$

Введем скалярное произведение и норму

$$(u, v] = \sum_{i=1}^N u_i v_i \bar{h}, \quad \bar{h} = \begin{cases} 0.5h, & i = N, \\ h, & i \neq N, \end{cases} \quad \|u\|_0^2 = \sum_{i=1}^N u_i^2 \bar{h} = (1, u^2].$$

Предположим, что

$$d_0 = q(0, t) \geq c_0 > 0. \quad (3.11)$$

Умножим разностное уравнение (3.9) скалярно на  $x^m Y = x^m (\hat{y} + y)$ :

$$(\bar{x}y_t, x^m Y] = (\bar{\Lambda}(\bar{t})y, x^m Y] + (\bar{\Lambda}^* y, x^m Y] + (\bar{\Phi}, x^m Y]. \quad (3.12)$$

Преобразуем суммы, входящие в тождество (3.12):

$$\begin{aligned} (\bar{\bar{z}}y_t, x^m Y) &= \left( \frac{\bar{\bar{z}}}{\tau} (\hat{y} - y), x^m (\hat{y} + y) \right) \\ &= \frac{(\bar{\bar{z}}x^m, \hat{y}^2) - (\bar{\bar{z}}x^m, y^2)}{\tau} = \left( \bar{\bar{z}}x^m, y^2 \right)_t \geq M_1 \left( \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2 \right)_t, \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$M_1 = \begin{cases} 1, & m = 0, \quad m \geq 1, \\ \frac{1}{2}, & m \in (0, 1), \quad h \leq h_0 = \sqrt{\frac{12x^2 - m}{m(1-m)}}, \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (\bar{\Lambda}(\bar{t})y, x^m Y) &= (\Lambda y, x^m Y) + 0.5h\Lambda^+ y_N x_N^m Y_N \\ &= \left( \frac{1}{2} (x_{i-0.5}^m a Y_{\bar{x}})_x, Y \right) - \left( \frac{d}{2} x^m, Y^2 \right) + 0.5h\Lambda^+ y_N x_N^m Y_N \\ &= -\frac{1}{2} \left( x_{i-0.5}^m a Y_{\bar{x}}, (\chi Y)_{\bar{x}} \right) + \frac{1}{2} x_{N-0.5}^m a_N \chi_N Y_{\bar{x},N} Y_N - \frac{1}{2} x_{0.5}^m a_1 \chi_0 Y_{x,0} Y_0 \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{x_N^m}{\bar{\alpha}} a_N \chi_N Y_{\bar{x},N} Y_N - \left( \frac{d}{2} x^m, Y^2 \right) - \frac{1}{2} x_N^m \bar{\beta} Y_N^2; \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\Lambda}^* y, x^m Y) &= (\Lambda^* y, x^m Y) + 0.5h\Lambda^{*+} y_N x_N^m Y_N = \left( (x_{i-0.5}^m \gamma y_{\bar{x}})_{xt}, Y \right) - \frac{x_N^m}{\bar{\alpha}} (\gamma y_x)_{t,N} Y_N \\ &= - \left( x_{i-0.5}^m (\gamma y_{\bar{x}})_t, Y_{\bar{x}} \right) + \left( x_{N-0.5}^m - \frac{x_N^m}{\bar{\alpha}} \right) (\gamma y_x)_{t,N} Y_N - x_{0.5}^m (\gamma_1 y_{x,0})_t Y_0, \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$(\bar{\Phi}, x^m Y) = (\varphi, x^m Y) + 0.5h\varphi^+ Y_N = (\varphi, x^m Y) + \tilde{\mu}_2 \frac{x_N^m}{\bar{\alpha}} Y_N. \quad (3.16)$$

Принимая во внимание преобразования (3.13)–(3.16), из (3.12) получаем

$$\begin{aligned} M_1 \left( \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2 \right)_t &\leq -\frac{1}{2} \left( x_{i-0.5}^m a Y_{\bar{x}}, (\chi Y)_{\bar{x}} \right) - \left( x_{i-0.5}^m (\gamma y_{\bar{x}})_t, Y_{\bar{x}} \right) \\ &- x_{0.5}^m Y_0 \left( \frac{1}{2} a_1 \chi_0 Y_{x,0} + (\gamma_1 y_{x,0})_t \right) + \left( x_{N-0.5}^m - \frac{x_N^m}{\bar{\alpha}} \right) \left( \frac{1}{2} a_N \chi_N Y_{\bar{x},N} Y_N + (\gamma y_{\bar{x}})_{t,N} Y_N \right) \\ &- \left( \frac{d}{2} x^m, Y^2 \right) - \frac{1}{2} x_N^m \bar{\beta} Y_N^2 - (\varphi, x^m Y) + \tilde{\mu}_2 \frac{x_N^m}{\bar{\alpha}} Y_N. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Учитывая (3.6), (3.7), из (3.17) находим

$$\begin{aligned} M_1 \left( \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2 \right)_t &\leq -\frac{1}{2} \left( x_{i-0.5}^m a Y_{\bar{x}}, (\chi Y)_{\bar{x}} \right) - \left( x_{i-0.5}^m (\gamma y_{\bar{x}})_t, Y_{\bar{x}} \right) \\ &- \left( \frac{d}{2} x^m, Y^2 \right) + (\varphi, x^m Y) - \frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m y_{t,0} Y_0 - 0.5h x_{N-0.5}^m \tilde{\alpha} y_{t,N} Y_N \\ &- \frac{1}{2} x_{N-0.5}^m \tilde{\alpha} \bar{\beta} Y_N^2 - \frac{0.5h}{2(m+1)} x_{0.5}^m d_0 Y_0^2 + x_{N-0.5}^m \tilde{\mu}_2 Y_N + \tilde{\mu}_1 x_{0.5}^m Y_0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Оценим суммы, входящие в (3.18):

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \left( x_{i-0.5}^m a Y_{\bar{x}}, (\chi Y)_{\bar{x}} \right) &= -\frac{1}{2} \left( x_{i-0.5}^m a \check{\chi}, Y_{\bar{x}}^2 \right) - \frac{1}{2} \left( x_{i-0.5}^m a \chi_{\bar{x}}, Y_{\bar{x}} Y \right) \\ &- \frac{1}{2(1+c_3\tau)} \left( x_{i-0.5}^m a \chi, Y_{\bar{x}}^2 \right) - \frac{1}{2} \left( x_{i-0.5}^m a \chi_{\bar{x}}, Y_{\bar{x}} Y \right) \leq -M_2 \|x^{\frac{m}{2}} Y_{\bar{x}}\|^2 + M_3 (\bar{x}^m Y, Y_{\bar{x}}), \end{aligned} \quad (3.19)$$

где  $\bar{x}^m = x_{i-0.5}^m$ ,

$$-\left(x_{i-0.5}^m(\gamma y_{\bar{x}})_t, Y_{\bar{x}}\right] = -\left(1, x_{i-0.5}^m(\gamma y_{\bar{x}}^2)_t\right] - \left(1, x_{i-0.5}^m \gamma_t y_{\bar{x}} Y_{\bar{x}}\right] + \left(\gamma_t, x_{i-0.5}^m y_{\bar{x}}^2\right], \quad (3.20)$$

$$-\frac{1}{2}\left(dx^m, Y^2\right) + x_{N-0.5}^m \tilde{\mu}_2 Y_N - \frac{1}{2} x_{N-0.5}^m \tilde{\alpha} \tilde{\beta} Y_N^2 \leq M_4(x^m, Y^2) + M_5 Y_N^2 + M_6 \tilde{\mu}_2^2, \quad (3.21)$$

$$(\varphi, x^m Y) \leq \frac{1}{2} \left( \|x^{\frac{m}{2}} Y\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 \right), \quad (3.22)$$

$$\begin{aligned} & -\frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m y_{t,0} Y_0 - 0.5h x_{N-0.5}^m \tilde{\alpha} y_{t,N} Y_N \\ & = -\frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m \frac{1}{\tau} (\hat{y}_0 - y_0)(\hat{y}_0 + y_0) - 0.5h x_{N-0.5}^m \tilde{\alpha} \frac{1}{\tau} (\hat{y}_N - y_N)(\hat{y}_N + y_N) \\ & = -\frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m (y_0^2)_t - 0.5h x_{N-0.5}^m \tilde{\alpha} (y_N^2)_t, \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_1 x_{0.5}^m Y_0 - \frac{0.5h}{2(m+1)} x_{0.5}^m d_0 Y_0^2 &= \tilde{\mu}_1 x_{0.5}^m \frac{\sqrt{\frac{0.5hd_0}{2(m+1)}}}{\sqrt{\frac{0.5hd_0}{2(m+1)}}} Y_0 - \frac{0.5h}{2(m+1)} x_{0.5}^m d_0 Y_0^2 \\ &\leq \frac{2(m+1)x_{0.5}^m \tilde{\mu}_1^2}{0.5hd_0} \leq M_7 \tilde{\mu}_1^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Учитывая преобразования (3.19)–(3.24), из (3.18) получаем

$$\begin{aligned} & M_1 \left( \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2 \right)_t + (1, \bar{x}^m (\gamma y_{\bar{x}}^2)_t] + M_2 \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} Y_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m (y_0^2)_t \\ & + 0.5h x_{N-0.5}^m \tilde{\alpha} (y_N^2)_t \leq M_8 (\bar{x}^m Y, Y_{\bar{x}}] - (1, \bar{x}^m \gamma_t y_{\bar{x}} Y_{\bar{x}}] + (\gamma_t, \bar{x}^m y_{\bar{x}}^2] \\ & + M_9 \|x^{\frac{m}{2}} Y\|_0^2 + \frac{1}{2} \|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + M_{10} (\tilde{\mu}_1^2 + \tilde{\mu}_2^2 + Y_N^2). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Справедлива следующая

**Лемма 2** [13]. Для любой функции  $y(x)$ , заданной на сетке  $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih, i = 1, 2, \dots, N\}$ , справедливо неравенство

$$\max_{x_0 \leq x \leq l} y^2(x) \leq \frac{\varepsilon}{x_0^m} \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}\|_0^2 + c(\varepsilon) \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2,$$

где  $\varepsilon$  — произвольная положительная постоянная,  $c(\varepsilon) = \frac{1}{x_0^m} \left( \frac{1}{l-x_0} + \frac{1}{\varepsilon} \right)$ ,  $0 < \delta \leq x_0$ .

С учетом леммы 2 и на основании неравенства Коши с  $\varepsilon$  из (3.25) находим

$$\begin{aligned} & M_1 \left( \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2 \right)_t + (1, \bar{x}^m \gamma y_{\bar{x}}^2]_t + M_2 \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} Y_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m (y_0^2)_t + 0.5h x_{N-0.5}^m \tilde{\alpha} (y_N^2)_t \\ & \leq 4\varepsilon \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} Y_{\bar{x}}\|_0^2 + M_{11}(\varepsilon) \|x^{\frac{m}{2}} Y\|_0^2 + M_{12}(\varepsilon) \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}\|_0^2 + M_{13} \left( \|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \tilde{\mu}_1^2 + \tilde{\mu}_2^2 \right). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части (3.26):

$$\|x^{\frac{m}{2}} Y\|_0^2 = \|x^{\frac{m}{2}} (\hat{y} + y)\|_0^2 \leq 2 \left( \|x^{\frac{m}{2}} \hat{y}\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2 \right). \quad (3.27)$$

Перепишем (3.26) при  $\varepsilon = \frac{M_2}{8}$  с учетом (3.27). Тогда получим

$$\begin{aligned} M_1 \left( \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2 \right)_t + (1, \bar{x}^m \gamma y_{\bar{x}}^2)_t + \frac{M_2}{2} \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} Y_{\bar{x}}\|_0^2 + \frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m (y_0^2)_t + 0.5h x_{N-0.5}^m \tilde{\varkappa} (y_N^2)_t \\ \leq M_{14} \|x^{\frac{m}{2}} \hat{y}\|_0^2 + M_{15} \left( \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2 \right) + M_{16} \left( \|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \tilde{\mu}_1^2 + \tilde{\mu}_2^2 \right). \end{aligned} \quad (3.28)$$

Умножим обе части (3.28) на  $\tau$  и просуммируем по  $j'$  от 0 до  $j$ :

$$\begin{aligned} M_1 \|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\|_0^2 + c_0 \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \frac{M_2}{2} \sum_{j'=0}^j \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau + \frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m (y_0^{j+1})^2 \\ + 0.5h x_{N-0.5}^m \tilde{\varkappa} (y_N^{j+1})^2 \leq M_{17} \sum_{j'=0}^j \|x^{\frac{m}{2}} \hat{y}^{j'}\|_0^2 \tau + M_{18} \sum_{j'=0}^j \left( \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} y^{j'}\|_0^2 \right) \tau \\ + M_{19} \sum_{j'=0}^j \left( \|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \tilde{\mu}_1^2 + \tilde{\mu}_2^2 \right) \tau + M_{20} \left( \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^0\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} y^0\|_0^2 \right) \\ + \frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m (y_0^0)^2 + 0.5h x_{N-0.5}^m \tilde{\varkappa} (y_N^0)^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Оценим слагаемые, входящие в (3.29)

$$\begin{aligned} M_{17} \sum_{j'=0}^j \|x^{\frac{m}{2}} \hat{y}\|_0^2 \tau + M_{18} \sum_{j'=0}^j \left( \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} y\|_0^2 \right) \tau \leq M_{21} \|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\|_0^2 \\ + M_{22} \sum_{j'=1}^j \left( \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} y^{j'}\|_0^2 \right) \tau + M_{23} \left( \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^0\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} y^0\|_0^2 \right) \tau, \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\frac{0.5h}{m+1} x_{0.5}^m (y_0^0)^2 + 0.5h x_{N-0.5}^m \tilde{\varkappa} (y_N^0)^2 \leq M_{24} \left( \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 + \|y^0\|_0^2 \right), \quad (3.31)$$

$$\|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^0\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} y^0\|_0^2 \leq M_{25} \left( \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 + \|y^0\|_0^2 \right). \quad (3.32)$$

С учетом (3.30)–(3.32) из (3.29) находим

$$\begin{aligned} \|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\|_0^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau \\ \leq M_{21} \|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\|_0^2 \tau + M_{26} \sum_{j'=1}^j \left( \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} y^{j'}\|_0^2 \right) \tau \\ + M_{27} \left( \sum_{j'=0}^j \left( \|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \tilde{\mu}_1^2 + \tilde{\mu}_2^2 \right) \tau + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 + \|y^0\|_0^2 \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Выбирая  $\tau$  таким образом, что для всех  $\tau \leq \tau_0$ ,  $\tau_0 = \frac{1}{2M_{21}}$ , из (3.33) получаем

$$\begin{aligned} & \|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\|_0^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau \\ & \leq M_{28} \sum_{j'=1}^j \left( \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 + \|x^{\frac{m}{2}} y^{j'}\|_0^2 \right) \tau \\ & + M_{29} \left( \sum_{j'=0}^j \left( \|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \tilde{\mu}_1^2 + \tilde{\mu}_2^2 \right) \tau + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 + \|y^0\|_0^2 \right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

На основании леммы 4 из [15, с. 171] из (3.38) получаем

$$\|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\|_0^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 \leq M_{30} \left( \sum_{j'=0}^j \left( \|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \tilde{\mu}_1^2 + \tilde{\mu}_2^2 \right) \tau + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 + \|y^0\|_0^2 \right). \quad (3.35)$$

Учитывая (3.35), из (3.34) получаем априорную оценку

$$\begin{aligned} & \|x^{\frac{m}{2}} y^{j+1}\|_0^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} y_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} Y_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau \\ & \leq M \left( \sum_{j'=0}^j \left( \|x^{\frac{m}{2}} \varphi\|_0^2 + \tilde{\mu}_1^2 + \tilde{\mu}_2^2 \right) \tau + \|y_{\bar{x}}^0\|_0^2 + \|y^0\|_0^2 \right), \end{aligned} \quad (3.36)$$

где  $M$  — положительная постоянная, не зависящая от  $h$  и  $\tau$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия (1.5) и (3.11). Тогда существуют такие  $h_0$ ,  $\tau_0$ , что если  $\tau \leq \tau_0$ ,  $h \leq h_0$ , то при  $\sigma = 0.5$  для решения разностной задачи (3.1)–(3.4) справедлива априорная оценка (3.36).

Из полученной априорной оценки следует единственность, а также устойчивость решения разностной задачи (3.1)–(3.4) по начальным данным и правой части.

Пусть  $u(x, t)$  — решение задачи (1.1)–(1.4),  $y(x_i, t_j) = y_i^j$  — решение разностной задачи (3.1)–(3.4). Обозначим через  $z_i^j = y_i^j - u_i^j$  погрешность, где  $u_i^j = u(x_i, t_j)$ . Тогда, подставляя  $y = z + u$  в (3.1)–(3.4), получим задачу для  $z$ :

$$\bar{\alpha} z_{t,i} = \Lambda(\bar{t}) z_i^{(\sigma)} + \Lambda^*(t) z + \Psi_i, \quad (x, t) \in \omega_{h\tau}, \quad (3.37)$$

$$a_1 \chi_0 z_{x,0}^{(\sigma)} + (\gamma_1 z_{x,0})_t = \frac{0.5h}{m+1} \left( z_{t,0} + d_0 z_0^{(\sigma)} \right) - \nu_1, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad (3.38)$$

$$-\left( a_N \chi_N z_{\bar{x},N}^{(\sigma)} + (\gamma z_{\bar{x}})_{t,N} \right) = \tilde{\alpha} \bar{\beta} z_N^{(\sigma)} + 0.5h \tilde{\alpha} z_{t,N} - \nu_2, \quad t \in \bar{\omega}_\tau, \quad (3.39)$$

$$z(x, 0) = 0, \quad x \in \bar{\omega}_h, \quad (3.40)$$

где  $\Psi = O\left(\frac{h^2 + \tau^{m\sigma}}{x}\right)$ ,  $\nu_1 = O(h^2 + \tau^{m\sigma})$ ,  $\nu_2 = O(h^2 + \tau^{m\sigma})$  — погрешности аппроксимации дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) разностной схемой (3.1)–(3.4) в классе решений  $u = u(x, t)$  задачи (1)–(4).

Применяя априорную оценку (3.36) к решению задачи (3.37)–(3.40), получаем

$$\|x^{\frac{m}{2}} z^{j+1}\|_0^2 + \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} z_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|\bar{x}^{\frac{m}{2}} (\hat{z} + z)_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau \leq M \sum_{j'=0}^j \left( \|x^{\frac{m}{2}} \Psi\|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 \right) \tau, \quad (3.41)$$

где  $M$  — положительная постоянная, не зависящая от  $h$  и  $\tau$ .

Из (3.41) получим априорную оценку

$$\|xz^{j+1}\|_0^2 + \|\bar{x}z_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|\bar{x}(\hat{z} + z)_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau \leq \bar{M} \sum_{j'=0}^j \left( \|x\Psi\|_0^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2 \right) \tau. \quad (3.42)$$

Из априорной оценки (3.42) следует сходимость решения разностной задачи (3.1)–(3.4) к решению дифференциальной задачи (1.1)–(1.4) по норме

$$\|xz^{j+1}\|_1^2 = \|xz^{j+1}\|_0^2 + \|\bar{x}z_{\bar{x}}^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^j \|\bar{x}(\hat{z} + z)_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \tau$$

на каждом слое так, что если существуют такие  $h_0, \tau_0$ , то при  $\sigma = 0.5, \tau \leq \tau_0, h \leq h_0$  справедлива оценка  $\|x(y^{j+1} - u^{j+1})\|_1^2 \leq \bar{M}(h^2 + \tau^2)$ , где  $\bar{M}$  – положительная постоянная, не зависящая от  $h$  и  $\tau$ .

**Численный эксперимент.** Рассмотрим следующую тестовую задачу:

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{1}{x^m} (x^m k(x, t) u_x)_x + \frac{1}{x^m} (x^m \eta(x, t) u_x)_{xt} + r(x, t) u_x - q(x, t) u + f(x, t), \\ &0 < x < l, \quad 0 < t \leq T, \\ \Pi(0, t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ -\Pi(l, t) &= \beta(t) u(l, t) - \mu(t), \quad 0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ k(x, t) &= e^{x+t}, \quad \eta(x, t) = e^{x-t}, \quad q(x, t) = e^{xt}, \\ f(x, t) &= -4e^{x^4-4t} - 4(3+m)x^2(1-e^{-t}) + e^{xt+x^4-4t}, \\ \beta &= e^t \cos(t), \quad \mu(t) = e^t \cos(t)(\cos(t) - 1), \quad u_0(x) = e^{x^4}, \\ \Pi(x, t) &= k(x, t) u_x + (\eta(x, t) u_x)_t. \end{aligned}$$

Точное решение задачи  $u(x, t) = \cos(x) + \cos(t)$ .

Ниже в таблице 1 сравниваются значения численного и точного решения задачи при  $m = 2$ . Таблица 2 показывает, что когда  $h = \tau$ , при уменьшении размера сетки максимальное значение погрешности при  $\sigma = 0.5, m = 2$  уменьшается в соответствии с порядком аппроксимации разностной схемы  $O(h^2 + \tau^2)$ . Порядок сходимости равен  $\log_{\frac{h_1}{h_2}} \frac{e_1}{e_2}$ .

Таблица 1

Разность между численным и точным решениями задачи при  $t = 1, h = \tau = 0.1$

$(x_i)$	Численное решение	Точное решение	Погрешность
0.0000	-0.0850179	0.0000000	0.0850179
0.1000	-0.1000645	-0.0489435	0.0511210
0.2000	-0.2339981	-0.1909830	0.0430151
0.3000	-0.4510539	-0.4122147	0.0388391
0.4000	-0.7283882	-0.6909830	0.0374052
0.5000	-1.0384600	-1.0000000	0.0384600
0.6000	-1.3509007	-1.3090170	0.0418838
0.7000	-1.6353523	-1.5877853	0.0475670
0.8000	-1.8644034	-1.8090170	0.0553864
0.9000	-2.0162655	-1.9510565	0.0652090
1.0000	-2.0769112	-2.0000000	0.0769112

Таблица 2

Изменение погрешности при уменьшении размера сетки  
на  $t = 1$ , когда  $h = \tau$

$h$	Максимальная погрешность	Порядок сходимости
1/500	0.00010300	
1/1000	0.00002576	1.9994264
1/2000	0.00000644	1.9997216

### Литература

1. Дзекер Е. С. Уравнения движения подземных вод со свободной поверхностью в многослойных средах // Докл. АН СССР.—1975.—Т. 220, № 3.—С. 540–543.
2. Рубинштейн Л. И. К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Изв. АН СССР. Сер. геогр.—1948.—Т. 12, № 1.—С. 27–45.
3. Ting T. W. A cooling process according to two-temperature theory of heat conduction // J. Math. Anal. Appl.—1974.—Vol. 45, № 9.—P. 23–31.
4. Hallaire M. L'eau et la production vegetable // Institut National de la Recherche Agronomique.—1964.—№ 9.
5. Чудновский А. Ф. Теплофизика почв.—М.: Наука, 1976.—352 с.
6. Баренблат Г. И., Желтов Ю. П., Кочина И. Н. Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикладная математика и механика.—1960.—Т. 25, № 5.—С. 852–864.
7. Бештоков М. Х. Метод функции Римана и разностный метод решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа // Изв. высш. уч. зав. Сев.-Кавк. рег.—№ 5.—С. 6–9.
8. Бештоков М. Х. Разностный метод решения одной нелокальной краевой задачи для псевдопараболического уравнения третьего порядка // Диф. уравнения.—2013.—Т. 49, № 9.—С. 1170–1177.
9. Бештоков М. Х. Об одной краевой задаче для псевдопараболического уравнения третьего порядка с нелокальным условием. // Изв. высш. уч. зав. Сев.-Кавк. рег.—2013.—№ 1.—С. 5–10.
10. Бештоков М. Х. Численный метод решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2014.—2014.—Т. 54, № 9.—С. 1497–1514.
11. Самарский А. А. Теория разностных схем.—М.: Наука, 1983.—616 с.
12. Олисаев Э. Г. Разностные методы решения нелокальных краевых задач для уравнения параболического типа с вырождением: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Владикавказ, 2003.—117 с.
13. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики.—М.: Наука, 1973.—407 с.
14. Андреев В. Б. О сходимости разностных схем, аппроксимирующих вторую и третью краевые задачи для эллиптических уравнений // Журн. вычисл. математики и матем. физ.—1968.—Т. 8, № 6.—С. 1218–1231.
15. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем.—М.: Наука, 1973.—416 с.

Статья поступила 25 ноября 2015 г.

Бештоков Мурат Хамидбиевич

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,

доцент кафедры прикладной математики и информатики

РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173

E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2968-9211>

Канчуков Владимир Зедунович

Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,

доцент кафедры прикладной математики и информатики

РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173

E-mail: vlad-kan@yandex.ru



ЭРЖИБОВА ФАРИДА АЛЕКСАНДРОВНА  
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,  
преподаватель каф. математических и общих естественнонаучных дисциплин  
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Толстого, 175  
E-mail: ershibowa@yandex.ru

## A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A DEGENERATE MOISTURE TRANSFER EQUATION WITH A CONDITION OF THE THIRD KIND

Beshtokov M. Kh., Kanchukoyev V. Z., Erzhibova F. A.

In this work, we study the pseudoparabolic equation in the three dimensional space. The equation of this form implies the presence of cylindrical or spherical symmetry that enables one to move from a three-dimensional problem to one-dimensional problem, but with degeneration. In this regard, we study the solvability and stability of solutions to boundary value problems for degenerate pseudoparabolic equation of the third order of general form with variable coefficients and third kind condition, as well as difference schemes approximating this problem on uniform grids. The main result consists in proving a priori estimates for a solution to both the differential and difference problems by means of the method of energy inequalities. The obtained inequalities imply stability of the solution relative to initial data and right side. Because of the linearity of the considered problems these inequalities allow us to state the convergence of the approximate solution to the exact solution of the considered differential problem under the assumption of the existence of the solutions in the class of sufficiently smooth functions. On the test examples the numerical experiments are performed confirming the theoretical results obtained in the work.

**Key words:** equation with degeneration, boundary value problem, condition of the third kind, a priori estimate, difference scheme, stability and convergence of a difference scheme, moisture transfer equation, pseudo-parabolic equation.

## References

1. Dzekts'er E. S. Equations of motion of free-surface underground water in layered media. *Doklady Akademii Nauk SSSR [Doklady Mathematics]*, 1975, vol. 220, no. 3, pp. 540–543 (in Russian).
2. Rubinshtein L. I. On heat propagation in heterogeneous media. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Geogr.*, 1948, vol. 12, no. 1, pp. 27–45 (in Russian).
3. Ting T. W. A cooling process according to two-temperature theory of heat conduction. *J. Math. Anal. Appl.*, 1974, vol. 45, no. 1, pp. 23–31.
4. Hallaire M. L'eau et la production vegetable. *Inst. National de la Recherche Agronomique*, 1964, no. 9.
5. Chudnovskii A. F. *Teplofizika pochv [Thermal Physics of Soils]*. Moscow, Nauka, 1976, 352 p. (in Russian).
6. Barenblat G. I., Zheltov Yu. P., and Kochina I. N. Basic concept in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks. *Prikladnaya matematika i mekhanika [J. Appl. Math. Mech.]*, 1960, vol. 25, no. 5, pp. 852–864 (in Russian).
7. Beshtokov M. Kh. Riemann function method and finite difference method for solving a nonlocal boundary value problem for a third-order hyperbolic equation. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Severo-Kavkaz. Reg.*, 2007, no. 5, pp. 6–9 (in Russian).
8. Beshtokov M. Kh. Finite-difference method for a nonlocal boundary value problem for a third-order pseudoparabolic equation. *Differ. Equations*, 2013, vol. 49, no. 9, pp. 1134–141. DOI: 10.1134/S0012266113090085.
9. Beshtokov M. Kh. On a boundary value problem for a third-order pseudoparabolic equation with a nonlocal condition. *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Severo-Kavkaz. Reg.*, 2013, no. 1, pp. 5–10 (in Russian).
10. Beshtokov M. Kh. A numerical method for solving one nonlocal boundary value problem for a third-order hyperbolic equation. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2014, vol. 54, no. 9, pp. 1441–1458. DOI: 10.7868/S0044466914090051.
11. Samarskii A. A. *Teoriya raznostnykh shem [Theory of Difference Schemes]*. Moscow, Nauka, 1983, 616 p. (in Russian).

12. Olisaev E. G. *Raznostnye Metody Reshenija Nelokal'Nyh Kraevyh Zadach Dlja Uravnenija Parabolicheskogo Tipa s Vyrozhdeniem*. Candidate's Dis. In Math. And Physics. Moscow, Russ. State Library, 2003 (In Russian).
13. Ladyzhenskaya O. A. *Kraevie zadachi matematicheskoi fiziki* [Boundary Value Problems of Mathematical Physics]. Moscow, Nauka, 1973, 408 p. (in Russian).
14. Andreev V. B. On the convergence of difference schemes approximating the second and third boundary value problems for elliptic equations. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1968, vol. 8, no. 6, pp. 44–62. DOI: 10.1016/0041-5553(68)90092-X.
15. Samarskii A. A., Gulin A. V. *Ustoichivost raznostnih shem* [Stability of Finite Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1973, 416 p. (in Russian).

*Received November 25, 2015*

BESHTOKOV MURAT KHAMIDBIEVICH  
Kabardino-Balkar State University after Kh. M. Berbekov,  
*Associate Professor*  
173 Chernyshevskiy st., Nalchik, 360004, Russia  
E-mail: beshtokov-murat@yandex.ru  
ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2968-9211>

KANCHUKOEV VLADIMIR ZEDUNOVICH  
Kabardino-Balkar State University after Kh. M. Berbekov,  
*Associate Professor*  
173 Chernyshevskiy st., Nalchik, 360004, Russia  
E-mail: vlad-kan@yandex.ru

ERZHIBOVA FARIDA ALEKSANDROVNA  
Kabardino-Balkar State University after Kh. M. Berbekov,  
*the Teacher of Department of Mathematics*  
175 Tolstoy st., Nalchik, 360004, Russia  
E-mail: ershibowa@yandex.ru

УДК 517.982.252

## CALCULUS OF TANGENTS AND BEYOND<sup>1</sup>

A. G. Kusraev, S. S. Kutateladze

*On the Sixtieth Anniversary  
of the Sobolev Institute*

Optimization is the choice of what is most preferable. Geometry and local analysis of nonsmooth objects are needed for variational analysis which embraces optimization. These involved admissible directions and tangents as the limiting positions of the former. The calculus of tangents is one of the main techniques of optimization. Calculus reduces forecast to numbers, which is scalarization in modern parlance. Spontaneous solutions are often labile and rarely optimal. Thus, optimization as well as calculus of tangents deals with inequality, scalarization and stability. The purpose of this article is to give an overview of the modern approach to this range of questions based on non-standard models of set theory. A model of a mathematical theory is usually called nonstandard if the membership within the model has interpretation different from that of set theory. In the recent decades much research is done into the nonstandard methods located at the junctions of analysis and logic. This area requires the study of some new opportunities of modeling that open broad vistas for consideration and solution of various theoretical and applied problems.

**Key words:** Hadamard cone, Bouligand cone, Clarke cone, general position, operator inequality, Boolean valued analysis, nonstandard analysis.

**Agenda.** Optimization is the choice of what is most preferable. Geometry and local analysis of nonsmooth objects are needed for variational analysis which embraces optimization. These involved admissible directions and tangents as the limiting positions of the former. The calculus of tangents is one of the main techniques of optimization (cp. [1, 2]).

Calculus reduces forecast to numbers, which is scalarization in modern parlance. Spontaneous solutions are often labile and rarely optimal. Thus, optimization as well as calculus of tangents deals with inequality, scalarization and stability. Some aspects of the latter are revealed by the tools of nonstandard models to be touched slightly in this talk (cp. [3–6]).

**The best is divine.** Leibniz wrote to Samuel Clarke (see [7, p. 54]; cp. [8]): “God can produce everything that is possible or whatever does not imply a contradiction, but he will only produce what is the best among things possible.”

**Enter the reals.** Choosing the best, we use preferences. To optimize, we use infima and suprema for bounded sets which is practically the *least upper bound property*. So optimization needs ordered sets and primarily boundedly complete lattices.

To operate with preferences, we use group structure. To aggregate and scale, we use linear structure.

All these are happily provided by the *reals*  $\mathbb{R}$ , a one-dimensional Dedekind complete vector lattice. A Dedekind complete vector lattice is a *Kantorovich space*.

---

© 2017 Kusraev A. G., Kutateladze S. S.

<sup>1</sup> This article bases on a talk at the International Conference “Mathematics in the Modern World,” August 14–19, 2017, Novosibirsk.

Since each number is a measure of quantity, the idea of reducing to numbers is of a universal importance to mathematics. Model theory provides justification of the *Kantorovich heuristic principle* that the members of his spaces are numbers as well (cp. [9] and [10]).

**Enter inequality and convexity.** Life is inconceivable without numerous conflicting ends and interests to be harmonized. Thus the instances appear of multiple criteria decision making. It is impossible as a rule to distinguish some particular scalar target and ignore the rest of them. This leads to vector optimization problems, involving order compatible with linearity.

Linear inequality implies linearity and order. When combined, the two produce an ordered vector space. Each linear inequality in the simplest environment of the sort is some half-space. Simultaneity implies many instances and so leads to the intersections of half-spaces. These yield polyhedra as well as arbitrary convex sets, identifying the theory of linear inequalities with convexity.

Convexity, stemming from harpedonapters, reigns in optimization, feeding generation, separation, calculus, and approximation. Generation appears as duality; separation, as optimality; calculus, as representation; and approximation, as stability (cp. [11–13]).

**Legendre in disguise.** Assume that  $X$  is a vector space,  $E$  is an ordered vector space,  $E^\bullet$  is  $E$  with an adjoined top,  $f : X \rightarrow E^\bullet$  is some operator, and  $C := \text{dom}(f) \subset X$  is a convex set. A *vector program*  $(C, f)$  is written as follows:

$$x \in C, \quad f(x) \rightarrow \inf.$$

The standard sociological trick includes  $(C, f)$  into a parametric family yielding the *Legendre transform* or *Young–Fenchel transform* of  $f$ :

$$f^*(l) := \sup_{x \in X} (l(x) - f(x)),$$

with  $l \in X^\#$  a linear functional over  $X$ . The epigraph of  $f^*$  is a convex subset of  $X^\#$  and so  $f^*$  is convex. Observe that  $-f^*(0)$  is the value of  $(C, f)$ .

**Order omnipresent.** A convex function is locally a positively homogeneous convex function, a *sublinear functional*. Recall that  $p : X \rightarrow \mathbb{R}$  is sublinear whenever

$$\text{epi } p := \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} \mid p(x) \leq t\}$$

is a cone. Recall that a numeric function is uniquely determined from its epigraph.

Given  $C \subset X$ , put

$$H(C) := \{(x, t) \in X \times \mathbb{R}^+ \mid x \in tC\},$$

the *Hörmander transform* of  $C$ . Now,  $C$  is convex if and only if  $H(C)$  is a cone. A space with a cone is a *(pre)ordered vector space*.

*The order, the symmetry, the harmony enchant us ... (Leibniz).*

Thus, convexity and order are tightly intertwined.

**Nonoblate cones.** Consider cones  $K_1$  and  $K_2$  in a topological vector space  $X$  and put  $\varkappa := (K_1, K_2)$ . Given a pair  $\varkappa$  define the correspondence  $\Phi_\varkappa$  from  $X^2$  into  $X$  by the formula

$$\Phi_\varkappa := \{(k_1, k_2, x) \in X^3 : x = k_1 - k_2, k_i \in K_i\}.$$

Clearly,  $\Phi_\varkappa$  is a cone or, in other words, a conic correspondence.

The pair  $\varkappa$  is *nonoblate* whenever  $\Phi_\varkappa$  is open at the zero. Since  $\Phi_\varkappa(V) = V \cap K_1 - V \cap K_2$  for every  $V \subset X$ , the nonoblateness of  $\varkappa$  means that

$$\varkappa V := (V \cap K_1 - V \cap K_2) \cap (V \cap K_2 - V \cap K_1)$$

is a zero neighborhood for every zero neighborhood  $V \subset X$ .

**Open correspondences.** Since  $\varkappa V \subset V - V$ , the nonoblateness of  $\varkappa$  is equivalent to the fact that the system of sets  $\{\varkappa V\}$  serves as a filterbase of zero neighborhoods while  $V$  ranges over some base of the same filter.

Let  $\Delta_n : x \mapsto (x, \dots, x)$  be the embedding of  $X$  into the diagonal  $\Delta_n(X)$  of  $X^n$ . A pair of cones  $\varkappa := (K_1, K_2)$  is nonoblate if and only if  $\lambda := (K_1 \times K_2, \Delta_2(X))$  is nonoblate in  $X^2$ .

Cones  $K_1$  and  $K_2$  constitute a nonoblate pair if and only if the conic correspondence  $\Phi \subset X \times X^2$  defined as

$$\Phi := \{(h, x_1, x_2) \in X \times X^2 : x_i + h \in K_i \ (i := 1, 2)\}$$

is open at the zero.

**General position of cones.** Cones  $K_1$  and  $K_2$  in a topological vector space  $X$  are *in general position* iff

- (1) the algebraic span of  $K_1$  and  $K_2$  is some subspace  $X_0 \subset X$ ; i. e.,  $X_0 = K_1 - K_2 = K_2 - K_1$ ;
- (2) the subspace  $X_0$  is complemented; i.e., there exists a continuous projection  $P : X \rightarrow X$  such that  $P(X) = X_0$ ;
- (3)  $K_1$  and  $K_2$  constitute a nonoblate pair in  $X_0$ .

**General position of operators.** Let  $\sigma_n$  stand for the rearrangement of coordinates

$$\sigma_n : ((x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)) \mapsto ((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))$$

which establishes an isomorphism between  $(X \times Y)^n$  and  $X^n \times Y^n$ .

Sublinear operators  $P_1, \dots, P_n : X \rightarrow E \cup \{+\infty\}$  are *in general position* if so are the cones  $\Delta_n(X) \times E^n$  and  $\sigma_n(\text{epi}(P_1) \times \dots \times \text{epi}(P_n))$ .

Given a cone  $K \subset X$ , put

$$\pi_E(K) := \{T \in \mathcal{L}(X, E) : Tk \leq 0 \ (k \in K)\}.$$

Clearly,  $\pi_E(K)$  is a cone in  $\mathcal{L}(X, E)$ .

**Theorem.** Let  $K_1, \dots, K_n$  be cones in a topological vector space  $X$  and let  $E$  be a topological Kantorovich space. If  $K_1, \dots, K_n$  are in general position then

$$\pi_E(K_1 \cap \dots \cap K_n) = \pi_E(K_1) + \dots + \pi_E(K_n).$$

**Environment for inequality.** Assume that  $X$  is a real vector space,  $Y$  is a *Kantorovich space*. Let  $\mathbb{B} := \mathbb{B}(Y)$  be the *base* of  $Y$ , i. e., the complete Boolean algebras of positive projections in  $Y$ ; and let  $m(Y)$  be the universal completion of  $Y$ . Denote by  $L(X, Y)$  the space of linear operators from  $X$  to  $Y$ . In case  $X$  is furnished with some  $Y$ -seminorm on  $X$ , by  $L^{(m)}(X, Y)$  we mean the *space of dominated operators* from  $X$  to  $Y$ . As usual,  $\{T \leq 0\} := \{x \in X \mid Tx \leq 0\}$ ;  $\ker(T) = T^{-1}(0)$  for  $T : X \rightarrow Y$ . Also,  $P \in \text{Sub}(X, Y)$  means that  $P$  is *sublinear*, while  $P \in \text{PSub}(X, Y)$  means that  $P$  is *polyhedral*, i. e., finitely generated. The superscript  $^{(m)}$  suggests domination.

**Kantorovich's theorem.** Find  $\mathfrak{X}$  satisfying

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{A} & W \\ & \searrow B & \vdots \mathfrak{X} \\ & & Y \end{array}$$

- (1)  $(\exists \mathfrak{X}) \mathfrak{X}A = B \leftrightarrow \ker(A) \subset \ker(B)$ .  
 (2) If  $W$  is ordered by  $W_+$  and  $A(X) - W_+ = W_+ - A(X) = W$ , then (cp. [2, p. 51])

$$(\exists \mathfrak{X} \geq 0) \mathfrak{X}A = B \leftrightarrow \{A \leq 0\} \subset \{B \leq 0\}.$$

**The Farkas alternative.** Let  $X$  be a  $Y$ -seminormed real vector space, with  $Y$  a Kantorovich space. Assume that  $A_1, \dots, A_N$  and  $B$  belong to  $L^{(m)}(X, Y)$ .

Then one and only one of the following holds:

- (1) There are  $x \in X$  and  $b, b' \in \mathbb{B}$  such that  $b' \leq b$  and

$$b'Bx > 0, bA_1x \leq 0, \dots, bA_Nx \leq 0.$$

- (2) There are positive orthomorphisms  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \text{Orth}(m(Y))_+$  such that

$$B = \sum_{k=1}^N \alpha_k A_k.$$

### Inhomogeneous inequalities.

**Theorem.** Let  $X$  be a  $Y$ -seminormed real vector space, with  $Y$  a Kantorovich space. Assume given some dominated operators  $A_1, \dots, A_N$ ,  $B \in L^{(m)}(X, Y)$  and elements  $u_1, \dots, u_N, v \in Y$ . The following are equivalent:

- (1) For all  $b \in \mathbb{B}$  the inhomogeneous operator inequality  $bBx \leq bv$  is a consequence of the consistent simultaneous inhomogeneous operator inequalities  $bA_1x \leq bu_1, \dots, bA_Nx \leq bu_N$ , i. e.,

$$\{bB \leq bv\} \supset \{bA_1 \leq bu_1\} \cap \dots \cap \{bA_N \leq bu_N\}.$$

- (2) There are positive orthomorphisms  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \text{Orth}(m(Y))$  satisfying

$$B = \sum_{k=1}^N \alpha_k A_k; \quad v \geq \sum_{k=1}^N \alpha_k u_k.$$

**Boolean modeling.** The above infinite-dimensional results appear as interpretations of one-dimensional predecessors on using model theory.

Cohen's final solution of the problem of the cardinality of the continuum within ZFC gave rise to the Boolean valued models by Scott, Solovay, and Vopěnka (cp. [4]).

Takeuti coined the term "Boolean valued analysis" for applications of the models to analysis.

**Scott's comments.** Scott forecasted in 1969 (cp. [14]): "We must ask whether there is any interest in these nonstandard models aside from the independence proof; that is, do they have any mathematical interest? The answer must be yes, but we cannot yet give a really good argument."

In 2009 Scott wrote<sup>2</sup>: "At the time, I was disappointed that no one took up my suggestion. And then I was very surprised much later to see the work of Takeuti and his associates. I think the point is that people have to be trained in Functional Analysis in order to understand these models. I think this is also obvious from your book and its references. Alas, I had no stu-

<sup>2</sup>Letter of April 29, 2009 to S. S. Kutateladze.

dents or collaborators with this kind of background, and so I was not able to generate any progress.”

**Art of invention.** Leibniz wrote about his version of calculus that “the difference from Archimedes style is only in expressions which in our method are more straightforward and more applicable to the art of invention.”

Nonstandard analysis has the two main advantages: it “kills quantifiers” and it produces the new notions that are impossible within a single model of set theory.

Let us turn to the nonstandard presentations of Kuratowski–Painlevé limits of use in tangent calculus, and explore the variations of tangents.

Recall that the central concept of Leibniz was that of a *monad* (cp. [15]). In nonstandard analysis the monad  $\mu(\mathcal{F})$  of a standard filter  $\mathcal{F}$  is the intersection of all standard elements of  $\mathcal{F}$ .

**Monadic limits.** Let  $F \subset X \times Y$  be an internal correspondence from a standard set  $X$  to a standard set  $Y$ . Assume given a standard filter  $\mathcal{N}$  on  $X$  and a topology  $\tau$  on  $Y$ . Put

$$\begin{aligned}\forall\forall(F) &:= {}^*\{y' : (\forall x \in \mu(\mathcal{N}) \cap \text{dom}(F)) (\forall y \approx y') (x, y) \in F\}, \\ \exists\forall(F) &:= {}^*\{y' : (\exists x \in \mu(\mathcal{N}) \cap \text{dom}(F)) (\forall y \approx y') (x, y) \in F\}, \\ \forall\exists(F) &:= {}^*\{y' : (\forall x \in \mu(\mathcal{N}) \cap \text{dom}(F)) (\exists y \approx y') (x, y) \in F\}, \\ \exists\exists(F) &:= {}^*\{y' : (\exists x \in \mu(\mathcal{N}) \cap \text{dom}(F)) (\exists y \approx y') (x, y) \in F\},\end{aligned}$$

with  $*$  symbolizing standardization and  $y \approx y'$  standing for the *infinite proximity* between  $y$  and  $y'$  in  $\tau$ , i. e.  $y' \in \mu(\tau(y))$ .

Call  $Q_1Q_2(F)$  the  $Q_1Q_2$ -*limit* of  $F$  (here  $Q_k$  ( $k := 1, 2$ ) is one of the quantifiers  $\forall$  or  $\exists$ ).

**Kuratowski–Painlevé limits.** Assume for instance that  $F$  is a standard correspondence on some element of  $\mathcal{N}$  and look at the  $\exists\exists$ -limit and the  $\forall\exists$ -limit. The former is the *limit superior* or *upper limit*; the latter is the *limit inferior* or *lower limit* of  $F$  along  $\mathcal{N}$ .

**Theorem.** *If  $F$  is a standard correspondence then*

$$\begin{aligned}\exists\exists(F) &= \bigcap_{U \in \mathcal{N}} \text{cl} \left( \bigcup_{x \in U} F(x) \right); \\ \forall\exists(F) &= \bigcap_{U \in \mathcal{N}} \text{cl} \left( \bigcup_{x \in U} F(x) \right),\end{aligned}$$

where  $\mathcal{N}$  is the grill of a filter  $\mathcal{N}$  on  $X$ , i. e., the family comprising all subsets of  $X$  meeting  $\mu(\mathcal{N})$ .

**Hadamard, Clarke, and Bouligand tangents.**

$$\begin{aligned}\text{Ha}(F, x') &:= \bigcup_{\substack{U \in \tau(x'), \\ \alpha'}} \text{int}_\tau \bigcap_{\substack{x \in F \cap U, \\ 0 < \alpha \leq \alpha'}} \frac{F - x}{\alpha}; \\ \text{Cl}(F, x') &:= \bigcap_{V \in \mathcal{N}_\tau} \bigcup_{\substack{U \in \tau(x'), \\ \alpha'}} \bigcap_{\substack{x \in F \cap U, \\ 0 < \alpha \leq \alpha'}} \left( \frac{F - x}{\alpha} + V \right); \\ \text{Bo}(f, x') &:= \bigcap_{\substack{U \in \tau(x'), \\ \alpha'}} \text{cl}_\tau \bigcup_{\substack{x \in F \cap U, \\ 0 < \alpha \leq \alpha'}} \frac{F - x}{\alpha},\end{aligned}$$

where, as usual,  $\tau(x') := x' + \mathcal{N}_\tau$  and  $\mathcal{N}_\tau$ , the zero neighborhood filterbase of the topology  $\tau$ . Obviously,

$$\text{Ha}(F, x') \subset \text{Cl}(F, x') \subset \text{Bo}(F, x').$$

**Infinitesimal quantifiers.** Agree on notation for a ZFC formula  $\varphi$  and  $x' \in F$  :

$$(\forall^\bullet x) \varphi := (\forall x \approx_\tau x') \varphi := (\forall x) (x \in F \wedge x \approx_\tau x') \rightarrow \varphi,$$

$$(\forall^\bullet h) \varphi := (\forall h \approx_\tau h') \varphi := (\forall h) (h \in X \wedge h \approx_\tau h') \rightarrow \varphi,$$

$$(\forall^\bullet \alpha) \varphi := (\forall \alpha \approx 0) \varphi := (\forall \alpha) (\alpha > 0 \wedge \alpha \approx 0) \rightarrow \varphi.$$

The quantifiers  $\exists^\bullet x$ ,  $\exists^\bullet h$ ,  $\exists^\bullet \alpha$  are defined in the natural way by duality on assuming that

$$(\exists^\bullet x) \varphi := (\exists x \approx_\tau x') \varphi := (\exists x) (x \in F \wedge x \approx_\tau x') \wedge \varphi,$$

$$(\exists^\bullet h) \varphi := (\exists h \approx_\tau h') \varphi := (\exists h) (h \in X \wedge h \approx_\tau h') \wedge \varphi,$$

$$(\exists^\bullet \alpha) \varphi := (\exists \alpha \approx 0) \varphi := (\exists \alpha) (\alpha > 0 \wedge \alpha \approx 0) \wedge \varphi.$$

**Infinitesimal representations.** The Bouligand cone is the standardization of the  $\exists\exists\exists$ -cone; i. e., if  $h'$  is standard then

$$h' \in \text{Bo}(F, x') \leftrightarrow (\exists^\bullet x) (\exists^\bullet \alpha) (\exists^\bullet h) x + \alpha h \in F.$$

The Hadamard cone is the standardization of the  $\forall\forall\forall$ -cone:

$$\text{Ha}(F, x') = \forall\forall\forall(F, x'),$$

with  $\mu(\mathbb{R}_+)$  the external set of positive infinitesimals.

The Clarke cone is the standardization of the  $\forall\forall\exists$ -cone: i. e.,

$$\text{Cl}(F, x') = \forall\forall\exists(F, x').$$

In more detail,

$$h' \in \text{Cl}(F, x') \leftrightarrow (\forall^\bullet x) (\forall^\bullet \alpha) (\exists^\bullet h) x + \alpha h \in F.$$

**Convexity is stable.** Convexity of harpedonaptae was stable in the sense that no variation of stakes within the surrounding rope can ever spoil the convexity of the tract to be surveyed.

Stability is often tested by perturbation or introducing various epsilons in appropriate places, which geometrically means that tangents travel. One of the earliest excursions in this direction is connected with the classical Hyers–Ulam stability theorem for  $\varepsilon$ -convex functions. Exact calculations with epsilons and sharp estimates are often bulky and slightly mysterious. Some alternatives are suggested by actual infinities, which is illustrated with the conception of *infinitesimal optimality*.

**Enter epsilon.** Assume given a convex operator  $f : X \rightarrow E^\bullet$  and a point  $\bar{x}$  in the effective domain  $\text{dom}(f) := \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}$  of  $f$ .

Given  $\varepsilon \geq 0$  in the positive cone  $E_+$  of  $E$ , by the  $\varepsilon$ -subdifferential of  $f$  at  $\bar{x}$  we mean the set

$$\partial_\varepsilon f(\bar{x}) := \{T \in L(X, E) \mid (\forall x \in X) (Tx - f(x) \leq T\bar{x} - f(\bar{x}) + \varepsilon)\}.$$



**Topological setting.** The usual subdifferential  $\partial f(\bar{x})$  is the intersection of  $\varepsilon$ -subdifferentials:

$$\partial f(\bar{x}) := \bigcap_{\varepsilon \geq 0} \partial_\varepsilon f(\bar{x}).$$

In topological setting we use continuous operators, replacing  $L(X, E)$  with  $\mathcal{L}(X, E)$ .

**$\varepsilon$ -optimality.**

**Theorem.** Let  $f_1 : X \times Y \rightarrow E^\bullet$  and  $f_2 : Y \times Z \rightarrow E^\bullet$  be convex operators and  $\delta, \varepsilon \in E^+$ . Suppose that the convolution  $f_2 \Delta f_1$  is  $\delta$ -exact at some point  $(x, y, z)$ ; i. e.,  $\delta + (f_2 \Delta f_1)(x, y) = f_1(x, y) + f_2(y, z)$ . If, moreover, the convex sets  $\text{epi}(f_1, Z)$  and  $\text{epi}(X, f_2)$  are in general position, then

$$\partial_\varepsilon(f_2 \Delta f_1)(x, y) = \bigcup_{\substack{\varepsilon_1 \geq 0, \varepsilon_2 \geq 0, \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \varepsilon + \delta}} \partial_{\varepsilon_2} f_2(y, z) \circ \partial_{\varepsilon_1} f_1(x, y).$$

**Enter monad.** Distinguish some downward-filtered subset  $\mathcal{E}$  of  $E$  that is composed of positive elements. Assuming  $E$  and  $\mathcal{E}$  standard, define the *monad*  $\mu(\mathcal{E})$  of  $\mathcal{E}$  as  $\mu(\mathcal{E}) := \bigcap \{[0, \varepsilon] \mid \varepsilon \in \mathcal{E}\}$ . The members of  $\mu(\mathcal{E})$  are *positive infinitesimals* with respect to  $\mathcal{E}$ . As usual,  ${}^\circ\mathcal{E}$  denotes the external set of all standard members of  $E$ , the *standard part* of  $\mathcal{E}$ .

Assume that the monad  $\mu(\mathcal{E})$  is an external cone over  ${}^\circ\mathbb{R}$  and, moreover,  $\mu(\mathcal{E}) \cap {}^\circ E = 0$ . In application,  $\mathcal{E}$  is usually the filter of order-units of  $E$ . The relation of *infinite proximity* or *infinite closeness* between the members of  $E$  is introduced as follows:

$$e_1 \approx e_2 \leftrightarrow e_1 - e_2 \in \mu(\mathcal{E}) \ \& \ e_2 - e_1 \in \mu(\mathcal{E}).$$

**Infinitesimal subdifferential.** Now

$$Df(\bar{x}) := \bigcap_{\varepsilon \in {}^\circ\mathcal{E}} \partial_\varepsilon f(\bar{x}) = \bigcup_{\varepsilon \in \mu(\mathcal{E})} \partial_\varepsilon f(\bar{x}),$$

which is the *infinitesimal subdifferential* of  $f$  at  $\bar{x}$ . The elements of  $Df(\bar{x})$  are *infinitesimal subgradients* of  $f$  at  $\bar{x}$ .

**Infinitesimal solution.** Assume that there exists a limited value  $e := \inf_{x \in C} f(x)$  of some program  $(C, f)$ . A feasible point  $x_0$  is called an *infinitesimal solution* if  $f(x_0) \approx e$ , i. e., if  $f(x_0) \leq f(x) + \varepsilon$  for every  $x \in C$  and every standard  $\varepsilon \in \mathcal{E}$ .

A point  $x_0 \in X$  is an infinitesimal solution of the unconstrained problem  $f(x) \rightarrow \inf$  if and only if  $0 \in Df(x_0)$ .

**Exeunt epsilon.**

**Theorem.** Let  $f_1 : X \times Y \rightarrow E^\bullet$  and  $f_2 : Y \times Z \rightarrow E^\bullet$  be convex operators. Suppose that the convolution  $f_2 \Delta f_1$  is infinitesimally exact at some point  $(x, y, z)$ ; i. e.,  $(f_2 \Delta f_1)(x, y) \approx f_1(x, y) + f_2(y, z)$ . If, moreover, the convex sets  $\text{epi}(f_1, Z)$  and  $\text{epi}(X, f_2)$  are in general position then

$$D(f_2 \Delta f_1)(x, y) = Df_2(y, z) \circ Df_1(x, y).$$

## References

1. Clarke F. Nonsmooth Analysis in Systems and Control Theory // Encyclopedia of Complexity and Control Theory.—Berlin: Springer-Verlag, 2009.—P. 6271–6184.
2. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Subdifferential Calculus: Theory and Applications.—Moscow: Nauka, 2007.
3. Bell J. L. Set Theory: Boolean Valued Models and Independence Proofs.—Oxford: Clarendon Press, 2005.

4. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Introduction to Boolean Valued Analysis.—Moscow: Nauka, 2005.
5. Kanovei V. and Reeken M. Nonstandard Analysis: Axiomatically.—Berlin: Springer-Verlag, 2004.
6. Gordon E. I., Kusraev A. G., and Kutateladze S. S. Infinitesimal Analysis: Selected Topics.—Moscow: Nauka, 2011.
7. Ariew R. G. W. Leibniz and Samuel Clarke Correspondence.—Indianapolis: Hackett Publ. Comp., 2000.
8. Ekeland I. The Best of All Possible Worlds: Mathematics and Destiny.—Chicago—London: The Univer. of Chicago Press, 2006.
9. Kusraev A. G. and Kutateladze S. S. Boolean Methods in Positivity // J. Appl. Indust. Math.—2008.—Vol. 2, № 1.—P. 81–99.
10. Kutateladze S. S. Mathematics and Economics of Leonid Kantorovich // Sib. Math. J.—2012.—Vol. 53, № 1.—P. 1–12.
11. Kutateladze S. S. Harpedonaptae and Abstract Convexity // J. Appl. Indust. Math.—2008.—Vol. 2, № 1.—P. 215–221.
12. Kutateladze S. S. Boolean Trends in Linear Inequalities // J. Appl. Indust. Math.—2010.—Vol. 4, № 3.—P. 340–348.
13. Kutateladze S. S. Nonstandard tools of nonsmooth analysis // J. Appl. Indust. Math.—2012.—Vol. 6, № 3.—P. 332–338.
14. Scott D. Boolean Models and Nonstandard Analysis // Applications of Model Theory to Algebra, Analysis, and Probability.—Holt, Rinehart, and Winston, 1969.—P. 87–92.
15. Kutateladze S. S. Leibnizian, Robinsonian, and Boolean Valued Monads // J. Appl. Indust. Math.—2011.—Vol. 5, № 3.—P. 365–373.

*Received August 15, 2017*

KUSRAEV ANATOLY G.

Vladikavkaz Science Center of the RAS, *Chairman*  
22 Markus Street, Vladikavkaz, 362027, Russia;

North Ossetian State University,

*Head of the Department of Mathematical Analysis*  
44–46 Vatutin Street, Vladikavkaz, 362025, Russia

E-mail: kusraev@smath.ru

KUTATELADZE SEMEN S.

Sobolev Institute of Mathematics,

*Senior Staff Scientist*

4 Acad. Koptyug avenue, Novosibirsk, 630090, Russia

E-mail: sskut@math.nsc.ru

## ИСЧИСЛЕНИЕ КАСАТЕЛЬНЫХ И ВОКРУГ

Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.

Оптимизация — это выбор наиболее предпочтительного. Геометрия и локальный анализ негладких объектов необходимы для вариационного анализа, который включает оптимизацию. К ним относятся допустимые направления и касательные как предельные позиции первых. Исчисление касательных является одним из основных инструментов оптимизации. Исчисление сводит прогноз к числам, что на современном языке можно назвать скаляризацией. Спонтанные решения часто неустойчивы и редко оптимальны. Таким образом, оптимизация и исчисление касательных связаны с неравенствами, скаляризацией и устойчивостью. Цель настоящей статьи — дать обзор современного подхода к указанному кругу вопросов, основанного на применении нестандартных моделей. Модель математической теории обычно называется нестандартной, если отношение принадлежности в модели имеет интерпретацию, отличную от интерпретации теории множеств. В последние десятилетия во многих исследованиях используются нестандартные методы, расположенные на стыках анализа и логики. Эта область, дает некоторые новые возможности моделирования, открывающие широкие перспективы для рассмотрения и решения различных теоретических и прикладных задач.

**Ключевые слова:** конус Адамара, конус Булигана, конус Кларка, общее положение, операторное неравенство булевозначный анализ, нестандартный анализ.

УДК 517.9

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА  
ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА  
С СУММИРУЕМЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

С. И. Митрохин

Работа посвящена изучению дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемым потенциалом и периодическими граничными условиями. Метод изучения операторов с суммируемым потенциалом является развитием метода изучения операторов с кусочно-гладкими коэффициентами. Краевые задачи такого рода возникают при изучении колебаний балок и мостов, склеенных из материалов различной плотности. Решение дифференциального уравнения, задающего дифференциальный оператор, сведено к решению интегрального уравнения Вольтерры. Интегральное уравнение решается методом последовательных приближений Пикара.

Целью исследования интегрального уравнения является получение асимптотических формул и оценок для решений дифференциального уравнения, задающего дифференциальный оператор. Вопросы геофизики, квантовой механики, кинетики, газодинамики и теории колебаний стержней, балок и мембран требуют развития асимптотических методов на случай негладких коэффициентов дифференциальных уравнений. Асимптотические методы продолжают развиваться, несмотря на бурное развитие численных методов, связанное с появлением мощных суперкомпьютеров, в настоящее время асимптотические и численные методы дополняют друг друга.

В статье при больших значениях спектрального параметра получена асимптотика решений дифференциального уравнения, задающего дифференциальный оператор. Асимптотические оценки решений устанавливаются аналогично асимптотическим оценкам решений дифференциального оператора второго порядка с гладкими коэффициентами. Изучение периодических граничных условий приводит к изучению корней функции, представленной в виде определителя четвертого порядка. Для получения корней этой функции изучена индикаторная диаграмма. Корни этого уравнения находятся в четырех секторах бесконечно малого раствора, определяемых индикаторной диаграммой. В статье исследовано поведение корней этого уравнения в каждом из секторов индикаторной диаграммы. Найдена асимптотика собственных значений изучаемого дифференциального оператора. Полученные формулы для асимптотики собственных значений позволяют изучить спектральные свойства собственных функций исследуемого дифференциального оператора. Если потенциал оператора будет не суммируемой функцией, а только кусочно гладкой, то полученных формул для асимптотики собственных значений достаточно для вывода формулы первого регуляризованного следа изучаемого дифференциального оператора.

**Ключевые слова:** дифференциальный оператор четвертого порядка, суммируемый потенциал, периодические граничные условия, спектральный параметр, асимптотика решений, асимптотика собственных значений.

**1. Постановка задачи.** Изучим спектральные свойства краевой задачи для дифференциального оператора четвертого порядка, задаваемого дифференциальным уравнением вида

$$y^{(4)}(x) + q(x)y(x) = \lambda a^4 y(x), \quad 0 \leq x \leq \pi, \quad a > 0, \quad (1)$$

с периодическими граничными условиями

$$y(0) = y(\pi), \quad y'(0) = y'(\pi), \quad y''(0) = y''(\pi), \quad y^{(3)}(0) = y^{(3)}(\pi). \quad (2)$$

В дифференциальном уравнении (1) число  $\lambda \in \mathbb{C}$  — спектральный параметр, функция  $\rho(x) = \alpha^4 > 0$  — весовая функция, функция  $q(x)$  — потенциал. Мы предполагаем, что потенциал  $q(x)$  является суммируемой функцией на отрезке  $[0; \pi]$ :

$$q(x) \in L_1[0; \pi] \Leftrightarrow \left( \int_0^x q(t) dt \right)' = q(x) \quad (3)$$

почти для всех  $x$  из отрезка  $[0; \pi]$ .

**2. Исторический обзор.** Сначала спектральные свойства обыкновенных дифференциальных операторов изучались в том случае, когда коэффициенты дифференциальных уравнений, задающих эти операторы, были достаточно гладкими функциями. В работе [1] были получены асимптотические формулы для корней квазиполиномов, которые получаются при изучении операторов высших порядков с регулярными граничными условиями с гладкими коэффициентами. В работе [2] вычислены регуляризованные следы такого рода операторов. В работе [6] вычислены следы обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков с достаточно гладкими коэффициентами.

В работах [3] и [4] автор успешно понизил гладкость коэффициентов дифференциальных операторов и изучил операторы с кусочно-гладкими коэффициентами. В работе [5] изучен дифференциальный оператор, у которого не только потенциал является кусочно-непрерывной функцией, но и весовая функция также была кусочно-гладкой.

Резкий прогресс в изучении дифференциальных операторов был сделан совсем недавно, когда в работах [7] и [8] был изучен оператор второго порядка с суммируемым потенциалом, были вычислены асимптотики произвольного порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма — Лиувилля на отрезке. Методика работ [7, 8] для изучения спектральных свойств операторов с суммируемыми коэффициентами не переносится на операторы более высоких порядков.

В работах [9, 10] автором разработана новая методика для изучения дифференциальных операторов с суммируемыми коэффициентами. В работе [9] был изучен оператор четвертого порядка, у которого не только потенциал, но и коэффициент при первой производной были интегрируемыми на отрезке функциями. В работе [10] рассматривался оператор шестого порядка с запаздывающим аргументом, потенциал оператора являлся суммируемой функцией на отрезке, граничные условия разделенные, была вычислена асимптотика собственных значений и собственных функций. Необходимо отметить, что с возрастанием порядка дифференциальных уравнений, задающих операторы, сложность выкладок возрастает многократно.

В работе [11] удалось изучить дифференциальный оператор произвольного нечетного порядка со стандартными фиксированными разделенными граничными условиями. В работе [12] изучены спектральные свойства целого семейства дифференциальных операторов высокого четного порядка с разделенными граничными условиями.

Периодические граничные условия, которые мы будем изучать в настоящей работе, являются неразделенными. Для дифференциальных операторов порядка выше второго неразделенные граничные условия (с целью отыскания асимптотики собственных значений) ранее фактически не изучались.

**3. Асимптотика решений дифференциального уравнения (1) при больших значениях спектрального параметра  $\lambda$ .** Введем следующие обозначения:  $\lambda = s^4$ ,  $s = \sqrt[4]{\lambda}$ , при этом для корректности дальнейших выкладок зафиксируем ту ветвь арифметического корня, для которой  $\sqrt[4]{1} = +1$ . Пусть  $w_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) — различные корни

четвертой степени из единицы:

$$\begin{aligned} w_k^4 = 1, \quad w_k = e^{\frac{2\pi i}{4}(k-1)} \quad (k = 1, 2, 3, 4); \quad w_1 = 1, \quad w_2 = e^{\frac{2\pi i}{4}} = i = z \neq 0, \\ w_3 = e^{\frac{4\pi i}{4}} = z^2 = -1, \quad w_4 = z^3 = -i. \end{aligned} \quad (4)$$

Числа  $w_k$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) из (4) делят единичную окружность на четыре равные части, при этом справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^4 w_k^p = 0, \quad p = 1, 2, 3; \quad \sum_{k=1}^4 w_k^p = 4, \quad p = 0, \quad p = 4. \quad (5)$$

Методом вариации постоянных устанавливается следующее утверждение.

**Теорема 1.** Решение  $y(x, s)$  дифференциального уравнения (1) является решением интегрального уравнения Вольтерры

$$y(x, s) = \sum_{k=1}^4 C_k e^{aw_k s x} - \frac{1}{4a^3 s^3} \sum_{k=1}^4 w_k e^{aw_k s x} \varphi_k(x, s), \quad (6)$$

$$\varphi_k(x, s) = \int_0^x q(t) e^{-aw_k s t} y(t, s) dt, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (7)$$

◁ Проверить справедливость формул (6), (7) можно непосредственным дифференцированием, учитывая, что при выполнении условия суммируемости (3) почти всюду на отрезке  $[0; \pi]$  справедлива следующая формула:

$$\frac{d}{dx}(\varphi_k(x, s)) = \left( \int_0^x q(t) e^{-aw_k s t} y(t, s) dt \right)'_x = q(x) e^{-aw_k s x} y(x, s).$$

Поэтому из формул (6), (7) имеем

$$\begin{aligned} y^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^4 C_k (aw_k s)^m e^{aw_k s x} - \frac{1}{4a^3 s^3} \sum_{k=1}^4 w_k (aw_k s)^m e^{aw_k s x} \varphi_k(x, s) \\ - \frac{1}{4a^3 s^3} \phi_m(x, s), \quad m = 1, 2, 3, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\phi_m(x, s) = \sum_{k=1}^4 w_k (aw_k s)^{m-1} e^{aw_k s x} q(x) e^{-aw_k s x} y(x, s) = 0, \quad m = 1, 2, 3,$$

в силу соотношений (5) и свойства суммируемости (3).

Продифференцируем  $y^{(3)}(x, s)$  из (8) еще раз по переменной  $x$ , подставим полученное выражение и (6), (7) в дифференциальное уравнение (1), увидим, что  $y^{(4)}(x, s) + q(x)y(x, s) - \lambda a^4 y(x, s) = 0$  почти для всех  $x$  из отрезка  $[0; \pi]$ , т. е. убедимся в том, что  $y(x, s)$  из (6), (7) действительно является решением уравнения (1). ▷

Асимптотику решений интегрального уравнения (6) найдем методом последовательных приближений Пикара: найдем  $y(t, s)$  из уравнения (6), подставим  $y(t, s)$  в уравнение (6), получим

$$y(x, s) = \sum_{k=1}^4 C_k e^{aw_k sx} - \frac{1}{4a^3 s^3} \sum_{k=1}^4 w_k e^{aw_k sx} \int_0^x q(t) e^{-aw_k st} \times \left\{ \sum_{k=1}^4 C_k e^{aw_k st} - \frac{1}{4a^3 s^3} \sum_{k=1}^4 w_k e^{aw_k st} \int_0^t q(\xi) e^{-aw_k s\xi} y(\xi, s) d\xi \right\} dt. \quad (9)$$

Произведя в (9) необходимые преобразования, находим

$$y(x, s) = \sum_{k=1}^4 C_k e^{aw_k sx} - \frac{1}{4a^3 s^3} \sum_{k=1}^4 C_k \psi_{3k}(x, s) + \frac{H_6(x, s)}{16a^6 s^6}, \quad (10)$$

$$\psi_{3k}(x, s) = \sum_{n=1}^4 w_n e^{aw_n sx} \int_0^x q(t) e^{a(w_k - w_n)st} dt_{akn}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (11)$$

$$H_6(x, s) = \sum_{p=1}^4 w_p e^{aw_p sx} \int_0^x q(t) e^{-aw_p st} \left( \sum_{n=1}^4 w_n e^{aw_n st} \int_0^t q(\xi) e^{-aw_n s\xi} y(\xi, s) d\xi \right) dt. \quad (12)$$

Подставим в формулу (12) выражение для  $y(\xi, s)$  из (6), (7), получим:

$$H_6(x, s) = \sum_{p=1}^4 w_p e^{aw_p sx} \int_0^x q(t) e^{-aw_p st} \left( \sum_{n=1}^4 w_n e^{aw_n st} \int_0^t q(\xi) e^{-aw_n s\xi} \times \left[ \sum_{r=1}^4 C_r e^{aw_r s\xi} - \frac{1}{4a^3 s^3} \sum_{r=1}^4 w_r e^{aw_r s\xi} \varphi_r(\xi, s) \right] d\xi \right) dt. \quad (13)$$

Поменяв в (13) порядок суммирования и сделав необходимые выкладки и упрощения, находим

$$H_6(x, s) = \sum_{k=1}^4 C_k H_{6k}(x, s), \quad (14)$$

$$H_{6k}(x, s) = \sum_{n=1}^4 w_n e^{aw_n sx} \left[ \sum_{p=1}^4 w_p \int_0^x q(t) e^{a(w_p - w_n)st} \times \left( \int_0^t q(\xi) e^{a(w_k - w_p)s\xi} d\xi \right) dt_{a_p n k p} \right] + \frac{H_{9k}(x, s)}{4a^3 s^3}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \quad (15)$$

Проанализировав формулы (9)–(15), приходим к выводу, что справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.** Общее решение дифференциального уравнения (1) при условии суммируемости потенциала (3) имеет следующий вид:

$$y(x, s) = \sum_{k=1}^4 C_k y_k(x, s); \quad y^{(m)}(x, s) = \sum_{k=1}^4 C_k y_k^{(m)}(x, s), \quad m = 1, 2, 3, \quad (16)$$

причем фундаментальная система решений  $\{y_k(x, s)\}_{k=1}^4$  подчиняется следующей асимптотике при  $s \rightarrow \infty$ :

$$y_k(x, s) = e^{aw_k sx} - \frac{\psi_{3k}(x, s)}{4a^3 s^3} + \frac{H_{6k}(x, s)}{16a^6 s^6} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|ax}}{s^9}\right), \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (17)$$

$$y_k^{(m)}(x, s) = (as)^m \left\{ w_k^m e^{aw_k sx} - \frac{\psi_{3k}^m(x, s)}{4a^3 s^3} + \frac{H_{6k}^m(x, s)}{16a^6 s^6} + \underline{O}\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|ax}}{s^9}\right) \right\}, \quad (18)$$

$$k = 1, 2, 3, 4; \quad m = 1, 2, 3,$$

функции  $\psi_{3k}$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) определены формулой (11), функции  $H_{6k}(x, s)$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) определены формулой (15),

$$\psi_{3k}^m(x, s) = \sum_{n=1}^4 w_n w_n^m e^{aw_n sx} \int_0^x q(t) e^{a(w_k - w_n)st} dt_{akn}, \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad m = 1, 2, 3, \quad (19)$$

$$H_{6k}^m(x, s) = \sum_{n=1}^4 w_n w_n^m e^{aw_n sx} \left[ \sum_{p=1}^4 w_p \int_0^x q(t) e^{a(w_p - w_n)st} \right. \\ \left. \times \left( \int_0^t q(\zeta) e^{a(w_k - w_p)s\zeta} d\zeta \right) dt_{apnkp} \right], \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad m = 1, 2, 3. \quad (20)$$

Асимптотические оценки (17), (18) устанавливаются аналогично асимптотическим оценкам для дифференциального оператора второго порядка (см. [13, гл. 2], [14, гл. 2]).

При этом при выводе формул (16)–(20) мы требовали выполнения следующих начальных условий:

$$\psi_{3k}(0, s) = 0; \quad H_{6k}(0, s) = 0; \quad \psi_{3k}^m(0, s) = 0; \quad H_{6k}^m(0, s) = 0; \\ y_k(0, s) = 1; \quad y_k^{(m)}(0, s) = (as)^m w_k^m, \quad k = 1, 2, 3, 4; \quad m = 1, 2, 3. \quad (21)$$

**4. Изучение граничных условий (2).** Подставляя формулы (16) для общего решения дифференциального уравнения (1) в граничные условия (2), получаем

$$\left\{ \begin{aligned} y(\pi, s) \stackrel{(2)}{=} y(0, s) &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^4 C_k y_k(\pi, s) = \sum_{k=1}^4 C_k y_k(0, s) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^4 C_k [y_k(\pi, s) - y_k(0, s)] = 0; \\ \frac{y^{(m)}(\pi, s)}{(as)^m} \stackrel{(2)}{=} \frac{y^{(m)}(0, s)}{(as)^m} &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^4 C_k \left[ \frac{y_k^{(m)}(\pi, s)}{(as)^m} - \frac{y_k^{(m)}(0, s)}{(as)^m} \right] = 0, \quad m = 1, 2, 3. \end{aligned} \right. \quad (22)$$

Система (22) представляет собой линейную однородную систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными  $C_1, C_2, C_3, C_4$ . Из метода Крамера следует, что такая

система имеет ненулевые решения ( $C_1^4 + C_2^4 + C_3^4 + C_4^4 \neq 0$ ) только в том случае, когда ее определитель равен нулю. Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.** Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(2) с условием суммируемости потенциала (3) имеет следующий вид:

$$f(s) = \begin{vmatrix} y_1(\pi, s) - y_1(0, s) & y_2(\pi, s) - y_2(0, s) & y_3(\pi, s) - y_3(0, s) & y_4(\pi, s) - y_4(0, s) \\ \frac{y_1'(\pi, s)}{as} - \frac{y_1'(0, s)}{as} & \frac{y_2'(\pi, s)}{as} - \frac{y_2'(0, s)}{as} & \frac{y_3'(\pi, s)}{as} - \frac{y_3'(0, s)}{as} & \frac{y_4'(\pi, s)}{as} - \frac{y_4'(0, s)}{as} \\ \frac{y_1''(\pi, s)}{(as)^2} - \frac{y_1''(0, s)}{(as)^2} & \frac{y_2''(\pi, s)}{(as)^2} - \frac{y_2''(0, s)}{(as)^2} & \frac{y_3''(\pi, s)}{(as)^2} - \frac{y_3''(0, s)}{(as)^2} & \frac{y_4''(\pi, s)}{(as)^2} - \frac{y_4''(0, s)}{(as)^2} \\ \frac{y_1^{(3)}(\pi, s)}{(as)^3} - \frac{y_1^{(3)}(0, s)}{(as)^3} & \frac{y_2^{(3)}(\pi, s)}{(as)^3} - \frac{y_2^{(3)}(0, s)}{(as)^3} & \frac{y_3^{(3)}(\pi, s)}{(as)^3} - \frac{y_3^{(3)}(0, s)}{(as)^3} & \frac{y_4^{(3)}(\pi, s)}{(as)^3} - \frac{y_4^{(3)}(0, s)}{(as)^3} \end{vmatrix} = 0. \quad (23)$$

Подставляя формулы (17), (18) в уравнение (23) и учитывая начальные условия (21), приведем уравнение (23) к следующему виду:

$$f(s) = \|b_{mn}^{(s)}\|_{m,n=1}^4 = 0, \quad (24)$$

$$b_{1n}(s) = (e^{w_n} - 1) - \frac{\psi_{3n}(\pi, s)}{M^3} + \frac{H_{6n}(\pi, s)}{M^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right), \quad n = 1, 2, 3, 4;$$

$$b_{mn}(s) = w_n^m (e^{w_n} - 1) - \frac{\psi_{3n}^m(\pi, s)}{M^3} + \frac{H_{6n}^m(\pi, s)}{M^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right), \quad m = 2, 3, 4; \quad n = 1, 2, 3, 4,$$

где введены следующие обозначения:  $e^{w_k} = a^{aw_k s \pi}$ ,  $M^3 = 4a^3 s^3$ ,  $M^6 = 16a^6 s^6$ .

Раскладывая определитель  $f(s)$  из (24) по столбцам на сумму определителей, получаем

$$f(s) = f_0(s) - \frac{f_3(s)}{4a^3 s^3} + \frac{f_6(s)}{16a^6 s^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right) = 0, \quad (25)$$

основное приближение имеет вид

$$f_0(s) = 0, \quad (26)$$

$$f_0(s) = \begin{vmatrix} 1(e^{w_1} - 1) & 1(e^{w_2} - 1) & 1(e^{w_3} - 1) & 1(e^{w_4} - 1) \\ w_1(e^{w_1} - 1) & w_2(e^{w_2} - 1) & w_3(e^{w_3} - 1) & w_4(e^{w_4} - 1) \\ w_1^2(e^{w_1} - 1) & w_2^2(e^{w_2} - 1) & w_3^2(e^{w_3} - 1) & w_4^2(e^{w_4} - 1) \\ w_1^3(e^{w_1} - 1) & w_2^3(e^{w_2} - 1) & w_3^3(e^{w_3} - 1) & w_4^3(e^{w_4} - 1) \end{vmatrix} \quad (27)$$

$$= W_0(e^{aw_1 s \pi} - 1)(e^{aw_2 s \pi} - 1)(e^{aw_3 s \pi} - 1)(e^{aw_4 s \pi} - 1),$$

где  $W_0$  — определитель Вандермонда чисел  $w_1, w_2, w_3, w_4$ :

$$W_0 = \det \text{Wandermound}'s(w_1, w_2, w_3, w_4)$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ w_1 & w_2 & w_3 & w_4 \\ w_1^2 & w_2^2 & w_3^2 & w_4^2 \\ w_1^3 & w_2^3 & w_3^3 & w_4^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{vmatrix} = -16i \neq 0, \quad (28)$$

$$f_3(s) = \sum_{k=1}^4 f_{3k}(s), \quad f_6(s) = \sum_{k=1}^4 f_{6k}(s) + \sum_{k=5}^{10} f_{6k}(s), \quad (29)$$



определители  $f_{3k}(s)$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) получаются из определителя  $f_0(s)$  из (27) заменой  $k$ -го столбца на столбец  $(\psi_{3k}(\pi, s), \psi_{3k}^1(\pi, s), \psi_{3k}^2(\pi, s), \psi_{3k}^3(\pi, s))^*$ , например,

$$f_{31}(s) = \begin{vmatrix} \psi_{31}(\pi, s) & 1(e^{w_2} - 1) & 1(e^{w_3} - 1) & 1(e^{w_4} - 1) \\ \psi_{31}^1(\pi, s) & w_2(e^{w_2} - 1) & w_3(e^{w_3} - 1) & w_4(e^{w_4} - 1) \\ \psi_{31}^2(\pi, s) & w_2^2(e^{w_2} - 1) & w_3^2(e^{w_3} - 1) & w_4^2(e^{w_4} - 1) \\ \psi_{31}^3(\pi, s) & w_2^3(e^{w_2} - 1) & w_3^3(e^{w_3} - 1) & w_4^3(e^{w_4} - 1) \end{vmatrix}, \quad (30)$$

определители  $f_{6k}(s)$  ( $k = 1, 2, 3, 4$ ) получаются из определителя  $f_0(s)$  из (27) заменой  $k$ -го столбца на столбец  $(H_{6k}(\pi, s), H_{6k}^1(\pi, s), H_{6k}^2(\pi, s), H_{6k}^3(\pi, s))^*$ , например,

$$f_{62}(s) = \begin{vmatrix} 1(e^{w_1} - 1) & H_{62}(\pi, s) & 1(e^{w_3} - 1) & 1(e^{w_4} - 1) \\ w_1(e^{w_1} - 1) & H_{62}^1(\pi, s) & w_3(e^{w_3} - 1) & w_4(e^{w_4} - 1) \\ w_1^2(e^{w_1} - 1) & H_{62}^2(\pi, s) & w_3^2(e^{w_3} - 1) & w_4^2(e^{w_4} - 1) \\ w_1^3(e^{w_1} - 1) & H_{62}^3(\pi, s) & w_3^3(e^{w_3} - 1) & w_4^3(e^{w_4} - 1) \end{vmatrix}, \quad (31)$$

определители  $f_{6k}(s)$  ( $k = 5, 6, \dots, 10$ ) получаются из определителя  $f_0(s)$  из (27) заменой двух столбцов (под номерами  $k_1$  и  $k_2$ ) на столбцы  $(\psi_{3k_1}(\pi, s); \psi_{3k_1}^1(\pi, s); \psi_{3k_1}^2(\pi, s); \psi_{3k_1}^3(\pi, s))^*$  и  $(\psi_{3k_2}(\pi, s); \psi_{3k_2}^1(\pi, s); \psi_{3k_2}^2(\pi, s); \psi_{3k_2}^3(\pi, s))^*$ , например,

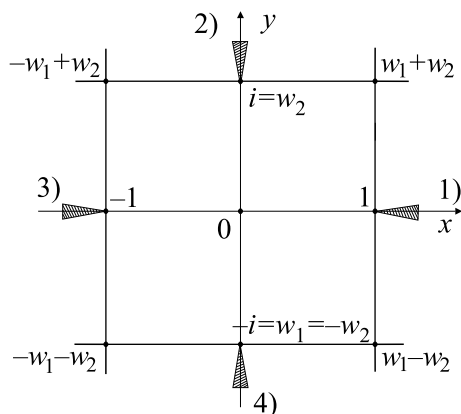
$$f_{65}(s) = \begin{vmatrix} \psi_{31}(\pi, s) & \psi_{32}(\pi, s) & 1(e^{w_3} - 1) & 1(e^{w_4} - 1) \\ \psi_{31}^1(\pi, s) & \psi_{32}^1(\pi, s) & w(e^{w_3} - 1) & w_4(e^{w_4} - 1) \\ \psi_{31}^2(\pi, s) & \psi_{32}^2(\pi, s) & w_3^2(e^{w_3} - 1) & w_4^2(e^{w_4} - 1) \\ \psi_{31}^3(\pi, s) & \psi_{32}^3(\pi, s) & w_3^3(e^{w_3} - 1) & w_4^3(e^{w_4} - 1) \end{vmatrix}, \quad (32)$$

в определителе  $f_{66}(s)$  меняются 1-й и 3-й столбцы, в определителе  $f_{67}(s)$  — 1-й и 4-й столбцы, в  $f_{68}(s)$  — 2-й и 3-й столбцы, в  $f_{69}(s)$  — 2-й и 4-й столбцы, в определителе  $f_{6,10}(s)$  — 3-й и 4-й столбцы.

Учитывая, что в силу формул (4)  $w_3 = -w_1$ ,  $w_4 = -w_2$ , определитель  $f_0(s)$  из (27) преобразуется к следующему виду:

$$f_0(s) = W_0 \left\{ e^{w_1+w_2} + e^{w_1-w_2} + e^{-w_1+w_2} + e^{-w_1-w_2} - 2e^{w_1} - 2e^{-w_1} - 2e^{w_2} - 2e^{-w_2} + 4 \right\}. \quad (33)$$

Индикаторная диаграмма 1 уравнения (25)–(32) (см. [15, гл. 12]), т. е. выпуклая оболочка показателей экспонент, входящих в это уравнение, в силу (33) имеет следующий вид:



Индикаторная диаграмма 1.

Поэтому из общей теории (см. [15, гл. 12]) следует, что для нахождения асимптотики корней уравнений (25)–(29) и  $f_0(s) = 0$  из (33), в секторе 1) индикаторной диаграммы 1 надо оставить экспоненты с показателями  $w_1 - w_2, w_1$  и  $w_1 + w_2$ , в секторе 2) необходимо оставить экспоненты с показателями  $w_1 + w_2, w_2$  и  $w_1 - w_2$ , в секторе 3) — экспоненты с показателями  $-w_1 + w_2, -w_1$  и  $-w_1 - w_2$ , в секторе 4) — экспоненты с показателями  $-w_1 - w_2, -w_2$  и  $w_1 - w_2$ .

**5. Изучение определителей  $f_{3k}(s)$  и  $f_{6k}(s)$  из (25)–(32).** Подставляя функции  $\psi_{31}(\pi, s)$  из (11) и  $\psi_{31}^{(m)}(\pi, s)$  ( $m = 1, 2, 3$ ) из (19) в определитель  $f_{31}(s)$  из (30), вынесем множители  $(e^{w_2} - 1)$ ,  $(e^{w_3} - 1)$  и  $(e^{w_4} - 1)$  из 2-го, 3-го и 4-го столбцов, получим

$$f_{31}(s) = \begin{vmatrix} \psi_{31}(\pi, s) & 1 & 1 & 1 \\ \psi_{31}^1(\pi, s) & w_2 & w_3 & w_4 \\ \psi_{31}^2(\pi, s) & w_2^2 & w_3^2 & w_4^2 \\ \psi_{31}^3(\pi, s) & w_2^3 & w_3^3 & w_4^3 \end{vmatrix} (e^{w_2} - 1)(e^{w_3} - 1)(e^{w_4} - 1), \quad (34)$$

$$\psi_{31}(\pi, s) = \sum_{p=1}^4 w_p e^{w_p} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a1p};$$

$$\psi_{31}^m(\pi, s) = \sum_{p=1}^4 w_p w_p^m e^{w_p} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a1p}, \quad m = 1, 2, 3.$$

Раскладывая определитель  $f_{31}(s)$  из (34) по столбцам на сумму определителей, используя свойства определителей, находим

$$f_{31}(s) = w_1 W_0 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a11} e^{w_1} (e^{w_2} - 1)(e^{w_3} - 1)(e^{w_4} - 1), \quad (35)$$

где определитель  $W_0$  определен формулой (28).

Аналогичным образом выводим

$$f_{32}(s) = w_2 W_0 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a22} e^{w_2} (e^{w_1} - 1)(e^{w_3} - 1)(e^{w_4} - 1), \quad (36)$$

$$f_{33}(s) = w_3 W_0 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a33} e^{w_3} (e^{w_1} - 1)(e^{w_2} - 1)(e^{w_4} - 1), \quad (37)$$

$$f_{34}(s) = w_4 W_0 \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a44} e^{w_4} (e^{w_1} - 1)(e^{w_2} - 1)(e^{w_3} - 1), \quad (38)$$

при этом отметим, что в силу формулы (11) имеем

$$\left( \int_0^\pi \dots \right)_{a11} = \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a22} = \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a33} = \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a44} = \int_0^\pi q(t) dt_{a11}. \quad (39)$$

Используя формулы (15) и (20), для определителя  $f_{62}(s)$  из (31) имеем

$$f_{62}(s) = \begin{vmatrix} 1 & \sum_{n=1}^4 w_n e^{w_n} \left( \sum_{p=1}^4 w_p \left( \int_0^{\pi} \dots \right)_{apn2p} \right) & 1 & 1 \\ w_1 & \sum_{n=1}^4 w_n w_n e^{w_n} \left( \sum_{p=1}^4 w_p \left( \int_0^{\pi} \dots \right)_{apn2p} \right) & w_3 & w_4 \\ w_1^2 & \sum_{n=1}^4 w_n w_n^2 e^{w_n} \left( \sum_{p=1}^4 w_p \left( \int_0^{\pi} \dots \right)_{apn2p} \right) & w_3^2 & w_4^2 \\ w_1^3 & \sum_{n=1}^4 w_n w_n^3 e^{w_n} \left( \sum_{p=1}^4 w_p \left( \int_0^{\pi} \dots \right)_{apn2p} \right) & w_3^3 & w_4^3 \end{vmatrix} \times (e^{w_1} - 1)(e^{w_3} - 1)(e^{w_4} - 1), \quad (40)$$

откуда, используя свойства определителей, находим

$$f_{62}(s) = w_2 W_0 \left( \sum_{n=1}^4 w_n \left( \int_0^{\pi} \dots \right)_{an22n} \right) e^{w_2} (e^{w_1} - 1)(e^{w_3} - 1)(e^{w_4} - 1). \quad (41)$$

Аналогично выводу формул (40) и (41) получаем

$$f_{61}(s) = w_1 W_0 \left( \sum_{n=1}^4 w_n \left( \int_0^{\pi} \dots \right)_{an11n} \right) e^{w_1} (e^{w_2} - 1)(e^{w_3} - 1)(e^{w_4} - 1), \quad (42)$$

$$f_{63}(s) = w_3 W_0 \left( \sum_{n=1}^4 w_n \left( \int_0^{\pi} \dots \right)_{an33n} \right) e^{w_3} (e^{w_1} - 1)(e^{w_2} - 1)(e^{w_4} - 1), \quad (43)$$

$$f_{64}(s) = w_4 W_0 \left( \sum_{n=1}^4 w_n \left( \int_0^{\pi} \dots \right)_{an44n} \right) e^{w_4} (e^{w_1} - 1)(e^{w_2} - 1)(e^{w_3} - 1). \quad (44)$$

Используя свойства, примененные нами при выводе формул (34)–(44), для определителя  $f_{65}(s)$  из (32) имеем:

$$f_{65}(s) = \begin{vmatrix} \sum_{n=1}^4 w_n e^{w_n} \left( \int_0^{\pi} \dots \right)_{a1n} & \sum_{n=1}^4 w_n e^{w_n} \left( \int_0^{\pi} \dots \right)_{a2n} & 1 & 1 \\ \sum_{n=1}^4 w_n w_n e^{w_n} \left( \int_0^{\pi} \dots \right)_{a1n} & \sum_{n=1}^4 w_n w_n e^{w_n} \left( \int_0^{\pi} \dots \right)_{a2n} & w_3 & w_4 \\ \sum_{n=1}^4 w_n w_n^2 e^{w_n} \left( \int_0^{\pi} \dots \right)_{a1n} & \sum_{n=1}^4 w_n w_n^2 e^{w_n} \left( \int_0^{\pi} \dots \right)_{a2n} & w_3^2 & w_4^2 \\ \sum_{n=1}^4 w_n w_n^3 e^{w_n} \left( \int_0^{\pi} \dots \right)_{a1n} & \sum_{n=1}^4 w_n w_n^3 e^{w_n} \left( \int_0^{\pi} \dots \right)_{a2n} & w_3^3 & w_4^3 \end{vmatrix} \times (e^{w_3} - 1)(e^{w_4} - 1) = w_1 w_2 W_0 e^{w_1} e^{w_2} (e^{w_3} - 1)(e^{w_4} - 1) \times \left[ \left( \int_0^{\pi} \dots \right)_{a11} \left( \int_0^{\pi} \dots \right)_{a22} - \left( \int_0^{\pi} \dots \right)_{a12} \left( \int_0^{\pi} \dots \right)_{a21} \right]. \quad (45)$$

Аналогичным образом находим:

$$f_{66}(s) = w_1 w_3 W_0 e^{w_1} e^{w_3} (e^{w_2} - 1)(e^{w_4} - 1) \times \left[ \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a11} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a33} - \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a13} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a31} \right], \quad (46)$$

$$f_{67}(s) = w_1 w_4 W_0 e^{w_1} e^{w_4} (e^{w_2} - 1)(e^{w_3} - 1) \times \left[ \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a11} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a44} - \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a14} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a41} \right], \quad (47)$$

$$f_{68}(s) = w_2 w_3 W_0 e^{w_2} e^{w_3} (e^{w_1} - 1)(e^{w_4} - 1) \times \left[ \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a22} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a33} - \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a23} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a32} \right], \quad (48)$$

$$f_{69}(s) = w_2 w_4 W_0 e^{w_2} e^{w_4} (e^{w_1} - 1)(e^{w_3} - 1) \times \left[ \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a22} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a44} - \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a24} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a42} \right], \quad (49)$$

$$f_{6,10}(s) = w_3 w_4 W_0 e^{w_3} e^{w_4} (e^{w_1} - 1)(e^{w_2} - 1) \times \left[ \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a33} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a44} - \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a34} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a43} \right]. \quad (50)$$

**6. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(2)–(3) в секторе 1) индикаторной диаграммы 1.** Используя замечание, сделанное нами после формулы (33), в формулах (35)–(39), (41)–(44) и (45)–(50) необходимо сделать нужные перемножения и в секторе 1) индикаторной диаграммы оставить экспоненты с показателями  $w_1 - w_2$ ,  $w_1$  и  $w_1 + w_2$ . Поэтому справедливо следующее утверждение.

**Теорема 4.** Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1)–(2) (с условием (3) суммируемости потенциала  $q(x)$ ) в секторе 1) индикаторной диаграммы 1 имеет следующий вид:

$$g_1(s) = g_{1,0}(s) - \frac{g_{1,3}(s)}{4a^3 s^3} + \frac{g_{1,6}(s)}{16a^6 s^6} + \underline{Q}\left(\frac{1}{s^9}\right) = 0, \quad (51)$$

$$g_{1,0}(s) = e^{a(w_1+w_2)s\pi} - 2e^{aw_1 s\pi} + e^{a(w_1-w_2)s\pi}, \quad (52)$$

$$g_{1,3}(s) = \left\{ w_1 [e^{w_1+w_2} - 2e^{w_1} + e^{w_1-w_2}] + w_2 [e^{w_1+w_2} - e^{w_1}] + w_4 [e^{w_1-w_2} - e^{w_1}] \right\} \int_0^\pi q(t) dt_{a11}, \quad e^{w_k} = e^{aw_k s\pi}, \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (53)$$

$$\begin{aligned}
 g_{1,6}(s) &= g_{1,6,1}(s) + g_{1,6,2}(s); \\
 g_{1,6,1}(s) &= w_1 [e^{w_1+w_2} - 2e^{w_1} + e^{w_1-w_2}] \sum_{n=1}^4 w_n \left( \int_0^\pi \dots \right)_{an11n} \\
 &+ w_2 [e^{w_1+w_2} - e^{w_1}] \sum_{n=1}^4 w_n \left( \int_0^\pi \dots \right)_{an22n} + (-w_2) [e^{w_1-w_2} - e^{w_1}] \sum_{n=1}^4 w_n \left( \int_0^\pi \dots \right)_{an44n},
 \end{aligned} \tag{54}$$

$$\begin{aligned}
 g_{1,6,2}(s) &= w_1 w_2 [e^{w_1+w_2} - e^{w_1}] \left[ \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a11} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a22} - \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a12} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a21} \right] \\
 &- w_1 w_2 [e^{w_1-w_2} - e^{w_1}] \left[ \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a11} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a44} - \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a14} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a41} \right] \\
 &+ w_2 w_2 e^{w_1} \left[ \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a22} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a44} - \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a24} \left( \int_0^\pi \dots \right)_{a42} \right].
 \end{aligned} \tag{55}$$

При этом заметим, что в формулах (51)–(55) мы можем поделить на  $e^{w_1} = e^{aw_1 s \pi} \neq 0$ .

Основное приближение уравнения (51)–(55) имеет вид  $g_{1,0}(s) = 0 \Leftrightarrow e^{aw_2 s \pi} - 2 + e^{-aw_2 s \pi} = 0 \Leftrightarrow e^{aw_2 s \pi} = 1$  (корень кратности 2)  $\Leftrightarrow s_{k,1\text{осн}} = \frac{2k}{a}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , индекс 1 у  $s_{k,1\text{осн}}$  означает, что мы изучаем сектор 1), «осн» означает «основное» приближение.

**Теорема 5.** Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1)–(3) в секторе 1) индикаторной диаграммы 1 имеет следующий вид:

$$s_{k,1} = \frac{2k}{a} + \frac{2d_{3k,1}}{ak^3} + \frac{2d_{6k,1}}{ak^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^9}\right), \quad k \in \mathbb{Z}. \tag{56}$$

◁ Для доказательства теоремы 5 необходимо показать, что коэффициенты  $d_{3k,1}$  в формуле (56) находятся единственным образом и привести формулы для их вычисления в явном виде.

Используя формулы Маклорена и формулу (56), имеем

$$e^{\pm aw_2 s \pi} \Big|_{s_{k,1}} = 1 \pm \frac{2\pi i d_{3k,1}}{k^3} \pm \frac{2\pi i d_{6k,1}}{k^6} - \frac{2\pi^2 d_{3k,1}^2}{k^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^9}\right), \tag{57}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{s^3} \Big|_{s_{k,1}} &= \frac{a^3}{8k^3} \left[ 1 - \frac{3d_{3k,1}}{k^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^7}\right) \right], \\
 \frac{1}{s^6} \Big|_{s_{k,1}} &= \frac{a^6}{64k^6} \left[ 1 - \frac{6d_{3k,1}}{k^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^7}\right) \right].
 \end{aligned} \tag{58}$$

Подставляя формулы (56)–(58) в уравнение (51)–(54), получаем

$$\begin{aligned}
& \left[ 1 + \frac{2\pi id_{3k,1}}{k^3} + \frac{2\pi id_{6k,1}}{k^6} - \frac{2\pi^2 d_{3k,1}^2}{k^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^9}\right) \right. \\
& \left. - 2 + 1 - \frac{2\pi id_{3k,1}}{k^3} - \frac{2\pi id_{6k,1}}{k^6} - \frac{2\pi^2 d_{3k,1}^2}{k^6} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^9}\right) \right] \\
& - \frac{1}{4a^3} \frac{a^3}{8k^3} \left[ 1 - \frac{3d_{3k,1}}{k^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^7}\right) \right] \int_0^\pi q(t) dt_{a11} \left\{ w_1 \left[ 1 + \frac{2\pi id_{3k,1}}{k^3} \right. \right. \\
& \left. \left. + \underline{O}\left(\frac{1}{k^6}\right) - 2 + 1 - \frac{2\pi id_{3k,1}}{k^3} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^6}\right) \right] + w_2 \left[ 1 + \frac{2\pi id_{3k,1}}{k^3} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^6}\right) - 1 \right] \right. \\
& \left. - w_2 \left[ 1 - \frac{2\pi id_{3k,1}}{k^3} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^6}\right) - 1 \right] + \frac{1}{16a^6} \frac{a^6}{64k^6} \left[ 1 - \frac{6d_{3k,1}}{k^4} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^7}\right) \right] \right. \\
& \left. \times \left[ g_{1,6,1}(s) \Big|_{s_{k,1}} + g_{1,6,2}(s) \Big|_{s_{k,1}} \right] \right\} + \underline{O}\left(\frac{1}{k^9}\right). \tag{59}
\end{aligned}$$

Приравнявая в уравнении (59) последовательно коэффициенты при  $k^0$ ,  $k^{-3}$ ,  $k^{-6}$ , выводим формулу

$$d_{3k,1} = \frac{1}{32\pi} \int_0^\pi q(t) dt_{a11}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{60}$$

Получение формулы (60) завершает доказательство теоремы 5.  $\triangleright$

Изучая аналогичным образом сектора 2), 3), 4) индикаторной диаграммы 1, убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

**Теорема 6.** Асимптотика собственных значений оператора (1)–(3) в секторах 2)–4) индикаторной диаграммы 1 удовлетворяет следующим асимптотикам:

1)

$$\begin{aligned}
s_{k,2} &= s_{k,1} e^{\frac{\pi i}{2}}, \\
s_{k,3} &= s_{k,2} e^{\frac{\pi i}{2}} = s_{k,1} e^{\frac{2\pi i}{2}}, \\
s_{k,4} &= s_{k,3} e^{\frac{\pi i}{2}} = s_{k,1} e^{\frac{3\pi i}{2}}, \\
s_{k,m} &= s_{k,1} e^{\frac{\pi i}{2}(m-1)}, \quad m = 1, 2, 3, 4,
\end{aligned} \tag{61}$$

где числа  $s_{k,1}$  определены формулами (56), (60);

2)

$$\lambda_{k,m} = s_{k,m}^4, \quad m = 1, 2, 3, 4; \quad k \in \mathbb{N}. \tag{62}$$

Для нахождения асимптотики собственных значений функций можно доказать следующее утверждение.

**Теорема 7.** Собственные функции  $y_k(x, s)$  дифференциального оператора (1)–(3) удовлетворяют следующим асимптотикам:

$$y_{k,m}(x, s) = \begin{pmatrix} y_1(\pi, s) - y_1(0, s) & y_2(\pi, s) - y_2(0, s) & y_3(\pi, s) - y_3(0, s) & y_4(\pi, s) - y_4(0, s) \\ \frac{y_1'(\pi, s) - y_1'(0, s)}{as} - \frac{y_1'(0, s)}{as} & \frac{y_2'(\pi, s) - y_2'(0, s)}{as} - \frac{y_2'(0, s)}{as} & \frac{y_3'(\pi, s) - y_3'(0, s)}{as} - \frac{y_3'(0, s)}{as} & \frac{y_4'(\pi, s) - y_4'(0, s)}{as} - \frac{y_4'(0, s)}{as} \\ \frac{y_1''(\pi, s) - y_1''(0, s)}{(as)^2} - \frac{y_1''(0, s)}{(as)^2} & \frac{y_2''(\pi, s) - y_2''(0, s)}{(as)^2} - \frac{y_2''(0, s)}{(as)^2} & \frac{y_3''(\pi, s) - y_3''(0, s)}{(as)^2} - \frac{y_3''(0, s)}{(as)^2} & \frac{y_4''(\pi, s) - y_4''(0, s)}{(as)^2} - \frac{y_4''(0, s)}{(as)^2} \\ \frac{y_1^{(3)}(x, s) - y_1^{(3)}(0, s)}{(as)^3} - \frac{y_1^{(3)}(0, s)}{(as)^3} & \frac{y_2^{(3)}(x, s) - y_2^{(3)}(0, s)}{(as)^3} - \frac{y_2^{(3)}(0, s)}{(as)^3} & \frac{y_3^{(3)}(x, s) - y_3^{(3)}(0, s)}{(as)^3} - \frac{y_3^{(3)}(0, s)}{(as)^3} & \frac{y_4^{(3)}(x, s) - y_4^{(3)}(0, s)}{(as)^3} - \frac{y_4^{(3)}(0, s)}{(as)^3} \end{pmatrix}_{s=s_{k,m}},$$

где числа  $s_{k,m}$  определены формулами (56), (60)–(62), функции  $y_n^{(p)}(x, s)$  удовлетворяют асимптотикам (17), (18), (21),  $n = 1, 2, 3, 4$ ,  $p = 0, 1, 2, 3$ .

### Литература

1. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Мат. сб.—1968.—Т. 65, № 4.—С. 558–566.
2. Лидский В. В., Садовничий В. А. Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций // Функци. анализ и его приложения.—1967.—Т. 1, № 2.—С. 52–59.
3. Митрохин С. И. О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами // Вестн. МГУ. Серия: математика, механика.—1986.—№ 6.—С. 3–6.
4. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами // Диф. уравнения.—1992.—Т. 28, № 3.—С. 530–532.
5. Митрохин С. И. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией // Докл. РАН.—1997.—Т. 356, № 1.—С. 13–15.
6. Садовничий В. А. О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков // Мат. сб.—1967.—Т. 72, № 2.—С. 293–310.
7. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма — Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Диф. уравнения.—1998.—Т. 34, № 10.—С. 1423–1426.
8. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма — Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Изв. РАН. Сер. Математика.—2000.—Т. 64, № 4.—С. 47–108.
9. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциального оператора четвертого порядка с суммируемыми коэффициентами // Тр. МИАН.—2010.—Т. 270.—С. 188–197.
10. Митрохин С. И. О спектральных свойствах одного дифференциального оператора с суммируемыми коэффициентами с запаздывающим аргументом // Уфимский мат. журн.—2011.—Т. 3, № 4.—С. 95–115.
11. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциальных операторов нечетного порядка с суммируемым потенциалом // Диф. уравнения.—2011.—Т. 47, № 2.—С. 1808–1811.
12. Митрохин С. И. О спектральных свойствах семейства дифференциальных операторов высокого четного порядка с суммируемым потенциалом // Вестн. ВГУ. Сер. Физика. Математика.—2016.—№ 4.—С. 121–135.
13. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы.—М.: Наука, 1969.—528 с.
14. Юрко В. А. Введение в теорию обратных спектральных задач.—М.: Физматлит, 2007.—384 с.
15. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения.—М.: Мир, 1967.—548 с.

Статья поступила 2 февраля 2017 г.

МИТРОХИН СЕРГЕЙ ИВАНОВИЧ  
 НИВЦ МГУ им. М. В. Ломоносова,  
 старший научный сотрудник  
 РОССИЯ, г. Москва, Воробьевы Горы, д. 1  
 E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

A PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A FOURTH ORDER  
DIFFERENTIAL OPERATOR WITH A SUMMABLE POTENTIAL

Mitrokhin S. I.

The paper is devoted to the study of a fourth-order differential operator with a summable potential and periodic boundary conditions. The method of studying of operators with a summable potential is an extension of the method of studying operators with piecewise smooth coefficients. Boundary value problems of this kind arise when studying the oscillations of beams and bridges composed from materials of different density. The solution of the differential equation is reduced to the solution of the Volterra integral equation. The integral equation is solved by Picard's method of successive approximations. The aim of the investigation of the integral equation is to obtain asymptotic formulas and estimates for the solutions of the differential equation that defines the differential operator. Questions of geophysics, quantum mechanics, kinetics, gas dynamics and the theory of oscillations of rods, beams and membranes require the development of asymptotic methods for the case of differential equations with nonsmooth coefficients. Asymptotic methods continue to evolve, despite the rapid progress in numerical methods associated with the advent of supercomputers; at present asymptotic and numerical methods complement each other. In the paper, for large values of the spectral parameter, the asymptotics of the solutions of the differential equation that defines the differential operator is obtained. Asymptotic estimates for solutions are established similarly to the asymptotic estimates of solutions of a second-order differential operator with smooth coefficients. The study of periodic boundary conditions leads to the study of the roots of a function represented in the form of a fourth order determinant. To obtain the roots of this function, an indicator diagram has been examined. The roots are in four sectors of an infinitesimal angle, determined by the indicator diagram. The behavior of the roots of this equation in each of the sectors of the indicator diagram is investigated. The asymptotics of eigenvalues of the differential operator under consideration is found. The formulas obtained for the asymptotics of the eigenvalues make it possible to study the spectral properties of the eigenfunctions. If the potential of the operator is not a summable function, but only piecewise smooth, then the obtained formulas for the asymptotics of the eigenvalues are sufficient to derive the formula for the first regularized trace of the differential operator under study.

**Key words:** differential operator of fourth order, summable potential, periodic boundary conditions, spectral parameter, asymptotics of solutions, asymptotics of eigenvalues.

## References

1. Lidskiy V. B., Sadovnichiy V. A. Asymptotic formulas for the roots of a class of entire functions. *Matematicheskij sbornik [Mathematical Collection]*, 1968, vol. 65, no. 4, pp. 558–566 (in Russian).
2. Lidskiy V. B., Sadovnichiy V. A. Regularized sums of the roots of a class of entire functions. *Funkcional'nyj analiz i ego prilozhenija [Functional Analysis and its Applications]*, 1967, vol. 1, no. 2, pp. 52–59 (in Russian).
3. Mitrokhin S. I. About formulas of regularized traces for second order differential operators with discontinuous coefficients. *Vestnik Moskovskogo universiteta. Ser. Matematika, mehanika. [Vestnik MGU. Series: Mathematics, Mechanics]*, 1986, no. 6, pp. 3–6 (in Russian).
4. Mitrokhin S. I. About spectral properties of differential operators with discontinuous coefficients. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations]*, 1992, vol. 28, no. 3, pp. 530–532 (in Russian).
5. Mitrokhin S. I. About some spectral properties of differential operators of the second order with discontinuous weight function. *Doklady RAN [Reports of the Russian Academy of Sciences]*, 1997, vol. 356, no. 1, pp. 13–15 (in Russian).
6. Sadovnichiy V. A. About traces of ordinary differential operators of the highest orders. *Matematicheskij sbornik [Mathematical Collection]*, 1967, vol. 72, no. 2, pp. 293–310 (in Russian).
7. Vinokurov V. A., Sadovnichii V. A. Asymptotics of any order for eigenvalues and eigenfunctions of the boundary value Sturm–Liouville problem on a segment with a summable potential. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations]*, 1998, vol. 34, no. 10, pp. 1423–1426 (in Russian).
8. Vinokurov V. A., Sadovnichii V. A. Asymptotics of any order for eigenvalues and eigenfunctions of the boundary value Sturm–Liouville problem on a segment with a summable potential. *Izvestija RAN. Seriya: matematika [News of the Russian Academy of Sciences]*, 2000, vol. 64, no. 4, pp. 47–108 (in Russian).



9. Mitrokhin S. I. About spectral properties of a fourth-order differential operator with integrable coefficients. *Trudy MIAN [Works MIAN]*, 2010, vol. 270, pp. 188–197 (in Russian).
10. Mitrokhin S. I. About spectral properties of a delay differential operator with summable coefficients. *Ufmskiy matematichkiy zhurnal [Ufa Mathematical Journal]*, 2011, vol. 3, no. 4, pp. 95–115 (in Russian).
11. Mitrokhin S. I. About spectral properties of differential operators of odd order with a summable potential. *Differentsial'nye uravneniya [Differential Equations]*, 2011, vol. 47, no. 2, pp. 1808–1811 (in Russian).
12. Mitrokhin S. I. Spectral properties of a family of differential operators of high even order with summable potential. *Vestnik VGU. Seriya: Fizika. Matematika [Vestnik VSU. Series: Physics. Mathematics]*, 2016, no. 4, pp. 121–135 (in Russian).
13. Naimark M. A. *Lineynye differentsial'nye operatory [Linear Differential Operators]*, Moscow, Nauka, 1969, 528 p. (in Russian).
14. Yurko V. A. *Vvedenie v teoriyu obratnykh spektral'nykh zadach [Introduction to the Theory of Inverse Spectral Problems]*, Moscow, Fizmatlit, 2007, 384 p. (in Russian).
15. Bellman R., Cooke K. L. *Differentsial'no-raznostnye uravneniya [Differential-Difference Equations]*, Moscow, Mir, 1967, 548 p. (in Russian).

*Received February 2, 2017*

MITROKHIN SERGEI IVANOVICH  
Lomonosov Moscow State University,  
Research Computer Center  
1 Vorobyevy Gory, Moscow, 119991 Russia  
E-mail: mitrokhin-sergey@yandex.ru

A NUMERICAL METHOD FOR THE SOLUTION  
OF FIFTH ORDER BOUNDARY VALUE PROBLEM  
IN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

**P. K. Pandey**

In this article we have proposed a technique for solving the fifth order boundary value problem as a coupled pair of boundary value problems. We have considered fifth order boundary value problem in ordinary differential equation for the development of the numerical technique. There are many techniques for the numerical solution of the problem considered in this article. Thus we considered the application of the finite difference method for the numerical solution of the problem. In this article we transformed fifth order differential problem into system of differential equations of lower order namely one and four. We discretized the system of differential equations into considered domain of the problem. Thus we got a system of algebraic equations. For the numerical solution of the problem, we have the system of algebraic equations. The solution of the algebraic equations is an approximate solution of the problem considered. Moreover we get numerical approximation of first and second derivative as a byproduct of the proposed method. We have shown that proposed method is convergent and order of accuracy of the proposed method is at least quadratic. The numerical results obtained in computational experiment on the test problems approve the efficiency and accuracy of the method.

**Mathematics Subject Classification (2010):** 65L10, 65L12.

**Key words:** boundary value problem, cubic order convergence, difference method, fifth order differential equation, odd order problems, odd-even order problems.

## 1. Introduction

The presences of differential equations in mathematical modelling of physical phenomena in natural sciences are common. A fifth order differential equation and corresponding boundary value problem arise in the study of dynamics of the fluid in rheology [1, 2]. In this article we consider a method for the numerical solution of the fifth order boundary value problems of the following form:

$$u^{(5)}(x) = f(x, u), \quad a < x < b, \quad (1.1)$$

where function  $f(x, u)$  is regular and differentiable in  $[a, b]$  and subject to the boundary conditions

$$u(a) = \alpha_1, \quad u'(a) = \alpha_2, \quad u''(a) = \alpha_3, \quad u(b) = \beta_1 \quad \text{and} \quad u'(b) = \beta_2$$

where  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1$  and  $\beta_2$  are real constant.

A literature on the theoretical concepts of existence and uniqueness of the solution of problem (1.1) in detail can be found in [3]. Thus the existence and uniqueness of the solution to problem (1.1) is assumed. The emphasis in this article will be on the development of a numerical method for the approximate numerical solution of the fifth order boundary value problem.

In the literature little work reported on the solution of odd higher order boundary value problems. Some work reported in the literature specially on fifth order boundary value problems are finite difference method [4], spline method [5, 6], adomian decomposition method [7], spectral Galerkin and collocation method [2, 8, 9], differential transformation [10] and references therein. Recently problem (1.1) solved by reproducing kernel method and some literary work reported in [11].

Hence, the purpose of this article is to develop numerical method for solution of fifth order boundary value problems (1.1). An odd third order boundary value problem solved and boundary conditions incorporated in natural way in [12]. Motivated by that work, we developed finite difference method for numerical solution of fifth order boundary value problem by reducing to system of odd-even order boundary value problems. To the best of our knowledge, in the literature no method similar to proposed method for the numerical solution of problem (1.1) has been reported. We hope that others may find the proposed method an improvement to those existing finite difference methods for fifth order boundary value problems.

We have presented our work in this article as follows: In Section 2 the finite difference method, in Section 3 we derived a finite difference method. In Section 4, we have discussed convergence of the proposed method under appropriate condition. The application of the proposed method on the test problems and numerical results in Section 5. A discussion and conclusion on the overall performance of the proposed method are presented in Section 6.

## 2. The Difference Method

Let us consider the following initial value problem,

$$\frac{du}{dx} = v(x), \quad a < x < b, \tag{2.1}$$

with the initial condition

$$u(a) = \alpha_1,$$

where  $v(x)$  is some differentiable function in  $[a, b]$ . Then equation (1.1) transformed into the following form,

$$\frac{d^4v}{dx^4} = f(x, u), \quad a < x < b, \tag{2.2}$$

with the boundary conditions

$$v(a) = \alpha_2, \quad v'(a) = \alpha_3, \quad v(b) = \beta_2 \quad \text{and} \quad v'(b) = \gamma_1,$$

where  $\gamma_1$  is an approximate value and equal to  $\frac{2(\alpha_1+(N+1)h\beta_2-\beta_1)}{((N+1)h)^2}$ . Thus the fifth order boundary value problem (1.1) has been reduced to a system of lower order boundary value problems (2.1)–(2.2).

We define  $N$  finite numbers of nodal points  $a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N+1} \leq b$  using uniform step length  $h$  such that  $x_i = a + ih$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots, N + 1$ , in  $[a, b]$ , the domain in which the solution of the problem (1.1) is desired. Suppose we wish to determine the numerical approximation of solution  $u(x)$  of the problem (1.1) at the nodal point  $x_i$  and let  $u_i$  denotes the numerical approximation of  $u(x)$  at node  $x = x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Furthe let us denote  $f_i$  as the approximation of the value of the source function  $f(x, u(x))$  at node  $x = x_i$ ,

$i = 0, 1, 2, \dots, N + 1$ . Thus the system boundary value problem (2.1)–(2.2), a transformed boundary value problem (1.1) at node  $x = x_i$  may be written as,

$$\begin{aligned} v_i^{(4)} &= f_i, \\ u_i' &= v_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \end{aligned}$$

Following the ideas in [13, 14], we propose our finite difference method for  $v(x)$ ,  $v'(x)$  and  $u(x)$  a numerical solution of problem (2.3),

$$\begin{aligned} -2(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) + h(v_{i+1}' - v_{i-1}') &= \frac{h^4}{90}(f_{i+1} + 13f_i + f_{i-1}); \\ -3(v_{i+1} - v_{i-1}) + h(v_{i+1}' + 4v_i' + v_{i-1}') &= \frac{h^4}{60}(f_{i+1} - f_{i-1}); \\ -hv_i + \frac{h^2}{2}v_i' + u_i - u_{i-1} &= 0. \end{aligned}$$

If the forcing function  $f(x, u)$  in problem (1.1) is linear then the system of equations (2.4) will be linear otherwise we will obtain nonlinear system of equations.

### 3. Derivation of the Difference Method

In this section we outline the derivation of the proposed method, we have followed the same approach as given in [13, 14]. Let us write a linear combination of solution  $v(x)$ ,  $v'(x)$  and source function  $f(x, u)$  at nodes  $x_{i\pm 1}$ ,  $x_i$

$$a_1(v_{i+1} + v_{i-1}) + a_0v_i + hb_1(v_{i+1}' - v_{i-1}') + h^4(c_1(f_{i+1} + f_{i-1}) + c_0f_i) = 0, \quad (3.1)$$

where  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_0$  and  $c_1$  are constants to be determined. Using Taylor series expansion about the point  $x_i$  and method of undetermined coefficients, we obtain

$$(a_0, a_1, b_1, c_0, c_1) = \left(4, -2, 1, -\frac{13}{90}, -\frac{1}{90}\right). \quad (3.2)$$

Thus from (3.1)–(3.2), we have

$$-2(v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}) + h(v_{i+1}' - v_{i-1}') - \frac{h^4}{90}(f_{i+1} + 13f_i + f_{i-1}) + T_i = 0, \quad (3.3)$$

where  $T_i$  is truncation error and equal to  $\frac{h^8}{560}v_i^{(8)}$ . Similarly we can derive the following equations

$$\begin{aligned} -3(v_{i+1} - v_{i-1}) + h(v_{i+1}' + 4v_i' + v_{i-1}') - \frac{h^4}{60}(f_{i+1} - f_{i-1}) + T_i' &= 0, \\ -hv_i + \frac{h^2}{2}v_i' + u_i - u_{i-1} + T_i^0 &= 0, \end{aligned} \quad (3.4)$$

where  $T_i'$ ,  $T_i^0$  are truncation errors and respectively equal to  $\frac{h^7}{432}v_i^{(7)}$ ,  $-\frac{h^3}{6}u_i^{(3)}$ . Thus from (3.3)–(3.4), we conclude that the order of the proposed finite difference method (2.4) will be at least  $O(h^2)$ .

#### 4. Convergence Analysis

We will consider following linear test equation for convergence analysis of the proposed method (2.4).

$$u^{(5)}(x) = f(x), \quad a < x < b. \quad (4.1)$$

$$u(a) = \alpha_1, \quad u'(a) = \alpha_2, \quad u''(a) = \alpha_3, \quad u(b) = \beta_1 \quad \text{and} \quad u'(b) = \beta_2.$$

Let  $\mathbf{u}$  be the solution obtained by method (2.4) of the problem (4.1), we can write in the matrix form

$$\mathbf{J}\mathbf{u} = \mathbf{R}\mathbf{H}. \quad (4.2)$$

Let  $\mathbf{U}$  be the exact solution of problem (4.1). Thus finite difference method (2.4) may be written in matrix

$$\mathbf{J}\mathbf{U} = \mathbf{R}\mathbf{H} + \mathbf{T}. \quad (4.3)$$

Let us define an error matrix a difference between approximate and exact solution of problem (4.1), i. e.  $\mathbf{E} = \mathbf{u} - \mathbf{U}$  and subtract (4.3) from (4.2), we have

$$\mathbf{E} = -\mathbf{J}^{-1}\mathbf{T}, \quad (4.4)$$

where

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & h\mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ -3\mathbf{A}_{21} & h\mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ -h\mathbf{A}_{31} & \frac{h^2}{2}\mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}_{3N \times 3N},$$

and

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & & 0 \\ -2 & 4 & -2 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -2 & 4 & -2 \\ 0 & & & -2 & 4 \end{pmatrix}_{N \times N}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & -1 & 0 & 1 \\ 0 & & & -1 & 0 \end{pmatrix}_{N \times N},$$

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & & & 1 & 4 \end{pmatrix}_{N \times N}, \quad \mathbf{A}_{31} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}_{N \times N},$$

$$\mathbf{A}_{33} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 1 \\ 0 & & & -1 & 1 \end{pmatrix}_{N \times N},$$

$$\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{21}, \quad \mathbf{A}_{31} = \mathbf{A}_{32} \quad \text{and} \quad \mathbf{A}_{13} = \mathbf{A}_{23} = \mathbf{0}_{N \times N},$$

$$\mathbf{u} = [v_1, \dots, v_N, v'_1, \dots, v'_N, u_1, \dots, u_N]^T, \quad \mathbf{U} = [V_1, \dots, V_N, V'_1, \dots, V'_N, U_1, \dots, U_N]^T,$$

$$\mathbf{RH} = (d_i)_{3N \times 1},$$

$$d_i = \begin{cases} 2\alpha_2 + h\alpha_3 + \frac{h^4}{90}(f_{i+1} + 13f_i + f_{i-1}), & i = 1; \\ \frac{h^4}{90}(f_{i+1} + 13f_i + f_{i-1}), & 2 \leq i \leq N-1; \\ 2\beta_2 + h\gamma_1 + \frac{h^4}{90}(f_{i+1} + 13f_i + f_{i-1}), & i = N; \\ -3\alpha_2 - h\alpha_3 + \frac{h^4}{60}(f_{i+1} - f_{i-1}), & i = N+1; \\ \frac{h^4}{60}(f_{i+1} - f_{i-1}), & N+2 \leq i \leq 2N-1; \\ 3\beta_2 + h\gamma_1 + \frac{h^4}{60}(f_{i+1} - f_{i-1}), & i = 2N; \\ \alpha_1, & i = 2N+1; \\ 0, & 2N+2 \leq i \leq 3N \end{cases}$$

$$\text{and } \mathbf{T} = (t_i)_{3N \times 1},$$

$$t_i = \begin{cases} -\frac{h^8}{560}v_i^{(8)}, & 1 \leq i \leq N; \\ -\frac{h^7}{432}v_i^{(7)}, & N+1 \leq i \leq 2N; \\ \frac{h^3}{6}u_i^{(3)}, & 2N+1 \leq i \leq 3N. \end{cases}$$

It is easy to prove that matrices  $\mathbf{A}_{11}$ ,  $\mathbf{A}_{22}$  and  $\mathbf{A}_{33}$  are invertible [15, 16]. Let us define

$$v_k^{up} = \max_{j=1,2,\dots,k-1} \|A_{jk}A_{kk}^{-1}\|, \quad k = 2, 3, \quad v_k^{low} = \max_{j=k+1,3} \|A_{jk}A_{kk}^{-1}\|, \quad k = 1, 2,$$

$$M^* = \prod_{2 \leq k \leq 3} (1 + v_k^{up}) \quad \text{and} \quad M_* = \prod_{1 \leq k \leq 2} (1 + v_k^{low}).$$

Let us assume

$$M_*M^* < M_* + M^*$$

then matrix  $\mathbf{J}$  is invertible [17] and

$$\|\mathbf{J}^{-1}\| \leq \frac{\max_k \|A_{kk}^{-1}\| M_*M^*}{M_* + M^* - M_*M^*}. \quad (4.5)$$

Thus from (4.4) and (4.5), we have

$$\|\mathbf{E}\| = \|\mathbf{J}^{-1}\mathbf{T}\| \leq \|\mathbf{T}\| \frac{\max_k \|A_{kk}^{-1}\| M_*M^*}{M_* + M^* - M_*M^*}. \quad (4.6)$$

Thus from equation (4.6) it follows that  $\|\mathbf{E}\|$  is bounded and it will tends to zero as  $h$  approaches to zero. This established the convergence of the method (2.4) and the order of convergence of method (2.4) is at least  $O(h^2)$ .

## 5. Numerical Results

To demonstrate the computational efficiency of method (2.4), we have considered two model problems. In each model problem, we took uniform step size  $h$ . In Table 1 and Table 2, we have shown  $MAE_0$ ,  $MAE_1$  and  $MAE_2$  the maximum absolute error in the solution  $u(x)$ , derivatives of solution  $u'(x)$  and  $u''(x)$  of the problems (1) for different values of  $N$ . We have used the following formulas in computation of  $MAE_0$ ,  $MAE_1$  and  $MAE_2$ :

$$MAE_0 = \max_{1 \leq i \leq N} |u(x_i) - u_i|,$$

$$MAE_1 = \max_{1 \leq i \leq N} |u'(x_i) - v_i|,$$

$$MAE_2 = \max_{1 \leq i \leq N} |u''(x_i) - v'_i|.$$

We have used Gauss Seidel and Newton–Raphson iteration method to solve respectively linear and nonlinear system of equations arised from equation (2.4). All computations were performed on a Windows 2007 Ultimate operating system in the GNU FORTRAN environment version 99 compiler (2.95 of gcc) on Intel Core i3-2330M, 2.20 Ghz PC. The solutions are computed on  $N$  nodes and iteration is continued until either the maximum difference between two successive iterates is less than  $10^{-6}$  or the number of iteration reached  $10^3$ .

PROBLEM 1. The model linear problem given by

$$u^{(5)}(x) = -4u'(x), \quad 0 < x < 1,$$

subject to boundary conditions

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = 1, \quad u''(0) = 2, \quad u(1) = \exp(1) \sin(1), \quad u'(1) = \exp(1)(\sin(1)+\cos(1)).$$

The analytical solution of the problem is  $u(x) = \exp(x) \sin(x)$ . The  $MAE_0$ ,  $MAE_1$  and  $MAE_2$  computed by method (2.4) for different values of  $N$  are presented in Table 1.

**Table 1**

Maximum absolute error (Problem 1)

N	Maximum absolute error		
	$MAE_0$	$MAE_1$	$MAE_2$
16	.62513351(-3)	.15091896(-3)	.54979324(-3)
32	.16224384(-3)	.56743622(-4)	.43153763(-3)
64	.44584274(-4)	.71525574(-6)	.29802322(-4)
128	.11444092(-4)	.47683716(-6)	.47683716(-4)

PROBLEM 2. The nonlinear model problem given by

$$u^{(5)}(x) = \frac{(u'(x))^2}{(5+x)^3} + \frac{23}{(5+x)^5}, \quad 0 < x < 1,$$

subject to boundary conditions

$$u(0) = \ln(5), \quad u'(0) = \frac{1}{5}, \quad u''(0) = -\frac{1}{25}, \quad u(1) = \ln(6), \quad u'(1) = \frac{1}{6}.$$

The analytical solution of the problem is  $u(x) = \ln(x + 5)$ . The  $MAE_0$ ,  $MAE_1$  and  $MAE_2$  computed by method (2.4) for different values of  $N$  are presented in Table 2.

**Table 2**

Maximum absolute error (Problem 2)

N	Maximum absolute error		
	$MAE_0$	$MAE_1$	$MAE_2$
16	.19752979(-3)	.40866435(-3)	.24468731(-2)
32	.43869019(-4)	.20343065(-3)	.24441648(-2)
64	.11444092(-4)	.10140240(-3)	.24403818(-2)
128	.25033951(-5)	.50351024(-4)	.24273539(-2)

The accuracy in numerical approximation of solution in considered model problems increases as step size  $h$ . The order of accuracy in the numerical experiment can be estimated and it is quadratic in the numerical approximation of solution of problems. The advantage of the proposed method (2.4) is we get numerical approximation of derivatives as a byproduct. It is evident in numerical experiment that proposed method (2.4) is convergent.

## 6. Conclusion

To find the approximate numerical solution of fifth order boundary value problems using finite difference method has been developed. At nodal point  $x = x_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , we have obtained a system of algebraic equations given by (2.4) which is system of linear equations if source function  $f(x, u)$  is linear otherwise system of nonlinear equations. The propose method is computationally efficient and accurate; moreover we get numerical approximation of first and second derivative as a byproduct. In future work, we will deal with similar extension of the present idea to solve higher order boundary value problems. Work in this direction is in progress.

## References

1. Sibley D. N. Viscoelastic Flows of PTT Fluids. Ph.D. Thesis.—UK: University of Bath, 2010.
2. Davies A. R., Karageorghis A., and Phillips T. N. Spectral Galerkin methods for the primary two-point boundary-value problem in modeling viscoelastic flows // *Internat. J. Numer. Methods Eng.*—1988.—Vol. 26, № 3.—P. 647–662.
3. Agarwal R. P. Boundary Value Problems for Higher Order Differential Equations.—Singapore: World Scientific, 1986.
4. Khan M. S. Finite difference solutions of fifth order boundary value problems. Ph.D. thesis.—UK: Brunel University London, 1994.
5. Caglar H. N., Caglar S. H., and Twizell E. H. The numerical solution of fifth-order boundary value problems with sixth-degree  $B$ -spline functions // *Appl. Math. Letters.*—1999.—Vol. 12, № 5.—P. 25–30.
6. Lamni A., Mraoui H., Sbibih D., and Tijini A. Sextic spline solution of fifth order boundary value problems // *Math. Computer Simul.*—2008.—Vol. 77.—P. 237–246.
7. Wazwaz A. M. The numerical solution of fifth-order boundary value problems by the decomposition method // *J. Comp. and Appl. Math.*—2001.—Vol. 136, № 1–2.—P. 259–270.
8. Karageorghis A., Davies A. R., and Phillips T. N. Spectral collocation methods for the primary two-point boundary-value problem in modelling viscoelastic flows // *Internat. J. Numer. Methods Eng.*—1988.—Vol. 26, № 4.—P. 805–813.
9. Viswanadham K. N. S. K., Krishnaa P. M., and Rao C. P. Numerical Solution of Fifth Order Boundary Value Problems by Collocation Method with Sixth Order  $B$ -Splines // *Internat. J. Numer. Methods Eng.*—2010.—Vol. 8, № 2.—P. 119–125.
10. Erturk V. S. Solving nonlinear fifth order boundary value problems by differential transformation method // *Selcuk J. Appl. Math.*—2007.—Vol. 8, № 1.—P. 45–49.
11. Ali A., Mustafa I., and Adem K. A Comparison on Solutions of Fifth-Order Boundary Value Problems // *Appl. Math. Inf. Sci.*—2016.—Vol. 10, № 2.—P. 755–764.
12. Pandey P. K. The Numerical Solution of Third Order Differential Equation Containing the First Derivative // *Neural, Parallel and Sci. Comp.*—2005.—Vol. 13.—P. 297–304.
13. Mohanty R. K. A fourth-order finite difference method for the general one-dimensional nonlinear biharmonic problems of first kind // *J. Comp. Appl. Math.*—2000.—Vol. 114, № 2.—P. 275–290.
14. Mohanty R. K., Jain M. K. and Pandey P. K. Finite difference methods of order two and four for 2-D nonlinear biharmonic problems of first kind // *Int. J. Comput. Math.*—1996.—Vol. 61.—P. 155–163.
15. Varga R. S. Matrix Iterative Analysis, Second Revised and Expanded Edition.—Heidelberg: Springer-Verlag, 2000.
16. Horn R. A., Johnson C. R. Matrix Analysis.—N. Y.: Cambridge Univ. Press, 1990.
17. Gil M. I. Invertibility Conditions for Block Matrices and Estimates for Norms of Inverse Matrices // *Rocky Mountain J. of Math.*—2003.—Vol. 33, № 4.—P. 1323–1335.



*Received November 30, 2016*

PRAMOD KUMAR PANDEY  
Dyal Singh College (University of Delhi),  
Associate Professor  
Lodhi Road, New Delhi-110003, India  
E-mail: pramod\_10p@hotmail.com

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ  
КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ПЯТОГО ПОРЯДКА ДЛЯ  
ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Панди П. К.

В данной статье предложена методика решения граничной задачи пятого порядка как сопряженной пары граничных задач. Рассматривается граничная задача пятого порядка для обыкновенного дифференциального уравнения. Существуют различные методы численного решения этой задачи. Мы рассматриваем применение метода конечных разностей для численного решения задачи. В данной статье мы преобразовали дифференциальную задачу пятого порядка в систему дифференциальных уравнений более низкого порядка, а именно первого и четвертого. Далее, мы провели дискретизацию системы дифференциальных уравнений в рассматриваемой области  $\Omega$ , тем самым, получили систему алгебраических уравнений. Теперь для численного решения задачи мы располагаем системой алгебраических уравнений, решение которой служит приближенным решением рассматриваемой задачи. Кроме того, мы получаем численное приближение первой и второй производных в качестве побочного продукта предлагаемого метода. Показано, что предлагаемый метод сходится и порядок точности предлагаемого метода, по меньшей мере, квадратичен. Численные результаты, полученные в ходе вычислительного эксперимента по тестовым задачам, подтверждают эффективность и точность метода.

**Ключевые слова:** краевая задача, сходимости кубического порядка, разностный метод, дифференциальное уравнение пятого порядка, задача нечетного порядка, задача четно-нечетного порядка.

УДК 681.3.06

## СЦЕНАРИЙ НЕВЫНУЖДЕННОЙ ДЕСТРУКЦИИ ПОПУЛЯЦИИ В МОДИФИКАЦИИ УРАВНЕНИЯ ХАТЧИНСОНА<sup>1</sup>

А. Ю. Переварюха

Рассматривается проблема моделирования резких изменений в режиме автоколебаний, присущих видам, которые способны воздействовать на среду своего обитания. Актуальность работы обусловлена необходимостью совершенствования методов математической биологии для все чаще проявляющихся нестационарных и экстремальных типов популяционной динамики. Стремительные переходы к резким флуктуациям численности возникают при инвазиях активно размножающихся видов вредителей. Предложена модификация уравнения Хатчинсона с учетом существенной роли достижения предпороговой численности, меньшей предельной емкости экологической ниши  $K$  из уравнения Ферхюльста, и существенно большей нижней пороговой численности  $L$  из уравнения Базыкина:  $L \ll H < K$ . В нашем уравнении при изменении действующего запаздывания регуляции  $\tau$  описывается атипичный сценарий развития опасной вспышки насекомых. Как следует из экологических примеров, популяционные циклы с большой амплитудой часто оказываются неустойчивы. Часто цикл — переходный режим. Не всегда происходит плавное затухание осцилляций  $\bar{N}_*(r, t) \rightarrow K$ . В новой модели после бифуркации Андронова — Хопфа при  $\hat{\tau} = \tau_* + \xi$  и появления автоколебаний негармонической формы с увеличением их амплитуды резко происходит потеря диссипативного свойства траектории. Вычислительный сценарий с внезапным выходом неуставившегося цикла  $N_*(\hat{\tau}, t)$  из области допустимых значений численности интерпретируется как специфическое нарушение функционирования среды, ведущее к деструкции биосистемы в очаге вспышки насекомых или безвозвратной гибели в случае островной популяции млекопитающих.

**Ключевые слова:** уравнение Хатчинсона, динамика насекомых вредителей, модель особой вспышки численности, бифуркация Андронова — Хопфа, неустойчивый цикл.

### 1. Введение

Варианты моделей асимптотической динамики популяций для стационарного или периодически возмущенного репродуктивного потенциала развиты достаточно подробно, но существует проблема анализа ряда экстремальных плохо прогнозируемых явлений в экологических процессах, которые входят в противоречие с базовыми принципами регулирования численности.

Ограниченность пределов роста численности популяции — один из таких ключевых принципов для системной экологии [1]. Первой популяционной моделью ограниченного роста стала модель Ферхюльста 1838 г. Асимптотика решения уравнения подразумевала плавный выход численности к стационарному состоянию  $K$ , соответствующему балансу со средой:

$$\frac{dN}{dt} = rN \left( 1 - \frac{N}{K} \right), \quad (1)$$

---

© 2017 Переварюха А. Ю.

<sup>1</sup> Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 17-07-00125.

$$N(t) = \frac{N(0)e^{rt}}{1 + N(0)(e^{rt} - 1)/K}.$$

Ферхюльст проводил оценку репродуктивного параметра  $r$  уравнения (1) по демографическим данным европейских стран и уже тогда предлагал модификации. Считаемая хрестоматийной квадратичная саморегуляция численности в (1) не рассматривалась Ферхюльстом как единственно возможная для модели ограниченного роста. В 1845 г. он выписал такое обобщенное уравнение:

$$M \frac{dp}{dt} = mp - np^\mu.$$

Современные обозначения  $r$ ,  $K$  модели (1) и понятия  $K$ -отбор и  $r$ -стратегия в экологии появились значительно позднее. Позднее он предположил [2], что динамика народонаселения Европы развивается согласно (1) только до некоторого порога, так как не наблюдалось замедления темпов прироста населения, которое для (1) должно происходить после  $N > \frac{K}{2}$ .

В правую часть (1) можно добавить сомножитель  $(N - L)$ , увеличив число ее нулей или раздельно учесть смертность, зависящую от плотности скопления  $\delta N^2$  и естественную  $\varsigma N$ , много увеличив число параметров:

$$\frac{dN}{dt} = r_1 \frac{\gamma N^2}{\gamma + \sigma N} - \varsigma N - \delta N^2, \quad (2)$$

и получить дополнительно репеллерную точку равновесия  $L$ , что предложил Базыкин для видов с минимально допустимой численностью группы [3]. Отметим, что для формы правой части (1)  $f(N)(N - L)$  в вычислительных моделях еще необходима компенсирующая сверхбыстрый прирост перенормировка репродуктивного параметра:  $r_1 \ll r$ , но вымирание  $N(t) \rightarrow 0$  выглядит слишком стремительным и безвозвратным явлением.

Многие популяции могут брать начало от нескольких сохранивших репродуктивную активность особей и через некоторое время демонстрировать режимы сложных флуктуаций. С вселения единичных особей начались регулярные нашествия европейского кукурузного мотылька *Ostrinia nubilalis* в Северной Америке и затянувшаяся с 2012 г. вспышка дальневосточной самшитовой огневки *Cydalima perspectalis* в Краснодарском крае. Исчезновение ряда популяций (характерно для островных сообществ, где нет разреженной границы ареала) может происходить как раз не из состояния близкого к неустойчивой  $L$ , но из благополучной окрестности балансовой емкости  $K$ . Мы ставим задачу получения в модели режима, соответствующего частному, но значимому сценарию популяционной динамики. Например, из-за истощения пригодной растительности следующее крайне многочисленное поколение вредителей вдруг оказывается последним, и так часто заканчивается многолетняя вспышка численности.

## 2. Проблема популяционных автоколебаний

Решения (1) и (2) плохо согласовывались с наблюдавшимися разнообразного вида флуктуациями популяций самых разных животных. Флуктуации регистрируются даже для слонов в Национальном парке Крюгера, потому приходится проводить отстрелы с целью удержать популяцию в оптимальном по расчетам для сохранения растительной среды состоянии [4]. Слоны способны стремительно достигать пиковых значений  $N > 9000$ , тогда как для них рассчитано  $K = 7000$ . Хотя согласно экологической теории именно слоны считаются примером  $K$ -стратегии, подавляющей возмущения среды и

стремящейся к асимптотическому равновесию  $N \rightarrow K \pm \epsilon$ . Признаков уравнивания у расчетного предела  $K$  не наблюдается и после изъятия особей. Через некоторое время после отстрела слоны начинают вновь оказывать чрезмерное давление на растительность. Лемминги считаются примером  $r$ -стратегии с нерегулярностью своих больших пиков, но вспышки грызунов для арктических экосистем с редкой растительностью из полярных кустарничков тундры эквиваленты воздействию слонов на леса. Колебательная динамика популяции может оказываться неустойчивой. Для гренландского лемминга давно были известны популяционные циклы значительной амплитуды, которые внезапно завершились после серии пиков в конце XX века, и в настоящее время популяция леммингов мало изменяется на низком уровне численности [5].

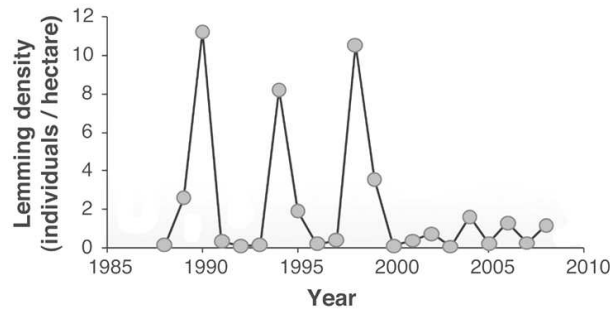


Рис. 1. Неустойчивость популяционного цикла лемминга.

Модель взаимодействия двух видов Вольтерра, как хорошо известно, позволяет получить циклическое решение системы двух дифференциальных уравнений. Казалось бы, уравнения позволяют формализовать колебания с отставанием по фазе, наблюдаемые в сообществе «зайцы — рыси». Как было установлено позднее, цикличность численности канадских зайцев обнаружена и в регионах, где их враги не обитают. Более того, аналогичные квазигармонические колебания свойственны многим другим северным популяциям грызунов, в том числе обособленным островным группам, и которые по экологическим причинам не могут быть описаны исходя из модели взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва». Не подтвердились выводы об устойчивых колебаниях из модели Вольтерра в лабораторных экспериментах Г. Гаузе с простейшими организмами. Колебания в лабораторных экспериментах с насекомыми получил С. Утида, но для взаимоотношений вида «паразит — хозяин». Паразитизм имеет отличия от трофического взаимодействия «хищник — жертва», так как текущая динамика численности паразитической оси зависит от количества доступных яиц (но не взрослых жуков) в предшествующем поколении.

Из лабораторных экспериментов энтомолога Никольсона [6] стало понятно, что колебания численности могут появляться у изолированных популяций, обитающих при постоянных условиях и получающих фиксированное количество корма.

### 3. Развитие уравнения (1) с запаздыванием

Хатчинсоном [7] была предложена модификация (1), исходя из запаздывающего действия регуляции в размножении дафний, что привело к уравнению с отклоняющимся по времени аргументом «logistic DDE»:

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right). \quad (3)$$

Введенное в уравнение запаздывание  $\tau$  служит характеристикой регуляции — использования и восстановления ресурсов или накопления/распада отравляющих продуктов метаболизма.

Возникающие в уравнении режимы поведения траектории были подробно исследованы во многих работах, в том числе отечественных [8]. При малых значениях запаздывания  $\tau$  динамика модели описет затухающие колебания  $N(t) \rightarrow K$ . В (3) установлена возможность возникновения бифуркации Андронова — Хопфа с появлением устойчивого предельного цикла  $N_*(t, r)$ . Нарушение устойчивости состояния равновесия зависит от величины  $r\tau$ . Дальнейшее увеличение  $r\tau > \frac{\pi}{2}$  вызывает переход в режим релаксационных колебаний. Быстрое возрастание амплитуды колебаний выраженной негармонической формы при увеличении временного промежутка между максимумами и минимумами, стремящимся к неотличимым от нуля значениям, приводят такой релаксационный цикл (рис. 2) к затруднениям при экологическом обосновании.

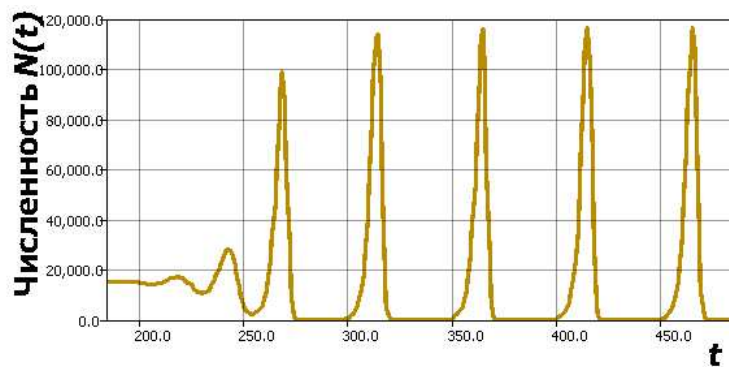


Рис. 2. Релаксационный цикл в уравнении (3),  $K = 15000$ .

Многим насекомым свойственны продолжительные вспышки численности, но они начинаются после преодоления некоторого порогового значения, когда паразиты не могут эффективно подавлять размножение. Формы колебаний для автохтонных и инвазионных популяций могут быть различными. Помимо затухающих и гармонических колебаний может возникать и противоположное явление — возникновение флуктуации с затяжными пиками численности. Такая ситуация возможна, например, при переходе некоторых популяций к каннибализму и/или может быть обусловлена изменением направления естественного отбора в особых условиях существования. Дополнение «репродуктивного» сомножителя запаздыванием  $rN(t - \tau)f[N(t), N(t - \tau)]$  не несет экологического смысла.

В [9] рассматривалась модификация модели Хатчинсона (с приведенными коэффициентами):

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t) f(N(t - 1)), \tag{4}$$

где  $f(\cdot)$  — дифференцируемая функция, разложимая в асимптотический ряд, для которой выполняются условия

$$f(0) = 1, \quad f(x) = -a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{x^k}, \quad x \rightarrow \infty, \quad a_0 > 0. \tag{4'}$$

Условиям (4') соответствует, например, предложенная ранее в [10] для тех же целей функция

$$f(x) = \frac{(1 - x)}{(1 + cx)}. \tag{4''}$$

В подобной модификации (известной как «food-limited DDE») расширяется число параметров, определяющих характеристики релаксационного цикла неклассической формы, так как при увеличении  $c$  в (4'') сжимается амплитуда.

Из дополнительных ограничений при преобразовании исходного уравнения (4) к сингулярно возмущенному  $\dot{x} = F(x(t-1), \epsilon)$  и далее к предельному релейному уравнению с запаздыванием  $\dot{x} = R(x(t-1))$  предполагается  $\lambda \gg 1$ . Для (4) с (4') утверждается существование единственного орбитально экспоненциально устойчивого цикла. По-прежнему непонятно какой именно нелинейный популяционный процесс может помочь предсказать свойство (4), так как из утверждения о свойствах цикла в [9] получено

$$\min N_*(t, \lambda) \sim C_1 \exp(-\lambda a_0), \quad C_1, a_0 = \text{const} > 0,$$

и, как отмечено ранее,  $\lambda$  изначально указывается достаточно большим значением. При использовании функции (4'') наши вычислительные эксперименты показывают влияние демпфирующего колебания параметра  $c$  на все характеристики цикла, что напрямую не обсуждается в [9], и требуется условие  $c \gg 1$ , так как при малых  $c$  свойства цикла (4) будут значительно менее интерпретируемы, чем в (3).

Для (3) и (4) установлено свойство диссипативности траектории:

$$N(t) \leq \exp(r\tau). \quad (4^*)$$

#### 4. Модель динамики вспышек листовертки

Некоторым популяциям вредителей свойственно специфическое нерегулярное явление пилообразной вспышки численности «sawtooth oscillations» [11], которую мы можем описать при дополнении модели (4), (4''). После равновесного состояния при численности бабочек, не вызывающей дефолиации, вдруг появляется серия непоследовательных очень многочисленных поколений, на порядок превышающих среднемноголетнюю численность за предшествующую декаду в очаге вспышки. Так внезапно проявляет себя еловая листовертка *Choristoneura fumiferana* в лесах Северной Америки (на рис. 3 — изменение площади погибшего леса с тремя выраженными пиками по данным [12]), где более 30 лет постоянно наблюдалась полная потеря хвои (дефолиация) на значительных площадях вплоть до прекращения вспышки в конце 1980-х гг. Завершение атипичной вспышки может происходить так же внезапно, как и ее развитие.

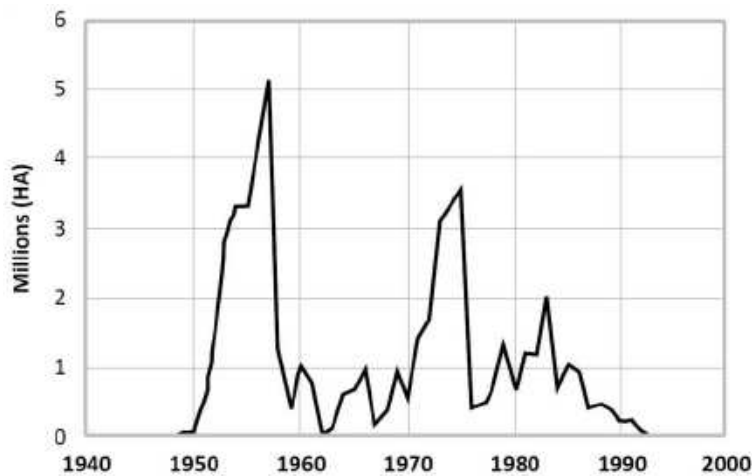


Рис. 3. Пилообразная вспышка листовертки в масштабах гибели леса.

Мы можем предложить математическое описание такого частного, но весьма неблагоприятного для лесного хозяйства сценария популяционной динамики, увеличив степень нелинейности правой части в (4''):

$$\frac{dN}{dt} = rN(t) \left( \frac{K - N^2(t - \tau)}{(K + cN^3(t - \tau))} \right). \quad (5)$$

Так удается сгладить недостаток у минимумов  $\min_{0 < t < T_*} N_*(t, r) \rightarrow \epsilon$ ,  $\epsilon \ll 1$ , слишком низких для возможностей повторного быстрого роста численности при свойственных вредителям больших  $r$ , но отойдя от условий (4'):  $f(x) \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow +\infty$ . В вычислительных исследованиях для (5) мы после бифуркации можем получить реализацию сценария пилообразной вспышки (рис. 4). Основным значимым аспектом (5) — очередной стремительный неконтролируемый рост численности начинается от значения близкого к существовавшему перед бифуркацией равновесию, оптимального баланса со средой. Не хватает у всех аналогичных модификаций уравнений с запаздыванием некоторых триггерных свойств, чтобы рассматривать аспекты быстрого сценария самозавершения вспышек.

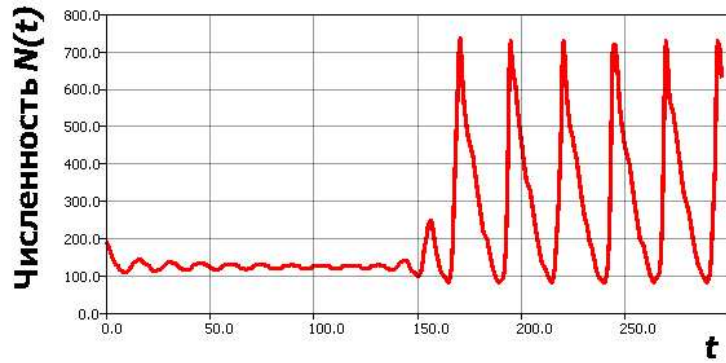


Рис. 4. Переход к релаксационному циклу в новой модели (5).

ЗАМЕЧАНИЕ. Известно, что в итерациях нелинейных функций  $R_{j+1} = \psi(R_j)$ , имеющих максимум  $\psi'(R_m) = 0$ ,  $\psi''(R_m) \neq 0$ , поведение траектории даже более разнообразно. В ихтиологии применяется:

$$R_{j+1} = aR_j e^{-bR_j}, \quad a > 1, \quad 0 < b < 1,$$

где при  $a > e^2$  возникают циклы разнообразных периодов, и дискретизация задачи поможет найти оптимальное решение. Однако, помимо периода циклы итераций отличаются взаимным расположением точек. При бифуркациях удвоения периода вокруг теряющей устойчивость циклической точки возникнут две новые, сохраняя симметрию ветвей на бифуркационной диаграмме сценария Фейгенбаума. Короткие циклы грызунов в таких терминах — это монотонные перестановки с пиком в конце, которые можно найти в «окнах периодичности» с циклами  $p \neq 2^i$  очень узких диапазонах значений управляющего параметра [13]. Существует ряд причин, по которым возникновение хаотического аттрактора в точке накопления каскада бифуркаций удвоения не является хорошим свойством для описания популяционных процессов.

### 5. Модификация с предкритическим порогом

Из развития уравнения (3) можно получить описание еще одного специфического экологического явления, которое не было рассмотрено в известных работах. В случае всплеск насекомых-фитофагов понятие емкости экологической ниши из (1) утрачивает смысл, а равновесие при малой их численности имеет другую природу. Из анализа дилеммы парка Крюгера предположим существование некоторого предкритического порогового уровня  $H < K$ . Для генерирующих всплески популяций нижний критический порог полагается весьма малым  $L \ll H$ . Положим, что достижение значения численности  $K$  означает не уравнивание, но деградацию необходимой составляющей среды обитания. Переход через мягкий порог имеет значение для механизмов контроля внутрипопуляционной структуры. Тогда на динамику системы оказывает влияние отклонение  $[H - N(t - \tau)]$ , притом величина отклонения может быть как положительной, так и отрицательной. Модифицируем (3) следующим образом:

$$\frac{dN}{dt} = r_1 N \left( 1 - \frac{N(t - \tau)}{K} \right) (H - N(t - \tau)). \quad (6)$$

Можно считать, что при смене знака отклонения члены правой части (воспроизводства и регуляции) меняются своими функциональными ролями в модели. Для правой части (6) не выполняются условия (4'), указанные для  $f(x)$  при обосновании утверждения о единственном орбитально устойчивом цикле, потому не обязательно теорема (2.1) из [9] будет полностью справедлива в нашем случае.

### 6. Вычислительный анализ новой модели

При малом значении запаздывания в (6) получаем затухающие осцилляции с  $N \rightarrow H$ . При увеличении  $\tau$  или  $r_1$  в таком уравнении (с  $r_1 = 10^{-3}r$ ) возникнет притягивающий цикл (рис. 5,  $K = 15000$ ,  $H = 5000$ ).

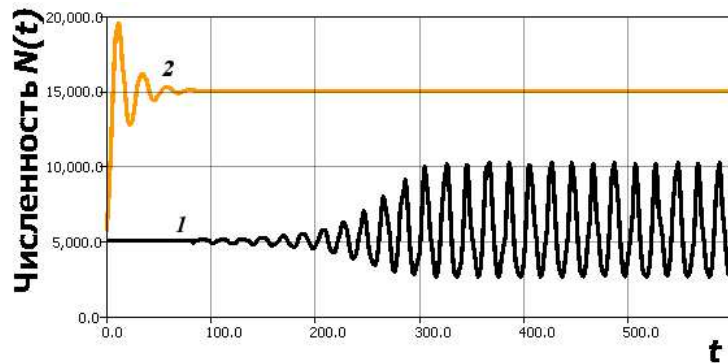


Рис. 5. 1 — цикл после бифуркации в (6), 2 — динамика (3) при аналогичных параметрах.

На рис. 5 динамика после плавного прохождения бифуркационного изменения по сценарию Андронова — Хопфа при переходе  $r_1$  через критическое значение (в вычислительном эксперименте рис. 5 все параметры модели сохраняются), показывающая установление цикла при  $N(0) = H + \epsilon$ ,  $H = 5000$ ,  $K = 15000$ .

Цикл быстро становится релаксационным с возрастанием  $r_1$ , из имеющейся, например, в [14] теории о модификациях logistic DDE мы не можем подтвердить его глобальную устойчивость. Амплитуда колебаний в отличие аналогичного случая модели (3) не



возрастает до нереалистичных величин, но остается в разумных для биологии границах. Скошенная форма пиков даже более похожа на реальные данные популяционной динамики. В (6) при  $N(0) < H$  переход к установившимся флуктуациям происходит не плавно, но через скачкообразный переходный режим.

При дальнейшем увеличении значения  $r_1\tau$  произойдет другое резкое изменение поведения траектории, которая перестанет притягиваться к замкнутому подмножеству фазового пространства. Изменение репродуктивного параметра можно трактовать как следствие ослабления давления паразитов на выживаемость личинок. Если давление ослабнет совсем, то при такой бифуркации траектория системы до установления цикла со своей увеличивающейся огромной амплитудой может быть резко выброшена за пределы допустимых для ее существования значений при  $N(t - \tau) > K$ . Такая потеря установившегося режима считается жесткой (катастрофической). На рис. 6 ситуация после бифуркации, когда в результате изменения параметра  $r_1$  (в сравнении с аналогичным изменением  $r$  в (3) в момент  $t = 150$ ) траектория в релаксационных колебаниях преодолевает значение  $K$ , и далее  $N(t) \rightarrow \infty$  реализует сценарий кризиса перенасыщения, появления последнего сверхмногочисленного поколения и деструкцию всей биосистемы.

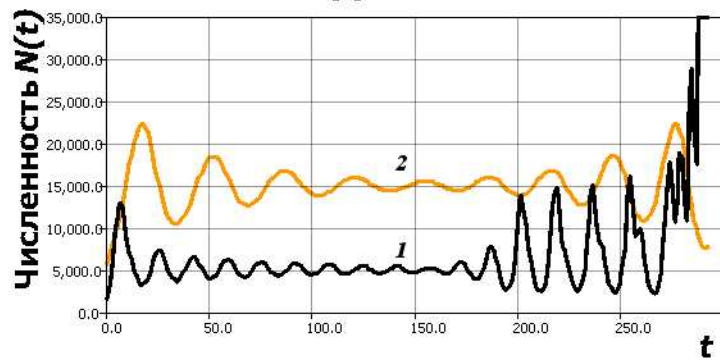


Рис. 6. 1 — выброс за границы емкости среды в (6),  
2 — динамика (3) при аналогичном изменении параметра.

Цикл сжимается и выбрасывается, вычислительный эксперимент заканчивается сообщением программы о переполнении при вычислениях с плавающей точкой.

Свойство диссипативности (4\*) более не выполняется.

### 7. Проблема обобщения всех модификаций (3)

Выглядит перспективным объединение идей двух предложенных модификаций, но не все варианты, возникающие в уравнениях, с запаздыванием имеют прикладной экологический смысл. Можно представить обобщенное уравнение в следующем виде:

$$\frac{dN}{dt} = \lambda N(t) \left( \frac{K - N^2(t - \tau)}{(K + cN^3(t - \tau))} \right) (H - N(t - \tau)), \quad (7)$$

увеличивая нелинейность в правой части до кубической. Тогда образующая для  $N(0) < H$  релаксационный цикл траектории при уменьшении  $c$  начнет достаточно параболически плавно и неограниченно возрастать (рис. 7,  $c_0 = 0.11$ , бифуркационное  $\hat{c} = 0.1$ ,  $\tau = 8$ ).

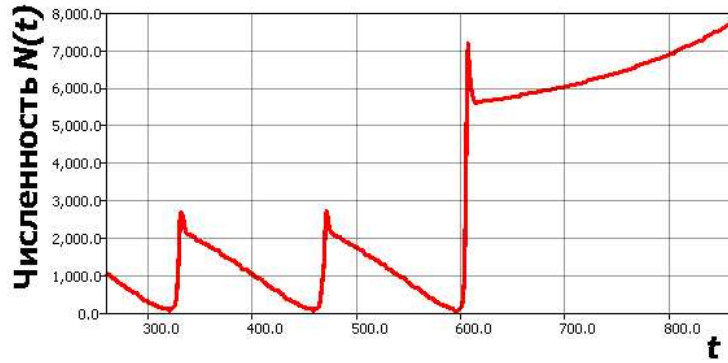


Рис. 7. Медленный сценарий ухода траектории из цикла в (7).

Подобный путь потери решением свойства диссипативности видится экологически не обоснованным и сценарий популяционной динамики вряд ли реализуется. Мы рассматривали ситуацию изолированной саморегулируемой популяции, потому должно присутствовать ограниченное сверху предельное состояние (цикл или равновесие), либо происходит деструкция биосистемы скачкообразно.

Авторы [10], пытаясь преодолеть отмеченные недостатки, в дальнейшем расширили модель (4), (4'') до системы, где параметры  $\lambda$ ,  $c$  становятся изменяющимися с периодом  $\omega$  функциями (обусловленными сезонностью характеристик среды обитания) и  $f(N(t - m\omega))$ . Однако в лабораторных экспериментах с насекомыми Никольсона и Утиды не вносились никакие вынуждающие воздействия. Для кукурузного мотылька *Ostrinia nubilalis* на Юге России свойственна динамика с серией резких пиков численности, перемежающаяся с годами длительной депрессии популяции, которую иногда связывают с цикличностью активности магнитного поля Солнца, но физического объяснения эффекту пока не получено. Потому актуально модельное описание именно внезапного возникновения специфических популяционных автоколебаний вредителей.

## 8. Заключение

Предложена модель возникновения популяционных колебаний релаксационной формы, где вместо дальнейшего увеличения амплитуды происходит выброс траектории в режим за рамками ограниченного прироста численности. Будем считать введенное в уравнение значение  $H$  мягким пороговым состоянием отложенного действия, в отличие от явной нижней критической точки  $L$  в (2) и жесткого уровня остановки прироста  $K$  в (1). Емкость среды не выступает более асимптотическим предельным значением для затухающих осцилляций. В новой модели критическим, но спонтанно преодолеваемым состоянием служит  $K$ .  $N > K$  на время  $\delta t > \tau$  подразумевает стремительное катастрофическое разрушение популяцией своей среды обитания. Пример катастрофы успешно размножавшейся искусственно вселенной популяции — судьба исчезнувших оленей на острове Беринга, куда в 1882 г. было завезено 15 голов, через 20 лет их численность колебалась 1,5–3 тыс. с учетом промысла. Без регуляции к 1917 г. на острове не осталось оленей, обильные лишайниковые пастбища были полностью истощены. В демографии самый известный случай кризиса перенаселения — загадка падения цивилизации острова Пасхи.

Таким образом, мы получили вычислительную модель, описывающую переход численности из окрестности неявного порога в устойчивый режим колебаний. В современном обзоре по применению уравнений с запаздыванием [15] в математической биологии

сценарий с разрушением автоколебаний не рассматривался. Бифуркация, для которой требовалось изменение условий регуляции, приводит систему не к изменению амплитуды/периода цикла или переходу к хаотическому движению, но к скачку за границы экологического баланса в виде резкой потери замкнутого колебательного контура. Полученные при исследовании уравнения характеристики достаточно особых случаев популяционного процесса не могут, по нашему мнению, быть распространены на обобщенный случай динамики распространения вида-вселенца. Модификация модели (6) с медленной потерей переходного циклического режима не получает содержательной популяционной интерпретации.

### Литература

1. *Jeffers J.* An Introduction to Systems Analysis: with Ecological Applications.—London: Edward Arnold, 1978.
2. *Vacaer N.* A Short History of Mathematical Population Dynamics.—London: Springer-Verlag, 2011. DOI: 10.1007/978-0-85729-115-8.
3. *Базыкин А. Д.* Теоретическая и математическая экология: проблема опасных границ и критериев приближения к ним // Математика и моделирование.—Пушкино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1990.—С. 232–237.
4. *van Aarde R.* Culling and the dynamics of the Kruger National Park African elephant population // Animal Conservation.—1999.—Vol. 2, № 2.—P. 287–294. DOI: 10.1111/j.1469-1795.1999.tb00075.x.
5. *Gilg O., Sittler T., Hanski I.* Climate change and cyclic predator-prey population dynamics in the high Arctic // Global Change Biology.—2009.—Vol. 15, № 11.—P. 2634–2652. DOI: 10.1111/j.1365-2486.2009.01927.x.
6. *Nicholson A.* An outline of the dynamics of animal populations // Austral. J. Zool.—1954.—Vol. 2, № 1.—P. 9–65. DOI: 10.1071/ZO9540009.
7. *Hutchinson G.* An Introduction to Population Ecology.—New Haven: Yale University Press, 1978.
8. *Борздыко В. И.* Об исследовании популяционной модели Хатчинсона // Диф. уравнения.—1985.—Т. 21.—С. 316–318.
9. *Колесов А. Ю., Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х.* Об одной модификации уравнения Хатчинсона // Журн. вычисл. матем. и мат. физики.—2010.—Т. 50, № 12.—С. 2099–2112. DOI: 10.1134/S0965542510120031.
10. *Gopalsamy K., Kulenovic M., Ladas G.* Time lags in a «food-limited» population model // Applicable Analysis.—1988.—Vol. 31, № 3.—P. 225–237. DOI: 10.1080/00036818808839826.
11. *Cooke B., Nealis V., Regniere J.* Insect Defoliators as Periodic Disturbances in Northern Forest Ecosystems.—Plant Disturbance Ecology: the Process and the Response.—Elsevier: Burlington, 2007.—P. 487–525.
12. *Gray D. R.* Historical spruce budworm defoliation records adjusted for insecticide protection in New Brunswick // J. Acad. Entomol. Soc.—2007.—Vol. 115, № 1.—P. 1–6.
13. *Шарковский А. Н., Коляда С. Ф., Сивак А. Г., Федоренко В. В.* Динамика одномерных отображений.—Киев: Наукова думка, 1989.
14. *Ladas G., Qian C.* Oscillation and global stability in a delay logistic equation // Dynamics and Stability of Systems.—1994.—Vol. 9, № 2.—P. 153–162. DOI: 10.1080/02681119408806174.
15. *Ruan S.* Delay differential equations in single species dynamics // Delay Differential Equations and Appl.—Berlin: Springer, 2006.—P. 477–517. DOI: 10.1007/1-4020-3647-7\_11.

*Статья поступила 26 июня 2016 г.*

ПЕРЕВАРЮХА АНДРЕЙ ЮРЬЕВИЧ  
Санкт-Петербургский институт  
информатики и автоматизации РАН,  
старший научный сотрудник лаборатории прикладной информатики  
РОССИЯ, 199178, Санкт-Петербург, 14-линия 39  
E-mail: temp\_elf@mail.ru

## SCENARIO OF INVOLUNTARY DESTRUCTION OF A POPULATION IN A MODIFIED HUTCHINSON EQUATION

Perevarukha A. Yu.

The problem of simulating abrupt changes in the mode of self-oscillations inherent in species that are capable of affecting their habitat is considered. The relevance of this work is the need to improve methods of mathematical biology to study non-stationary and extreme types of population dynamics, which often occur in practice. Rapid transitions to sharp fluctuations in the number of infestations occur during invasions of actively breeding pest species as *Ostrinia nubilalis*. Modification of the Hutchinson equation suggested in the article, taking into account a significant role of achieving the subthreshold point number that is less than the limiting capacity of the ecological niche  $K$  in Verhulst equation, but a significantly higher number of lower threshold  $L$  in Bazykin equation:  $L \ll H < K$ . In our equation, the atypical scenario of the development of a dangerous outbreak of insects is described with the change in the acting delay of regulation  $\tau$  value. As follows from ecological examples, population cycles with large amplitude are often unstable. Often the cycle is a transitional mode. The smooth damping of the oscillations  $\overline{N_*(r, t)} \rightarrow K$  does not always occur. In the new model, after the Hopf bifurcation, with the value  $\hat{\tau} = \tau_* + \xi$  and the appearance of auto-oscillations of the nonharmonic form with increasing amplitude, the loss of the dissipative property of the trajectory sharply occurs. The computational scenario with the sudden output of the transient cycle  $N_*(\hat{\tau}r, t)$  from the range of admissible values of abundance is interpreted as a specific disturbance of the functioning of the habitat. The loss of a compact attracting set leads to the destruction of the biosystem in the locus of an outbreak of insects or irretrievable death in the case of an island population of mammals.

**Key words:** Hutchinson equation, dynamics of pest insects, model of exclusive outbreak, Hopf bifurcation, unstable cycle.

### References

1. Jeffers J. *An Introduction to Systems Analysis: with Ecological Applications*. London: Edward Arnold, 1978.
2. Bacaer N. *A Short History of Mathematical Population Dynamics*. London: Springer-Verlag, 2011. DOI: 10.1007/978-0-85729-115-8.
3. Bazykin A. D. Theoretical and mathematical ecology: dangerous boundaries and criteria of approach them, *Mathematics and Modelling*. N. Y.: Nova Sci. Publ. Inc., 1993. P. 321–328.
4. van Aarde R. Culling and the dynamics of the Kruger National Park African elephant population, *Animal Conservation*, 1999, vol. 2, no. 2, pp. 287–294. DOI: 10.1111/j.1469-1795.1999.tb00075.x.
5. Gilg O., Sittler T., and Hanski I. Climate change and cyclic predator–prey population dynamics in the high Arctic, *Global Change Biology*, 2009, vol. 15, no. 11, pp. 2634–2652. DOI: 10.1111/j.1365-2486.2009.01927.x.
6. Nicholson A. An outline of the dynamics of animal populations, *Austral. J. Zool.*, 1954, vol. 2, no. 1, pp. 9–65. DOI: 10.1071/ZO9540009.
7. Hutchinson G. *An Introduction to Population Ecology*. New Haven: Yale University Press, 1978.
8. Borzdyko V. I. Investigation of the Hutchinson Population Model. *Differentsial'nye Uravneniya [Differential Equations]*, 1985, vol. 21, no. 2, pp. 316–318 (in Russian).
9. Kolesov A. Y., Mishchenko E. F., and Rozov N. K. A modification of Hutchinson's equation, *Comput. Math. and Math. PPhys.*, 2010, vol. 50, no. 12, pp. 1990–2002.
10. Gopalsamy K., Kulenovic M., and Ladas G. Time lags in a «food-limited» population model, *Applicable Analysis*, 1988, vol. 31, no. 3, pp. 225–237. DOI: 10.1080/00036818808839826.
11. Cooke B., Nealis V., and Regniere J. Insect Defoliators as Periodic Disturbances in Northern Forest Ecosystems, *Plant Disturbance Ecology: the Process and the Response*. Elsevier: Burlington, 2007. P. 487–525.
12. Gray D. R. Historical spruce budworm defoliation records adjusted for insecticide protection in New Brunswick, *J. Acad. Entomol. Soc.*, 2007, vol. 115, no. 1, pp. 1–6.
13. Sharkovsky A. N., Kolyada S. F., Sivak A. G., and Fedorenko V. V. *Dynamics of One-Dimensional Maps*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. 272 pp.

14. Ladas G., Qian C. Oscillation and global stability in a delay logistic equation, *Dynamics and Stability of Systems*, 1994, vol. 9, no. 2, pp. 153–162. DOI: 10.1080/02681119408806174.
15. Ruan S. Delay differential equations in single species dynamics, *Delay Differential Equations and Appl.* Berlin: Springer, 2006, pp. 477–517. DOI: 10.1007/1-4020-3647-7\_11.

*Received June 26, 2016*

PEREVARYUKHA ANDREY YURIEVICH  
St. Petersburg Institute for Informatics and Automation  
of the Russian Academy of Sciences,  
*Senior researcher of the Laboratory of Applied Informatics*  
14-th Liniya, V.I., 39, St. Petersburg, 199178, Russia  
E-mail: temp\_elf@mail.ru

УДК 517.9

## A NOTE ON SURJECTIVE POLYNOMIAL OPERATORS<sup>1</sup>

M. Saburov

A linear Markov chain is a discrete time stochastic process whose transitions depend only on the current state of the process. A nonlinear Markov chain is a discrete time stochastic process whose transitions may depend on both the current state and the current distribution of the process. These processes arise naturally in the study of the limit behavior of a large number of weakly interacting Markov processes. The nonlinear Markov processes were introduced by McKean and have been extensively studied in the context of nonlinear Chapman–Kolmogorov equations as well as nonlinear Fokker–Planck equations. The nonlinear Markov chain over a finite state space can be identified by a continuous mapping (a nonlinear Markov operator) defined on a set of all probability distributions (which is a simplex) of the finite state space and by a family of transition matrices depending on occupation probability distributions of states. Particularly, a linear Markov operator is a linear operator associated with a square stochastic matrix. It is well-known that a linear Markov operator is a surjection of the simplex if and only if it is a bijection. The similar problem was open for a nonlinear Markov operator associated with a stochastic hyper-matrix. We solve it in this paper. Namely, we show that a nonlinear Markov operator associated with a stochastic hyper-matrix is a surjection of the simplex if and only if it is a permutation of the Lotka–Volterra operator.

**Mathematics Subject Classification 2010:** 47H60, 47N10.

**Key words:** Stochastic hyper-matrix, polynomial operator, Lotka–Volterra operator.

### 1. Introduction

Let  $\mathbf{I}_m := \{1, \dots, m\}$  be a finite set,  $\bar{\alpha} := \mathbf{I}_m \setminus \alpha$  be a complement of a subset  $\alpha \subset \mathbf{I}_m$ , and  $|\alpha|$  be the number of its elements. Suppose that  $\mathbb{R}^m$  is equipped with the  $l_1$ -norm  $\|\mathbf{x}\|_1 := \sum_{k=1}^m |x_k|$  where  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$  and  $\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \mathbf{I}_m}$  stands for the standard basis. We say that  $\mathbf{x} \geq 0$  (respectively  $\mathbf{x} > 0$ ) if  $x_i \geq 0$  (respectively  $x_i > 0$ ) for all  $i \in \mathbf{I}_m$ . Let  $\mathbf{S}^{m-1} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{x}\|_1 = 1, \mathbf{x} \geq 0\}$  be the  $(m-1)$ -dimensional standard simplex. An element of the simplex  $\mathbf{S}^{m-1}$  is called a *stochastic vector*. For a stochastic vector  $\mathbf{x} \in \mathbf{S}^{m-1}$ , we set  $\text{supp}(\mathbf{x}) = \{i \in \mathbf{I}_m : x_i > 0\}$ ,  $\text{null}(\mathbf{x}) = \{i \in \mathbf{I}_m : x_i = 0\}$ . We define a face  $\Gamma_\alpha = \text{conv}\{\mathbf{e}_i\}_{i \in \alpha}$  of the simplex  $\mathbf{S}^{m-1}$  where  $\alpha \subset \mathbf{I}_m$  and  $\text{conv}(\mathbf{A})$  is the convex hull of a set  $\mathbf{A}$ . Let  $\text{int } \Gamma_\alpha = \{\mathbf{x} \in \Gamma_\alpha : \text{supp}(\mathbf{x}) = \alpha\}$  and  $\partial \Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha \setminus \text{int } \Gamma_\alpha$  be respectively the relative interior and boundary of the face  $\Gamma_\alpha$ .

Recall that a square matrix  $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^m$  is called *non-negative*, written  $\mathbb{P} \geq 0$ , if  $\mathbf{p}_{i\bullet} \geq 0$  for all  $i \in \mathbf{I}_m$ . A square matrix  $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^m$  is called *stochastic* if each row  $\mathbf{p}_{i\bullet} = (p_{i1}, \dots, p_{im})$  is a stochastic vector for all  $i \in \mathbf{I}_m$ . Let  $\mathcal{L} : \mathbf{S}^{m-1} \rightarrow \mathbf{S}^{m-1}$  be a linear operator (a Markov operator) associated with a square stochastic matrix  $\mathbb{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^m$ , i. e.,

$$\mathcal{L}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}\mathbb{P} = \sum_{i=1}^m x_i \mathbf{p}_{i\bullet}.$$

---

© 2017 Saburov M.

<sup>1</sup>This work has been partially supported by the MOHE grant FRGS14-141-0382. The author also thanks to the Junior Associate Scheme, Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics (ICTP), Trieste, Italy, where this paper was written, for the invitation and hospitality.

It is easy to see that the linear operator  $\mathcal{L} : \mathbf{S}^{m-1} \rightarrow \mathbf{S}^{m-1}$  is a surjection if and only if it is a bijection. Indeed, the straightforward calculation shows that if  $\mathcal{L} : \mathbf{S}^{m-1} \rightarrow \mathbf{S}^{m-1}$  is a surjection then for each  $i$  there exists  $j$  such that  $\mathcal{L}^{-1}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{e}_j$ , where  $\mathcal{L}^{-1}(\mathbf{e}_i)$  is a preimage of the vertex  $\mathbf{e}_i$  of the simplex  $\mathbf{S}^{m-1}$ . Consequently, surjective linear operators of the simplex are only permutation operators.

Recently, the similar problem for a quadratic operator (a nonlinear Markov operator [6]) associated with a cubic stochastic matrix was solved in the paper [5]. In general, the convexity of the quadratic operators is strongly tied up with the nonlinear optimization problems [1, 2, 4, 7] and is not an easy problem [8]. In this paper, we provide a criterion for surjectivity of polynomial operators associated with stochastic hyper-matrices.

## 2. Polynomial Operators Associated with Stochastic Hyper-Matrices

Let  $\mathcal{P} = (p_{i_1 \dots i_k})_{i_1, \dots, i_k=1}^m$  be a  $k$ -order  $m$ -dimensional hyper-matrix. We define the following vectors and matrices

$$\mathbf{p}_{i_1 \dots i_{k-1} \bullet} = (p_{i_1 \dots i_{k-1} 1}, \dots, p_{i_1 \dots i_{k-1} m}), \quad \mathbb{P}_{i_1 \dots i_{k-2} \bullet \bullet} = (p_{i_1 \dots i_{k-2} j l})_{j, l=1}^m,$$

for any  $i_1, \dots, i_{k-1} \in \mathbf{I}_m$ . In what follows, we denote  $i_{[1:l]} := i_1 \dots i_l$  for index.

A hyper-matrix  $\mathcal{P} = (p_{i_1 \dots i_k})_{i_1, \dots, i_k=1}^m$  is called *non-negative* and written  $\mathcal{P} \geq 0$  if  $\mathbf{p}_{i_{[1:k-1]} \bullet} \geq 0$  for all  $i_1, \dots, i_{k-1} \in \mathbf{I}_m$ . A hyper-matrix  $\mathcal{P} = (p_{i_1 \dots i_k})_{i_1, \dots, i_k=1}^m$  is called *stochastic* if each vector  $\mathbf{p}_{i_{[1:k-1]} \bullet}$  is stochastic for all  $i_1, \dots, i_{k-1} \in \mathbf{I}_m$ .

We define a polynomial operator  $\mathfrak{P} : \mathbf{S}^{m-1} \rightarrow \mathbf{S}^{m-1}$  associated with  $k$ -order  $m$ -dimensional stochastic hyper-matrix  $\mathcal{P} = (p_{i_1 \dots i_k})_{i_1, \dots, i_k=1}^m$  as follows

$$\mathfrak{P}(\mathbf{x}) = \sum_{i_1=1}^m \cdots \sum_{i_{k-1}=1}^m x_{i_1} \cdots x_{i_{k-1}} \mathbf{p}_{i_{[1:k-1]} \bullet} \quad (1)$$

for any  $\mathbf{x} \in \mathbf{S}^{m-1}$ . It is easy to check that

$$\mathfrak{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \mathbb{P}_{\mathbf{x}}, \quad (2)$$

where

$$\mathbb{P}_{\mathbf{x}} = \sum_{i_1=1}^m \cdots \sum_{i_{k-2}=1}^m x_{i_1} \cdots x_{i_{k-2}} \mathbb{P}_{i_{[1:k-2]} \bullet \bullet} = (p_{j l}(\mathbf{x}))_{j, l=1}^m$$

is a square stochastic matrix for any  $\mathbf{x} \in \mathbf{S}^{m-1}$ . Due to the matrix form (2), the polynomial operator  $\mathfrak{P} : \mathbf{S}^{m-1} \rightarrow \mathbf{S}^{m-1}$  associated with  $k$ -order  $m$ -dimensional stochastic hyper-matrix  $\mathcal{P}$  is a *nonlinear Markov operator* (see [6]). Unlike the classical Markov chain, the nonlinear Markov chain is a stochastic process whose transition matrix  $\mathbb{P}_{\mathbf{x}}$  may depend not only on *the current state* of the process but also on *the current distribution*  $\mathbf{x}$  of the process (see [3]).

Throughout this paper, without loss of generality, we assume that

$$\mathbf{p}_{i_1 \dots i_{k-1} \bullet} = \mathbf{p}_{i_{\pi(1)} \dots i_{\pi(k-1)} \bullet}$$

for any  $i_1, \dots, i_{k-1} \in \mathbf{I}_m$  and any permutation  $\pi$  of the set  $\mathbf{I}_{k-1}$ . We also assume that  $m \geq k$ . We need the following auxiliary results.

**Proposition 2.1** [6]. *The following statements hold:*

$$(i) \text{ supp}(\mathfrak{P}(\mathbf{x})) = \bigcup_{i_{[1:k-1]} \in \text{supp}(\mathbf{x})} \text{supp}(\mathbf{p}_{i_{[1:k-1]} \bullet});$$

- (ii)  $\text{null}(\mathfrak{P}(\mathbf{x})) = \bigcap_{i_{[1:k-1]} \in \text{supp}(\mathbf{x})} \text{null}(\mathbf{p}_{i_{[1:k-1]}} \bullet)$ ;
- (iii)  $\mathfrak{P}(\text{int } \Gamma_\alpha) \subset \text{int } \Gamma_\beta$  where  $\beta = \bigcup_{i_{[1:k-1]} \in \alpha} \text{supp}(\mathbf{p}_{i_{[1:k-1]}} \bullet)$ ;
- (iv)  $\mathfrak{P}(\text{int } \Gamma_\alpha) \subset \text{int } \Gamma_\beta$  if and only if  $\mathfrak{P}(\mathbf{x}^{(0)}) \in \text{int } \Gamma_\beta$  for some  $\mathbf{x}^{(0)} \in \text{int } \Gamma_\alpha$ .

An absorbing state played an important role in the theory of the classical Markov chains. Analogously, the concept of absorbing sets for nonlinear Markov chains was introduced in the paper [6].

DEFINITION 2.1 [6]. A subset  $\alpha \subset \mathbf{I}_m$  is called absorbing if one has that

$$\bar{\alpha} = \bigcap_{i_{[1:k-1]} \in \alpha} \text{null}(\mathbf{p}_{i_{[1:k-1]}} \bullet).$$

It is clear that  $\alpha \subset \mathbf{I}_m$  is an absorbing set if and only if

$$\alpha = \bigcup_{i_{[1:k-1]} \in \alpha} \text{supp}(\mathbf{p}_{i_{[1:k-1]}} \bullet).$$

The following result presents an insight of an absorbing set.

**Proposition 2.2** [6]. *The following statements are equivalent:*

- (i) A subset  $\alpha \subset \mathbf{I}_m$  is absorbing;
- (ii) One has that  $\mathfrak{P}(\text{int } \Gamma_\alpha) \subset \text{int } \Gamma_\alpha$ ;
- (iii) One has that  $\mathfrak{P}(\mathbf{x}^{(0)}) \in \text{int } \Gamma_\alpha$  for some  $\mathbf{x}^{(0)} \in \text{int } \Gamma_\alpha$ .

**Proposition 2.3.** *If any subset  $\alpha \subset \mathbf{I}_m$  with  $|\alpha| \leq k - 1$  is absorbing then so are all subsets of  $\mathbf{I}_m$ .*

◁ Suppose that any subset  $\alpha \subset \mathbf{I}_m$  with  $|\alpha| \leq k - 1$  is absorbing. It means that  $\text{supp}(\mathbf{p}_{i_{[1:k-1]}} \bullet) \subset \alpha$  for any  $i_1, \dots, i_{k-1} \in \alpha$ . In particular, the sets  $\alpha^\circ = \{i_1^\circ, \dots, i_{k-1}^\circ\}$  and  $\beta^\circ = \{j^\circ\}$  are absorbing for the given indices  $i_1^\circ, \dots, i_{k-1}^\circ, j^\circ \in \mathbf{I}_m$  (the repetition of indices is allowed). We then obtain that  $\text{supp}(\mathbf{p}_{j^\circ \dots j^\circ} \bullet) = \{j^\circ\}$  and  $\text{supp}(\mathbf{p}_{i_1^\circ \dots i_{k-1}^\circ} \bullet) \subset \{i_1^\circ, \dots, i_{k-1}^\circ\} = \alpha^\circ$  for any given indices  $i_1^\circ, \dots, i_{k-1}^\circ, j^\circ \in \mathbf{I}_m$  (the repetition of indeces is allowed). Hence, for any  $\beta \subset \mathbf{I}_m$  one has that

$$\bigcup_{i_{[1:k-1]} \in \beta} \text{supp}(\mathbf{p}_{i_{[1:k-1]}} \bullet) = \bigcup_{j \in \beta} \text{supp}(\mathbf{p}_{j \dots j} \bullet) \cup \bigcup_{i_\nu \neq i_\mu} \text{supp}(\mathbf{p}_{i_{[1:k-1]}} \bullet) = \beta.$$

It means that  $\beta$  is an absorbing subset. This completes the proof. ▷

**Lemma 2.1.** *If any subset  $\alpha \subset \mathbf{I}_m$  with  $|\alpha| \leq k - 1$  is absorbing then the polynomial operator  $\mathfrak{P} : \mathbf{S}^{m-1} \rightarrow \mathbf{S}^{m-1}$  is a surjection.*

◁ Due to Propositions 2.2 and 2.3, the polynomial operator  $\mathfrak{P} : \mathbf{S}^{m-1} \rightarrow \mathbf{S}^{m-1}$  maps each face of the simplex  $\mathbf{S}^{m-1}$  into itself. It is well-known in algebraic topology that any continuous mapping which maps each face of the simplex  $\mathbf{S}^{m-1}$  into itself is a surjection of the simplex  $\mathbf{S}^{m-1}$  (see Lemma 1, [5]). This completes the proof. ▷

### 3. Surjective Polynomial Operators vs Lotka–Volterra Operators

We recall a definition of Lotka–Volterra operators (see [5]).

DEFINITION 3.1. A polynomial operator  $\mathfrak{P} : \mathbf{S}^{m-1} \rightarrow \mathbf{S}^{m-1}$  is called *the Lotka–Volterra operator* if  $\text{supp}(\mathbf{p}_{i_{[1:k-1]}} \bullet) \subset \{i_1, \dots, i_{k-1}\}$  for any  $i_1, \dots, i_{k-1} \in \mathbf{I}_m$ .



We provide a criterion for the Lotka–Volterra operator in terms of absorbing sets.

**Lemma 3.1.** *The following statements are equivalent:*

- (i) *The polynomial operator  $\mathfrak{P} : \mathbf{S}^{m-1} \rightarrow \mathbf{S}^{m-1}$  is the Lotka–Volterra operator;*
- (ii) *Any subset  $\alpha \subset \mathbf{I}_m$  with  $|\alpha| \leq k-1$  is absorbing;*
- (iii) *One has that  $\mathfrak{P}^{-1}(\text{int } \Gamma_\alpha) = \text{int } \Gamma_\alpha$  for any subset  $\alpha \subset \mathbf{I}_m$  with  $|\alpha| \leq k-1$ .*

REMARK 3.1. We always assume  $\text{int } \Gamma_\alpha := \Gamma_\alpha$  for the subset  $\alpha \subset \mathbf{I}_m$  with  $|\alpha| = 1$ .

◁ We prove the following implications (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (i).

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Let  $\mathfrak{P} : \mathbf{S}^{m-1} \rightarrow \mathbf{S}^{m-1}$  be the Lotka–Volterra operator. We then have that  $\text{supp}(\mathbf{p}_{i_{[1:k-1]}\bullet}) \subset \{i_1, \dots, i_{k-1}\}$  for any  $i_1, \dots, i_{k-1} \in \mathbf{I}_m$  (the repetition of indices is allowed). Particularly,  $\text{supp}(\mathbf{p}_{j\dots j}\bullet) = \{j\}$  for any  $j \in \mathbf{I}_m$ . Hence, for any  $\alpha \subset \mathbf{I}_m$  with  $|\alpha| \leq k-1$  one has that

$$\bigcup_{i_{[1:k-1]}\bullet \in \alpha} \text{supp}(\mathbf{p}_{i_{[1:k-1]}\bullet}) = \bigcup_{j \in \alpha} \text{supp}(\mathbf{p}_{j\dots j}\bullet) \cup \bigcup_{i_\nu \neq i_\mu} \text{supp}(\mathbf{p}_{i_{[1:k-1]}\bullet}) = \alpha.$$

It means that  $\alpha$  is an absorbing subset.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) : Suppose that any subset  $\alpha \subset \mathbf{I}_m$  with  $|\alpha| \leq k-1$  is absorbing. We then obtain that  $\text{supp}(\mathbf{p}_{i_{[1:k-1]}\bullet}) \subset \alpha$  for any  $i_1, \dots, i_{k-1} \in \alpha$ . Particularly, since the subset  $\alpha^\circ = \{j\}$  is absorbing, we have that  $\text{supp}(\mathbf{p}_{j\dots j}\bullet) = \{j\}$  for any  $j \in \mathbf{I}_m$ . It follows from Proposition 2.2, (ii) that  $\mathfrak{P}(\text{int } \Gamma_\alpha) \subset \text{int } \Gamma_\alpha$  for any absorbing subset  $\alpha \subset \mathbf{I}_m$ . Moreover, if  $\mathfrak{P}^{-1}(\text{int } \Gamma_\alpha) \setminus \text{int } \Gamma_\alpha \neq \emptyset$  then there exists  $\mathbf{y} \in \mathbf{S}^{m-1}$  with  $\beta := \text{supp}(\mathbf{y})$  such that  $\beta \setminus \alpha \neq \emptyset$  and  $\mathfrak{P}(\mathbf{y}) \in \text{int } \Gamma_\alpha$ . Then it follows from Proposition 2.1, (iv) that  $\mathfrak{P}(\text{int } \Gamma_\beta) \subset \text{int } \Gamma_\alpha$ . Since  $\mathfrak{P} : \mathbf{S}^{m-1} \rightarrow \mathbf{S}^{m-1}$  is continuous, we have that  $\mathfrak{P}(\Gamma_\beta) = \overline{\mathfrak{P}(\text{int } \Gamma_\beta)} \subset \overline{\text{int } \Gamma_\alpha} = \Gamma_\alpha$ . Particularly,  $\mathfrak{P}(\mathbf{e}_j) = \mathbf{p}_{j\dots j}\bullet \in \Gamma_\alpha$  (or equivalently  $\text{supp}(\mathbf{p}_{j\dots j}\bullet) \subset \alpha$ ) for  $j \in \beta \setminus \alpha$ . However, this contradicts to the fact that the singleton  $\{j\}$ ,  $j \in \beta \setminus \alpha$  is an absorbing set (or equivalently  $\text{supp}(\mathbf{p}_{j\dots j}\bullet) = \{j\}$ ). Therefore, we have that  $\mathfrak{P}^{-1}(\text{int } \Gamma_\alpha) = \text{int } \Gamma_\alpha$ .

(iii)  $\Rightarrow$  (i) : Suppose that  $\mathfrak{P}^{-1}(\text{int } \Gamma_\alpha) = \text{int } \Gamma_\alpha$  for any subset  $\alpha \subset \mathbf{I}_m$  with  $|\alpha| \leq k-1$ . We then obtain from Proposition 2.1, (iii) that

$$\bigcup_{i_{[1:k-1]}\bullet \in \alpha} \text{supp}(\mathbf{p}_{i_{[1:k-1]}\bullet}) = \alpha.$$

Particularly, we get that  $\text{supp}(\mathbf{p}_{i_{[1:k-1]}\bullet}) \subset \alpha$  for any  $i_1, \dots, i_{k-1} \in \alpha$ . Let us now fix indices  $i_1^\circ, \dots, i_{k-1}^\circ \in \mathbf{I}_m$  (the repetition of indices is allowed). Then, for the set  $\alpha^\circ = \{i_1^\circ, \dots, i_{k-1}^\circ\}$  we have that  $\text{supp}(\mathbf{p}_{i_1^\circ \dots i_{k-1}^\circ}\bullet) \subset \{i_1^\circ, \dots, i_{k-1}^\circ\} = \alpha^\circ$ . Since the indices  $i_1^\circ, \dots, i_{k-1}^\circ \in \mathbf{I}_m$  are arbitrary chosen, the last inclusion means that  $\mathfrak{P} : \mathbf{S}^{m-1} \rightarrow \mathbf{S}^{m-1}$  is the Lotka–Volterra operator. This completes the proof. ▷

We are now ready to formulate the main result of the paper.

**Theorem 3.1.** *Let  $\mathfrak{P} : \mathbf{S}^{m-1} \rightarrow \mathbf{S}^{m-1}$  be a polynomial operator. Then the following statements are equivalent:*

- (i) *The polynomial operator  $\mathfrak{P} : \mathbf{S}^{m-1} \rightarrow \mathbf{S}^{m-1}$  is a surjection;*
- (ii) *There exists a permutation  $\pi$  of the set  $\mathbf{I}_m$  such that for any  $1 \leq l \leq k-1$  and for any  $i_1, \dots, i_l \in \mathbf{I}_m$  one has that  $\mathfrak{P}^{-1}(\text{int } \Gamma_{\mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_l}}) = \text{int } \Gamma_{\mathbf{e}_{\pi(i_1)} \dots \mathbf{e}_{\pi(i_l)}}$  where  $\Gamma_{\mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_l}} = \text{conv}\{\mathbf{e}_{i_1}, \dots, \mathbf{e}_{i_l}\}$ ;*
- (iii) *There exists a permutation matrix  $\Pi$  such that  $\Pi \circ \mathfrak{P}$  is the Lotka–Volterra operator.*

REMARK 3.2. We always assume that  $\text{int } \Gamma_{\mathbf{e}_i} := \{\mathbf{e}_i\}$  for any  $i \in \mathbf{I}_m$ .

◁ We prove the following implications (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (i).

(i)  $\Rightarrow$  (ii) : Suppose that the polynomial operator  $\mathfrak{P} : \mathbf{S}^{m-1} \rightarrow \mathbf{S}^{m-1}$  is a surjection. Let  $\mathfrak{P}^{-1}(\mathbf{e}_j)$  be a preimage (which is nonempty) of the vertex  $\mathbf{e}_j$  for  $j \in \mathbf{I}_m$ . Obviously, if  $\mathbf{x} \in \mathfrak{P}^{-1}(\mathbf{e}_j)$  with  $\text{supp}(\mathbf{x}) = \alpha$  then  $\Gamma_\alpha \subset \mathfrak{P}^{-1}(\mathbf{e}_j)$  (see Proposition 2.1, (iv)). Hence,  $\mathfrak{P}^{-1}(\mathbf{e}_j)$  is a face or a union of faces of the simplex  $\mathbf{S}^{m-1}$  for any  $j \in \mathbf{I}_m$ . Consequently, the set  $\{\mathfrak{P}^{-1}(\mathbf{e}_1), \dots, \mathfrak{P}^{-1}(\mathbf{e}_m)\}$  consists of (at least)  $m$  mutually disjoint faces of the simplex  $\mathbf{S}^{m-1}$ . This is possible if and only if there exists a permutation  $\pi$  of the set  $\mathbf{I}_m$  such that  $\mathfrak{P}^{-1}(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_{\pi(j)}$  for any  $j \in \mathbf{I}_m$ . Let us now show  $\mathfrak{P}^{-1}(\text{int } \Gamma_{\mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_l}}) = \text{int } \Gamma_{\mathbf{e}_{\pi(i_1)} \dots \mathbf{e}_{\pi(i_l)}}$  for any  $i_1, \dots, i_l \in \mathbf{I}_m$  by means of mathematical induction with respect to  $l$  where  $1 \leq l \leq k-1$ . Obviously, if  $\mathbf{y} \in \mathfrak{P}^{-1}(\text{int } \Gamma_{\mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_l}})$  with  $\text{supp}(\mathbf{y}) = \beta$  then  $\text{int } \Gamma_\beta \subset \mathfrak{P}^{-1}(\text{int } \Gamma_{\mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_l}})$  and  $\Gamma_\beta \subset \mathfrak{P}^{-1}(\Gamma_{\mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_l}})$  (see Proposition 2.1, (iv)). Moreover, if  $\beta \setminus \{\pi(i_1), \dots, \pi(i_l)\} \neq \emptyset$  (or equivalently  $\pi^{-1}(\beta) \setminus \{i_1, \dots, i_l\} \neq \emptyset$ ) then  $\mathbf{e}_{\pi(j)} \in \mathfrak{P}^{-1}(\Gamma_{\mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_l}})$  for some  $j \in \pi^{-1}(\beta) \setminus \{i_1, \dots, i_l\}$ . However, it contradicts to  $\mathbf{e}_{\pi(j)} = \mathfrak{P}^{-1}(\mathbf{e}_j)$ . Therefore, we must have that  $\beta \subset \{\pi(i_1), \dots, \pi(i_l)\}$ . On the other hand, due to mathematical induction, we also have that  $\{\pi(i_1), \dots, \pi(i_l)\} \setminus \beta = \emptyset$ . Hence, we get that  $\beta = \{\pi(i_1), \dots, \pi(i_l)\}$ . Since the point  $\mathbf{y} \in \mathfrak{P}^{-1}(\text{int } \Gamma_{\mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_l}})$  is arbitrary chosen, we obtain that  $\mathfrak{P}^{-1}(\text{int } \Gamma_{\mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_l}}) \subset \text{int } \Gamma_{\mathbf{e}_{\pi(i_1)} \dots \mathbf{e}_{\pi(i_l)}}$ . The inclusion  $\text{int } \Gamma_{\mathbf{e}_{\pi(i_1)} \dots \mathbf{e}_{\pi(i_l)}} \subset \mathfrak{P}^{-1}(\text{int } \Gamma_{\mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_l}})$  follows from Proposition 2.1, (iv). Consequently,  $\mathfrak{P}^{-1}(\text{int } \Gamma_{\mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_l}}) = \text{int } \Gamma_{\mathbf{e}_{\pi(i_1)} \dots \mathbf{e}_{\pi(i_l)}}$  for any  $i_1, \dots, i_l \in \mathbf{I}_m$  and  $1 \leq l \leq k-1$ .

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) : Suppose that there exists a permutation  $\pi$  such that  $\mathfrak{P}^{-1}(\text{int } \Gamma_{\mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_l}}) = \text{int } \Gamma_{\mathbf{e}_{\pi(i_1)} \dots \mathbf{e}_{\pi(i_l)}}$  for any  $i_1, \dots, i_l \in \mathbf{I}_m$  and  $1 \leq l \leq k-1$ . Particularly, we have that  $\mathfrak{P}^{-1}(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_{\pi(j)}$  for any  $j \in \mathbf{I}_m$ . We now define a permutation matrix  $\Pi$  (associated with the permutation  $\pi$ ) as follows  $\Pi(\mathbf{e}_j) := \mathbf{e}_{\pi(j)}$  for any  $j \in \mathbf{I}_m$ . Obviously, we obtain that

$$\Pi(\mathfrak{P}(\text{int } \Gamma_{\mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_l}})) = \text{int } \Gamma_{\mathbf{e}_{i_1} \dots \mathbf{e}_{i_l}}, \quad \forall i_1, \dots, i_l \in \mathbf{I}_m, \quad \forall 1 \leq l \leq k-1.$$

Due to Lemma 3.1, the polynomial operator  $\Pi \circ \mathfrak{P}$  is the Lotka–Volterra operator.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) : Suppose that there exists a permutation matrix  $\Pi$  such that  $\mathfrak{P}_\Pi := \Pi \circ \mathfrak{P}$  is the Lotka–Volterra operator. Due to Lemmas 2.1 and 3.1, the Lotka–Volterra operator  $\mathfrak{P}_\Pi$  is a surjection and so is the polynomial operator  $\mathfrak{P} = \Pi^{-1} \circ \mathfrak{P}_\Pi$ . This completes the proof.  $\triangleright$

## References

1. Barvinok A. I. Problems of distance geometry and convex properties of quadratic maps // Discrete Comput. Geom.—1995.—Vol. 13 (2).—P. 189–202. DOI 10.1007/BF02574037.
2. Hiriart-Urruty J.-B., Torki M. Permanently going back and forth between the “Quadratic World” and the “Convexity World” in optimization // Appl. Math. Optim.—2002.—Vol. 45.—P. 169–184. DOI 10.1007/s00245-001-0034-6.
3. Kolokoltsov V. Nonlinear Markov Processes and Kinetic Equations.—Cambridge Univ., 2010. DOI 10.1017/CBO9780511760303.
4. Polyak B. T. Convexity of quadratic transformations and its use in Control and Optimization // J. Optim. Theory Appl.—1998.—Vol. 99.—P. 553–583. DOI 10.1023/A:1021798932766.
5. Saburov M. On the surjectivity of quadratic stochastic operators acting on the simplex // Math. Notes.—2016.—Vol. 99 (4).—P. 623–627. DOI 10.1134/S0001434616030391.
6. Saburov M. Ergodicity of nonlinear Markov operators on the finite dimensional space // Nonlinear Anal. Theory Methods.—2016.—Vol. 143.—P. 105–119. DOI 10.1016/j.na.2016.05.006.
7. Sheriff J. L. The convexity of quadratic maps and the controllability of coupled systems: Doctoral dissertation.—Harvard Univ., 2013.
8. Vershik A. M. Quadratic forms positive on a cone and quadratic duality // J. Soviet Math.—1984.—Vol. 36 (1).—P. 39–56. DOI 10.1007/BF01104972.

Received February 6, 2017

SABUROV MANSUR  
Department of Computational & Theoretical Sciences,  
Faculty of Science,  
International Islamic University Malaysia,  
Associate Professor  
P.O. Box, Kuantan, Pahang, 25200, Malaysia  
E-mail: msaburov@gmail.com; msaburov@iiu.edu.my

## ЗАМЕЧАНИЕ О СЮРЪЕКТИВНЫХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ

Сабуров М.

Линейная цепь Маркова является случайным процессом с дискретными состояниями, переходы которого зависят только от текущего состояния процесса. Нелинейная цепь Маркова — случайный процесс с дискретными состояниями, переходы которого могут зависеть как от текущего состояния, так и текущего распределения процесса. Эти процессы естественным образом возникают при изучении предельного поведения большого количества слабо взаимодействующих марковских процессов. Нелинейные марковские процессы были введены Маккином и широко изучались в контексте нелинейных уравнений Чапмана — Колмогорова, а также нелинейных уравнений Фоккера — Планка. Нелинейная цепь Маркова над конечным пространством состояний может быть определена непрерывным отображением (нелинейным оператором Маркова), определяемым на множестве всех вероятностных распределений (являющемся симплексом) конечного пространства состояний семейством матриц перехода, зависящих от распределения вероятностей занятия состояний. В частности, линейный оператор Маркова является линейным оператором, связанным с квадратной стохастической матрицей. Хорошо известно, что линейный оператор Маркова будет сюръекцией симплекса в том и только в том случае, когда он является биекцией. Аналогичная задача для нелинейного оператора Маркова, связанного со стохастической гипер-матрицей, оставалась открытой. Она решена в данной статье, а именно, показано, что нелинейный оператор Маркова, связанный со стохастической гипер-матрицей, является сюръекцией симплекса, если и только если он является перестановкой оператора Лотки — Вольтерра.

**Ключевые слова:** стохастическая гипер-матрица, полиномиальный оператор, оператор Лотки — Вольтерра.

УДК 518.517.68

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ  
НЕКОТОРЫМИ СУММАМИ

Ю. Х. Хасанов

В работе изучаются некоторые вопросы приближения почти периодических функций двух переменных частичными суммами Фурье и суммами типа Марцинкевича в равномерной метрике, когда показатели Фурье рассматриваемых функций имеют предельную точку в бесконечности. Точнее рассматривается равномерная почти периодическая функция двух переменных, показатели Фурье которой имеют единственную предельную точку в бесконечности. Доказывается, что частичная сумма данного ряда с весовой функцией  $\Phi_\sigma(t, z)$  ( $\sigma > 0$ ) представима в интегральной форме. Весовая функция  $\Phi_\sigma(t, z)$  является произвольной, вещественной, непрерывной, четной и при  $x = y = 0$  принимает значение 1, а в случае, когда либо  $|x| \geq \sigma$ , либо  $|y| \geq \sigma$  равна нулю. Сначала доказывается почти периодичность рассматриваемой функции  $f(x, y)$  и, используя формулу обращения Фурье, для этой функции определяются коэффициенты Фурье. Затем исследуется вопрос об отклонении заданной функции  $f(x, y)$  от частичных сумм ее ряда Фурье, в зависимости от скорости стремления к нулю величины наилучшего приближения функции тригонометрическими полиномами ограниченной степени. Далее аналогичным образом устанавливается оценка сверху величины отклонения равномерной почти периодической функции от сумм Марцинкевича.

**Ключевые слова:** почти периодическая функция, приближение функции, суммы Марцинкевича, коэффициенты Фурье, показатели Фурье, предельные точки в бесконечности.

1. Введение

Через  $L_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) обозначим пространство измеримых  $2\pi$ -периодических по каждой из переменных функций  $f(x, y)$ , для которых существует конечная норма

$$\|f(x, y)\|_{L_p} = \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x, y)|^p dx dy \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (1 \leq p < \infty),$$

$$\|f(x, y)\|_{L_\infty} = \text{vrai sup}_{x, y} |f(x, y)| < \infty,$$

и ряд Фурье функции  $f(x, y) \in L_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) —

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_{k,l}(x, y), \tag{1.1}$$

где  $A_{k,l}(x, y) = a_{k,l} \cos kx \cos ly + b_{k,l} \sin kx \cos ly + c_{k,l} \cos kx \sin ly + d_{k,l} \sin kx \sin ly$ ,  $a_{k,l}$ ,  $b_{k,l}$ ,  $c_{k,l}$ ,  $d_{k,l}$  — коэффициенты Фурье функции  $f(x, y)$ .

И. Марцинкевич [1] впервые рассмотрел вопрос о поведении сумм вида

$$M_n(f; x, y) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_{k,k}(f; x, y),$$

где  $S_{k,k}(f; x, y)$  — частичные суммы порядка  $k$  по каждой из переменных ряда (1.1) функции  $f(x, y) \in L_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ). В частности, Марцинкевичем было установлено, что если  $f(x, y)$  — непрерывная функция по совокупности переменных, то

$$R_n(f)_{L_\infty} = \|f(x, y) - M_n(f; x, y)\|_{L_\infty} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

В работе Л. В. Жижиашвили [2] были даны некоторые оценки скорости стремления к нулю величины

$$R_n(f)_{L_p} = \|f(x, y) - M_n(f; x, y)\|_{L_p} \quad (1 < p \leq \infty). \quad (1.2)$$

Исследование поведения отклонения функции двух переменных  $f(x, y) \in L_p$  ( $1 \leq p \leq \infty$ ) от сумм вида

$$W_r(f; x, y) = (1-r) \sum_{k=0}^{\infty} r^k S_{k,k}(f; x, y) \quad (0 < r < 1)$$

при  $r \rightarrow 1$  было проведено в работе Р. Таберского [3]. Некоторым уточнениям результатов Л. В. Жижиашвили и Р. Таберского посвящена работа М. Ф. Тимана и Г. Гаймназарова [4]. В работе М. Ф. Тимана и В. Г. Пономаренко [5] для случая треугольных матриц  $\{\mu_{k,n}\}$  установлены оценки снизу величины

$$R_n(f; \mu)_{L_p} = \left\| f(x, y) - \sum_{k=0}^n \mu_{k,n} S_{k,k}(f; x, y) \right\|_{L_p} \quad (1 \leq p \leq \infty),$$

где

$$\mu_{k,n} = \begin{cases} \frac{(k+1)^r - k^r}{(n+1)^r}, & k \leq n; \\ 0, & k > n \end{cases}$$

при любом натуральном  $r$ . В этой же работе приведены некоторые уточнения оценок из работ [2] и [3], и при любом натуральном  $r$  и  $1 < p < \infty$  получены следующие точные порядковые равенства:

$$R_n(f; \mu)_{L_p} \asymp \omega_r^{(1)}\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L_p} + \omega_r^{(2)}\left(f; \frac{1}{n}\right)_{L_p},$$

где

$$\omega_r^{(1)}(f; t)_{L_p} = \sup_{|h| \leq t} \left\| \sum_{\nu=0}^r (-1)^{r-\nu} \binom{r}{\nu} f(x + \nu h, y) \right\|_{L_p},$$

$$\omega_r^{(2)}(f; t)_{L_p} = \sup_{|h| \leq t} \left\| \sum_{\nu=0}^r (-1)^{r-\nu} \binom{r}{\nu} f(x, y + \nu h) \right\|_{L_p}.$$

## 2. Основные результаты

В настоящей статье устанавливаются оценки сверху величины отклонения одного класса почти периодических функций двух переменных от сумм типа Марцинкевича в равномерной метрике.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция  $f(x, y)$  ( $-\infty < x, y < \infty$ ) называется *равномерной почти периодической функцией*, если для каждого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое число  $l = l(\varepsilon)$ , что в каждом интервале длины  $l$  найдется хотя бы одно число  $\tau$ , для которого

$$\begin{aligned} |f(x + \tau, y) - f(x, y)| &< \varepsilon \text{ равномерно по } y, \\ |f(x, y + \tau) - f(x, y)| &< \varepsilon \text{ равномерно по } x. \end{aligned}$$

Пусть  $B$  — класс равномерных почти периодических функций и ряд Фурье функции  $f(x, y) \in B$  имеет вид

$$f(x, y) \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A(\lambda_m, \mu_n) \exp(i(\lambda_m x + \mu_n y)), \quad (2.1)$$

где

$$A(\lambda_m, \mu_n) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T f(x, y) \exp(-i(\lambda_m x + \mu_n y)) dx dy$$

— коэффициенты Фурье функции  $f(x, y)$ , а  $\{\mu_m\}_{m=-\infty}^{\infty}$ ,  $\{\lambda_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  — показатели Фурье (спектр функции), которые имеют предельную точку в бесконечности, т. е.

$$\lambda_0 = \mu_0 = 0; \quad \lambda_{-m} = -\lambda_m, \quad \mu_{-n} = -\mu_n; \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_m = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \infty;$$

$$\lambda_m < \lambda_{m+1} \quad (m = 0, 1, 2, \dots), \quad \mu_n < \mu_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Через  $S_{\sigma, \sigma}(f; x, y)$  обозначим частичную сумму ряда (2.1), т. е.

$$S_{\sigma, \sigma}(f; x, y) = \sum_{|\lambda_m| \leq \sigma} \sum_{|\mu_n| \leq \sigma} A(\lambda_m, \mu_n) \exp(i(\lambda_m x + \mu_n y)).$$

Положим

$$U_{\sigma}(f; \Phi; x, y) = \sum_{|\lambda_m| \leq \sigma} \sum_{|\mu_n| \leq \sigma} A(\lambda_m, \mu_n) \Phi_{\sigma}(\lambda_m, \mu_n) \exp(i(\lambda_m x + \mu_n y)),$$

где  $\Phi_{\sigma}(t, z)$  — произвольная, вещественная, непрерывная четная функция, для которой выполнены следующие условия:

- 1)  $\Phi_{\sigma}(0, 0) = 1$ ;
- 2)  $\Phi_{\sigma}(t, z) = 0$  при  $|t| \geq \sigma$  или  $|z| \geq \sigma$ ;
- 3)

$$\psi_{\sigma}(t, z) \in L^2(-\infty, \infty), \quad (2.2)$$

где

$$\psi_{\sigma}(u, v) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\sigma}(t, z) \exp(-i(ut + vz)) dt dz.$$

**Лемма 1.** Если  $f(x, y) \in B$ , то

$$U_\sigma(f; \Phi; x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t, y+z) \psi_\sigma(t, z) dt dz.$$

◁ Пусть

$$f_\sigma(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t, y+z) \psi_\sigma(t, z) dt dz.$$

Тогда в силу (2.2) равномерно по  $y$  имеем

$$\begin{aligned} |f_\sigma(x+\tau, y) - f_\sigma(x, y)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t+\tau, y+z) - f(x+t, y+z)| |\psi_\sigma(t, z)| dt dz \\ &\leq \sup_{x, y} |f(x+\tau, y) - f(x, y)| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_\sigma(t, z)| dt dz. \end{aligned}$$

Аналогично равномерно по  $x$  будем иметь

$$\begin{aligned} |f_\sigma(x, y+\tau) - f_\sigma(x, y)| &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t, y+z+\tau) - f(x+t, y+z)| |\psi_\sigma(t, z)| dt dz \\ &\leq \sup_{x, y} |f(x, y+\tau) - f(x, y)| \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_\sigma(t, z)| dt dz. \end{aligned}$$

Следовательно,  $f_\sigma(x, y)$  является равномерной почти периодической функцией.

Пусть  $A_\sigma(\lambda_m, \mu_n)$  — коэффициент Фурье функций  $f_\sigma(x, y)$ , соответствующий показателям  $\lambda_m$  и  $\mu_n$ . Имеем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T f_\sigma(x, y) \exp(-i(\lambda_m x + \mu_n y)) dx dy \\ &= \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t, y+z) \psi_\sigma(t, z) dt dz \right] \exp(-i(\lambda_m x + \mu_n y)) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\sigma(t, z) \left[ \frac{1}{4T^2} \int_{-T}^T \int_{-T}^T f(x+t, y+z) \exp(-i(\lambda_m x + \mu_n y)) dx dy \right] dt dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\sigma(t, z) \exp(-i(\lambda_m t + \mu_n z)) \left[ \frac{1}{4T^2} \int_{-T+t}^{T+t} \int_{-T+z}^{T+z} f(x, y) \exp(-i(\lambda_m x + \mu_n y)) dx dy \right] dt dz. \end{aligned}$$

Внутренний интеграл является допредельным выражением для коэффициентов Фурье функции  $f(x, y)$ , а по формуле обращения Фурье

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\sigma(t, z) \exp(-i(\lambda_m t + \mu_n z)) dt dz = \Phi_\sigma(\lambda_m, \mu_n).$$

Отсюда получим, что

$$A_\sigma(\lambda_m, \mu_n) = A(\lambda_m, \mu_n)\Phi_\sigma(\lambda_m, \mu_n).$$

Таким образом,

$$f_\sigma(x, y) = \sum_{|\lambda_m| \leq \sigma} \sum_{|\mu_n| \leq \sigma} A(\lambda_m, \mu_n)\Phi_\sigma(\lambda_m, \mu_n) \exp(i(\lambda_m x + \mu_n y)).$$

Так как  $f_\sigma(x, y)$  является почти периодической функцией, то лемма 1 доказана.  $\triangleright$

Пусть  $B$  — пространство всех ограниченных и равномерно почти периодических в плоскости переменных  $x, y$  функций  $f(x, y)$  с нормой

$$\|f\|_B = \sup_{-\infty < x, y < \infty} |f(x, y)|.$$

Рассмотрим величину

$$R(f; \Phi) = \|U_\sigma(f; \Phi; x, y) - f(x, y)\|_B, \quad (2.3)$$

в которой

$$U_\sigma(f; \Phi; x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t, y+z)\Phi_\sigma(t, z) dt dz, \quad (2.4)$$

$$\Phi_\sigma(t, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{\infty} \varphi_\sigma(u) K_u(t, z) du,$$

$$K_u(t, z) = 4 \left[ \cos(ut) \frac{\sin(uz)}{z} + \cos(uz) \frac{\sin(ut)}{t} \right],$$

$\varphi_\sigma(u)$  — некоторая четная функция, абсолютно интегрируемая на интервале  $(0, \infty)$  при каждом фиксированном  $\sigma > 0$  и такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\sigma(t, z)| dt dz < \infty, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\sigma(t, z) dt dz = 1. \quad (2.5)$$

Далее исследуем вопрос о поведении величины (2.3) в зависимости от скорости стремления к нулю величины наилучшего приближения  $E_{\sigma, \sigma}(f)$  (при  $\sigma \rightarrow \infty$ ) для случаев, когда в качестве  $\varphi_\sigma(u)$  выбраны функции

$$\varphi_\sigma(u) = \varphi_{\sigma, a}(u) = \begin{cases} 1, & |u| \leq a \quad (0 < a < \sigma); \\ \frac{\sigma - |u|}{\sigma - a}, & a < |u| < \sigma; \\ 0, & |u| \geq \sigma. \end{cases} \quad (2.6)$$

**Лемма 2.** Если функция  $\varphi_\sigma(u) = \varphi_{\sigma, a}(u)$  определена равенством (2.6), то справедлива оценка

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_\sigma(t, z)| dt dz \leq C \frac{\sigma + a}{\sigma - a}, \quad (2.7)$$

где  $C$  — константа.

$\triangleleft$  Доказательство леммы 2 дано в работе [6].  $\triangleright$



**Теорема 1.** Если  $f(x, y) \in B$  и  $\varphi_\sigma(u) = \varphi_{\sigma,a}(u)$  определена равенством (2.6), то при любом  $\Lambda$  ( $0 < \Lambda < a < \sigma$ ) справедлива оценка

$$\|U_\sigma(f; \Phi; x, y) - f(x, y)\|_B \leq C \frac{\sigma + a}{\sigma - a} E_{\Lambda, \Lambda}(f)_B, \quad (2.8)$$

где  $U_\sigma(f; \Phi; x, y)$  определена равенством (2.4), а

$$E_{\Lambda, \Lambda}(f)_B = \inf_{A(\lambda_m, \mu_n)} \left\| f(x, y) - \sum_{|\lambda_m| \leq \Lambda} \sum_{|\mu_n| \leq \Lambda} A(\lambda_m, \mu_n) \exp(i(\lambda_m x + \mu_n y)) \right\|_B$$

— наилучшее приближение функций  $f(x, y) \in B$  тригонометрическими полиномами степени не выше  $\Lambda$ ,  $C$  — константа.

◁ Так как согласно (2.5)

$$4 \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi_\sigma(t, z) dt dz = 1,$$

то умножая обе части этого равенства на  $f(x, y)$  и вычитая полученное равенство из (2.4), получим

$$\begin{aligned} \Delta_\sigma(f; x, y) &= U_\sigma(f; \Phi; x, y) - f(x, y) \\ &= \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty f(x+t, y+z) \Phi_\sigma(t, z) dt dz - 4 \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) \Phi_\sigma(t, z) dt dz \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty [f(x+t, y+z) + f(x-t, y+z) + f(x+t, y-z) \\ &\quad + f(x-t, y-z)] \Phi_\sigma(t, z) dt dz - 4 \int_0^\infty \int_0^\infty f(x, y) \Phi_\sigma(t, z) dt dz \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty [f(x+t, y+z) + f(x-t, y+z) + f(x+t, y-z) \\ &\quad + f(x-t, y-z) - 4f(x, y)] \Phi_\sigma(t, z) dt dz = \int_0^\infty \int_0^\infty \Omega_{x,y}(f; t, z) \Phi_\sigma(t, z) dt dz, \end{aligned}$$

где

$$\Omega_{x,y}(f; t, z) = f(x+t, y+z) + f(x-t, y+z) + f(x+t, y-z) + f(x-t, y-z) - 4f(x, y).$$

Пусть теперь

$$T_{\Lambda, \Lambda}(x, y) = \sum_{|\lambda_m| \leq \Lambda} \sum_{|\mu_n| \leq \Lambda} B_{m,n} \exp(i(\lambda_m x + \mu_n y))$$

— произвольный тригонометрический полином и  $0 < \Lambda < a < \sigma$ . Тогда в силу леммы 1 имеет место равенство

$$T_{\Lambda, \Lambda}(x, y) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty T_{\Lambda, \Lambda}(x+t, y+z) \Phi_\sigma(t, z) dt dz.$$

Покажем, что для полинома  $T_{\Lambda, \Lambda}(x, y)$  имеет место соотношение

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Omega_{x,y}(T_{\Lambda, \Lambda}; t, z) \Phi_{\sigma}(t, z) dt dz = 0.$$

Действительно, на основании (2.5) имеем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Omega_{x,y}(T_{\Lambda, \Lambda}; t, z) \Phi_{\sigma}(t, z) dt dz \\ &= \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ T_{\Lambda, \Lambda}(x+t, y+z) + T_{\Lambda, \Lambda}(x-t, y+z) + T_{\Lambda, \Lambda}(x+t, y-z) \right. \\ & \quad \left. + T_{\Lambda, \Lambda}(x-t, y-z) - 4T_{\Lambda, \Lambda}(x, y) \right] \Phi_{\sigma}(t, z) dt dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_{\Lambda, \Lambda}(x+t, y+z) \Phi_{\sigma}(t, z) dt dz - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T_{\Lambda, \Lambda}(x, y) \Phi_{\sigma}(t, z) dt dz \\ &= T_{\Lambda, \Lambda}(x, y) - T_{\Lambda, \Lambda}(x, y) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\sigma}(t, z) dt dz = 0. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\Delta_{\sigma}(f; x, y) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Omega_{x,y}[(f - T_{\Lambda, \Lambda}); t; z] \Phi_{\sigma}(t, z) dt dz. \quad (2.9)$$

Пусть теперь  $T_{\Lambda, \Lambda}(x, y)$  — полином, осуществляющий наилучшее приближение порядка  $\Lambda$ , т. е.

$$\|f(x, y) - T_{\Lambda, \Lambda}(x, y)\|_B = E_{\Lambda, \Lambda}(f)_B.$$

Тогда

$$\|\Omega_{x,y}[(f - T_{\Lambda, \Lambda}); t; z]\|_B \leq 8E_{\Lambda, \Lambda}(f)_B. \quad (2.10)$$

Из (2.7), (2.10) и (2.9) получаем оценку (2.8), что и доказывает теорему 1.  $\triangleright$

Теперь докажем утверждение, которое является аналогом результата Л. В. Жижиа-швили [2] и дает оценку снизу величины (1.2) для функций  $f(x, y) \in B$ .

**Теорема 2.** Пусть  $f(x, y)$  — равномерная почти периодическая функция с показателями Фурье, имеющими предельные точки на бесконечности, т. е.  $\lambda_m \rightarrow \infty$ ,  $\mu_n \rightarrow \infty$ . Тогда справедлива оценка

$$\left\| f(x, y) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_{k,k}(f; x, y) \right\|_B \leq \frac{C}{n+1} \sum_{k=0}^n E_{k,k}(f)_B,$$

где  $C$  — константа, а величина  $E_{k,k}(f)_B$  определена в формулировке теоремы 1.

◁ Пусть  $2^m \leq n \leq 2^{m+1}$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 R_n(f)_B &= \left\| f(x, y) - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n S_{k,k}(f; x, y) \right\|_B \\
 &= \left\| \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n (f(x, y) - S_{k,k}(f; x, y)) \right\|_B \\
 &= \left\| \frac{1}{n+1} \left[ \sum_{\nu=0}^{m-1} \sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} (f(x, y) - S_{k,k}(f; x, y)) + f(x, y) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - S_{0,0}(f; x, y) + \sum_{k=2^m}^n (f(x, y) - S_{k,k}(f; x, y)) \right] \right\|_B \\
 &\leq \frac{1}{n+1} \left\| \sum_{\nu=0}^{m-1} 2^\nu \frac{1}{2^\nu} \sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} (f(x, y) - S_{k,k}(f; x, y)) \right\|_B \\
 &\quad + \frac{1}{n+1} \left\| (f(x, y) - S_{0,0}(f; x, y)) \right\|_B + \frac{1}{n+1} \left\| \sum_{k=2^m}^n (f(x, y) - S_{k,k}(f; x, y)) \right\|_B.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Пусть  $S_{k,k}(f; x, y)$  — полином, осуществляющий наилучшее приближение порядка  $2^\nu - 1$ , т. е.

$$\left\| \sum_{k=2^\nu}^{2^{\nu+1}-1} (f(x, y) - S_{k,k}(f; x, y)) \right\|_B \leq CE_{2^\nu-1, 2^\nu-1}(f)_B. \tag{2.12}$$

Тогда

$$\left\| \sum_{k=2^\nu}^n (f(x, y) - S_{k,k}(f; x, y)) \right\|_B \leq C(n - 2^m)E_{2^m-1, 2^m-1}(f)_B. \tag{2.13}$$

Из соотношений (2.12), (2.13) и (2.11) получим

$$\begin{aligned}
 R_n(f)_B &\leq \frac{C}{n+1} \sum_{\nu=0}^{m-1} 2^\nu E_{2^\nu-1, 2^\nu-1}(f)_B + \frac{1}{n+1} E_{0,0}(f)_B + C \frac{n-2^m}{n+1} E_{2^m-1, 2^m-1}(f)_B \\
 &\leq \frac{C}{n+1} \sum_{\nu=0}^{m-1} 2^\nu E_{2^\nu-1, 2^\nu-1}(f)_B + \frac{1}{n+1} E_{0,0}(f)_B + C \frac{2^m}{n+1} E_{2^m-1, 2^m-1}(f)_B \\
 &\leq \frac{C_1}{n+1} \sum_{k=1}^{2^m} E_{k,k}(f)_B + \frac{1}{n+1} E_{0,0}(f)_B \leq \frac{C_1}{n+1} \sum_{k=0}^{2^m} E_{k,k}(f)_B \leq \frac{C_2}{n+1} \sum_{k=0}^n E_{k,k}(f)_B. \triangleright
 \end{aligned}$$

В заключение отметим, что теоремы 1 и 2 приводились ранее автором без доказательства в работе [7].

### Литература

1. Marcinkewisz I. Sur une method remarquable de sommation des series doubles de Fourier // Collected papers.—Warszawa, 1964.—P. 527–538.
2. Жижиашвили Л. В. О суммировании двойных рядов Фурье // Сиб. мат. журн.—1967.—Т. 8, № 3.—С. 548–564.

3. Taberski R. Abel summability of double Fourier series // Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Msth. Astron. Et phys.—1970.—Vol. 18, № 6.—P. 307–314.
4. Тиман М. Ф., Гаймназаров Г. Уклонение периодических функций двух переменных от некоторых полиномов // Докл. АН Тадж. ССР.—1972.—Т. 15, № 5.—С. 6–8.
5. Тиман М. Ф., Пономаренко В. Г. О приближении периодических функций двух переменных суммами типа Марцинкевича // Изв. вузов. Математика.—1975.—№ 9.—С. 59–67.
6. Пономаренко В. Г. О приближении функций, равномерно непрерывных на всей вещественной плоскости // Сиб. мат. журн.—1975.—Т. 16, № 1.—С. 86–97.
7. Хасанов Ю. Х. О приближении почти периодических функций двух переменных // Изв. вузов. Математика.—2010.—№ 12.—С. 82–86.

*Статья поступила 26 октября 2016 г.*

ХАСАНОВ ЮСУФАЛИ ХАСАНОВИЧ  
 Российско-Таджикский (славянский) университет,  
 профессор кафедры информатики и информационных систем  
 ТАДЖИКИСТАН, 734025, Душанбе, ул. М. Турсунзода, д. 30  
 E-mail: yukhas60@mail.ru

## ON APPROXIMATION OF ALMOST PERIODIC FUNCTIONS BY SOME SUMS

Khasanov Yu. Kh.

In this paper we study some questions of approximating almost periodic functions of two variables by partial Fourier sums and Marcinkiewicz type sums in the uniform metric, provided that the Fourier exponents of the functions under consideration have a limit point at infinity. More precisely, we consider a uniform almost periodic function of two variables whose Fourier exponents have a unique limit point at infinity. It is proved that the partial sum of this series with the weight function  $\Phi_\sigma(t, z)$  ( $\sigma > 0$ ) admits an integral representation. As a weight function, we take an arbitrary real continuous even function  $\Phi_\sigma(t, z)$  that takes the value 1 for  $t = 0$  and  $z = 0$  and vanishes when either  $|t| \geq \sigma$  or  $|z| \geq \sigma$ . First, we prove almost periodicity of the function  $f(x, y)$  and using the Fourier inversion formula we define the Fourier coefficients of this function. Then, we examine the deviation of the given function  $f(x, y)$  from partial sums of its Fourier series, depending on the speed of tending to zero of value of the best approximation by trigonometric polynomial of limited degree. Similarly, we obtain the upper bound of the deviation value of uniform almost-periodic functions from sums of Marcinkiewicz type.

**Key words:** almost periodic function, approximation of functions, sums of Marcinkiewicz type, Fourier coefficients, Fourier exponents, limit points in infinity.

## References

1. Marcinkewisz I. Sur une Method Remarquable de Soummation des Series Doubles de Fourier, *Collecfd Papers*, Warszawa, 1964, pp. 527–538.
2. Zhizhiashvily L. V. About Summability of Double Fourier Series, *Sibirskij matematicheskij zhurnal [Siberian Math. J.]*, 1967, vol. 8, no. 3, pp. 548–564 (in Russian).
3. Taberski R. Abel Summability of Double Fourier Series, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Msth. Astron. Et phys.*, 1970, vol. 18, no. 6, pp. 307–314.
4. Timan M. F., Gaimnazarov G. Approximation of periodic functions of two variables by some polynomials, *Doklady akademii nauk Respubliki Tajikistan [Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan]*, 1972, vol. 15, no. 5, pp. 6–8 (in Russian).
5. Timan M. F., Ponomarenko V. G. Approximation of periodic functions of two variables by Marcinkiewicz type sums, *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenij. Matematika*, 1975, no. 9, pp. 59–67 (in Russian).

6. Ponomarenko V. G. Approximation of functions, uniformly continuous on whole real plane, *Sibirskij matematicheskij zhurnal* [*Siberian Math. J.*], 1975, vol. 16, no. 1, pp. 86–97 (in Russian).
7. Khasanov Yu. Kh. Approximation of almost periodic functions of two variables, *Russian Mathematics*, 2010, vol. 54, no. 12, pp. 72–75. DOI 10.3103/S1066369X1012008X.

*Received October 26, 2016*

KHASANOV YUSUFALI KH.  
Russian and Tajik (Slavonic) University,  
*Professor of Department of Informatics and Information Systems*  
30 M. Tursunzoda st., Dushanbe, 734025, Tajikistan  
E-mail: yukhas60@mail.ru

УДК 519.6

## ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ О НЕЯВНЫХ ФУНКЦИЯХ В НЕГЛАДКОМ СЛУЧАЕ

Р. А. Хачатрян

Рассматривается уравнение вида  $F(x, y) = 0$ ,  $x \in X$ ,  $y \in M$ , где  $M$  — некоторое множество. Методом шатров (касательных конусов), когда множество  $M$  задано негладким ограничением типа равенства, доказывается существование такой дифференцируемой функции  $y$ , что  $F(x, y(x)) = 0$ ,  $y(x) \in M$ ,  $y(x_0) = y_0$ . В частности, методом шатров исследуется вопрос существования гладких локальных селекторов для многозначных отображений вида  $a(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : f_i(x, y) = 0, i \in I, g(y) = 0\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ . Предполагается, что функции  $f_i$ ,  $i \in I$ , строго дифференцируемы, а функция  $g$  локально липшицева. При некоторых достаточных условиях доказано, что через любую точку графика многозначного отображения проходит дифференцируемый селектор этого отображения. Это утверждение можно интерпретировать как теорему о неявных функциях в негладком случае. В статье также построены строго дифференцируемые шатры В. Г. Болтянского для множеств, задаваемых негладкими ограничениями типа равенств. Приведено достаточное условие, при котором пересечение строго дифференцируемых шатров является строго дифференцируемым шатром. Показано, что касательные конусы Кларка являются шатрами Болтянского для множеств, задаваемых локально липшицевыми функциями.

**Ключевые слова:** многозначное отображение, субдифференциал, шатер, касательный конус.

### 1. Введение

Хорошо известна классическая конечномерная теорема о неявной функции, находящая большое количество различных приложений в современной математике. А именно, рассмотрим уравнения вида  $f_i(x, y) = 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $y$  — неизвестная, а  $x$  — параметр. При условии гладкости функций  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ , и регулярности доказано существование гладкого решения системы вышеуказанных уравнений. В дальнейшем этот результат развивался в двух направлениях.

Во-первых, рассматривался тот же самый вопрос в бесконечномерных пространствах. Пусть  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  — банаховы пространства. Пусть даны отображение  $F : X \times Y \rightarrow Z$  и точки  $x_0 \in X$ ,  $y_0 \in Y$ , для которых  $F(x_0, y_0) = 0$ . Рассмотрим уравнение

$$F(x, y) = 0. \tag{1.1}$$

В литературе [8, с. 492], [3, 4] при тех или иных предположениях доказывается существование решения  $y(x)$  уравнения (1.1) для всех  $x$  из некоторой окрестности точки  $x_0$  и его непрерывность как функции от  $x$ . Так, например, в книге [8] доказана теорема о неявных отображениях, аналогичная конечномерной теореме. Затем в статье [4] доказывается теорема, обобщающая теорему о неявном отображении. Здесь производная  $F'_y(x_0, y_0)$  отображения  $F$  является сюръективным непрерывным линейным оператором.

А в работе [3] доказана классическая теорема о неявной функции на конусе. Здесь, предполагая, что функция  $F$  строго дифференцируема и выполнено так называемое условие регулярности Робинсона.

Во-вторых, опубликованы многочисленные работы, в которых рассматривается вопрос существования непрерывных решений уравнения (1.1), когда функция  $F$  негладкая. Отметим лишь работы [9, 12, 13], где в конечномерном случае для липшицевой в окрестности точки  $(x_0, y_0)$  функции  $F$  приводятся достаточные условия, обеспечивающие существование такой липшицевой функции  $y(x)$ , что  $F(x, y(x)) = 0$ ,  $y(x_0) = y_0$ . Наиболее общий результат в этом направлении получен в статье [1].

В настоящей статье рассматривается отображение  $F$  специального вида:

$$F(x, y) = 0 \iff f_i(x, y) = 0, \quad i \in I^0, \quad g(y) = 0, \quad (1.2)$$

где  $I^0$  — конечное множество индексов. Пусть  $F(x_0, y_0) = 0$ . Предполагается, что функции  $f_i$ ,  $i \in I^0$ , строго дифференцируемы по совокупности переменных в точке  $(x_0, y_0)$ , а  $g$  — локально липшицева (возможно недифференцируемая). Приводятся достаточные условия, при которых существует решение уравнения (1.2), дифференцируемое в точке  $(x_0, y_0) = (x_0, y(x_0))$ .

Положим

$$a(x) := \{y \in Y : F(x, y) = 0, \quad g(y) = 0\}, \quad x \in X.$$

Тогда вопрос существования решения уравнения (1.2) можно интерпретировать как вопрос существования селектора многозначного отображения  $a$ .

Отметим, что одной из важных проблем в теории многозначных отображений является вопрос существования однозначных аппроксимаций и селекторов с определенными свойствами. Весьма интересен и находит разнообразные приложения во многих областях математики вопрос существования селекторов, обладающих некоторыми топологическими свойствами. В частности, задача существования непрерывных селекций мультиотображения, восходящая к классической теореме Э. Майкла [14].

В статье приняты известные определения и понятия из выпуклого и нелинейного анализа [11]:  $B_r(x)$  — замкнутый шар радиуса  $r$  с центром в точке  $x \in \mathbb{R}^n$ . Если  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  — некоторое множество, то  $\text{cl}\{M\}$  — замыкание множества  $M$ ,

$$\text{con}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \{x : x = \lambda x_1, \quad x_1 \in M, \quad \lambda > 0\};$$

$$\text{Lin } M \stackrel{\text{def}}{=} \text{cl}\{\text{con } M - \text{con } M\},$$

$\langle x, y \rangle$  — скалярное произведение векторов  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . Если  $a: \mathbb{R}^n \rightarrow 2^Y$  — многозначное отображение, то

$$\text{graf}(a) \stackrel{\text{def}}{=} \{(x, y) : y \in a(x)\}.$$

Однозначное отображение  $y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  называется *локальным селектором* многозначного отображения  $a: \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}$ , проходящей через точку  $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$  графика, если существует такая окрестность  $U(x_0)$  точки  $x_0$ , что

$$y(x) \in a(x) \quad (\forall x \in \text{dom}(a) \cap U(x_0)).$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1** [5, с. 418]. Пусть  $z_0 := (x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$ , где  $a: \mathbb{R}^n \rightarrow 2^{\mathbb{R}^m}$  — многозначное отображение. Оно называется *псевдוליпшицевым около точки  $z_0$* , если существуют такие числа  $\alpha_1 > 0$ ,  $\alpha_2 > 0$ ,  $L > 0$ , что

$$a(x_1) \cap B_{\alpha_2}(y_0) \subseteq a(x_2) + L\|x_1 - x_2\|B_1(0) \quad (\forall x_1, x_2 \in B_{\alpha_1}(x_0)).$$

Если  $K \subseteq \mathbb{R}^n$  — конус, то

$$K^* := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, x \rangle \geq 0 \ (\forall x \in K)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2 [5, с. 397]. *Касательным конусом Кларка* множества  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  в точке  $x_0 \in \text{cl}\{M\}$  называется множество вида

$$C_M(x) \equiv \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \lim_{\substack{\lambda \downarrow 0, x \in M \\ x \rightarrow x_0}} d(v, \lambda^{-1}(M - x)) = 0 \right\}.$$

Это означает, что  $\bar{x} \in C_M(x_0)$  в том и только в том случае, если для любых последовательности положительных чисел  $\{\lambda_k\}$ , сходящейся к нулю, и последовательности  $\{x_k\} \subset M$ , стремящейся к  $x_0$ , существует такая последовательность точек  $\{\bar{x}_k\}$ , сходящаяся к точке  $\bar{x}$ , что справедливо включение

$$x_0 + \lambda_k \bar{x}_k \in M \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$$

Имеет место следующий результат (см. [5, с. 430, следствие 5]).

**Теорема 1.** Пусть  $M_1$  и  $M_2$  — непустые замкнутые подмножества пространства  $\mathbb{R}^n$  такие, что если

$$x_0 \in M_1 \cap M_2, \quad C_{M_1}(x_0) - C_{M_2}(x_0) = \mathbb{R}^n,$$

то

$$C_{M_1}(x_0) \cap C_{M_2}(x_0) \subseteq C_{M_1 \cap M_2}(x_0).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3 [6, с. 278]. *Конус  $K$  называется шатром множества  $M$  в точке  $x \in M$ , если существует такое отображение  $r : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , определенное в некоторой окрестности нуля  $U$ , что*

$$x + \bar{x} + r(\bar{x}) \in M, \quad \text{если } \bar{x} \in K \cap U \text{ и } \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0 \text{ при } \bar{x} \rightarrow 0.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Шатер  $K$  называется *непрерывным*, если  $r$  непрерывно. Шатер  $K$  называется *строго дифференцируемым*, если  $r$  строго дифференцируемо в нуле, т. е. для заданного  $\varepsilon > 0$  можно найти такое  $\delta > 0$ , что  $\|r(\bar{x}_1) - r(\bar{x}_2)\| < \varepsilon \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|$  для  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in B_\delta(0) \subseteq U$ .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5 [9, с. 32]. Пусть  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  — липшицевая функция в окрестности  $U$  заданной точки  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ , и  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  — произвольный вектор. *Обобщенная производная Кларка* функции  $f$  в точке  $x_0$  по направлению  $\bar{x}$ , обозначаемая  $f'_C(x_0, \bar{x})$ , определяется формулой

$$f'_C(x_0, \bar{x}) = \limsup_{\substack{x \rightarrow x_0, \\ \lambda \downarrow 0}} \frac{f(x + \lambda \bar{x}) - f(x)}{\lambda}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6 [9]. *Субдифференциалом Кларка* локально липшицевой функции  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  в точке  $x_0$  называется множество

$$\partial_C f(x_0) = \{x^* \in \mathbb{R}^n : f'_C(x_0, \bar{x}) \geq \langle x^*, \bar{x} \rangle \ (\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7 [2, с. 139]. Функция  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  называется *строго дифференцируемой в точке  $x_0$* , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует такая окрестность  $V$  точки  $x_0$ , что

$$|g(y) - g(z) - \langle g'(x_0), y - z \rangle| \leq \varepsilon \|y - z\| \quad (\forall y, z \in V),$$

где  $g'(x_0) \in \mathbb{R}^n$  — градиент функции  $g$  в точке  $x_0$ .



## 2. Строго дифференцируемые шатры

В этом разделе построены строго дифференцируемые шатры для множеств, задаваемых негладкими ограничениями типа равенства. Приведено достаточное условие, при котором пересечение строго дифференцируемых шатров является строго дифференцируемым шатром.

**Предложение 1.** Пусть  $M := \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\}$ , где  $g$  — строго дифференцируемая функция в точке  $x_0$ ,  $g(x_0) = 0$  и  $g'(x_0) \neq 0$ . Тогда подпространство  $H := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \langle g'(x_0), \bar{x} \rangle = 0\}$  является строго дифференцируемым шатром для множества  $M$  в точке  $x_0$ .

◁ Поскольку  $g'(x_0) \neq 0$ , то найдется такой вектор  $w$ ,  $\|w\| = 1$ , что

$$\langle g'(x_0), w \rangle < 0.$$

Так как  $g$  строго дифференцируема, то существует такая функция  $R(\bar{x}) = o(\bar{x})$ , что

$$g(x_0 + \bar{x}) = g(x_0) + \langle g'(x_0), \bar{x} \rangle + R(\bar{x}). \quad (2.1)$$

Положим  $\omega(\lambda) = \sup\{R(\bar{x}) : \|\bar{x}\| \leq \lambda\}$ . Очевидно, что  $\omega(\lambda)$  монотонно неубывает,  $\omega(\lambda)/\lambda \rightarrow 0$  при  $\lambda \rightarrow 0$  и  $R(\bar{x}) \leq \omega(\|\bar{x}\|)$ . Если  $\bar{x} \in H$  и  $\mu > 0$ , то из (2.1) получим

$$\begin{aligned} g(x_0 + \bar{x} + \mu\|\bar{x}\|w) &= g(x_0) + \langle g'(x_0), \bar{x} + \mu\|\bar{x}\|w \rangle + R(\bar{x} + \mu\|\bar{x}\|w) \\ &\leq \|\bar{x}\|\mu\langle g'(x_0), w \rangle + \omega(\|\bar{x}\|(1 + \mu\|w\|)) = \|\bar{x}\| \left[ \mu\langle g'(x_0), w \rangle + \frac{\omega(\|\bar{x}\|(1 + \mu\|w\|))}{\|\bar{x}\|} \right]. \end{aligned}$$

Выберем  $\delta_1 > 0$  настолько малым, чтобы выражение в квадратных скобках стало меньше, чем  $\frac{1}{2}\mu\langle g'(x_0), w \rangle$ , когда  $\|\bar{x}\| \leq \delta_1$ . Тогда выполняются оценки

$$g(x_0 + \bar{x} + \mu\|\bar{x}\|w) \leq \frac{1}{2}\mu\|\bar{x}\|\langle g'(x_0), w \rangle < 0 \quad (\forall \bar{x} \in H \cap B_{\delta_1}(0), \bar{x} \neq 0). \quad (2.2)$$

Аналогично существует такое число  $\delta_2 > 0$ , что

$$g(x_0 + \bar{x} - \mu\|\bar{x}\|w) > 0, \quad \bar{x} \in H \cap B_{\delta_2}(0), \bar{x} \neq 0. \quad (2.3)$$

Положим  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ . Для фиксированного  $\bar{x} \in H \cap B_{\delta}(0)$  рассмотрим функцию  $q(\bar{x}, \beta) := g(x_0 + \bar{x} + \beta\|\bar{x}\|w)$  на сегменте  $[-\mu, \mu]$ . Из соотношений (2.2)–(2.3) следует, что  $q(\bar{x}, \mu) < 0$ ,  $q(\bar{x}, -\mu) > 0$ . Следовательно, существует такая точка  $\beta(\bar{x}) \in [-\mu, \mu]$ , что  $q(\bar{x}, \beta(\bar{x})) = 0$ . Теперь покажем, что точка  $\beta(\bar{x})$  определяется однозначно. Для этого сначала заметим, что для фиксированного  $\bar{x}$  функция  $q(\bar{x}, \beta)$  монотонно убывает относительно  $\beta$ . Действительно, поскольку  $g$  строго дифференцируема в  $x_0$ , то для заданного  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < |\langle g'(x_0), w \rangle|$ , и достаточно малых  $\bar{x} \neq 0$  имеем

$$\begin{aligned} &\limsup_{\tau \downarrow 0} \frac{q(\bar{x}, \beta + \tau) - q(\bar{x}, \beta)}{\tau} \\ &= \limsup_{\tau \downarrow 0} \frac{g(x_0 + \bar{x} + (\beta + \tau)\|\bar{x}\|w) - g(x_0 + \bar{x} + \beta\|\bar{x}\|w)}{\tau} \\ &\leq \|\bar{x}\|(\langle g'(x_0), w \rangle + \varepsilon) < 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция  $q(\bar{x}, \beta)$  монотонно убывает относительно  $\beta$  и, следовательно,  $\beta(\bar{x})$  определяется однозначно. Заметим также, что  $\beta(\bar{x}) \rightarrow 0$  при  $\bar{x} \rightarrow 0$ . Теперь определим отображение  $r$  следующим образом:  $r(\bar{x}) = \rho(\bar{x})w$  для любых  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ ,

где  $\rho(\bar{x}) = \beta(\text{Pr}_H(\bar{x}))\|\text{Pr}_H(\bar{x})\|$ . Здесь  $\text{Pr}_H$  — оператор проектирования на подпространство  $H$ . По определению  $r$  для достаточно малых  $\bar{x} \in H$  имеем  $g(x_0 + \bar{x} + r(\bar{x})) = 0$ . Нетрудно доказать также, что

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow 0} \frac{\|r(\bar{x})\|}{\|\bar{x}\|} = 0.$$

Наконец докажем, что отображение  $r$  строго дифференцируемо в нуле. Для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta > 0$ , что для любых  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in H \cap B_\delta(0)$  имеет место

$$\begin{aligned} & |\langle g'(x_0), (\rho(\bar{x}_1) - \rho(\bar{x}_2))w \rangle| \\ &= |g(x_0 + \bar{x}_1 + \rho(\bar{x}_1)w) - g(x_0 + \bar{x}_2 + \rho(\bar{x}_2)w) - \langle g'(x_0), \bar{x}_1 - \bar{x}_2 + (\rho(\bar{x}_1) - \rho(\bar{x}_2))w \rangle| \\ &\leq \varepsilon(\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| + \|w\|\|\rho(\bar{x}_1) - \rho(\bar{x}_2)\|). \end{aligned}$$

Поскольку  $\|w\| = 1$ , то получим

$$\|\rho(\bar{x}_1) - \rho(\bar{x}_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{|\langle g'(x_0), w \rangle| - \varepsilon} \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|.$$

Теперь, если  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in B_\delta(0)$ , то

$$\|\rho(\bar{x}_1) - \rho(\bar{x}_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{|\langle g'(x_0), w \rangle| - \varepsilon} \|\text{Pr}_H(\bar{x}_1) - \text{Pr}_H(\bar{x}_2)\| \leq \frac{\varepsilon}{|\langle g'(x_0), w \rangle| - \varepsilon} \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|. \triangleright$$

**Предложение 2** (о пересечении строго дифференцируемых шатров). Пусть выпуклые замкнутые конусы  $K_1$  и  $K_2$  являются строго дифференцируемыми шатрами для множеств  $M_1 \subseteq \mathbb{R}^n$  и  $M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$  соответственно в точке  $x_0 \in M_1 \cap M_2$ . Предположим также, что

$$K_1 - K_2 = \mathbb{R}^n. \quad (2.4)$$

Тогда конус  $Q := K_1 \cap K_2$  является строго дифференцируемым шатром ко множеству  $M := M_1 \cap M_2$  в точке  $x_0$ .

◁ Сначала покажем, что существуют такие положительно однородные и липшицевые отображения  $P_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow K_1$ ,  $P_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow K_2$ , что для любого  $x \in \mathbb{R}^n$  имеет место равенство

$$x = P_1(x) - P_2(x). \quad (2.5)$$

Положим

$$a(x) := \{y \in K_1 : (y - x) \in K_2\}.$$

Имея в виду соотношение (2.4), легко заметить, что  $a$  — многозначное отображение с выпуклым замкнутым графиком и  $\text{dom}(a) = \mathbb{R}^n$ . Следовательно, в силу [15, предложение 4.2] существует такое липшицево положительно однородное отображение  $P_1$ , что

$$P_1(x) \in a(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^n).$$

Положим  $P_2(x) = P_1(x) - x$ . Очевидно, что отображение  $P_2$  липшицево и положительно однородно, и  $P_2(x) \in K_2$  для любого  $x \in \mathbb{R}^n$ . Таким образом, соотношение (2.5) доказано. Итак, существуют такие числа  $L_1 > 0$ ,  $L_2 > 0$ , что

$$\|P_1(x_1) - P_1(x_2)\| \leq L_1\|x_1 - x_2\|, \quad \|P_2(x_1) - P_2(x_2)\| \leq L_2\|x_1 - x_2\| \quad (\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n).$$

Кроме того, поскольку конусы  $K_1$  и  $K_2$  являются шатрами, то существуют такие отображения  $\varphi_i : U \rightarrow \mathbb{R}$ , где

$$\varphi_i(\bar{x}) := x_0 + \bar{x} + r_i(\bar{x}), \quad \frac{r_i(\bar{x})}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0, \quad i = 1, 2$$

(отображения  $r_i$ ,  $i = 1, 2$ , строго дифференцируемы в нуле) и число  $\delta > 0$ , что  $\varphi_i(\bar{x}) \in M_i$  для любого  $\bar{x} \in Q \cap B_\delta(0)$ .

Теперь рассмотрим систему уравнений, записав ее в векторной форме

$$q(\bar{x}, y) := \varphi_1(\bar{x} + P_1(y)) - \varphi_2(\bar{x} + P_2(y)) = 0. \quad (2.6)$$

Учитывая соотношение (2.5), запишем уравнение (2.6) в виде

$$q(\bar{x}, y) = y + r_1(\bar{x} + P_1(y)) - r_2(\bar{x} + P_2(y)) = 0. \quad (2.7)$$

Покажем, что уравнение (2.7) удовлетворяет всем требованиям теоремы о неявных функциях из [2, с. 161]. Действительно, имеем

a)  $q$  — непрерывное отображение и  $q(0, 0) = 0$ ;

b) для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся число  $\delta_1 > 0$  и окрестность нуля  $U$  такие, что если  $\bar{x} \in U$  и  $\|y'\| \leq \delta_1$ ,  $\|y''\| \leq \delta_1$ , то

$$\|q(\bar{x}, y') - q(\bar{x}, y'') - (y' - y'')\| \leq \varepsilon \|y' - y''\|.$$

Следовательно, согласно вышеуказанной теореме существуют число  $C > 0$ , окрестность нуля  $\bar{V}$  и отображение  $y(\cdot)$ , определенное в этой окрестности, такие, что

$$q(\bar{x}, y(\bar{x})) = 0, \quad \|y(\bar{x})\| \leq Cq(\bar{x}, 0) \quad (\forall \bar{x} \in \bar{V}).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\|y(\bar{x})\|}{\|\bar{x}\|} \rightarrow 0, \quad \text{при } \bar{x} \rightarrow 0. \quad (2.8)$$

Положим теперь

$$\varphi(\bar{x}) := \varphi_1(\bar{x} + P_1(y(\bar{x}))) = x_0 + \bar{x} + P_1(y(\bar{x})) + r_1(\bar{x} + P_1(y(\bar{x}))) = x_0 + \bar{x} + r(\bar{x}),$$

где

$$r(\bar{x}) = P_1(y(\bar{x})) + r_1(\bar{x} + P_1(y(\bar{x}))).$$

Из (2.8) и того, что  $r_1(\bar{x}) = o(\bar{x})$ , следует, что  $r(\bar{x})$  обладает тем же свойством. Так как  $K_1$  и  $K_2$  — выпуклые конусы, имеем

$$\bar{x} + P_1(y(\bar{x})) \in K_1, \quad \bar{x} + P_2(y(\bar{x})) \in K_2 \quad (\forall \bar{x} \in Q).$$

Далее, поскольку конусы  $K_1$  и  $K_2$  являются шатрами соответственно для множеств  $M_1$  и  $M_2$ , то при достаточно малых  $\bar{x} \in Q$  имеем

$$\varphi(\bar{x}) = \varphi_1(\bar{x} + P_1(y(\bar{x}))) = \varphi_2(\bar{x} + P_2(y(\bar{x}))) \in M_1 \cap M_2.$$

Осталось доказать, что отображение  $r$  строго дифференцируемо в нуле. Для этого достаточно доказать, что таковым является отображение  $y(\cdot)$ . Действительно, имеем

$$y(\bar{x}) + r_1(\bar{x} + P_1(y(\bar{x}))) - r_2(\bar{x} + P_2(y(\bar{x}))) = 0 \quad (\forall \bar{x} \in \bar{V}).$$

Отсюда, поскольку отображения  $r_i$ ,  $i = 1, 2$ , строго дифференцируемы в нуле, то для заданного  $\varepsilon > 0$  существует такая окрестность  $\bar{U} \subseteq \bar{V}$  нуля, что для любых  $x_1, x_2 \in \bar{U}$  справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|y(\bar{x}_1) - y(\bar{x}_2)\| &\leq \|r_1(\bar{x}_1 + P_1(y(\bar{x}_1))) - r_1(\bar{x}_2 + P_1(y(\bar{x}_2)))\| \\ &+ \|r_2(\bar{x}_1 + P_2(y(\bar{x}_1))) - r_2(\bar{x}_2 + P_2(y(\bar{x}_2)))\| \leq 2\varepsilon(\|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\| + C\|y(\bar{x}_1) - y(\bar{x}_2)\|), \end{aligned}$$

где  $C = \max\{L_1, L_2\}$ . Отсюда,

$$\|y(\bar{x}_1) - y(\bar{x}_2)\| \leq \frac{2\varepsilon}{1 - 2\varepsilon C} \|\bar{x}_1 - \bar{x}_2\|,$$

т. е. отображение  $y(\cdot)$  строго дифференцируемо в нуле.  $\triangleright$

**Следствие 1.** Пусть множество  $M$  задано системой уравнений

$$g_i(x) = 0, \quad i \in I^0,$$

где  $I^0$  — конечное множество индексов. Пусть  $x_0 \in M$  и функции  $g_i(x)$  строго дифференцируемы в  $x_0$ . Предположим также, что градиенты  $g'_i(x_0)$ ,  $i \in I^0$ , линейно независимы. Тогда подпространство  $H := \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \langle g'_i(x_0), \bar{x} \rangle = 0, i \in I^0\}$  является строго дифференцируемым шатром к множеству  $M$  в точке  $x_0$ .

### 3. Теорема о неявных функциях в негладком случае

В этом разделе при некоторых достаточных условиях доказано, что через любую точку графика многозначного отображения вида (1.2) проходит дифференцируемая селекция этого отображения. При помощи дифференцируемых селекций можно аппроксимировать многозначную функцию и исследовать локальное поведение этих отображений. Такие аппроксимации проведены в работах [5, 10, 11], где они реализованы различными касательными конусами.

Здесь использованы шатры различной гладкости, что позволило исследовать многозначные отображения, заданные негладкими ограничениями типа равенства. Этот результат отражен в следующем утверждении, которое можно интерпретировать как теорему о неявных функциях в негладком случае.

**Теорема 2** (теорема о неявных функциях в негладком случае). Пусть многозначное отображение  $a$  задано при помощи системы равенств:

$$a(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : f_i(x, y) = 0, i \in I^0, g(y) = 0\}, \quad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m,$$

где функции  $f_i$ ,  $i \in I^0$ , строго дифференцируемы ( $I^0$  — конечное множество индексов), а  $g$  — локально липшицева. Предположим, что

1.  $(x_0, y_0) \in \text{graf}(a)$ ,  $0 \notin \partial_C g(x_0)$ ;
2. для каждого  $y^* \in \text{Lin } \partial_C g(x_0)$  система векторов  $\{y^*\} \cup \{f'_{iy}(x_0, y_0), i \in I^0\}$  линейно независима.

Тогда существует такое отображение  $y(\cdot)$ , определенное в некоторой окрестности  $V$  точки  $x_0$  и дифференцируемое в этой точке, что

$$y(x) \in a(x) \quad (\forall x \in V, y(x_0) = y_0).$$

$\triangleleft$  Так как функции  $f_i$ ,  $i \in I^0$ , строго дифференцируемы в точке  $(x_0, y_0)$ , и векторы  $f'_{iy}(x_0, y_0)$ ,  $i \in I^0$ , линейно независимы, то подпространство [9, с. 59, следствие 2]

$$C_{M_1}(x_0, y_0) := \left\{ \bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \langle f'_{iy}(x_0, y_0), \bar{y} \rangle + \langle f'_{ix}(x_0, y_0), \bar{x} \rangle = 0, i \in I^0 \right\}$$

является конусом касательных направлений в смысле Кларка множества

$$M_1 := \left\{ z = (x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : f_i(z) = 0, i \in I^0 \right\}$$

в точке  $z_0 = (x_0, y_0)$ . В силу следствия 1 это подпространство является и строго дифференцируемым шатром для  $M_1$  в точке  $(x_0, y_0)$ . Отметим также, что по теореме 1.2 из [16] подпространство

$$H := \left\{ \bar{z} = (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : g'_C(y_0, \bar{y}) \leq 0, g'_C(y_0, -\bar{y}) \leq 0 \right\}$$

является непрерывным шатром множества  $M_2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+m} : g(y) = 0\}$  в точке  $z_0 = (x_0, y_0)$ .

Покажем, что подпространство  $K_{\text{graf}(a)}(z_0) := C_{M_1}(x_0, y_0) \cap H$  является шатром множества  $\text{graf}(a)$  в точке  $z_0$ . Для этого проверим условия теоремы 2.1 из [16] (теорема о пересечении непрерывных шатров). Имеем

$$C_{M_1}(x_0, y_0) - H = \mathbb{R}^{n+m} \iff (C_{M_1}(x_0, y_0))^* \cap H^* = \{0\}.$$

Далее, имеем

$$(C_{M_1}(x_0, y_0))^* = \{(x^*, y^*) : x^* = F'_x(x_0, y_0)\alpha, y^* = F'_y(x_0, y_0)\alpha, \alpha \in \mathbb{R}^k\},$$

где

$$\begin{aligned} k &= |I^0|, \quad F'_x(x_0, y_0) = (f'_{1x}(x_0, y_0), f'_{2x}(x_0, y_0), \dots, f'_{kx}(x_0, y_0)), \\ F'_y(x_0, y_0) &= (f'_{1y}(x_0, y_0), f'_{2y}(x_0, y_0), \dots, f'_{ky}(x_0, y_0)), \\ H^* &= \{(0, y^*) : y^* \in \text{Lin } \partial_C g(x_0)\}. \end{aligned}$$

Так как по предположению теоремы для каждого  $y^* \in \text{Lin } \partial_C g(x_0)$ ,  $y^* \neq 0$ , система векторов  $\{f'_{iy}(x_0, y_0), i \in I^0\} \cup \{y^*\}$  линейно независима, то

$$(C_{M_1}(x_0, y_0))^* \cap H^* = \{0\}.$$

Значит, конус  $K_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0)$  является шатром множества  $\text{graf}(a)$  в точке  $(x_0, y_0)$ . Теперь покажем, что

$$H \subseteq C_{M_2}(x_0, y_0).$$

По теореме 2.4.7 из [9, с. 58] выпуклые конусы

$$K_1 := \{\bar{y} : g'_C(y_0, \bar{y}) \leq 0\}, \quad K_2 := \{\bar{y} : g'_C(y_0, -\bar{y}) \leq 0\}$$

являются конусами касательных направлений в смысле Кларка множеств  $A_1 = \{y \in \mathbb{R}^m : g(y) \leq 0\}$  и  $A_2 = \{y \in \mathbb{R}^m : g(y) \geq 0\}$  соответственно. Проверим условие теоремы 1:

$$K_1 - K_2 = \mathbb{R}^m \iff K_1^* \cap (-K_2)^* = \{0\} \iff \text{con } \partial_C g(x_0) \cap (-\text{con } \partial_C g(x_0)) = \{0\}.$$

Это условие выполняется очевидным образом, поскольку  $0 \notin \partial_C g(x_0)$ . Следовательно, по теореме 1  $K_1 \cap K_2 \subseteq C_{A_1 \cap A_2}(y_0)$ . Отсюда немедленно следует, что  $H \subseteq C_{M_2}(x_0, y_0)$ . Так как  $C_{M_1} - H = \mathbb{R}^{n+m}$ , то

$$C_{M_1}(x_0, y_0) \cap H \subseteq C_{M_1 \cap M_2}(x_0, y_0) = C_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0).$$

Далее, пусть  $y_1^*, y_2^*, \dots, y_p^*$  — система векторов, принадлежащих  $\partial_C g(x_0)$  и образующих базис в подпространстве  $\text{Lin } \partial_C g(x_0)$ . Поскольку по предположению система векторов  $\{F'_y(x_0, y_0), y_1^*, y_2^*, \dots, y_p^*\}$  линейно независима, то система уравнений

$$F'_y(x_0, y_0)\bar{y} = -F'_x(x_0, y_0)\bar{x}, \quad \langle y_i^*, \bar{y} \rangle = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

имеет решение  $\bar{y} = P\bar{x}$ , где  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  — некоторый линейный оператор. Таким образом, доказано, что для любого  $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$  существует вектор  $\bar{y} \in \mathbb{R}^m$  такой, что

$$(\bar{x}, \bar{y}) \in C_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0),$$

и существует такой линейный непрерывный оператор  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ , что

$$(\bar{x}, P\bar{x}) \in C_{M_1} \cap C_{M_2} \quad (\forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n).$$

Значит, по теореме 2 из [5, с. 418] многозначное отображение  $a$  псевдолипшицево в точке  $z_0$ . Так как конус  $K_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0)$  является шатром графика отображения  $a$  в точке  $(x_0, y_0)$ , то существует такое отображение  $r(\bar{z}) := r(\bar{x}, \bar{y}) = (r_1(\bar{x}, \bar{y}), r_2(\bar{x}, \bar{y})) = o(\bar{z})$ , определенное в некоторой окрестности нуля  $U$ , что

$$z_0 + \bar{z} + r(\bar{z}) \in \text{graf}(a), \quad \bar{z} \in K_{\text{graf}(a)}(z_0) \cap U,$$

т. е.

$$y_0 + \bar{y} + r_2(\bar{x}, \bar{y}) \in a(x_0 + \bar{x} + r_1(\bar{x}, \bar{y})) \quad (\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in K_{\text{graf}(a)}(x_0, y_0) \cap U).$$

Вместо  $\bar{y}$  подставим  $P(\bar{x})$ . Для достаточно малых  $\bar{x}$  получим

$$y_0 + P(\bar{x}) + r_2(\bar{x}, P(\bar{x})) \in a(x_0 + \bar{x} + r_1(\bar{x}, P(\bar{x}))). \quad (3.1)$$

Так как  $a$  является псевдолипшицевым в точке  $(x_0, y_0)$ , то из (3.1) следует, что найдутся такие константа  $L > 0$  и окрестность нуля  $\bar{V}$ , что

$$y_0 + P(\bar{x}) + r_2(\bar{x}, P(\bar{x})) \in a(x_0 + \bar{x}) + L\|r_1(\bar{x}, P(\bar{x}))\|B_1(0) \quad (\forall \bar{x} \in \bar{V}). \quad (3.2)$$

Поскольку  $r_1(\bar{x}, P(\bar{x})) = o(\bar{x})$  и  $r_2(\bar{x}, P(\bar{x})) = o(\bar{x})$ , то из (3.2) следует, что существует такое отображение  $r_3(\bar{x}) = o(\bar{x})$ , что

$$y_0 + P(\bar{x}) + r_3(\bar{x}) \in a(x_0 + \bar{x}) \quad (\forall \bar{x} \in \bar{V}).$$

Таким образом, если  $V = x_0 + \bar{V}$ , то положим

$$y(x) := y_0 + P(x - x_0) + r_3(x - x_0) \quad (\forall x \in V).$$

Легко заметить, что отображение  $y$  удовлетворяет всем требованиям теоремы.  $\triangleright$

## Литература

1. Аваков Е. П., Магарил-Иляев Г. Г. Теорема о неявной функции для включений // Мат. заметки.— 2012.—Т. 91, № 6.—С. 813–818. DOI: 10.4213/mzm9383.
2. Алексеев В. М., Тихомиров В. М., Фомин С. В. Оптимальное управление.—М.: Наука, 1979.
3. Ариутнов А. В. Теорема о неявной функции без априорных предположений нормальности // Журн. вычисл. математики и мат. физики.—2006.—Т. 46, № 2.—С. 205–215.
4. Гельман Б. Д. Обобщенная теорема о неявном отображении // Функцион. анализ и его прил.— 2001.—Т. 35, вып. 3.—С. 28–35.
5. Обен Ж.-П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ.—М.: Мир, 1988.—510 с.
6. Болтянский В. Г. Оптимальное управление дискретными системами.—М.: Наука, 1973.—446 с.
7. Болтянский В. Г. Метод шатров в теории экстремальных задач // Успехи мат. наук.—1975.—Т. 30, № 3.—С. 3–55.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа.—М.: Наука, 1976.—542 с.
9. Кларк Ф. Оптимизация и негладкий анализ.—М.: Мир, 1988.—280 с.

10. Половинкин Е. С. Мнозначный анализ и дифференциальные включения—М.: Физматлит, 2014.—608 с.
11. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи.—М.: Наука, 1980.—320 с.
12. Магарил-Ильяев Г. Г. Теорема о неявной функции для липшицевых отображений // Успехи мат. наук.—1978.—Т. 33, № 1.—С. 221–222.
13. Clarke F. H. On the inverse function theorem // Pacific J. of Math.—1976.—Vol. 64, № 1.—С. 97–102.
14. Michael E. Continuous selections 1 // Ann. Math.—1956.—№ 63.—С. 361–381.
15. Хачатрян Р. А. О многозначных отображениях со звездными графиками // Изв. НАН Армении. Математика.—2012.—Т. 47, № 1.—С. 51–78.
16. Хачатрян Р. А. О пересечении шатров в бесконечномерных пространствах // Изв. НАН Армении. Математика.—2001.—Т. 36, № 2.—С. 64–71.
17. Хачатрян Р. А. О существовании непрерывных и гладких селекций многозначных отображений // Изв. НАН Армении. Математика.—2002.—Т. 37, № 2.—С. 65–76.

Статья поступила 25 марта 2016 г.

Хачатрян Рафик Агасиевич  
Ереванский государственный университет,  
доцент каф. численного анализа и мат. моделирования  
АРМЕНИЯ, 0025, Ереван, ул. Алека Манукяна, 1  
E-mail: khachatryan.rafik@gmail.com

## AN IMPLICIT FUNCTION THEOREM IN NON-SMOOTH CASE

Khachatryan R. A.

In this paper, we consider an equation of the form  $F(x, y) = 0$ ,  $x \in X$ ,  $y \in M$ , where  $M$  is a set. By the method of tents (tangent cones), when the set  $M$  is given by a nonsmooth restriction of equality type, the existence of a differentiable function  $y(\cdot)$  such that  $F(x, y(x)) = 0$ ,  $y(x) \in M$ ,  $y(x_0) = y_0$  is proved. In particular, the existence of smooth local selections for multivalued mappings of the form  $a(x) = \{y \in \mathbb{R}^m : f_i(x, y) = 0, i \in I, g(y) = 0\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ , is studied by the method of tents. It is assumed that the functions  $f_i(x, y)$ ,  $i \in I$ , are strictly differentiable, and the function  $g(y)$  is locally Lipschitzian. Under certain additional conditions it is proved that through any point of the graph of a set-valued mapping there passes a differentiable selection of this mapping. These assertion can be interpreted as an implicit function theorem in the nonsmooth analysis. Strongly differentiable tents for the sets defined by nonsmooth constraints of the equality type are also constructed in the article. A sufficient condition is provided for the intersection of strictly differentiable tents to be a strictly differentiable tent. It is also shown that the Clark tangent cones are Boltiansky tents for sets defined by locally Lipschitz functions.

**Key words:** set-valued mapping, subdifferential, tent, tangent cone.

## References

1. Avakov E. R., Magaril-Il'yaev G. G. An implicit-function theorem for inclusion, *Mathematical Notes*, 2012, vol. 91, no. 5–6, pp. 764–769. DOI: 10.1134/S0001434612050227.
2. Alekseev V. M., Tikhomirov V. M., Fomin S. V. *Optimalnoe upravleniye [Optimal Control]*, Moscow, Nauka, 1979, 408 p. (in Russian).
3. Arutyunov A. V. Implicit function theorem without a priori assumptions about normality, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2006, vol. 46, no. 2, pp. 195–205. DOI: 10.1134/S0965542506020023.
4. Gel'man B. D. A Generalized Implicit Function Theorem, *Functional Analysis and its Applications*, 2001, vol. 35, no. 3, pp. 183–188. DOI: 10.1023/A:1012322727547.
5. Aubin J. P., Ekeland I. *Applied Nonlinear Analysis*, Courier Corporation, 2006, 518 p.
6. Boltyanskii V. G. *Optimalnoe upravleniye diskretnimi sistemami [Optimal Control of Discrete Systems]*, Moscow, Nauka, 1973, 446 p. (in Russian).

7. Boltyanskii V. G. The method of tents in the theory of extremal problems, *Russian Mathematical Surveys*, 1975, vol. 30, no. 3, pp. 1–54. DOI: 10.1070/RM1975v030n03ABEH001411.
8. Kolmogorov A. N., Fomin S. V. *Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis*. Graylok Press, 1965, 257 p.
9. Clarke F. H. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. New York, Awiley-Intercience Publication John Wiley & Sons, 1983, 296 p.
10. Polovinkin E. S. *Mnogoznachnij analiz i differencialnye vklucheniya* [*Multivalued Analysis and Differential Inclusions*], Moscow, Fizmatlit, 2014, 606 p. (in Russian).
11. Pshenichnii B. N. *Wipuklij analiz i ekstremalniye zadachi* [*Convex Analysis and Extremal Problems*], Moscow, Nauka, 1980, 320 p. (in Russian).
12. Magaril-Il'yaev G. G. The implicit function theorem for Lipschitz maps, *Russian Mathematical Surveys*, 1978, vol. 33, no. 1, pp. 209–210. DOI: 10.1070/RM1978v033n01ABEH002249.
13. Clarke F. H. On the inverse fuction theorem, *Pacific Journal of Mathematics*, 1976, vol. 64, no. 1, pp. 97–102.
14. Michael E. Continous selections 1, *Ann. Math.*, 1956, vol. 64, no. 1, pp. 361–381.
15. Khachatryan R. A. On set-valued mappings with starlike graphs, *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 2012, vol. 47, no. 1, pp. 28–44.
16. Khachatryan R. A., Arutyanyan F. G. Intersection of tents in infinite dimensional spaces, *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 2001, vol. 36, no. 2, pp. 27–34.
17. Khachatryan R. A. On the existence of continous and smooth selections for multivalued mappings, *Journal of Contemporary Mathematical Analysis*, 2002, vol. 37, no. 2, pp. 30–40.

Received March 25, 2016

KHACHATRYAN RAFIK A.  
Departement of Informatics and Applied  
Mathematics Yerevan State University,  
1 A. Manukyan st., Yerevan, 0025, Armenia  
E-mail: khachatryan.rafik@gmail.com



## Вниманию авторов

Владикавказский математический журнал (ВМЖ) — научное периодическое издание, выходящее четыре раза в год. Журнал издается Южным математическим институтом — филиалом Владикавказского научного центра РАН.

К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Поступившие в редакцию ВМЖ статьи проходят обязательное научное рецензирование.

Текст статьи должен быть написан на русском или английском языке и тщательно выверен. В начале статьи указывается индекс УДК, Ф.И.О. автора(ов), аннотация (не содержащая формул) и ключевые слова. Название статьи, Ф.И.О. автора(ов), аннотацию и ключевые слова необходимо дать на английском и русском языках.

Список литературы печатается в конце текста статьи в порядке цитирования или по алфавиту. В нем должны быть указаны: для статей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

Статья подписывается автором (коллективом авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса, места работы, должности, полного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона.

Объем материала должен быть не более 1,4 усл. печ. листов ( $\approx 12$  стр. формата А4). Статьи большего объема могут быть приняты к публикации по решению редколлегии в исключительных случаях.

Статью необходимо подготовить с использованием макропакета LaTeX и оформить согласно стандартным требованиям, предъявляемым к авторским оригиналам. При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела. В редакцию статьи направлять по электронной почте в виде ps- или pdf-файла и tex-файла, либо по почте с приложением электронной версии.

Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего текст статьи направляется автору на корректуру. Плата за публикацию не взимается.

Авторские права на журнал в целом принадлежат Южному математическому институту — филиалу ВЦ РАН и Редколлегии журнала, которые обладают исключительным правом получать и распределять любые платежи, связанные с переуступкой авторских прав на журнал.

АДРЕС РЕДАКЦИИ: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22

ТЕЛЕФОН: (8672) 53-84-62;

E-MAIL: rio@smath.ru

ЗАВ. РЕДАКЦИЕЙ: Кибизова В. В.

# ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 19

Выпуск 4

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций.  
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.

---

Подписано в печать 25.12.2017. Дата выхода в свет 14.01.2018.  
Формат бумаги  $60 \times 84^{1/8}$ . Гарн. шрифта Computer modern.  
Усл. п. л. 11,63. Тираж 100 экз. Цена свободная.

---

Учредитель и издатель:  
Южный математический институт — филиал ФГБУН ФНИЦ  
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»  
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.  
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.