ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ISSN-1683-3414 (Print)
ISSN-1814-0807 (Online)

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

http://www.vlmj.ru

Том 20, выпуск 4

2018

SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

ISSN-1683-3414 (Print)
ISSN-1814-0807 (Online)

VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

http://www.vlmj.ru

Volume 20, Issue 4 2018

Адрес редакции: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 50-18-06; E-mail: rio@smath.ru
Зав. редакцией: В. В. КИБИЗОВА

Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
Электронная версия: **www.vlmj.ru**

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций:
свид. ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.;
свид. ЭЛ № ФС77-70171 от 21 июня 2017 г.

Editorial Office: 22 Markusa St., Vladikavkaz 362027,
the Republic of North Ossetia-Alania, Russia
Phone: (8672) 50-18-06; E-mail: rio@smath.ru
Managing editor: V. V. KIBIZOVA

The journal was founded in 1999. It is published four times a year.
ELECTRONIC VERSION: **www.vlmj.ru**

Registered with the Federal Service for Supervision in the Sphere of Telecom,
Information Technologies and Mass Communications:
ПИ № ФС77-70008 dated May 31, 2017; ЭЛ № ФС77-70171 dated June 21, 2017.

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 20, выпуск 4 октябрь–декабрь, 2018

СОДЕРЖАНИЕ

Владикавказ
2018

RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES
VLADIKAVKAZ SCIENTIFIC CENTER
SOUTHERN MATHEMATICAL INSTITUTE

VLADIKAVKAZ MATHEMATICAL JOURNAL

Volume 20, issue 4 October–December, 2018

CONTENT

Vladikavkaz
2018

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 4, С. 5–19

УДК 517.53/57
DOI 10.23671/VNC.2018.4.23383

СВОЙСТВА ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В СООТНОШЕНИИ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА ХАРДИ[♯]

Х. Х. Бурчаев[1], Г. Ю. Рябых[2]

[1] Чеченский государственный университет,
Россия, 364024, Грозный, ул. А. Шерипова, 32;
[2] Донской государственный технический университет,
Россия, 344010, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1

E-mail: bekhan.burchaev@gspetroleum.com, ryabich@aaanet.ru

Аннотация. Рассмотрим пространство Харди H_p в единичном круге D, $p \geqslant 1$. Пусть l_ω — линейный функционал на H_p, определяемый функцией $\omega \in L_q(T)$, где $T = \partial D$ и $1/p + 1/q = 1$, а F — экстремальная функция для l_ω. На $X \in H_q$ реализуется наилучшее приближение $\bar{\omega}$ в $L_q(T)$ элементами из $H_q^0 = \{y \in H_q : y(0) = 0\}$. Функции F и X называем экстремальными элементами (э. э.) для l_ω. Э. э. связаны соответствующим соотношением двойственности. Рассматривается задача о том, как те или иные свойства ω отразятся на свойствах э. э. Аналогичная задача исследуется и для случая $0 < p < 1$. В статье Л. Карлесона и С. Кобса (1972) была изучена задача о свойствах элементов, на которых достигается нижняя грань $\|\bar{\omega} - x\|_{L_\infty(T)}$ для заданного $\omega \in L_q(T)$ по $x \in H_\infty^0$. Гипотеза авторов о том, что связь между э. э. подобна связи между ω и его проекцией на H_q, частично подтверждена в статье В. Г. Рябых (2006). Свойства э. э. для l_ω, когда ω — полином, изучены в статье Х. Х. Бурчаева, В. Г. Рябых и Г. Ю. Рябых (2017). В данной статье, опираясь на основной результат последней статьи и пользуясь методом последовательных приближений, доказано: если $\omega \in L_{q^*}(T)$, $q \leqslant q^* < \infty$, то $F \in H_{(p-1)q^*}$, $X \in H_{q^*}$; когда производная $\omega^{(n-1)} \in \mathrm{Lip}(\alpha, T)$, $0 < \alpha < 1$, то $F = Bf$, где B — произведение Бляшке, f — внешняя функция, при этом $(|f(t)|^p)^{(n-1)} \in \mathrm{Lip}(\alpha, T)$. Если же функция ω аналитична вне единичного круга, то э. э. аналитичны в том же круге. Перечисленные результаты уточняют и дополняют подобные результаты, полученные в упомянутой работе В. Г. Рябых (2006). Доказано также, что экстремальная функция для $l_\omega \in (H_q)^*$, где $1/(n+1) < \delta < 1/n$, $\omega \in H_\infty \cap \mathrm{Lip}(\beta, T)$, $\beta = 1/\delta - n + \nu < 1$ и $\nu > 0$, существует и обладает той же гладкостью, что и образующая функция ω.

Ключевые слова: линейный функционал, экстремальный элемент, метод приближения, производная.

Mathematical Subject Classification (2000): 47A60.

Образец цитирования: *Бурчаев Х. Х., Рябых Г. Ю.* Свойства экстремальных элементов в соотношении двойственности для пространства Харди // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 4.—С. 5–19. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23383.

1. Введение

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $T = \partial D$, $t = e^{i\theta}$; $1 \leqslant p < \infty$, $q : 1/p + 1/q = 1$. Рассмотрим линейный (ограниченный) функционал над пространством Харди H_p, образованный $\omega \in H_q$, т. е. $\left(\int_0^{2\pi}(\cdot)\,d\theta = \int_T(\cdot)\,d\theta\right)$

$$l(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_T a(t)\bar{\omega}(t)\,d\theta, \quad a \in H_p. \tag{1.1}$$

[♯]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 18-01-00017.

Пусть $H_q^0 = \{x \in H_q : x(0) = 0\}$. Согласно [1, гл. IV] имеет место

Теорема A (о двойственности). *Если в функционале* (1.1) $1 < p < \infty$ *и* $\omega \in H_q$, *то* $(\|\cdot\|_{L_p(T)} = \|\cdot\|_p)$

$$\|l\| = \sup_{\|a\|_p \leqslant 1} \left| \frac{1}{2\pi} \int_T a\,\bar{\omega}\,d\theta \right| = \inf_{x \in H_q^0} \|\bar{\omega} - x\|_q = \lambda. \tag{1.2}$$

Существуют единственные функции $F \in H_p$, $\|F\|_p = 1$ *и* $X \in H_q^0$, *для которых*

$$\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_T F\bar{\omega}\,d\theta = \|\bar{\omega} - X\|_q. \tag{1.3}$$

Равенство (1.3) *равносильно выполнению п. в. соотношения*

$$\frac{|F(t)|^p}{F(t)} = \frac{\bar{\omega}(t)}{\lambda} - \frac{X(t)}{\lambda}. \tag{1.4}$$

Будем говорить, что функция $F \in H_p$ *экстремальна* (э. ф.) *для функционала* l, если $l(F) = \|l\|$ и $\|F\|_p = 1$.

Функцию X в (1.3), на которой реализуется нижняя грань, называем *элементом наилучшего приближения* (э. н. п.) для $\bar{\omega}$.

Э. ф. и э. н. п. называем *экстремальными элементами* (э. э.) для функционала l.

1.1. В предлагаемой работе исследуются качественные свойства э. э. для функционала (1.1). Подобная задача изучена относительно э. ф. для линейного функционала над H_p, $0 < p < 1$.

1.2. В [2] (2006 г.) установлено, что свойства э. э. зависят от принадлежности функции ω в функционале (1.1) тому или иному классу. Впервые подобная задача при $p = 1$ изучена в [3] (1972 г.). Одной из последних по этому вопросу является статья [4] (2017 г.).

1.3. В данной работе, опираясь на основной результат из [4], уточняются и дополняются некоторые старые результаты. Получены новые результаты.

Кратко изложим содержание работы. Ниже приводятся обозначения и сведения, используемые в дальнейшем. В § 2 сформулированы основные результаты (теоремы 1, 2 и 3, 4). Доказательства даны в §§ 3, 4 и §§ 5, 6. Лемма 1 является вспомогательной для теоремы 2. Обсуждение старых и новых результатов вынесено в замечания 1 (§ 3) и 2 (§ 4). Теорема 3′ (§ 5) обобщает теорему 3 относительно линейного функционала над H_p, $0 < p < 1$.

Настоящую работу можно рассматривать как продолжение работ [2] и [4].

1.4. Через $A(A(R); A(\mathbb{C}))$ обозначим множество функций, аналитических в $D(|z| < R, R > 1; \mathbb{C})$; AC — совокупность функций из A, непрерывных на $\overline{D}$ — замыкании круга D.

Для $0 < \alpha < 1$, $n \geqslant 1$ обозначим $\operatorname{Lip}^{(n-1)}(\alpha, T) = \operatorname{Lip}^{(n-1)}\alpha$ — класс функций w, непрерывных на T вместе с производными до порядка $n-1$ включительно, причем $w^{(n-1)}$ принадлежит классу Липшица с показателем α:

$$\left|w^{(n-1)}(t_1) - w^{(n-1)}(t_2)\right| = O\big(|t_1 - t_2|^{\alpha}\big).$$

Если $n = 1$, то обозначим $\operatorname{Lip}\alpha = \operatorname{Lip}^{(0)}\alpha$.

Класс $L_*^{(n-1)}$ состоит из функций ω, принадлежащих $\mathrm{Lip}^{(n)}\beta$, $0<\beta<1$, таких, что $w^{(n-1)}$ удовлетворяют условию Зигмунда:

$$\left|w^{(n-1)}(te^{i\varphi})-2w^{(n-1)}(t)+w^{(n-1)}(te^{-i\varphi})\right|=O(|\varphi|).$$

Соответственно, пусть

$$\Lambda_\alpha^{(n-1)}A=\left\{g\in A:\ \|g\|_{\alpha,n}=\sum_{j=0}^{n-1}\left|g^{(j)}(0)\right|+\sup_{z\in D}(1-|z|)^{1-\alpha}\left|g^{(n)}(z)\right|<\infty\right\},$$

$$\Lambda_*^{(n-1)}A=\left\{g\in A:\ \|g\|_n^*=\sum_{j=0}^{n}\left|g^{(j)}(0)\right|+\sup_{z\in D}(1-|z|)\left|g^{(n+1)}(z)\right|<\infty\right\}.$$

Теорема B [4]**.** *Если в функционале (1.1) $1<p<\infty$ и ω — полином, то $F\in A(\mathbb{C})$.*

Теорема C [5]**.** *Пусть $\Psi\in(H_\delta)^*$, $0<\delta<1$. Тогда существует единственная функция $g\in AC$ такая, что*

$$\Psi(a)=\lim_{\rho\to1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_T a(\rho t)\bar g(t)\,d\theta,\quad a\in H_\delta. \tag{1.5}$$

Если при этом $1/(n+1)<\delta<1/n$, $n\geqslant1$, то $g\in\Lambda_\alpha^{(n-1)}A$, где $\alpha=1/\delta-n$.

Обратно, для $g\in\Lambda_\alpha^{(n-1)}A$, $\alpha=1/\delta-n$, предел (1.5) существует для всех $a\in H_\delta$ и определяет ограниченный функционал над H_δ.

При $\delta=1/(n+1)$ функция $g\in L_*^{(n-1)}$. Соответственно, если $g\in L_*^{(n-1)}$, то она образует над $H_{1/(n+1)}$ ограниченный функционал вида (1.5).

Отметим, что для $\delta=1/(n+\alpha)$ имеет место оценка (см. [5])

$$c(\delta)\,\|g\|_{\alpha,n}\leqslant\|\Psi\|\leqslant C(\delta)\,\|g\|_{\alpha,n}. \tag{1.6}$$

Функцию $\Phi\in H_\delta$ называем *экстремальной* для функционала (1.5), если

$$\|\Phi\|_\delta=\left(\lim_{\rho\to1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\Phi\left(\rho e^{i\theta}\right)\right|^\delta d\theta\right)^{1/\delta}=1,\quad \Psi(\Phi)=\|\Psi\|=\sup_{a\neq0}\frac{|\Psi(a)|}{\|a\|_\delta}.$$

Говорим, что $g\in\lambda_\alpha A$, $0<\alpha<1$, если $(1-|z|)^{1-\alpha}|g'(z)|\to0$ при $|z|\to1$. Множество полиномов плотно в $\lambda_\alpha A$ (см. [5]).

2. Формулировки основных результатов

Теорема 1. *Э. ф. для функционала (1.1), в котором $1<p<\infty$ и $\omega\in H_{q_1}$, $q\leqslant q_1<\infty$, принадлежит $H_{(p-1)q_1}$ тогда и только тогда, когда $\omega\in H_{q_1}$. При этом э. н. п. $X\in H_{q_1}$.*

Доказательство основано на использовании теоремы B, теоремы о форме элементов пространства $(L_\gamma(T))^*$, $1 < \gamma < \infty$, и теоремы о проектировании из $L_\gamma(T)$ в H_γ.

Теорема 2. *Если в функционале* (1.1) $1 < p < \infty$ *и* $\omega \in \Lambda_\alpha^{(n-1)}A$, $0 < \alpha < 1$, $n \geqslant 1$, *то* $F = Bf$, *где* f *— внешняя функция,* $|f(t)|^p \in \mathrm{Lip}^{(n-1)}\alpha$, B *— произведение Бляшке.*

Соответственно, если $\omega \in \Lambda_*^{(n-1)}A$, *то* $|f(t)|^p \in L_*^{(n-1)}$.

Доказательство проводится с помощью теорем 1 и C, теоремы Арцела — Асколи о компактности и теоремы о граничных значениях интеграла Пуассона.

Теорема 3. *Пусть в функционале* (1.5) $1/2 < \delta < 1$ *и* $g \in \Lambda_{\alpha+\nu}A$, *где* $\alpha = 1/\delta - 1$, $\nu > 0$, $0 < \alpha + \nu < 1$. *Тогда э. ф. этого функционала существует* (*может быть, не единственная*) *и принадлежит* $\Lambda_{\alpha+\nu}A$.

Теорема 3 доказывается сведением ее к аналогичной теореме 4 из [2] относительно функционала (1.1): *если в* (1.1) $1 \leqslant p < 2$ *и* $\omega \in \Lambda_\alpha A$, *то э. ф. обладает такой же гладкостью.*

Теорема 4. *Если в равенстве* (1.3) $\omega \in A(R)$, *то э. н. п.* $X \in A(R)$.

Доказательство проводится методом вложения, примененным в [4].

3. Доказательство теоремы 1

Если в условии теоремы $q = q_1$, то доказательство сразу вытекает из теоремы A.

Пусть в функционале (1.1) $q < q_1$ и $\omega := \omega_N$ — частичная сумма разложения ω в ряд Тейлора, l_N — линейный функционал над H_p, образованный полиномом ω_N, F_N и X_N — соответствующие э. э., $\lambda_N = \|l_N\|$. Тогда согласно соотошению (1.4) п. в.

$$\frac{|F_N(t)|^p}{F_N(t)} = \frac{\bar{\omega}_N(t)}{\lambda_N} - \frac{X_N(t)}{\lambda_N}, \tag{3.1}$$

где $X_N \in H_q^0$. Умножим обе части (3.1) на $F_N(t)h(t)$, где h — полином, и проинтегрируем по θ. Получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_T |F_N|^p h\, d\theta = \frac{1}{\lambda_N}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \bar{\omega}_N F_N h\, d\theta\right). \tag{3.2}$$

Пусть $p_1 = (p-1)q_1$, $p_2 = p_1/(p_1 - p)$. Тогда $p_1 > p > 1$, $p_2 > 1$. При этом

$$\frac{1}{q_1} + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = \frac{1}{q_1}\left(1 + \frac{1}{p-1} + \frac{(p-1)q_1 - p}{p-1}\right) = 1.$$

Правую часть (3.2) оценим с помощью неравенства Гёльдера. С учетом $F_N \in A(\mathbb{C})$ по теореме B, $\omega_N \in H_{q_1}$, $h \in H_{p_2}$, получим

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_T |F_N|^p h\, d\theta\right| \leqslant \left(\frac{\|\omega_N\|_{q_1}}{\lambda_N}\right)\|F_N\|_{p_1}\|h\|_{p_2}.$$

Тогда, тем более, будет выполняться неравенство

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_T |F_N|^p \,\mathrm{Re}(h)\, d\theta\right| \leqslant \left(\frac{\|\omega_N\|_{q_1}}{\lambda_N}\right)\|F_N\|_{p_1}\|h\|_{p_2}.$$

Воспользовавшись оценкой

$$\|h\|_{p_2} \leqslant \|\mathrm{Re}(h)\|_{p_2} + \|\mathrm{Im}(h)\|_{p_2} \leqslant \big(1 + C_1(p_2)\big)\|\mathrm{Re}(h)\|_{p_2},$$

где $C_1 = O(p_2/(p_2 - 1))$ (см. [6, гл. 9]), предыдущее неравенство сводим к неравенству

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_T |F_N|^p \,\mathrm{Re}(h)\, d\theta \right| \leqslant C_2(N, q_1, p_1)\|F_N\|_{p_1}\|\mathrm{Re}(h)\|_{p_2}, \tag{3.3}$$

где $C_2(N, q_1, p_1)$ ограничены в совокупности в силу $\omega_N \to \omega$ в H_{q_1}, $\lambda_N = \|l_N\| \to \|l\|$ при $N \to \infty$ (см. [7, замечание]).

Множество тригонометрических полиномов плотно в $L_{p_2}(T)$, $p_2 > 1$. Поэтому линейный функционал из левой части (3.3) можно с сохранением нормы продолжить на все пространство $L_{p_2}(T)$, т. е.

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_T |F_N|^p y \, d\theta \right| \leqslant C(q_1, p_1)\|F_N\|_{p_1}\|y\|_{p_2}$$

для всех $y \in L_{p_2}(T)$. Из предыдущего по теореме об общем виде линейного функционала над $L_{p_2}(T)$ (см. [8, гл. VI, § 2]) следует неравенство $\big(1/p_2 + 1/p_2' = 1\big)$

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_T |F_N|^{\frac{p}{p_2'}} \, d\theta \right)^{\frac{1}{p_2'}} \leqslant C \left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_T |F_N|^{p_1} d\theta \right)^{\frac{1}{p_1}}.$$

Отсюда, имея ввиду $pp_2' = p_1$, $1/p_2' = p/p_1$, после сокращения получим

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_T |F_N|^{p_1} d\theta \right)^{\frac{p-1}{p_1}} \leqslant C. \tag{3.4}$$

Так как $\omega_N \to \omega$ в H_q, $q \leqslant q_1$, при $N \to \infty$, пространство H_p, $p > 1$, — равномерно выпуклое, то $F_N \to F$ в H_p (см. [7]), значит, $F_N(z) \to F(z)$ равномерно внутри D. Из (3.4) следует

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_T |F_N(\rho t)|^{p_1} d\theta \right)^{\frac{1}{p_1}} \leqslant C^{\frac{1}{p-1}}.$$

В последнем неравенстве перейдем к пределу при $N \to \infty$. Получим

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int\limits_T |F(\rho t)|^{p_1} d\theta \right)^{\frac{1}{p_1}} \leqslant C^{\frac{1}{p-1}},$$

т. е. $F \in H_{p_1}$, $p_1 = (p-1)q_1$.

Обратно, пусть э. ф. $F \in H_{(p-1)q_1}$. Тогда функция $|F|^p/F \in L_{q_1}(T)$ и на основании разложения $L_\gamma(T) = H_\gamma \oplus \overline{H_\gamma^0}$, $\gamma > 1$ (теорема о проектировании из $L_\gamma(T)$ в H_γ (см. [6, гл. 9])), она единственным образом представима в виде

$$\frac{|F(t)|^p}{F(t)} = \varphi_1(t) + \bar{\varphi}_0(t),$$

где $\varphi_1 \in H_{q_1}$, $\varphi_0 \in H^0_{q_1}$. Отсюда и из (1.4) следует, что п. в.

$$\varphi_1(t) + \bar{\varphi}_0(t) = \frac{\bar{\omega}(t)}{\lambda} - \frac{X(t)}{\lambda}.$$

Следовательно, по единственности $\omega = \lambda(\varphi_0 + \bar{\varphi}_1(0)) \in H_{q_1}$, $X = -\lambda(\varphi_1 - \varphi_1(0)) \in H_{q_1}$. Теорема 1 доказана.

Замечание 1. Теорема 1 уточняет теорему 2 из [2]: в последней установлено, что в условиях теоремы 1 э.н.п. $X \in \bigcap\limits_{\gamma<q_1} H_\gamma$ (в теореме 1 э.н.п. $X \in H_{q_1}$).

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\log(G(e^{i\theta}) + \mu)| d\theta \leqslant \sup_N \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\log(|F_N(e^{i\theta})|^p + 1) + p|\log(|F_N(e^{i\theta})|)\, d\theta.$$

4. Доказательство теоремы 2

Лемма 1. *Если в функционале* (1.1) $1 < p < \infty$ *и* $\omega \in \Lambda_\alpha A$, $0 < \alpha < 1$, *то* $|F_N(t)|^p \to G(t)$ *в* $C(T)$, *где* $G \in \operatorname{Lip}\alpha$.

$\lhd$ Умножим обе части равенства (3.1) на $F_N(t)/(1-tz)$ и проинтегрируем по θ. Получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{|F_N|^p}{1-tz}\,d\theta = \frac{1}{\lambda_N}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{F_N(t)}{1-tz}\,\bar{\omega}_N(t)\,d\theta\right) = \frac{1}{\lambda_N}\left(\lim_{\rho\to1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{F_N(\rho t)}{1-\rho tz}\,\bar{\omega}_N(t)\,d\theta\right). \quad (4.1)$$

Пусть $0 < \beta < \alpha$. Тогда $\omega_N \to \omega$ в $\Lambda_\beta A$ (см. [5]). Поэтому последовательность $\{\omega_N\}$ ограничена в H_∞. Следовательно, по теореме 1 последовательность $\{F_N\}$ ограничена в H_γ для каждого $0 < \gamma < \infty$. По теореме C предел в правой части (4.1) воспринимаем как значение линейного функционала Ψ_N над $H_{1/(1+\beta)}$ на $F_N(t)/(1-tz)$. Тогда

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{|F_N|^p}{1-tz}\,d\theta\right| \leqslant \left(\frac{\|\Psi_N\|}{\lambda_N}\right)\left\|\frac{F_N(t)}{1-tz}\right\|_{1/(1+\beta)},$$

где $\|\Psi_N\|$ ограничены в совокупности в силу оценки (1.6) и ограниченности $\{\omega_N\}$ в $\Lambda_\beta A$. Норму в правой части предыдущего неравенства оценим с помощью неравенства Гёльдера, $\gamma > 1$, $1\gamma' + 1/\gamma = 1$. Получим

$$\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{|F_N|^p}{1-tz}\,d\theta\right| \leqslant C_*\|F_N\|^{1+\beta}_{\gamma'/(1+\beta)}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{d\theta}{|1-tz|^{\gamma/(1+\beta)}}\right)^{\frac{1+\beta}{\gamma}}.$$

Число γ подберем так, чтобы выполнялось условие $\gamma/(1+\beta) < 1$. Тогда интеграл в правой части последнего неравенства сходится. Следовательно, последовательность из левой части ограничена в D. Поэтому последовательности

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{|F_N|^p}{1-t\bar{z}}d\theta\right\},\quad \left\{\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{|F_N|^p\bar{t}z}{1-\bar{t}z}d\theta\right\}$$

ограничены в D. С учетом этого, воспользовавшись представлением ядра Пуассона $(z = re^{i\varphi})$

$$P(r, \theta-\varphi) = \frac{1-r^2}{1-2\,r\cos(\theta-\varphi)+r^2} = \frac{1}{1-t\bar z} + \frac{\bar t z}{1-\bar t z} \tag{4.2}$$

и неравенством треугольника, заключаем, что последовательность

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \big|F_N\big(e^{i\theta}\big)\big|^p P(r,\theta-\varphi)\,d\theta = \big(P_r * |F_N|^p\big)(\varphi)$$

ограничена в D. Откуда, $|F_N|^p \in C(T)$ в силу $F_N \in A(\mathbb{C})$ по теореме B, переходя к пределу при $r \to 1$, пользуясь теоремой о граничных значениях интеграла Пуассона [6, гл. 3], заключаем, что последовательность $\{F_N(z)\}$ ограничена в D. Поэтому $F(z)$ ограничена в D в силу $F_N(z) \to F(z)$ в D.

Продифференцировав обе части (4.1) по φ, получим

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{|F_N|^p}{1-tz}\,d\theta\right) = \frac{iz}{\lambda_N}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{F_N(t)t}{(1-tz)^2}\,\bar\omega_N(t)\,d\theta\right).$$

Как и выше, выражение в круглых скобках в правой части считаем значением функционала Ψ_N над $H_{1/(1+\beta)}$ на функции $F_N(t)t/(1-tz)^2$. Соответственно имеем

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{|F_N|^p}{1-tz}\,d\theta\right)\right| \leqslant \left(\frac{\|\Psi_N\|}{\lambda_N}\right)\|F_N\|_\infty \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{d\theta}{|1-tz|^{2/(1+\beta)}}\,d\theta\right)^{1+\beta},$$

где последовательности $\{\|\Psi_N\|\}$ и $\{\lambda_N\}$ ограничены.

К интегралу в правой части применим оценку $(z = re^{i\varphi})$ [5]

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{d\theta}{|1-tz|^{1+\mu}} \leqslant \frac{C_\mu}{(1-r)^\mu}, \quad \mu > 0. \tag{4.3}$$

В результате получим

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{|F_N|^p}{1-tz}\,d\theta\right)\right| \leqslant \frac{C(\beta)}{(1-r)^{1-\beta}}.$$

Отсюда, пользуясь представлением (4.2), $\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi(z) = iz\psi'(z)$ для $\psi \in A$, рассуждая как в первой части доказательства, заключаем, что

$$\left|\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \big|F_N\big(e^{i\theta}\big)\big|^p P(r,\theta-\varphi)\,d\theta\right)\right| \leqslant \frac{A(\beta)}{(1-r)^{1-\beta}}.$$

Воспользуемся теоремой C из [2]: «*для того чтобы 2π-периодическая функция w имела на T производную порядка $n-1$, удовлетворяющую условию Липшица с показателем $0<\alpha<1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось*

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial\varphi^n}\int\limits_0^{2\pi} w(\theta)P(r,\theta-\varphi)\,d\theta\right| \leqslant \frac{A_*(\alpha)}{(1-r)^{1-\alpha}}.\text{»}$$

По процитированной теореме последовательность $\{|F_N(t)|^p\}$ ограничена в $\operatorname{Lip}\beta$. Поэтому найдется $M(\beta) > 0$ такое, что

$$\big||F_N(t_1)|^p - |F_N(t_2)|^p\big| \leqslant M(\beta)|t_1 - t_2|^\beta. \tag{4.4}$$

Таким образом, ограниченная в $C(T)$ последовательность $\{|F_N(t)|^p\}$ равностепенно непрерывна. Следовательно, по теореме Арцела — Асколи последовательность $\{|F_N(t)|^p\}$ компактна в $C(T)$ (см. [8, гл. I, § 5]). Из $|F_N|^p \to |F|^p$ в $L_1(T)$ следует, что предел $(P_r * |F_N|^p)(\varphi)$ при $N \to \infty$ существует. Если $\{|F_N(t)|^p\}$ имеет в $C(T)$ предельные точки $G_1(t)$ и $G_2(t)$, то в силу единственности предела $(P_r * G_1)(\varphi) = (P_r * G_2)(\varphi)$. Откуда при $r \to 1$ получим, что $G_1(t) = G_2(t)$. И в силу (4.4) $|F_N(t)|^p \to G(t) \in \operatorname{Lip}\beta$. Перейдем в равенстве (4.1) к пределу при $N \to \infty$. Получим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{G}{1 - tz}\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{F}{1 - tz}\,\bar{\omega}\, d\theta,$$

где $F \in H_\infty$. Относительно этого равенства повторим рассуждения, проведенные выше. В результате заключаем, что $|F_N|^p \to G \in \operatorname{Lip}\alpha$ в $C(T)$. $\rhd$

Перейдем к доказательству основной части теоремы 2. Из ограниченности $\{F_N(z)\}$ и $F(z)$ в D следуют представления $F_N = B_N f_N$ и $F = Bf$, где B_N и B — произведения Бляшке, f_N и f — функции, ограниченные в D и без нулей [6, гл. 5]. Произведение Бляшке однозначно определяется нулями данной функции. Поэтому $B_N \to B$, $f_N \to f$ в D. Поскольку последовательность $\{F_N(t)\}$ ограничена в H_∞, то последовательность $\{\log|F_N(t)|\}$ ограничена в $L_1(T)$ (см. [6, гл. 4]). Так как $|F_N(t)| \to G(t) \in \operatorname{Lip}\alpha$ по лемме 1, то $|\log(|F_N(t)|^p + \mu)| \to |\log(G(t) + \mu)|$ для любого $0 < \mu < 1$. Поэтому

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \big|\log\big(G\big(e^{i\theta}\big) + \mu\big)\big|\, d\theta \leqslant \sup_N \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \big|\log\big(\big|F_N(e^{i\theta})\big|^p + 1\big) + p\big|\log\big(\big|F_N(e^{i\theta})\big|\big)\, d\theta.$$

Отсюда в силу произвольности μ, $0 < \mu < 1$, заключаем, что $\log G(t)$ суммируем. Тогда п. в. $G(t) = |G_*(t)|$, где $G_* \in H_\infty$ (см. [6, гл. 4]). Следовательно, п. в. $G(t) > 0$.

Пусть $t_0 = e^{i\theta_0}$, $G(t_0) > 0$. Тогда по непрерывности $G(t) > 0$ в некоторой открытой окрестности точки θ_0. Опираясь на оценку (4.4), получим

$$\begin{aligned}|F_N(t)|^p &= G(t) + \big(|F_N(t)|^p - |F_N(t_0)|^p v\big) + \big(|F_N(t_0)|^p - G(t_0)\big)\\ &\geqslant G(t_0) - \big(M|\theta - \theta_0|^\beta + \big||F_N(t_0)|^p - G(t_0)\big|\big).\end{aligned}$$

Отсюда, $|F_N(t_0)|^p \to G(t_0)$, заключаем, что найдутся δ_0, $0 < \delta_0 < \pi$, и номер $N_0 = N(\delta_0)$ такие, что при $\theta \in l_0 = \{\theta : |\theta - \theta_0| < \delta_0\}$ значения $G(t) > 0$ и $|F_N(t)|^p > 0$. Тогда $\log|F_N(t)|$ и $\log G(t)$ непрерывны при $\theta \in l_0$. И по $\varepsilon > 0$ можно выбрать δ, $0 < \delta < \delta_0$, такое, что при $\theta \in l_1 = \{\theta : |\theta - \theta_0| < \delta\}$ будет

$$\big|\log G(t) - \log G(t_0)\big| = p \lim_{N\to\infty} \big|\log|F_N(t)| - \log|F_N(t_0)|\big| < \varepsilon. \tag{4.5}$$

Так как $F_N \in A(\mathbb{C})$, то f_N — внешняя функция функции f_N (см. [6, гл. 5]). Тогда $|f_N(t)| = |F_N(t)|$ п. в., причем

$$\log\big|f_N\big(\rho e^{i\theta_0}\big)\big| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \log\big|F_N\big(e^{i\theta}\big)\big| P(\rho, \theta - \theta_0)\, d\theta.$$

Отсюда, с учетом

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(\rho,\theta-\theta_0)\,d\theta = \frac{1-\rho^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{d\theta}{1-2\rho\cos(\theta-\theta_0)+\rho^2},$$

$|F_N(t_0)|^p \to G(t_0)$, следует, что

$$\log|f(\rho t_0)| - \frac{1}{p}\log G(t_0) = \lim_{N\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\bigl(\log\bigl|F_N\bigl(e^{i\theta}\bigr)\bigr| - \log\bigl|F_N\bigl(e^{i\theta_0}\bigr)\bigr|\bigr)P(\rho,\theta-\theta_0)\,d\theta. \tag{4.6}$$

Пусть $l = \{\theta : |\theta-\theta_0| < \delta/2\}$. Интеграл в правой части (4.6) представим как сумму интегралов $I_{1,N}(\rho)$ и $I_{2,N}(\rho)$ соответственно по l и $l_* = [-\pi,\pi]\setminus l$. Относительно первого слагаемого, имея ввиду оценку (4.5), получим

$$I_{1,N}(\rho) < \varepsilon, \quad N > N_0. \tag{4.7}$$

На l_* имеем, что $|\theta-\theta_0| < \delta/2$, где $0<\delta<\pi$, тогда $\cos(\theta-\theta_0) \leqslant \cos(\delta/2) < 1$. Следовательно, для второго слагаемого имеем

$$\bigl|I_{2,N}(\rho)\bigr| \leqslant \frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\delta/2)+\rho^2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bigl(\bigl|\log|F_N(t)|\bigr| + \bigl|\log|F_N(t_0)|\bigr|\bigr)\,d\theta.$$

Откуда вытекает, что $\sup_N |I_{2,N}(\rho)| \to 0$ при $\rho\to 1$ в силу ограниченности $\{\log|F_N(t)|\}$ в $L_1(T)$ и $|F_N(t_0)| \to G^{1/p}(t_0) > 0$. Вследствие последнего, (4.6) и (4.7) получим

$$\lim_{\rho\to 1}\bigl|\log|f(\rho t_0)|^p - \log G(t_0)\bigr| \leqslant p\varepsilon,$$

как только $G(t_0) > 0$. Следовательно, $|f(t)|^p = G(t)$ п. в. в силу произвольности $\varepsilon > 0$. Если $G(t_0) = 0$, то из неравенства (формула Пуассона)

$$0 \leqslant |f(\rho t_0)|^p \leqslant (P_\rho * G)(\theta_0)$$

при $\rho \to 1$ вытекает, что $f(t_0) = 0$. Это вместе с предыдущим устанавливает, что $|f(t)|^p = G(t) \in \operatorname{Lip}\alpha$, когда в функционале (1.1) $\omega \in \Lambda_\alpha A$.

Пусть в функционале (1.1) $\omega \in \Lambda_\alpha^{(n-1)}A$, $n \geqslant 2$. Тогда, тем более, $\omega \in \Lambda_\alpha A$, и по доказанному выше $|F_N(t)|^p \to |f(t)|^p \in C(T)$. Перейдем в равенстве (4.1) к пределу при $N\to\infty$, в новом равенстве от обеих частей возьмем производную порядка n. Получим

$$\left(\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{|f(t)|^p}{1-tz}\,d\theta\right)^{(n)} = \frac{n!}{\|l\|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{F(t)t^n\bar{\omega}(t)}{(1-tz)^{n+1}}\,d\theta\right).$$

Как и ранее, по теореме C выражение в круглых скобках в правой части воспринимаем как значение линейного функционала Ψ над $H_{1/(n+\alpha)}$ на функции $F(t)t^n/(1-tz)^{n+1}$. Тогда

$$\left|\left(\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{|f(t)|^p}{1-tz}\,d\theta\right)^{(n)}\right| \leqslant \frac{n!\|\Psi\|\|F\|_\infty}{\|l\|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_T \frac{d\theta}{|1-tz|^{(n+1)/(n+\alpha)}}\right)^{n+\alpha}.$$

К интегралу правой части применим оценку (4.3). В левой части перейдем к производной по φ. После простых промежуточных оценок получим оценку ($z = re^{i\varphi}$)

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial\varphi^n}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{|f(t)|^p}{1-tz}\,d\theta\right)\right| \leqslant \frac{C(\alpha)}{(1-r)^{1-\alpha}},$$

которую, воспользовавшись представлением (4.2), сводим к оценке

$$\left|\frac{\partial^n}{\partial\varphi^n}\left(P_r * |f|^p\right)(\varphi)\right| \leqslant \frac{A(\alpha)}{(1-r)^{1-\alpha}}.$$

Отсюда по процитированной выше теореме С из [2] заключаем, что $|f|^p \in \mathrm{Lip}^{(n-1)}\alpha$.

Пусть теперь в функционале (1.1) $\omega \in \Lambda_*^{(n-1)}A$, $n \geqslant 1$. Тогда $\omega \in \Lambda_\nu^{(n-1)}A$, где ν, такое, что $0 < \nu < 1$. По доказанному выше соответствующий $|f|^p \in \mathrm{Lip}^{(n-1)}\nu$. Умножим обе части (1.4) на $F(t)h(\rho t)$, где h — полином, и проинтегрируем по θ. С учетом $|F(t)|^p = |f(t)|^p$ п. в., $F(\rho t) \to F(t)$ в H_1, получим

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_T h(\rho t)|f(t)|^p\,d\theta = \lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_T h(\rho t)F(\rho t)\bar{\omega}(t)\,d\theta. \tag{4.8}$$

Множество полиномов плотно в $H_{1/(n+1)}$, $hF \in H_{1/(n+1)}$ в силу $F \in F_\infty$. По теореме С линейный функционал над $H_{1/(n+1)}$ из правой части (4.8) можно продолжить с сохранением нормы на все пространство $H_{1/(n+1)}$. Значит, такое же продолжение допускает функционал из левой части (4.8). Далее, пользуясь разложением $L_\gamma(T) = H_\gamma \oplus \overline{H_\gamma^0}$, имея ввиду $|f|^p \in C(T)$, по теореме С, $\delta = 1/(n+1)$, заключаем, что $|f|^p \in L_*^{(n-1)}$.

Теорема 2 доказана.

Так как функция $F_N \in A(\mathbb{C})$, то в ее факторизации сингулярная часть равна единице. Поэтому в представлении $F_N = B_N f_N$ функция

$$f_N(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,\log\left|f_N\left(e^{i\theta}\right)\right|d\theta\right] \tag{4.9}$$

с точностью до множителя с модулем, равным 1 (см. [6, гл. 5]). Перейдем в этом представлении к пределу при $N \to \infty$. Следуя первой части доказательства теоремы 2 и (4.9), заключаем, что

$$f(z) = \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\,\log G^{\frac{1}{p}}\left(e^{i\theta}\right)d\theta\right]$$

с точностью до множителя с модулем, равным 1.

Соответственно, э. ф.

$$F(z) = \lim_{N\to\infty} B_N(z)f_N(z) = B(z)f(z), \tag{4.10}$$

где f — внешняя функция функции F.

Замечание 2. Теорема 2 дополняет [2, теорема 3]. Именно, в одинаковых условиях этих теорем в теореме 2 дополнительно установлено, что э. ф. F представима в виде (4.10), где f подчиняется условиям, которые указаны в заключении теоремы 2 (в [2, теорема 3] не затрагивается вопрос о сингулярной части э. ф. F).

5. Доказательство теоремы 3

Лемма 2. *Если в функционале* (1.5) $1/2 < \delta < 1$ *и* $g \in \lambda_\alpha A$, $\alpha = 1/\delta - 1$, *то э. ф. для* (1.5) *существует* (*может быть, не единственная*).

$\lhd$ С помощью тейлоровых рядов функций a и g получим ($a_\rho(\zeta) = a(\rho\zeta)$)

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_T a_\rho \bar{g}\, d\theta = \frac{1}{\pi}\int\limits_D a_\rho\big(\bar{\zeta}\bar{g}\,' + \bar{g}\big)\, d\sigma = \frac{1}{\pi}\int\limits_D a_\rho\bar{\zeta}\bar{g}\,' d\sigma + \frac{1}{\pi}\int\limits_D a_\rho\bar{g}\, d\sigma = M_1(a,\rho) + M_2(a,\rho). \quad (5.1)$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства представим как сумму интегралов $I_1(a,\rho)$ и $I_2(a,\rho)$ соответственно, по $D(r) = \{|\zeta| < r < 1\}$ и $K(r) = D \setminus D(r)$. С учетом того, что $(1-|\zeta|)^{1-\alpha}|g'(\zeta)| \leqslant C(\alpha)$, $1-\alpha = 2 - 1/\delta$, будет

$$\big|I_2(a,r)\big| = \left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{K(r)} a\bar{\zeta}\,\bar{g}\,' d\sigma\right| \leqslant \frac{C(\alpha)}{\pi}\int\limits_{K(r)} \big(1-|\zeta|\big)^{1/\delta-2}\big|a(\zeta)\big|\big((1-|\zeta|)^{1-\alpha}|g'(\zeta)|\big)\, d\sigma. \quad (5.2)$$

Так как $g \in \lambda_\alpha A$ в силу $g \in \Lambda_{\alpha+\nu}A$, то по $\varepsilon > 0$ найдется $0 < r_\varepsilon < 1$ такое, что $(1-|\zeta|)^{1-\alpha}|g'(\zeta)| < \varepsilon$, как только $\zeta \in K(r_\varepsilon)$. Это позволяет свести (5.2) к оценке

$$\big|I_2(a,r_\varepsilon)\big| \leqslant \varepsilon C(\alpha)\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_D \big(1-|\zeta|\big)^{1/\delta-2}|a|\, d\sigma\right).$$

Воспользуемся оценкой: если $b \in H_\gamma$, $1/2 < \gamma < 1$, то [1, гл. IV, упражнение 5(d)]

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_D \big(1-|\zeta|\big)^{1/\delta-2}|b|\, d\sigma \leqslant C_1(\gamma)\|b\|_\gamma.$$

Получим

$$\big|I_2(a,r_\varepsilon)\big| \leqslant \varepsilon\, C_2(\delta)\|a\|_\delta. \quad (5.3)$$

По определению нормы функционала Ψ существует последовательность $\{a_m\} \in H_\delta$, $\|a_m\|_\delta \leqslant 1$, такая, что $\Psi(a_m) \to \|\Psi\|$ при $m \to \infty$. Из ограниченности $\{a_m\}$ в H_δ следует ее компактность относительно равномерной сходимости внутри D (это вытекает из оценки роста функций из H_p, $0 < p < \infty$, и принципа компактности аналитических функций). Пусть сама последовательность $a_m \to \Phi$ внутри D. Тогда $\|\Phi\|_\delta \leqslant 1$. Из оценки (5.3) и произвольности $\varepsilon > 0$ заключаем, что

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{\rho\to 1} M_1(a_m,\rho) = \frac{1}{\pi}\int\limits_D \Phi\bar{\zeta}\,\bar{g}\,' d\sigma. \quad (5.4)$$

Пространства H_δ вложены в пространства Бергмана $A_{2\delta}$, $2\delta > 1$. Функция $g \in AC$, поэтому ограничена в D, пусть $|g(\zeta)| \leqslant M$. Применяя неравенство Гёльдера, $1/2\delta + 1/\delta' = 1$, имеем, что

$$\left|\frac{1}{\pi}\int\limits_{K(r)} a_m\bar{g}\, d\sigma\right| \leqslant M\|a_m\|_{A_{2\delta}}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{K(r)} d\sigma\right)^{1/\delta'} \to 0$$

при $r \to 1$ равномерно относительно a_m. Соответственно,

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{\rho\to 1} M_2(a_m,\rho) = \frac{1}{\pi}\int\limits_D \Phi\bar{g}\, d\sigma.$$

Отсюда, из (5.1) и (5.4) вытекает равенство

$$\|\Psi\| = \lim_{\rho\to 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_T \Phi_\rho \bar{g}\, d\theta,$$

где, как отмечалось, $\|\Phi\|_\delta \leqslant 1$. Последнее вместе с предыдущим возможно только в случае $\|\Phi\|_\delta = 1$. Следовательно, функция Φ экстремальная для функционала (1.5) (может быть, не единственная [9, теорема 7]). $\rhd$

Пусть $\Phi = bh$, где b — произведение Бляшке, функция $h \in H_\delta$ и без нулей в D. На основании $L_s(T) = \overline{H}_s \oplus H_s^0$, $s > 1$, для γ, $0 < \gamma < 1$, имеем, что $b_\rho(t)h_\rho^\gamma(t)\bar{g}(t) = w(\bar{t},\rho,\gamma) + w_0(t,\rho,\gamma)$, $w \in H_s$, $w_0 \in H_s^0$ (ρ и γ являются параметрами). При этом функция ($\tau = e^{i\psi}$)

$$w(z,\rho,\gamma) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_T \frac{h_\rho^\gamma(\tau) b_\rho(\tau)\bar{g}(\tau)}{1-\tau z}\, d\psi. \tag{5.5}$$

На основании теоремы C, $g \in \Lambda_\beta A$, правую часть (5.5) рассматриваем как значение линейного функционала Ψ_* над H_μ, $\mu = 1/(1+\alpha+\nu)$ на $h_\rho^\gamma b_\rho/(1-\tau z)$. С учетом $|b(\tau)| = 1$ п. в., $\|h\|_\delta = 1$, получим (неравенство Гёльдера: $\delta = 1/(1+\alpha) > \mu$, $p_1 = \delta/\gamma\mu$, $q_1 = \delta/(\delta-\gamma\mu)$)

$$\bigl|w(z,\rho,\gamma)\bigr| \leqslant \|\Psi_*\| \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{|h_\rho|^{\gamma\mu}}{|1-\tau z|^\mu}\, d\psi\right)^{1/\mu} \leqslant \|\Psi_*\| \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{d\psi}{|1-\tau z|^{\mu\delta/(\delta-\gamma\mu)}}\right)^{(\delta-\gamma\mu)/\delta}. \tag{5.6}$$

Так как $\mu < \delta$, то γ можно выбрать так, чтобы выполнялось условие $1-\delta < \gamma < \delta/\mu - \delta$. Тогда $\mu\delta/(\delta-\gamma\mu) < 1$ и интеграл в правой части (5.6) ограничен. Соответственно, имея ввиду $\gamma < \delta$, $h_\rho^\gamma b_\rho \to h^\gamma b$ в H_1 при $\rho \to 1$, заключаем, что

$$w(z,\rho,\gamma) \to w_*(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_T \frac{h^\gamma b\bar{g}}{1-\tau z}\, d\psi, \tag{5.7}$$

причем $w_* \in H_\infty$. Следовательно, $w(t,\rho,\gamma) \to w_*(t)$ слабо в H_s, $1 < s < \infty$.

Из предыдущих рассуждений равенства

$$\|\Psi\| = \lim_{\rho\to 1} \int\limits_T \Phi_\rho \bar{g}\, d\theta = \lim_{\rho\to 1} \frac{1}{2\pi}\int\limits_T h_\rho^{1-\gamma}\bigl(h_\rho^\gamma b_\rho \bar{g}\bigr)\, d\theta \tag{5.8}$$

и $h^{1-\gamma} \in H_{p_*}$, $p_* = \delta/(1-\gamma) > 1$, следует, что

$$\|\Psi\| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_T h^{1-\gamma}(t) w_*(\bar{t}\,)\, d\theta. \tag{5.9}$$

Причем функция $h^{1-\gamma}$ является экстремальной для функционала $\mathscr{L}$ над H_{p_*}, заданного формулой

$$\mathscr{L}(a) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_T a(t) w_*(\bar{t}\,)\, d\theta, \quad a \in H_{p_*}.$$

Действительно, пусть функция φ экстремальна для $\mathscr{L}$. Поскольку равенства (5.8) и (5.9) равносильны, то

$$\|\Psi\| \leqslant \lim_{\rho\to 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_T \big(\varphi_\rho h_\rho^\gamma b_\rho\big)\bar{g}\,d\theta = \|\mathscr{L}\|. \tag{5.10}$$

С помощью неравенства Гёльдера, $\|\varphi\|_{p_*} = \|h\|_\delta = 1$, определяем, что

$$\big\|\varphi(h^\gamma b)\big\|_\delta = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_T |\varphi|^\delta |h|^{\gamma\delta} d\theta\right)^{1/\delta} \leqslant \|\varphi\|_{p_*}\|h\|_\delta^{1-\gamma} = 1.$$

Откуда и из (5.10) следует, что $\|\Psi\| = \|\mathscr{L}\|$. Но $\mathscr{L}(h^{1-\gamma}) = \|\mathscr{L}\|$, стало быть, $\varphi = h^{1-\gamma}$ по единственности э. ф. в H_{p_*}. Тогда по теореме 1 э. ф. для функционала $\mathscr{L}$, $w_* \in H_\infty$, принадлежит $\bigcap_{1<s} H_s$, значит, $h \in \bigcap_{1<s} H_s$. Отсюда и (5.7) по сложившейся схеме выводим, что $w_* \in \Lambda_\beta A$, $\beta = \alpha + \nu$.

Повторим последние рассуждения относительно равенства

$$\|\Psi\| = \lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_T h_\rho^{1/2}\big(h_\rho^{1/2} b_\rho \bar{g}\big)\,d\theta = \lim_{\rho\to 1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_T h_\rho^{1/2} b_\rho\big(h^{1/2}\bar{g}\big)\,d\theta.$$

В результате заключаем, что $h^{1/2}$ экстремальна для функционала

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_T a(t) w^*(\bar{t}\,)\,d\theta$$

над $H_{2\delta}$, где, с учетом $h \in \bigcap_{1<s} H_s$, функция $w^*(z) = \frac{1}{2\pi}\int_T \frac{h^{1/2} b\bar{g}}{1-\tau z}\,d\psi \in \Lambda_\beta A$. Тогда на основании теоремы 4 из [2], $1 < 2\delta < 2$, функция $h^{1/2} \in \Lambda_\beta A$. Аналогично определяем, что $h^{1/2} b \in \Lambda_\beta A$. Следовательно, $\Phi = h^{1/2}(h^{1/2} b) \in \Lambda_\beta A$. Теорема 3 доказана.

Обобщением теоремы 3 является

Теорема 3$'$. *Если в функционале* (1.5) $1/n < \delta < 1/(n+1)$ *и* $g \in \lambda_{\alpha+\nu} A$, *где* $\alpha = 1/\delta - n$, $\nu > 0$, $\alpha + \nu < 1$, *то э. ф. существуют и обладают той же гладкостью.*

Доказательство не приводим по технической причине.

6. Доказательство теоремы 4

Для $1 < q < 2$ доказательство дано в [4, следствие 3.1]. В общем случае $1 < q < \infty$ и $\omega \in A(R)$ доказательство основано на идее доказательства теоремы 3.2 из [4].

Ограничимся доказательством теоремы 4 для случая, когда в равенстве (1.3) $1 < q < \infty$ и ω — полином, т. е. докажем, что при указанных условиях $X \in A(\mathbb{C})$.

Пусть $f^N(t) = C_0 + \cdots + C_N t^N$ — произвольный полином порядка не выше N, $\bar{w}_N(t) = \bar{t}^N f^N(t) = C_N + \cdots + C_0\bar{t}^N$, $E_N = \{Q \in H_p : Q(z) = \sum_{j=N+1}^\infty q_j z^j$, q_j — тейлоровы коэффициенты$\}$. Следуя ходу доказательства теоремы 3.1 из [4], заключаем, что

$$\mu_N = \min_{Q\in E_N}\big\|f^N + Q\big\|_p = \big\|f^N + Q^N\big\|_p, \tag{6.1}$$

где $Q^N \in E_N$. По упомянутой теореме 3.1 функция $f^N + Q^N \in A(\mathbb{C})$, значит, $Q^N \in A(\mathbb{C})$. С учетом $\bar{t}^N Q(t) = \sum_{j=N+1}^\infty q_j t^{j-N}$, $|\bar{t}^N| = 1$, (6.1) равносильно

$$\mu_N = \min_{Q\in E_N}\big\|\bar{t}^N f^N + \bar{t}^N Q\big\|_p = \big\|f^N + Q^N\big\|_p = \min_{y\in H_p^0}\big\|\bar{w} + y\big\|_p = \big\|\bar{w}_N + Y_N\big\|_p,$$

где по единственности э. н. п. $Y_N = \bar{t}^N Q^N \in H_p^0$. При этом $Y_N \in A(\mathbb{C})$ в силу $Q^N \in A(\mathbb{C})$.

Пусть $\omega(z) = a_0 + \cdots + a_N z^N$. Относительно $g^N(t) = -(a_N + \cdots + a_0 t^N)$ повторим рассуждения, проведенные выше. Для p такого, что $1 < p < \infty$ получим

$$\min_{x \in H_p^0} \left\|\bar{\omega} - x\right\|_p = \left\|\bar{\omega} - X\right\|_p = \min_{Q \in E_N} \left\|t^N \bar{g}^N + Q\right\|_p,$$

где $X \in A(\mathbb{C})$. Теорема 4 доказана.

Литература

1. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции.—М.: Мир, 1984.—469 с.
2. *Carleson L., Jacobs S.* Best uniform approximation by analytic functions // Arc. Mat.—1972.—Vol. 10, № 2.—P. 219–229.
3. *Рябых В. Г.* Приближение неаналитических функций аналитическими // Мат. сб.—2006.—Т. 197, № 2.—С. 87–94. DOI: 10.4213/sm1513.
4. *Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Об одной экстремальной задаче в пространстве Харди H_p, $0 < p < \infty$ // Сиб. мат. журн.—2017.—Т. 58, № 3.—С. 510–525. DOI: 10.17377/smzh.2017.58.303.
5. *Duren P. L. Romberg B. W., Shields A. L.* Linear functionals on H_p space with $0 < p < 1$ // J. Reine Angew. Math.—1969.—Vol. 238.—P. 32–60.
6. *Гофман М.* Банаховы пространства аналитических функций.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963.—311 с.
7. *Рябых В. Г.* Экстремальные задачи для суммируемых аналитических функций // Сиб. мат. журн.—1986.—Т. 27, № 3.—С. 212–217.
8. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.—750 с.
9. *Бурчаев Х. Х., Рябых В. Г., Рябых Г. Ю.* Некоторые свойства экстремальных функций линейных функционалов над пространствами Харди и Бергмана // Мат. форум. Т. 9. Исслед. по мат. анализу, дифференц. уравнениям и мат. моделированию.—Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН, 2015.—С. 125–139.—(Итоги науки. Юг России).

Статья поступила 29 ноября 2017 г.

Бурчаев Хайдар Хасанович
Чеченский государственный университет, *доцент*
РОССИЯ, 364024, Грозный, ул. А. Шерипова, 32
E-mail: `bekhan.burchaev@gspetroleum.com`

Рябых Галина Юрьевна
Донской государственный технический университет, *профессор*
РОССИЯ, 344010, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1
E-mail: `ryabich@aaanet.ru`

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 4, P. 5–19

PROPERTIES OF EXTREMAL ELEMENTS IN THE DUALITY RELATION FOR HARDY SPACES

Burchaev, Kh. Kh.[1] and Ryabykh, G. Yu.[2]

[1] Chechen State University, 32 A. Sheripov St., Grozny, 364024, Russia;
[2] Don State Technical University, 1 Pl. Gagarina, Rostov-on-Don, 344010, Russia
E-mail: `bekhan.burchaev@gspetroleum.com`, `ryabich@aaanet.ru`

Abstract. Consider a Hardy space H_p in the unit disk D, $p \geqslant 1$. Let l_ω be a linear functional on H_p determined by $\omega \in L_q$ ($T = \partial D$, $1/p + 1/q = 1$) and let F be an extremal function for l_ω. Let $X \in H_q$ implements the best approximation of $\bar{\omega}$ in $L_q(T)$ by functions from $H_q^0 = \{y \in H_q : y(0) = 0\}$. The functions F and X are called extremal elements (e. e.) for l_ω. E. e. are related by the corresponding duality relation.

We consider the problem of how certain properties of ω will affect e. e. A similar problem is investigated in the case of $0 < p < 1$. An article by L. Carleson and S. Jacobs (1972), investigated the problem of the properties of elements on which the infimum $\inf\{\|\bar{\omega} - x\|_{L_\infty(T)} : x \in H^0_\infty\}$ for a given $\omega \in L_q(T)$ is attained. The hypothesis of the authors that the relationship between extremal elements is similar to that of the function ω and its projection onto H_q is partially confirmed in a paper by V. G. Ryabykh (2006). Some properties of e. e. for l_ω, when ω is a polynomial, were studied in a paper by Kh. Kh Burchaev, G. Yu. Ryabykh V. G. Ryabykh (2017). In this paper, relying on the main result of the last article and using the method of successive approximations, the following is proved: if $\omega \in L_{q^*}(T)$ and $q \leqslant q^* < \infty$, then $F \in H_{(p-1)q^*}$ and $X \in H_{q^*}$; if the derivative $\omega^{(n-1)} \in \mathrm{Lip}(\alpha, T)$ with $0 < \alpha < 1$, then $F = Bf$, where B is the Blaschke product, f is an external function, with $(|f(t)|^p)^{(n-1)} \in \mathrm{Lip}(\alpha, T)$. If the function ω is analytic outside the unit circle, then e. e is analytic in the same circle. The listed results clarify and complement similar results obtained in an above mentioned paper by V. G. Ryabykh. It is also proved that the extremal function for $l_\omega \in (H_q)^*$ exists and has the same smoothness as the generator function ω, whenever $1/(n+1) < \delta < 1/n$, $\omega \in H_\infty \bigcap \mathrm{Lip}(\beta, T)$, $\beta = 1/\delta - n + \nu < 1$, and $\nu > 0$.

Key words: linear functional, extremal element, approximation method, derivative.

Mathematical Subject Classification (2000): 47A60.

For citation: *Burchaev, Kh. Kh. and Ryabykh, G. Yu.* Properties of Extremal Elements in the Duality Relation for Hardy Spaces, *Vladikavkaz Math. J.*, 2018, vol. 20, no. 3, pp. 5–19 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23383.

References

1. *Garnett, J. Ogranichennye Analiticheskie Funktsii*, Moscow, Mir, 1984, 469 p. (in Russian).
2. *Carleson, L. and Jacobs, S.* Best Uniform Approximation by Analytic Functions, *Arc. Mat.*, 1972, vol. 10, no. 2, pp. 219–229.
3. *Ryabykh, V. G.* Approximation of Non-Analytic Functions by Analytic Functions, *Sbornik: Mathematics*, 2006, vol. 197, no. 2, pp. 225–233. DOI: 10.1070/SM2006v197n02ABEH003755.
4. *Burchaev, Kh. H., Ryabykh, V. G., and Ryabykh, G. Yu.* On an Extremal Problem in Hardy Space H_p, $0 < p < \infty$, *Siberian Mathematical Journal*, 2017, vol. 58, no. 3, pp. 392–404. DOI: 10.1134/S003744661703003X.
5. *Duren, P. L. Romberg, B. W. and Shields, A. L.* Linear Functionals on H_p Space with $0 < p < 1$, *J. Reine Angew. Math.*, 1969, vol. 238, pp. 32–60.
6. *Gofman, M. Banach Spaces of Analytic Functions*, Moscow, Foreign Languages Publishing House, 1963, 311 p. (in Russian).
7. *Ryabykh, V. G.* Extremal Problems for Summable Analytic Functions, *Sib. Mat. Zh.*, 1986, vol. 27, no. 3, pp. 212–217 (in Russian).
8. *Kantorovich, L. V. and Akilov, G. P. Functional Analysis*, Moscow, Nauka, 1984, 750 p. (in Russian).
9. *Burchaev, Kh. Kh., Ryabykh, V. G. and Ryabykh, G. Yu.* Some Properties of the Extremal Functions of Linear Functionals on Hardy and Bergman Spaces, *Math. Forum. Vol. 9. Studies in Mathematical Analysis, Differential Equations, and Mathematical Modeling* (*Review of Science: The South of Russia*), Vladikavkaz, SMI VSC RAS, 2015, pp. 125–139 (in Russian).

Received November 29, 2017

Khaidar Kh. Burchaev
Chechen State University,
32 A. Sheripov Str., Grozny, 364024, Russia,
Associate Professor
E-mail: `bekhan.burchaev@gspetroleum.com`

Galina Yu. Ryabykh
Don State Technical University,
1 Pl. Gagarina, Rostov-on-Don, 344010, Russia,
Professor
E-mail: `ryabich@aaanet.ru`

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 4, С. 20–34

УДК 517.444
DOI 10.23671/VNC.2018.4.23384

ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ С НУЛЕВЫМ ПОТОКОМ ЧЕРЕЗ СФЕРЫ ФИКСИРОВАННОГО РАДИУСА

Вит. В. Волчков[1], **Н. П. Волчкова**[2]

[1] Донецкий национальный университет,
Россия, 83001, Донецк, ул. Университетская, 24;
[2] Донецкий национальный технический университет,
Россия, 83000, Донецк, ул. Артема, 58
E-mail: volna936@gmail.com

Аннотация. Классическим свойством периодической функции на вещественной оси является возможность ее представления тригонометрическим рядом Фурье. Естественным аналогом условия периодичности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ является постоянство интегралов от функции по всем шарам (или сферам) фиксированного радиуса. Функции с указанным свойством можно разложить в ряд по собственным функциям оператора Лапласа специального вида. Этот факт допускает обобщение на векторные поля в $\mathbb{R}^n$, имеющие нулевой поток через сферы фиксированного радиуса. При этом для них возникает представление Смита в виде суммы соленоидального векторного поля и бесконечного числа потенциальных векторных полей. Потенциальные векторные поля удовлетворяют уравнению Гельмгольца, связанному с нулями функции Бесселя $J_{n/2}$. Целью данной работы является получение локальных аналогов теоремы Смита. Изучаются векторные поля $\mathbf{A}$ с нулевым потоком через сферы фиксированного радиуса на областях $\mathscr{O}$ в евклидовом пространстве, инвариантных относительно вращений. Рассматриваются случаи, когда $\mathscr{O} = B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ или $\mathscr{O} = B_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : a < |x| < b\}$. Описание полей $\mathbf{A}$ состоит из двух шагов. На первом шаге доказывается равенство $\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}^s(x) + B(x)x$, $x \in \mathscr{O}$, где $\mathbf{A}^s$ — подходящее соленоидальное векторное поле, B — скалярное поле. Второй шаг состоит в описании функций $B(x)$. Основным инструментом для описания $B(x)$ являются многомерные ряды Фурье по сферическим гармоникам. Если $\mathscr{O} = B_R$, то коэффициенты Фурье функции $B(x)$ представимы рядами по гипергеометрическим функциям ${}_1F_2$. В случае, когда $\mathscr{O} = B_{a,b}$, соответствующие коэффициенты Фурье разлагаются в ряды, содержащие функции Бесселя, Неймана и Ломмеля. Результаты, полученные в работе, можно использовать при решении задач, связанных с гармоническим анализом векторных полей на областях в $\mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: векторное поле, нулевое сферическое среднее, сферическая гармоника, функция Ломмеля.

Mathematical Subject Classification (2000): 53C65, 44A35.

Образец цитирования: *Волчков Вит. В., Волчкова Н. П.* Векторные поля с нулевым потоком через сферы фиксированного радиуса // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 4.—С. 20–34. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23384.

1. Введение

Одним из хорошо известных критериев T-периодичности непрерывной функции f на вещественной оси является постоянство интегралов от f по всем отрезкам длины T на $\mathbb{R}$, т. е. условие

$$\int_{x}^{x+T} f(y)\,dy = \int_{0}^{T} f(y)\,dy \quad (\forall\, x \in \mathbb{R}). \tag{1}$$

Естественным аналогом условия (1) в многомерном случае является постоянство интегралов от функции по всем шарам фиксированного радиуса. Близкий класс функций получается, если здесь заменить шары на сферы фиксированного радиуса.

Согласно теории рядов Фурье всякую T-периодическую функцию $f \in C^1(\mathbb{R})$ можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся тригонометрический ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{2\pi m}{T}x\right) + b_m \sin\left(\frac{2\pi m}{T}x\right), \tag{2}$$

т. е. представить f в виде суммы константы $\dfrac{a_0}{2}$ и последовательности периодических функций $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$f_m''(x) + \frac{4\pi^2 m^2}{T^2} f_m(x) = 0.$$

Существенно более трудной задачей является описание функций с постоянными интегралами по шарам (или сферам) фиксированного радиуса. Для эффективной характеризации указанных классов требуется привлекать соответствующие специальные функции. Например, в двумерном случае имеет место следующий результат.

Теорема А. *Пусть $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Тогда функция f имеет нулевые интегралы по всем кругам в $\mathbb{R}^2$ радиуса r в том и только том случае, когда имеет место разложение*

$$f(x,y) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} c_{q,m} J_m\left(\frac{\nu_q}{r}\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(\frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^m,$$

где J_m — функция Бесселя порядка m, $\{\nu_q\}_{q=1}^{\infty}$ — последовательность всех положительных нулей функции J_1, занумерованных в порядке возрастания, и коэффициенты $c_{q,m} \in \mathbb{C}$ удовлетворяют условию

$$c_{q,m} = O\left(\frac{1}{\nu_q^\alpha}\right) \quad \text{при} \quad q \to \infty$$

для любого фиксированного $\alpha > 0$.

Отметим, что функции

$$(x,y) \to J_m\left(\frac{\nu_q}{r}\sqrt{x^2+y^2}\right)\left(\frac{x+iy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^m$$

являются собственными функциями оператора Лапласа Δ в $\mathbb{R}^2$. Подобные результаты были получены и для функций меньшей гладкости, заданных на ограниченных множествах в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, инвариантных относительно вращений (см. [1, теорема 3], [2, теорема 3], а также [3–5], где содержатся существенно более общие результаты, касающиеся структуры решений уравнений в свертках).

Гораздо менее изученным в этой области является случай векторных полей. Если рассматривать $f \in C^1(\mathbb{R})$ как векторное поле в $\mathbb{R}$, то условие

$$f\left(x - \frac{T}{2}\right) - f\left(x + \frac{T}{2}\right) = 0$$

означает, что f имеет нулевой поток через любую нульмерную сферу радиуса $T/2$. Таким образом, равенство (2) дает представление для полей с нулевым потоком через все сферы радиуса $T/2$ в $\mathbb{R}^1$. Этот факт допускает нетривиальное обобщение на векторные поля в $\mathbb{R}^n$. При этом константа $\frac{a_0}{2}$ интерпретируется как соленоидальное векторное поле, а $\{f_m\}$ заменяются на потенциальные векторные поля, удовлетворяющие уравнению для собственных функций оператора Лапласа. Указанное утверждение является частным случаем следующего локального результата Д. Смита [6, теорема 3].

Теорема B. *Пусть* $\mathbf{A} : B_{R+1} \to \mathbb{R}^n$ $(1 < R \leqslant \infty)$ — *векторное поле в* $\mathbb{R}^n$ *класса* $C^{n+\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$, *имеющее нулевой поток через любую сферу единичного радиуса, лежащую в* B_{R+1}. *Тогда для* $x \in B_R$ *имеет место равенство*

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}^s(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \mathbf{A}_m^p(x), \tag{3}$$

в котором ряд сходится равномерно на компактах из B_R, $\mathbf{A}^s$ — *соленоидальное векторное поле класса* $C^{n+\alpha}$ *и* $\mathbf{A}_m^p$ — *потенциальные векторные поля, удовлетворяющие уравнению*

$$(\Delta + \nu_m^2)\mathbf{A}_m^p = \mathbf{0}, \tag{4}$$

где $\{\nu_m\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность всех положительных нулей функции $J_{n/2}$, занумерованных в порядке возрастания.

Символ B_R в теореме B и ниже обозначает открытый шар из $\mathbb{R}^n$ радиуса R с центром в нуле. Класс $C^{n+\alpha}$ определяется как класс таких функций $f \in C^n$, у которых частные производные порядка n удовлетворяют условию Гёльдера с показателем α. Напомним также, что векторное поле $\mathbf{A} = (A_1, \ldots, A_n)$ класса C^1 в области $D \subset \mathbb{R}^n$ называется *соленоидальным*, если

$$\operatorname{div} \mathbf{A} := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial A_j}{\partial x_j} = 0$$

во всех точках области D, и потенциальным, если существует скалярное поле u в D такое, что

$$\mathbf{A} = \operatorname{grad} u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right).$$

Одним из существенных недостатков теоремы B является отсутствие разложения (3) во всем шаре B_{R+1}. Это создает серьезные препятствия для изучения свойств векторного поля $\mathbf{A}$ на всей области определения. Кроме того, метод доказательства теоремы B не позволяет получить подобное описание для областей вида

$$B_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : \, a < |x| < b\}.$$

В данной работе предложен иной подход, позволяющий преодолеть перечисленные выше трудности. В теоремах 1, 2 ниже получено полное описание векторных полей в шаре и шаровом слое пространства $\mathbb{R}^n$, имеющих нулевой поток через границу любого шара фиксированного радиуса, лежащего в этих областях. Отметим, что при этом возникают новые специальные функции (гипергеометрическая функция порядка $(1, 2)$ и функции Ломмеля), которые не появлялись ранее в подобных задачах для евклидова пространства.

2. Формулировки основных результатов

Пусть $r > 0$ фиксировано, $x \in \mathbb{R}^n$,

$$B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : \, |x - y| < r\},$$

$\overline{B_r}(x)$ и $\partial B_r(x)$ — соответственно замыкание и граница шара $B_r(x)$.

Для области $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^n$, содержащей шары $\overline{B_r}(x)$ при некоторых x, обозначим через $\mathbf{V}_r(\mathscr{O})$ совокупность всех непрерывных векторных полей $\mathbf{A} : \mathscr{O} \to \mathbb{R}^n$ с условием

$$\int\limits_{\partial B_r(x)} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}\, d\xi = 0 \qquad (\forall\, x \in \mathbb{R}^n : \overline{B_r}(x) \subset \mathscr{O}),$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе $\partial B_r(x)$, $d\xi$ — элемент площади на $\partial B_r(x)$.

Далее, как обычно, S^{n-1} — единичная сфера из $\mathbb{R}^n$ с центром в нуле, $\mathscr{H}_k$ — пространство сферических гармоник степени k на S^{n-1}. Пространство $L^2(S^{n-1})$ является прямой суммой попарно ортогональных пространств $\mathscr{H}_k$, $k = 0, 1, \dots$ (см., например, [7, гл. 4, § 2]). Пусть d_k — размерность $\mathscr{H}_k$, $\{Y_l^{(k)}\}_{l=1}^{d_k}$ — фиксированный ортонормированный базис в $\mathscr{H}_k$. Для точки $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\rho = |x|, \quad \sigma = \frac{x}{|x|}, \quad x \neq 0.$$

Функция $Y_l^{(k)}$ продолжается до однородного гармонического многочлена степени k в $\mathbb{R}^n$ по формуле

$$Y_l^{(k)}(x) = \rho^k Y_l^{(k)}(\sigma).$$

Если область $\mathscr{O}$ инвариантна относительно вращений пространства $\mathbb{R}^n$, то всякой локально суммируемой в $\mathscr{O}$ функции f соответствует ряд Фурье вида

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=1}^{d_k} f_{k,l}(\rho) Y_l^{(k)}(\sigma),$$

где

$$f_{k,l}(\rho) = \int\limits_{S^{n-1}} f(\rho\sigma) \overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}\, d\sigma.$$

Разложение функции Бесселя порядка $\nu \in \mathbb{R}$ в степенной ряд имеет вид

$$J_\nu(t) = \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(\nu + m + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2m}, \tag{5}$$

где Γ — гамма-функция. Функция Неймана порядка $\nu \in \mathbb{R}$ выражается через функцию Бесселя по формуле

$$N_\nu(t) = \lim_{\mu \to \nu} \frac{J_\mu(t) \cos(\pi\mu) - J_{-\mu}(t)}{\sin(\pi\mu)}.$$

Пара $\{J_\nu, N_\nu\}$ является фундаментальной системой решений дифференциального уравнения Бесселя

$$t^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + t \frac{du}{dt} + \bigl(t^2 - \nu^2\bigr) u = 0.$$

Обозначим через ${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; t)$ гипергеометрическую функцию порядка $(1, 2)$, определяемую равенством

$${}_1F_2(a_1; b_1, b_2; t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1)_k}{(b_1)_k (b_2)_k} \frac{t^k}{k!}, \tag{6}$$

где

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1), \quad k = 1, 2, \dots$$

(см., например, [8, гл. 4]). Присоединенная функция Ломмеля с индексами $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ определяется равенством

$$\begin{aligned} S_{\mu,\nu}(t) = \frac{t^{\mu+1}}{(\mu+1)^2 - \nu^2} \, {}_1F_2\left(1; \frac{\mu-\nu+3}{2}, \frac{\mu+\nu+3}{2}; -\frac{t^2}{4}\right) \\ + 2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right) \\ \times \left[\sin\left(\frac{\pi(\mu-\nu)}{2}\right) J_\nu(t) - \cos\left(\frac{\pi(\mu-\nu)}{2}\right) N_\nu(t)\right], \end{aligned} \tag{7}$$

где при $\mu \pm \nu = -1, -3, -5, \dots$ правая часть в (7) находится с помощью соответствующего предельного перехода (см. [9, приложение II, § II.12]). Как известно [10, гл. 1, § 16], функция $S_{\mu,\nu}$ является частным решением неоднородного уравнения Бесселя

$$t^2 \frac{d^2u}{dt^2} + t\frac{du}{dt} + (t^2 - \nu^2)u = t^{\mu+1}.$$

Следующие результаты дают описание гладких векторных полей $\mathbf{A}$, принадлежащих классам $\mathbf{V}_r(B_R)$ и $\mathbf{V}_r(B_{a,b})$ соответственно.

Теорема 1. *Пусть $r > 0$, $r < R \leqslant +\infty$, $\mathbf{A} : B_R \to \mathbb{R}^n$ — векторное поле класса C^∞. Тогда $\mathbf{A}$ принадлежит $\mathbf{V}_r(B_R)$ в том и только том случае, когда*

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}^s(x) + \mathscr{B}(x)x, \quad x \in B_R, \tag{8}$$

где $\mathbf{A}^s$ — соленоидальное векторное поле класса C^∞, $\mathscr{B}$ — скалярное поле, коэффициенты Фурье которого представимы рядами

$$\mathscr{B}_{k,l}(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{m,k,l}\, \rho^k \, {}_1F_2\left(\frac{n+k}{2}; \frac{n+k}{2} + 1, \frac{n}{2} + k; -\left(\frac{\nu_m \rho}{2r}\right)^2\right), \qquad 0 \leqslant \rho < R,$$

в которых константы $\gamma_{m,k,l}$ убывают быстрее любой фиксированной степени ν_m при $m \to \infty$.

Здесь и далее $\mathscr{B}(x)x$ — векторное поле, определяемое равенством

$$\mathscr{B}(x)x = (\mathscr{B}(x)x_1, \dots, \mathscr{B}(x)x_n).$$

Теорема 2. *Пусть $r > 0$, $0 \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $b - a > 2r$, $\mathbf{A} : B_{a,b} \to \mathbb{R}^n$ — векторное поле класса C^∞. Тогда $\mathbf{A}$ принадлежит $\mathbf{V}_r(B_{a,b})$ в том и только том случае, когда*

$$\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}^s(x) + B(x)x, \quad x \in B_{a,b},$$

где $\mathbf{A}^s$ — соленоидальное векторное поле класса C^∞, B — скалярное поле, коэффициенты Фурье которого представимы рядами

$$\begin{aligned} B_{k,l}(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha_{m,k,l}}{\rho^{n-1}} \Big[(n+k-2) J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) S_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+k-2}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) - \\ - J_{\frac{n}{2}+k-2}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) S_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)\Big] + \\ + \frac{\beta_{m,k,l}}{\rho^{n-1}} \Big[(n+k-2) N_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) S_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+k-2}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) - \\ - N_{\frac{n}{2}+k-2}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) S_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)\Big] + \frac{\gamma_{m,k,l}}{\rho^n}, \quad a < \rho < b, \end{aligned}$$

в которых константы $\alpha_{m,k,l}$, $\beta_{m,k,l}$, $\gamma_{m,k,l}$ убывают быстрее любой фиксированной степени ν_m при $m \to \infty$.

В отличие от теоремы В теоремы 1, 2 дают разложение для полей $\mathbf{A}$ из рассматриваемых классов на всей области определения. Отметим также, что теоремы 1, 2 являются развитием результатов В. В. Волчкова об описании функций с нулевыми интегралами по сферам фиксированного радиуса на случай векторных полей (см. [1, 2], а также [3–5]).

§ 3. Вспомогательные утверждения

Прежде всего напомним некоторые свойства встречающихся выше специальных функций.

Для функций Бесселя и Неймана справедливы следующие формулы дифференцирования [8, гл. 7]

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\nu}J_{\nu}(t)\right) = t^{\nu}J_{\nu-1}(t), \quad \frac{d}{dt}\left(t^{\nu}N_{\nu}(t)\right) = t^{\nu}N_{\nu-1}(t), \tag{9}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{J_{\nu}(t)}{t^{\nu}}\right) = -\frac{J_{\nu+1}(t)}{t^{\nu}}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{N_{\nu}(t)}{t^{\nu}}\right) = -\frac{N_{\nu+1}(t)}{t^{\nu}}. \tag{10}$$

Отметим следующие свойства функций Ломмеля [9, приложение II, § II.12]:

$$S_{\mu,-\nu}(t) = S_{\mu,\nu}(t), \tag{11}$$

$$S_{\mu,\nu}(t) = t^{\mu-1} + \left(\nu^2 - (\mu-1)^2\right) S_{\mu-2,\nu}(t), \tag{12}$$

$$2\nu S_{\mu,\nu}(t) = (\mu+\nu-1)tS_{\mu-1,\nu-1}(t) - (\mu-\nu-1)tS_{\mu-1,\nu+1}(t), \tag{13}$$

$$\frac{d}{dt}S_{\mu,\nu}(t) = \frac{\nu}{t}S_{\mu,\nu}(t) + (\mu-\nu-1)S_{\mu-1,\nu+1}(t). \tag{14}$$

Из (14) имеем

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\nu}S_{\mu,\nu}(t)\right) = \nu \quad t^{\nu-1}S_{\mu,\nu}(t) + t^{\nu}\left(\frac{\nu}{t}S_{\mu,\nu}(t) + (\mu-\nu-1)S_{\mu-1,\nu+1}(t)\right)$$
$$= t^{\nu-1}\big(2\nu S_{\mu,\nu}(t) + (\mu-\nu-1)tS_{\mu-1,\nu+1}(t)\big).$$

Отсюда и из (13) получаем

$$\frac{d}{dt}\left(t^{\nu}S_{\mu,\nu}(t)\right) = (\mu+\nu-1)t^{\nu}S_{\mu-1,\nu-1}(t). \tag{15}$$

Лемма 1. *Для функции $h(t) = {}_1F_2(\alpha; \alpha+1, \beta; \gamma t)$ имеет место соотношение*

$$th'(t) + \alpha h(t) = \alpha\Gamma(\beta)\frac{J_{\beta-1}(2\sqrt{-\gamma t})}{\sqrt{-\gamma t}^{\,\beta-1}}.$$

$\lhd$ Из (6) и определения h имеем

$$\alpha h(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k\alpha}{(\alpha+1)_k(\beta)_k}\frac{(\gamma t)^k}{k!},$$

$$th'(t) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k}{(\alpha+1)_k(\beta)_k}\frac{k(\gamma t)^k}{k!}.$$

Складывая эти равенства и учитывая, что

$$\frac{(\alpha)_k}{(\alpha+1)_k}(\alpha+k)=\alpha,$$

получаем

$$th'(t)+\alpha h(t)=\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\beta)_k}\frac{(\gamma t)^k}{k!}.$$

Теперь используя разложение

$$J_\nu(t)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)}\left(\frac{t}{2}\right)^\nu\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(\nu+1)_k}\frac{(-t^2/4)^k}{k!}$$

(см. (5)), приходим к требуемому утверждению. $\rhd$

Лемма 2. *Имеют место равенства*

$$\big((\mu+\nu-1)tJ_\nu(t)S_{\mu-1,\nu-1}(t)-tJ_{\nu-1}(t)S_{\mu,\nu}(t)\big)'=t^\mu J_\nu(t), \tag{16}$$

$$\big((\mu+\nu-1)tN_\nu(t)S_{\mu-1,\nu-1}(t)-tN_{\nu-1}(t)S_{\mu,\nu}(t)\big)'=t^\mu N_\nu(t). \tag{17}$$

$\lhd$ Используя (9), (11) и (15), находим

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(tJ_\nu(t)S_{\mu-1,\nu-1}(t)\big)&=\frac{d}{dt}\left(t^\nu J_\nu(t)t^{1-\nu}S_{\mu-1,1-\nu}(t)\right)\\&=tJ_{\nu-1}(t)S_{\mu-1,\nu-1}(t)+(\mu-\nu-1)tJ_\nu(t)S_{\mu-2,\nu}(t).\end{aligned}$$

Далее, с помощью (10) и (15) получаем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(tJ_{\nu-1}(t)S_{\mu,\nu}(t)\big)&=\frac{d}{dt}\left(t^{1-\nu}J_{\nu-1}(t)t^\nu S_{\mu,\nu}(t)\right)\\&=-tJ_\nu(t)S_{\mu,\nu}(t)+(\mu+\nu-1)tJ_{\nu-1}(t)S_{\mu-1,\nu-1}(t).\end{aligned}$$

Исключая из правых частей этих соотношений функцию $tJ_{\nu-1}(t)S_{\mu-1,\nu-1}(t)$, имеем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\big(tJ_{\nu-1}(t)S_{\mu,\nu}(t)\big)=-tJ_\nu(t)S_{\mu,\nu}(t)&+(\mu+\nu-1)\frac{d}{dt}\big(tJ_\nu(t)S_{\mu-1,\nu-1}(t)\big)\\&+\big(\nu^2-(\mu-1)^2\big)tJ_\nu(t)S_{\mu-2,\nu}(t).\end{aligned}$$

Отсюда и из соотношения (12) следует формула (16). Равенство (17) доказывается аналогично. $\rhd$

Лемма 3. *Пусть скалярное поле $B\in C^1(\mathscr{O})$ имеет вид*

$$B(x)=\varphi(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma). \tag{18}$$

Тогда

$$\operatorname{div}(B(x)x)=\left(\rho\varphi'(\rho)+n\varphi(\rho)\right)Y_l^{(k)}(\sigma). \tag{19}$$

$\lhd$ Для любого скалярного поля $B\in C^1(\mathscr{O})$ имеем

$$\operatorname{div}(B(x)x)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_j}(x_jB(x))=\sum_{j=1}^{n}B(x)+x_j\frac{\partial B}{\partial x_j}=nB(x)+\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial B}{\partial x_j}. \tag{20}$$

Пусть теперь выполнено условие (18). Запишем B в виде

$$B(x) = \psi(\rho)Y_l^{(k)}(x), \quad \psi(\rho) = \frac{\varphi(\rho)}{\rho^k}.$$

Тогда

$$\frac{\partial B}{\partial x_j} = \frac{\psi'(\rho)}{\rho} x_j Y_l^{(k)}(x) + \psi(\rho)\frac{\partial Y_l^{(k)}(x)}{x_j}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(B(x)x) &= n\psi(\rho)Y_l^{(k)}(x) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\psi'(\rho)}{\rho} x_j^2 Y_l^{(k)}(x) + \psi(\rho)\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial Y_l^{(k)}(x)}{\partial x_j} \\ &= \bigl(n\psi(\rho) + \psi'(\rho)\rho\bigr)\, Y_l^{(k)}(x) + \psi(\rho)\sum_{j=1}^{n} x_j \frac{\partial Y_l^{(k)}(x)}{\partial x_j}.\end{aligned}$$

Поэтому по теореме Эйлера об однородных функциях

$$\operatorname{div}(B(x)x) = \bigl((n+k)\psi(\rho) + \psi'(\rho)\rho\bigr)\, Y_l^{(k)}(x).$$

Поскольку

$$\psi'(\rho) = \frac{\varphi'(\rho)}{\rho^k} - k\frac{\varphi(\rho)}{\rho^{k+1}},$$

отсюда вытекает требуемое равенство. $\rhd$

Из леммы 3 непосредственно получаем следующее утверждение.

Следствие 1. *Имеет место равенство*

$$\operatorname{div}\left(\frac{Y_l^{(k)}(\sigma)}{\rho^n} x\right) = 0.$$

Следствие 2. *Пусть*

$$\varphi(\rho) = \rho^k {}_1F_2\left(\frac{n+k}{2}; \frac{n+k}{2}+1, \frac{n}{2}+k; -\left(\frac{\nu_m\rho}{2r}\right)^2\right).$$

Тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\left(\varphi(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)x\right) &= (n+k)\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)2^{\frac{n}{2}+k-1} \\ &\times \left(\frac{\nu_m}{r}\right)^{1-k-\frac{n}{2}} \rho^{1-\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) Y_l^{(k)}(\sigma). \qquad (21)\end{aligned}$$

$\lhd$ Полагая

$$\psi(t) = {}_1F_2\left(\frac{n+k}{2}; \frac{n+k}{2}+1, \frac{n}{2}+k; -\frac{\nu_m^2}{4r^2}\, t\right),$$

получаем $\varphi(\rho) = \rho^k\, \psi(\rho^2)$ и

$$\rho\varphi'(\rho) + n\varphi(\rho) = \rho^k\bigl(2\rho^2\psi'(\rho^2) + (n+k)\psi(\rho^2)\bigr). \qquad (22)$$

По лемме 1 имеем

$$t\psi'(t)+\frac{(n+k)}{2}\psi(t)=\frac{(n+k)}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)2^{\frac{n}{2}+k-1}\frac{J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)}{\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)^{\frac{n}{2}+k-1}}. \tag{23}$$

Комбинируя (22), (23) и (19), приходим к (21). $\triangleright$

Следствие 3. *Пусть*

$$\varphi(\rho)=\Big[(n+k-2)J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)S_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+k-2}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)$$
$$-J_{\frac{n}{2}+k-2}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)S_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)\Big]\frac{1}{\rho^{n-1}}.$$

Тогда

$$\operatorname{div}\left(\varphi(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)x\right)=\left(\frac{\nu_m}{r}\right)^{\frac{n}{2}}\rho^{1-\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)Y_l^{(k)}(\sigma).$$

$\triangleleft$ Используя формулу

$$\rho\varphi'(\rho)+n\varphi(\rho)=\frac{1}{\rho^{n-1}}\left(\rho^n\varphi(\rho)\right)'$$

и лемму 2 при $\nu=\frac{n}{2}+k-1$, $\mu=\frac{n}{2}$, находим

$$\rho\varphi'(\rho)+n\varphi(\rho)=\frac{1}{\rho^{n-1}}\Big[(n+k-2)\frac{\nu_m}{r}\rho J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)S_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+k-2}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)$$
$$-\frac{\nu_m}{r}\rho\, J_{\frac{n}{2}+k-2}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)S_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)\Big]'\frac{r}{\nu_m}=\left(\frac{\nu_m}{r}\right)^{\frac{n}{2}}\rho^{1-\frac{n}{2}}J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right).$$

Отсюда и из леммы 3 получаем требуемое утверждение. $\triangleright$

Аналогично доказывается

Следствие 4. *Пусть*

$$\varphi(\rho)=\Big[(n+k-2)N_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)S_{\frac{n}{2}-1,\frac{n}{2}+k-2}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)$$
$$-N_{\frac{n}{2}+k-2}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)S_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)\Big]\frac{1}{\rho^{n-1}}.$$

Тогда

$$\operatorname{div}\left(\varphi(\rho)Y_l^{(k)}(\sigma)x\right)=\left(\frac{\nu_m}{r}\right)^{\frac{n}{2}}\rho^{1-\frac{n}{2}}N_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right)Y_l^{(k)}(\sigma).$$

Лемма 4. *Пусть $\mathscr{A}\in C^1(B_{a,b})$, ρ_0 — фиксированное число из интервала (a,b), и*

$$B(x)=\int\limits_{\frac{\rho_0}{|x|}}^{1}\mathscr{A}(tx)t^{n-1}dt,\quad a<|x|<b.$$

Тогда

$$\operatorname{div}\left(B(x)x\right)=\mathscr{A}(x). \tag{24}$$

$\lhd$ Прежде всего отметим, что определение функции B является корректным. Действительно, если $a < |x| \leqslant \rho_0$, то $1 \leqslant \frac{\rho_0}{|x|}$ и при $1 \leqslant t \leqslant \frac{\rho_0}{|x|}$ выполнены неравенства

$$a < |x| \leqslant t|x| \leqslant \rho_0 < b.$$

Аналогично, если $\rho_0 < |x| < b$, то $\frac{\rho_0}{|x|} < 1$ и при $\frac{\rho_0}{|x|} \leqslant t \leqslant 1$ имеем

$$a < \rho_0 \leqslant t|x| \leqslant |x| < b.$$

Далее, по формуле Лейбница находим

$$\begin{aligned}\frac{\partial B}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int\limits_{\rho_0(x_1^2+\dots+x_n^2)^{-1/2}}^{1} \mathscr{A}(tx_1,\dots,tx_n)t^{n-1}\,dt \\ &= -\mathscr{A}(tx)t^{n-1}\big|_{t=\rho_0/|x|}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\rho_0}{|x|}\right) + \int\limits_{\rho_0/|x|}^{1} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathscr{A}(tx)\right)t^{n-1}\,dt \\ &= -\mathscr{A}\left(\frac{\rho_0 x}{|x|}\right)\left(\frac{\rho_0}{|x|}\right)^{n-1}\rho_0\frac{(-1)x_j}{|x|^3} + \int\limits_{\rho_0/|x|}^{1} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathscr{A}(tx)\right)t^{n-1}\,dt \\ &= \mathscr{A}\left(\frac{\rho_0 x}{|x|}\right)\frac{\rho_0^n}{|x|^{n+2}}x_j + \int\limits_{\rho_0/|x|}^{1} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathscr{A}(tx)\right)t^{n-1}\,dt.\end{aligned}$$

Отсюда (см. (20))

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(B(x)x) &= nB(x) + \sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial B}{\partial x_j} = n\int\limits_{\rho_0/|x|}^{1}\mathscr{A}(tx)t^{n-1}\,dt + \sum_{j=1}^{n}\mathscr{A}\left(\frac{\rho_0 x}{|x|}\right)\frac{\rho_0^n}{|x|^{n+2}}x_j^2 \\ &+ \int\limits_{\rho_0/|x|}^{1}\sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\mathscr{A}(tx)\right)t^{n-1}\,dt = n\int\limits_{\rho_0/|x|}^{1}\mathscr{A}(tx)t^{n-1}\,dt \\ &+\mathscr{A}\left(\frac{\rho_0 x}{|x|}\right)\left(\frac{\rho_0}{|x|}\right)^{n} + \int\limits_{\rho_0/|x|}^{1} t^n\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial x_j}(tx)\right)dt.\end{aligned} \tag{25}$$

Преобразуем последний интеграл с помощью формулы интегрирования по частям. Тогда

$$\begin{aligned}\int\limits_{\rho_0/|x|}^{1} t^n\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial x_j}(tx)\right)dt &= \int\limits_{\rho_0/|x|}^{1}\frac{d}{dt}\left(\mathscr{A}(tx)\right)t^n\,dt \\ &= t^n\mathscr{A}(tx)\big|_{\rho_0/|x|}^{1} - n\int\limits_{\rho_0/|x|}^{1}\mathscr{A}(tx)t^{n-1}\,dt.\end{aligned}$$

Используя это соотношение и (25), получаем равенство (24). $\rhd$

Лемма 5. *Пусть* $\mathscr{A} \in C^1(B_R)$ *и*

$$\mathscr{B}(x) = \int_0^1 \mathscr{A}(tx)t^{n-1}\,dt, \quad |x| < R.$$

Тогда

$$\operatorname{div}(\mathscr{B}(x)x) = \mathscr{A}(x).$$

$\lhd$ Утверждение леммы 5 получается теми же рассуждениями, что и в доказательстве леммы 4. $\rhd$

4. Доказательства теорем 1 и 2

Приведем два известных результата (см. [1, 2]), которые потребуются ниже.

Лемма 6. *Пусть* $r > 0$, $r < R \leqslant +\infty$, $f \in C^\infty(B_R)$. *Тогда функция* f *имеет нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса* r, *лежащим в* B_R *в том и только том случае, когда при всех целых* $k \geqslant 0$, $1 \leqslant l \leqslant d_k$ *имеют место равенства*

$$f_{k,l}(\rho) = \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,l}\, J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right), \quad 0 \leqslant \rho < R,$$

где $c_{m,k,l} \in \mathbb{C}$ *и*

$$c_{m,k,l} = O\left(\frac{1}{\nu_m^\alpha}\right) \quad \text{при} \quad m \to \infty$$

для любого фиксированного $\alpha > 0$.

Лемма 7. *Пусть* $r > 0$, $0 \leqslant a < b \leqslant +\infty$, $b - a > 2r$, $f \in C^\infty(B_{a,b})$. *Тогда функция* f *имеет нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса* r, *лежащим в* $B_{a,b}$ *в том и только том случае, когда при всех целых* $k \geqslant 0$, $1 \leqslant l \leqslant d_k$ *имеют место равенства*

$$f_{k,l}(\rho) = \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_{m,k,l}\, J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right) + \beta_{m,k,l}\, N_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m}{r}\rho\right), \quad a < \rho < b,$$

где $\alpha_{m,k,l} \in \mathbb{C}$, $\beta_{m,k,l} \in \mathbb{C}$ *и*

$$|\alpha_{m,k,l}| + |\beta_{m,k,l}| = O\left(\frac{1}{\nu_m^\alpha}\right) \quad \text{при} \quad m \to \infty$$

для любого фиксированного $\alpha > 0$.

$\lhd$ Доказательство теорем 1 и 2. Пусть $\mathbf{A} \in \mathbf{V}_r(B_R) \cap C^\infty(B_R)$. По формуле Гаусса — Остроградского имеем

$$\int_{\overline{B_r}(\mathbf{x})} \operatorname{div}\mathbf{A}\,(y)\,dy = \int_{\partial\overline{B_r}(\mathbf{x})} \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\,d\xi = 0 \quad (\forall\, x \in B_{R-r}), \tag{26}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к границе шара $\overline{B_r}(x)$. Это означает, что функция $\operatorname{div}\mathbf{A}$ имеет нулевые интегралы по всем замкнутым шарам радиуса r, лежащим в B_R. Отсюда по лемме 6

$$(\operatorname{div}\mathbf{A})_{k,l}(\rho) = \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,l} J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{\nu_m\rho}{r}\right), \tag{27}$$

где константы $c_{m,k,l}$ убывают быстрее любой степени ν_m при $m \to \infty$. Рассмотрим векторное поле $\mathbf{C}(x) = \mathscr{B}(x)x$, где

$$\mathscr{B}(x) = \int\limits_0^1 \operatorname{div} \mathbf{A}(tx)t^{n-1}\,dt.$$

Тогда

$$\mathscr{B}_{k,l}(\rho) = \int\limits_{S^{n-1}} \mathscr{B}(\rho\sigma)\overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}\,d\sigma = \int\limits_{S^{n-1}} \left(\int\limits_0^1 \operatorname{div} \mathbf{A}(t\rho\sigma)t^{n-1}\,dt\right)\overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}\,d\sigma$$
$$= \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{S^{n-1}} \operatorname{div} \mathbf{A}(t\rho\sigma)\overline{Y_l^{(k)}(\sigma)}\,d\sigma\right) t^{n-1}dt = \int\limits_0^1 (\operatorname{div} \mathbf{A})_{k,l}(t\rho)t^{n-1}\,dt.$$

Теперь в соответствии с (27)

$$\mathscr{B}_{k,l}(\rho) = \int\limits_0^1 \rho^{1-\frac{n}{2}} \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,k,l} J_{\frac{n}{2}+k-1}\left(\frac{t\nu_m\rho}{r}\right) t^{\frac{n}{2}}\,dt.$$

Используя формулу

$$\int\limits_0^1 J_\nu(at)t^\lambda\,dt = \frac{a^\nu}{2^\nu(\lambda+\nu+1)\Gamma(\nu+1)}\,{}_1F_2\left(\frac{\lambda+\nu+1}{2}; \frac{\lambda+\nu+3}{2}, \nu+1; -\frac{a^2}{4}\right),$$

$\operatorname{Re}(\lambda+\nu) > -1$ (см. [11, п. 1.9.1, формула 1]), получаем

$$\mathscr{B}_{k,l}(\rho) = \sum_{m=1}^{\infty} \gamma_{m,k,l}\,\rho^k\,{}_1F_2\left(\frac{n+k}{2}; \frac{n+k}{2}+1, \frac{n}{2}+k; -\left(\frac{\nu_m\rho}{2r}\right)^2\right), \tag{28}$$

где

$$\gamma_{m,k,l} = \frac{c_{m,k,l}}{(n+k)\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)2^{\frac{n}{2}+k-1}}\left(\frac{\nu_m}{r}\right)^{\frac{n}{2}+k-1}.$$

Кроме того, по лемме 5

$$\operatorname{div} \mathbf{C} = \operatorname{div} \mathbf{A}. \tag{29}$$

Полагая

$$\mathbf{A}^s = \mathbf{A} - \mathbf{C},$$

из (28) и (29) получаем представление (8). Обратное утверждение теоремы следует из соотношений (21), (26) и леммы 6. Таким образом, теорема 1 доказана.

Повторяя теперь рассуждения выше с использованием следствий 1, 3, 4 и лемм 4, 7, получаем утверждение теоремы 2. $\triangleright$

В заключение выпишем явное разложение полей

$$b_{m,k,l}(x) = \rho^k\,{}_1F_2\left(\frac{n+k}{2}; \frac{n+k}{2}+1, \frac{n}{2}+k; -\left(\frac{\nu_m\rho}{2r}\right)^2\right)Y_l^{(k)}(\sigma)x,$$

возникающих в теореме 1, в виде суммы соленоидальной и потенциальной части, удовлетворяющей уравнению вида (4) из теоремы B. В силу равенства (21) и [3, ч. 1, гл. 5, формула (5.27)] имеем

$$\Delta \operatorname{div} b_{m,k,l}(x) = -\left(\frac{\nu_m}{r}\right)^2 \operatorname{div} b_{m,k,l}(x).$$

Отсюда и из равенства $\Delta = \operatorname{div}\operatorname{grad}$ находим

$$\operatorname{div}\left(\operatorname{grad}\operatorname{div} b_{m,k,l}(x) + \frac{\nu_m^2}{r^2} b_{m,k,l}(x)\right) = 0.$$

Кроме того,

$$\Delta \operatorname{grad}\operatorname{div} b_{m,k,l}(x) = \operatorname{grad}\Delta\operatorname{div} b_{m,k,l}(x) = -\left(\frac{\nu_m}{r}\right)^2 \operatorname{grad}\operatorname{div} b_{m,k,l}(x).$$

Поэтому искомые соленоидальная и потенциальная части равны

$$b_{m,k,l}(x) + \left(\frac{r}{\nu_m}\right)^2 \operatorname{grad}\operatorname{div} b_{m,k,l}(x)$$

и

$$-\left(\frac{r}{\nu_m}\right)^2 \operatorname{grad}\operatorname{div} b_{m,k,l}(x)$$

соответственно.

Литература

1. *Волчков В. В.* Окончательный вариант локальной теоремы о двух радиусах // Мат. сб.—1995.—Т. 186, № 6.—С. 15–34.
2. *Волчков В. В.* Решение проблемы носителя для некоторых классов функций // Мат. сб.—1997.—Т. 188, № 9.—С. 13–30. DOI: 10.4213/sm255.
3. *Volchkov V. V.* Integral Geometry and Convolution Equations.—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2003.—454 p.
4. *Volchkov V. V., Volchkov V. V.* Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group.—London: Springer-Verlag, 2009.—671 p.
5. *Volchkov V. V., Volchkov V. V.* Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces.—Basel: Birkhäuser., 2013.—592 p.
6. *Smith J.* Harmonic analysis of scalar and vector fields in $\mathbb{R}^n$ // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.—1972.—Vol. 72, № 3.—P. 403–416. DOI: 10.1017/S0305004100047241.
7. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.—М.: Мир, 1974.—332 с.
8. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Т. 1, 2.—М.: Наука, 1973, 1974.—296 с.
9. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Дополнительные главы.—М.: Наука, 1986.—800 с.
10. *Коренев Б. Г.* Введение в теорию бесселевых функций.—М.: Наука, 1971.—287 с.
11. *Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И.* Интегралы и ряды. Специальные функции.—М.: Наука, 1983.—750 с.

Статья поступила 16 ноября 2017 г.

Волчков Виталий Владимирович
Донецкий национальный университет,
заведующий кафедрой матем. анализа и дифференц. уравнений
УКРАИНА, 83001, Донецк, ул. Университетская, 24
E-mail: volna936@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4274-0034

Волчкова Наталья Петровна
Донецкий национальный технический университет,
доцент кафедры высшая математика
УКРАИНА, 83000, Донецк, ул. Артема, 58
E-mail: `volna936@gmail.com`
http://orcid.org/0000-0001-6193-2782

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 4, P. 20–34

VECTOR FIELDS WITH ZERO FLUX THROUGH SPHERES OF FIXED RADIUS

Volchkov, Vit. V.[1] and Volchkova, N. P.[2]

[1] Donetsk National University,
24 Universitetskaya Str., Donetsk 83001, Ukraine;
[2] Donetsk National Technical University,
58 Artyom Str., Donetsk 83000, Ukraine
E-mail: `volna936@gmail.com`

Abstract. The classical property of a periodic function on the real axis is the possibility of its representation by a trigonometric Fourier series. The natural analogue of the periodicity condition in the Euclidean space $\mathbb{R}^n$ is the constancy of the integrals of the function over all balls (or spheres) of a fixed radius. Functions with the specified property can be expanded in a series in special eigenfunctions of the Laplace operator. This fact admits a generalization to vector fields in $\mathbb{R}^n$, having zero flow through spheres of fixed radius. In this case, Smith's representation arises for them as the sum of a solenoidal vector field and an infinite number of potential vector fields. Potential vector fields satisfy the Helmholtz equation related to the zeros of the Bessel function $J_{n/2}$. The purpose of this paper is to obtain local analogs of the Smith theorem. We study vector fields $\mathbf{A}$ with zero flow through spheres of fixed radius on domains $\mathscr{O}$ in Euclidean space that are invariant with respect to rotations. Cases are considered when $\mathscr{O} = B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ or $\mathscr{O} = B_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^n : a < |x| < b\}$. The description of the fields $\mathbf{A}$ consists of two steps. The first step proves the equality $\mathbf{A}(x) = \mathbf{A}^s(x) + B(x)x$, $x \in \mathscr{O}$, where $\mathbf{A}^s$ is a suitable solenoidal vector field and B is a scalar field. The second step is to describe the functions $B(x)$. As the main tool for the description of $B(x)$, multidimensional Fourier series in spherical harmonics are used. If $\mathscr{O} = B_R$ then the Fourier coefficients of the function $B(x)$ can be represented in the form of series in the hypergeometric functions ${}_1F_2$. In the case of $\mathscr{O} = B_{a,b}$ the corresponding Fourier coefficients can be expanded in the series containing the Bessel, Neumann and Lommel functions. These results can be used in harmonic analysis of vector fields on domains in $\mathbb{R}^n$.

Key words: vector field, zero spherical mean, spherical harmonic, Lommel function.

Mathematical Subject Classification (2000): 53C65, 44A35.

For citation: *Volchkov, Vit. V. and Volchkova, N. P.* Vector Fields with Zero Flux Through Spheres of Fixed Radius, *Vladikavkaz Math. J.*, 2018, vol. 20, no. 3, pp. 20–34 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23384.

References

1. *Volchkov, V. V.* A Definitive Version of the Local Two-Radii Theorem, *Sbornik: Mathematics*, 1995, vol. 186, no. 6, pp. 783–802. DOI: 10.1070/SM1995v186n06ABEH000043.
2. *Volchkov, V. V.* Solution of the Support Problem for Several Function Classes, *Sbornik: Mathematics*, 1997, vol. 188, no. 9, pp. 1279–1294. DOI: 10.1070/SM1997v188n09ABEH000255.
3. *Volchkov, V. V. Integral Geometry and Convolution Equations*, Dordrecht, Kluwer Acad. Publ., 2003, 454 p.
4. *Volchkov, V. V. and Volchkov, Vit. V. Harmonic Analysis of Mean Periodic Functions on Symmetric Spaces and the Heisenberg Group*, London, Springer-Verlag, 2009, 671 p.

5. *Volchkov, V. V. and Volchkov, Vit. V. Offbeat Integral Geometry on Symmetric Spaces*, Basel, Birkhäuser, 2013, 592 p.
6. *Smith, J.* Harmonic Analysis of Scalar and Vector Fields in $\mathbb{R}^n$, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 1972, vol. 72, no. 3, pp. 403–416. DOI: 10.1017/S0305004100047241.
7. *Stein, E. and Weiss, G. Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton 1971, 312 p.
8. *Beitmen, G. and Erdeii, A.* Vysshie transtsendentnye funktsii, vol. 1, 2, Moscow, Nauka, 1974 (in Russian).
9. *Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. and Marichev, O. I. Integrals and Series. Supplementary Parts*, Moscow, Nauka, 1986, 800 p. (in Russian).
10. *Korenev, B. G. Introduction to the Theory of Bessel Functions*, Moscow, Nauka, 1971, 287 p. (in Russian).
11. *Prudnikov, A. P., Brychkov, Yu. A. and Marichev, O. I. Integrals and Series. Special Functions*, Moscow, Nauka, 1983, 750 p. (in Russian).

Received November 16, 2017

Vitaliy V. Volchkov
Donetsk National University,
24 Universitetskaya Str., Donetsk 83001, Ukraine,
Head of the Department of Math. Analysis and Differ. Equations
E-mail: volna936@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4274-0034

Natalia P. Volchkova
Donetsk National Technical University,
58 Artioma Str., Donetsk 83000, Ukraine,
Associate Professor at the Department of Higher Mathematics
E-mail: volna936@gmail.com
http://orcid.org/0000-0001-6193-2782

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 4, С. 35–42

УДК 517.983.2
DOI 10.23671/VNC.2018.4.23385

$L_P - L_Q$-ОЦЕНКИ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ПОТЕНЦИАЛА С ОСЦИЛЛИРУЮЩИМИ ЯДРАМИ

М. Н. Гуров[1], **В. А. Ногин**[2]

[1] ЧОУ «Лицей классического элитарного образования»,
Россия, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Пушкинская, 166 А;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: MGurov@inbox.ru, nogin@math.rsu.ru

Аннотация. Получены $L_p - L_q$-оценки для обобщенных потенциалов Рисса с осциллирующими ядрами и характеристиками широкого класса, включающего произведение однородной функции, бесконечно дифференцируемой в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, и функции класса $C^{m,\gamma}(\dot{R}^1_+)$. Описаны выпуклые множества $(1/p, 1/q)$-плоскости, для точек которых упомянутые операторы ограничены из L_p в L_q, и указаны области, где эти операторы не ограничены. В некоторых случаях доказана точность полученных оценок. В частности, получены необходимые и достаточные условия ограниченности исследуемых операторов в L_p. В настоящее время имеется ряд работ по $L_p - L_q$-оценкам для операторов свертки с осциллирующими ядрами, в частности, для операторов Бохнера — Рисса и акустических потенциалов, возникающих в различных задачах анализа и математической физики. В этих работах рассматриваются ядра, содержащие только радиальную характеристику $b(r)$, которая стабилизируется на бесконечности как гёльдеровская функция. Благодаря этому свойству получение оценок для указанных операторов сводилось к случаю оператора с характеристикой $b(r) \equiv 1$. Подобное сведение в принципе невозможно, когда ядро потенциала Рисса содержит однородную характеристику $a(t')$. Поэтому в работе развивается новый метод, основанный на получении специальных представлений для символов рассматриваемых операторов с последующим применением техники Фурье-мультипликаторов, вырождающихся или имеющих особенности на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$.

Ключевые слова: потенциал Рисса, осциллирующее ядро, $L_p - L_q$-оценки, $\mathscr{L}$-характеристика.

Mathematical Subject Classification (2000): 46E35, 26A33.

Образец цитирования: *Гуров М. Н., Ногин В. А.* $L_p - L_q$-оценки для операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 4.—С. 35–42. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23385.

Введение

В работе получены $L_p - L_q$-оценки для операторов типа потенциала

$$(R^\alpha \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{a(t')b(|t|)\, e^{i|t|}}{|t|^{n-\alpha}} \varphi(x-t)\, dt, \tag{1}$$

где $0 < \operatorname{Re} \alpha < n$, $a(t')$ $(t' = t/|t|)$ — однородная нулевой степени функция, бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, удовлетворяющая условию $a(t') \not\equiv 0$, $t' \in S^{n-1}$.

Предполагается также, что радиальная функция $b(r)$ принадлежит классу $C^{m,\gamma}(\dot{R}^1_+)$ гёльдеровских функций (см. § 2).

В работе описаны выпуклые множества $(1/p, 1/q)$-плоскости, для точек которых оператор R^α ограничен из L_p в L_q, и указаны области, где этот оператор не ограничен (см. теорему 1.1). В некоторых случаях доказана точность полученных оценок (см. замечание 1.1). В частности, получены необходимые и достаточное условия ограниченности оператора (1) в L_p.

В настоящее время имеется ряд работ по $L_p - L_q$-оценкам для операторов свертки с осциллирующими ядрами, в частности, для операторов Бохнера — Рисса и акустических потенциалов, возникающих в различных задачах анализа и математической физики (см. книги [1] и [2], а также работы [3–6, 7–9]). Во всех упомянутых работах, кроме [3] и [7], рассматривались ядра, содержащие только радиальную характеристику $b(r)$, которая стабилизируется на бесконечности как гёльдеровская функция. Благодаря этому свойству получение оценок для указанных операторов сводилось к случаю оператора с характеристикой $b(r) \equiv 1$. Подобное сведение в принципе невозможно, когда ядро оператора (1) содержит однородную характеристику $a(t')$.

В работе [3] были получены оценки для потенциала (1) в случае $b(|t|) \equiv 1$ и $(n-1)/2 < \operatorname{Re}\alpha < n$. Однако, использованный в ней метод, основанный на представлении оператора R^α_a через оператор Бохнера — Рисса и некоторый оператор, близкий к акустическому потенциалу, не работает при $\operatorname{Re}\alpha \leqslant (n-1)/2$.

В работе [7] развивается новый метод, основанный на получении специальных представлений для символа оператора (1) (в случае $b(|t|) \equiv 1$) с последующим применением техники Фурье-мультипликаторов, вырождающихся или имеющих особенности на единичной сфере в $\mathbb{R}^n$. Этот метод позволяет получить $L_p - L_q$-оценки для потенциала (1) в случае $b(|t|) \equiv 1$ при любых значениях α, удовлетворяющих условию $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$.

1. Формулировка основного результата

В работе использованы следующие обозначения: $(A, B, \ldots, K)$ — открытый многоугольник в $\mathbb{R}^2$ с вершинами в точках $A, B, \ldots, K$; $[A, B, \ldots, K]$ — его замыкание.

Через $\mathscr{L}(A)$ обозначим $\mathscr{L}$-характеристику оператора A, т. е. множество всех точек $(1/p, 1/q)$-плоскости $(1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty)$ таких, что оператор A ограничен из L_p в L_q.

Пусть $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$. Введем в рассмотрение следующие точки $(1/p, 1/q)$-плоскости:

$$A = \left(1, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \quad A' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, 0\right),$$

$$C = \left(\frac{3}{2} - \frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1}, \frac{3}{2} - \frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1}\right), \quad C' = \left(\frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1} - \frac{1}{2}, \frac{2\operatorname{Re}\alpha}{n-1} - \frac{1}{2}\right),$$

$$E = (1, 0), \quad F = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

$$G = \left(1 - \frac{(n - \operatorname{Re}\alpha)(n-1)}{n(n+3)}, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \quad G' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, \frac{(n - \operatorname{Re}\alpha)(n-1)}{n(n+3)}\right),$$

$$H = \left(1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \quad H' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right),$$

$$O = (1, 1), \quad O' = (0, 0),$$

$$K = \left(\frac{2(\operatorname{Re}\alpha + 1)}{n+1} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad K' = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2} - \frac{2(\operatorname{Re}\alpha + 1)}{n+1}\right),$$

$$B = \left(1 - \frac{(n-1)(n-\operatorname{Re}\alpha)}{n(n+1)}, 1 - \frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}\right), \quad B' = \left(\frac{\operatorname{Re}\alpha}{n}, \frac{(n-1)(n-\operatorname{Re}\alpha)}{n(n+1)}\right).$$

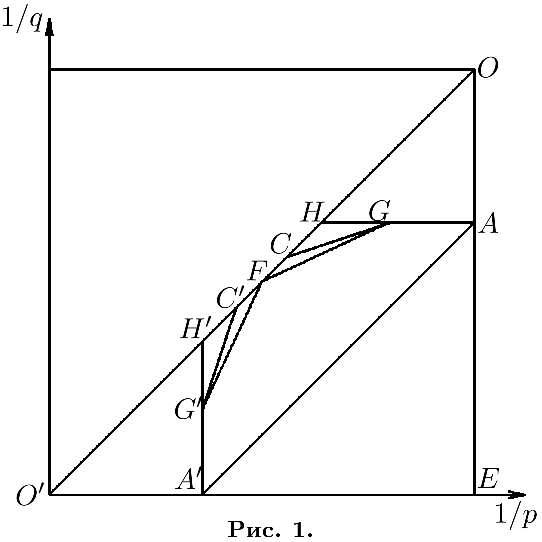

Рис. 1.

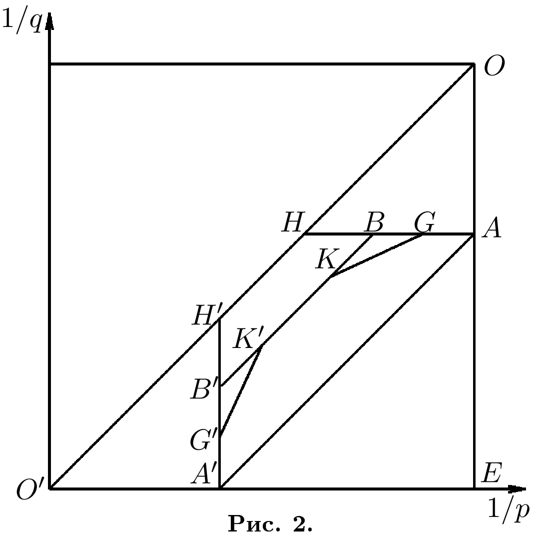

Рис. 2.

Нам понадобятся также следующие множества на $(1/p, 1/q)$-плоскости (см. рис. 1 и 2 для случаев $0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n-1}{2}$ и $\frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < n$ соответственно):

$$\mathscr{L}_1(\alpha, n) = \begin{cases} [A', H', H, A, E] \setminus ([A', H'] \cup [A, H]), & 0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n(n-1)}{2(n+1)}, \\ (A', G', C', C, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup (C', C), & \frac{n(n-1)}{2(n+1)} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n-1}{2}, \\ (A', G', F, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup \{F\}, & \operatorname{Re}\alpha = \frac{n-1}{2},\ \operatorname{Im}\alpha \neq 0, \\ (A', G', F, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E), & \alpha = \frac{n-1}{2}, \\ (A', G', K', K, G, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup [K', K], & \frac{n-1}{2} < \operatorname{Re}\alpha < \frac{n}{2}, \\ (A', B', B, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E), & \frac{n}{2} \leqslant \operatorname{Re}\alpha < n,\ \operatorname{Im}\alpha \neq 0, \\ (A', B', B, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup (B', B), & \frac{n}{2} \leqslant \alpha < n, \end{cases}$$

$$\mathscr{L}_2(\alpha, n) = [O, A, A', O'] \setminus (\{A'\} \cup \{A\}).$$

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть* $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$.

I. *Справедливо вложение*

$$\mathscr{L}(R^\alpha) \supset \mathscr{L}_1(\alpha, n) \cap \mathscr{L}_2(\alpha, n). \tag{2}$$

II. *Множество* $\mathscr{L}(R^\alpha)$ *не содержит точек лежащих:*

1) *на отрезке* $[A, H]$ *и выше него, если* $a(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in S^{n-1}$;

2) *на отрезке* $[A', H']$ *и левее него при том же условии на характеристику* $a(\sigma)$, *что и в п.* 1);

3) *на отрезке* $[O', O]$, *если* $\alpha = (n-1)/2$;

4) *ниже прямой* $A'A$, *а также точки* A' *и* A.

Замечание 1.1. При $0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n(n-1)}{2(n+1)}$ и $n/2 \leqslant \alpha < n$ полученные оценки являются точными. А именно,

$$\mathscr{L}(R^\alpha) = [A', H', H, A] \setminus ([A', H'] \cup [A, H]), \quad 0 < \operatorname{Re}\alpha \leqslant \frac{n(n-1)}{2(n+1)},$$

$$\mathscr{L}(R^\alpha) = (A', B', B, A, E) \cup (A, E] \cup (A', E) \cup (B', B), \quad n/2 \leqslant \alpha < n.$$

В частности, для таких α получено необходимое и достаточное условие ограниченности оператора (1) в L_p. Именно, этот оператор ограничен в L_p тогда и только тогда, когда $n/(n - \operatorname{Re}\alpha) < p < n/\operatorname{Re}\alpha$.

2. Вспомогательные сведения и утверждения

Следуя [1], будем говорить, что функция $f(r)$ принадлежит классу $C^{m;\gamma}(\dot{R}^1_+)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, и $0 \leqslant \gamma \leqslant m$, если выполнены следующие условия:

i) функция $f(r) \in C^m(R^1_+ \setminus \{0\})$;

ii) функция $f^*(r) = f(\frac{1}{r})$ имеет в точке $r = 0$ производные до m-го порядка включительно;

iii) в точке $r = 0$ функция $f(r)$ имеет непрерывные производные до порядка $[\gamma]$ включительно, и справедлива оценка

$$|f^{(p)}(r)| \leqslant r^{\gamma - p},$$

при $r \to 0$, $p = [\gamma] + 1, \ldots, m$.

В случае $\gamma = m$ имеем $C^{m;m}(\dot{R}^1_+) = C^m(\dot{R}^1_+)$.

Лемма 2.1 [1]. *Пусть* $f(r) \in C^{m,\gamma}(\dot{R}^1_+)$, $m \geqslant 1$. *Тогда справедливо разложение*

$$f(r) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{(1+r^2)^{k/2}} + f_m(r),$$

где

$$a_k = \frac{1}{k!} f_*^{(k)}(0) = \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{(1+r^2)^{3/2}}{r} \frac{d}{dr} \right)^k f(r)\big|_{r=\infty}, \tag{3}$$

$$f_m(r) = \frac{1}{(m-1)!(1+r^2)^{m/2}} \int\limits_0^1 (1-u)^{m-1} f_*^{(m)} \left(\frac{u}{\sqrt{1+r^2}} \right) du. \tag{4}$$

Здесь $f_*(t) = f\left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}\right)$.

Кроме того, справедлива оценка

$$|f_m(r)| \leqslant c(1+r^2)^{-\frac{m}{2}}, \tag{5}$$

для некоторого $c > 0$.

Далее, рассмотрим потенциал

$$(R_a^\alpha \varphi)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{a(t')e^{i|t|}}{|t|^{n-\alpha}} \varphi(x-t)\, dt,$$

где $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$, $a(t')$, $t' = t/|t|$, — однородная нулевой степени функция, бесконечно дифференцируемая в $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, удовлетворяющая условию $a(t') \not\equiv 0$, $t' \in S^{n-1}$.

В работе доказана следующая

Теорема 2.1 [7]. *Пусть* $0 < \operatorname{Re}\alpha < n$.

I. *Справедливо вложение*

$$\mathscr{L}(R_a^\alpha) \supset \mathscr{L}_1(\alpha, n) \cap \mathscr{L}_2(\alpha, n).$$

II. *Множество* $\mathscr{L}(R_a^\alpha)$ *не содержит точек, лежащих:*

1) *на отрезке* $[A, H]$ *и выше него, если* $a(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in S^{n-1}$*;*

2) *на отрезке* $[A', H']$ *и левее него при том же условии на характеристику* $a(\sigma)$*, что и в п.* 1)*;*

3) *на отрезке* $[O', O]$*, если* $\alpha = (n-1)/2$*;*

4) *ниже прямой* $A'A$*, а также точки* A' *и* A.

3. Доказательство основного результата

Имеем

$$(R^\alpha \varphi)(x) = \left(\int\limits_{|t|<1} + \int\limits_{|t|>1} \right) \frac{b(|t|)a(t')e^{i|t|}}{|t|^{n-\alpha}} \varphi(x-t)\, dt \equiv (M^{\alpha,0}\varphi)(x) + (M^{\alpha,\infty}\varphi)(x).$$

Отметим, что ядро $m^{\alpha,0}(t)$ оператора $M^{\alpha,0}$ принадлежит L_1. Следовательно, оператор $M^{\alpha,0}$ ограничен в L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

С другой стороны, для оператора $M^{\alpha,0}$ справедлива теорема Соболева. Отсюда следует, что

$$\mathscr{L}(M^{\alpha,0}) \supset [O', O, A, A'] \setminus (\{A'\} \cup \{A\}). \tag{6}$$

Рассуждая так же, как и в статье [6], заключаем, что $\mathscr{L}(M^{\alpha,0})$ не содержит точек множества $[A', A, E] \setminus (A', A)$.

Рассмотрим оператор $M^{\alpha,\infty}$. В силу леммы 2.1 имеем

$$b(r) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{(1+r^2)^{k/2}} + b_m(r),$$

где коэффициенты a_k и функция $b_m(r)$ определяются равенствами (3) и (4) соответственно.

Разложив функцию $(1+r^2)^{-k/2}$ по формуле Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, будем иметь

$$b(r) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{a_k}{r^k} \left(1 + \sum_{s=1}^{l-1} \binom{-\frac{k}{2}}{s} \frac{1}{r^{2s}} + R_l\left(\frac{1}{r^2}\right) \right) + b_m(r), \tag{7}$$

где $r > 1$, $m \geqslant 1$, $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$,

$$R_l\left(\frac{1}{r^2}\right) = \frac{1}{r^{2l}\ (l-1)!} \int_0^1 (1-u)^{l-1}((1+\frac{u}{r^2})^{-k/2})^{(l)}\, du,$$

здесь $l = \left[\frac{\alpha}{2}\right] + 1$.

С учетом (7) получаем

$$(M^{\alpha,\infty}\varphi)(x) = a_0(R_a^\alpha)(x) + \sum_{k=1}^{m-1} a_k(R_a^{\alpha-k})(x)$$
$$+ \sum_{k=0}^{m-1}\sum_{s=1}^{l-1} \binom{-\frac{k}{2}}{s} a_k(R_a^{\alpha-k-2s})(x) + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(T_a^{\alpha-k}\varphi)(x) + (S_a^\alpha\varphi)(x).$$

Здесь

$$(T_a^{\alpha-k}\varphi)(x) = \int_{|t|>1} \frac{a(t')R_l(1/|t|^2)e^{i|t|}}{|t|^{n-(\alpha-k)}}\varphi(x-t)\, dt,$$

$$(S_a^\alpha\varphi)(x) = \int_{|t|>1} \frac{a(t')b_m(|t|)e^{i|t|}}{|t|^{n-\alpha}}\varphi(x-t)\, dt.$$

Заметим, что для операторов R^α и $R^{\alpha-k-2s}$ $(0 \leqslant k \leqslant m-1,\ 1 \leqslant s \leqslant l-1)$ справедлива теорема 2.1. Из указанной теоремы вытекают вложения

$$\mathscr{L}(R_a^\alpha) \supset \mathscr{L}_1(\alpha, n) \cap \mathscr{L}_2(\alpha, n); \tag{8}$$

$$\mathscr{L}(R_a^{\alpha-k-2s}) \supset \mathscr{L}_1(\alpha, n) \cap \mathscr{L}_2(\alpha, n). \tag{9}$$

Кроме того, из утверждений п. II теоремы 2.1 вытекает, что множество $\mathscr{L}(R_a^\alpha)$ не содержит точек, лежащих:

1) на отрезке $[A, H]$ и выше него, если $a(\sigma) \neq 0$, $\sigma \in S^{n-1}$;

2) на отрезке $[A', H']$ и левее него при том же условии на характеристику $a(\sigma)$, что и в п. 1);

3) на отрезке $[O', O]$, если $\alpha = (n-1)/2$;

4) ниже прямой $A'A$, а также точки A' и A.

Поскольку ядра операторов $T_a^{\alpha-k}$, $0 \leqslant k \leqslant m-1$, принадлежат L_1, то, с одной стороны, операторы $T_a^{\alpha-k}$ ограничены в $L_p, 1 \leqslant p < \infty$, а с другой — в L_∞.

Интерполируя, получаем

$$\mathscr{L}(T_a^{\alpha-k}) = [O', O, E], \quad 0 \leqslant k \leqslant m-1. \tag{10}$$

Далее, с учетом (5) имеем

$$\mathscr{L}(S_a^\alpha) = [O', O, E]. \tag{11}$$

Из условий (6), (8)–(11) вытекает утверждение теоремы 1.1.

Литература

1. *Samko S. G.* Hypersingular Integrals and Their Applications.—London: Taylor and Frances. Internat. Series «Analytical Methods and Special Functions», 2002.—Vol. 5.—376 p.
2. *Stein E. M.* Harmonic Analysis: Real-variable Method, Orthogonality, and Oscillatory Integrals.—Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.—355 p.
3. *Betilgiriev M. A., Karasev D. N., Nogin V. A.* $L_p - L_q$-estimates for some potential type operators with oscillating kernels // Fract. Calc. Appl. Anal.—2004.—Vol. 7, №2.—P. 213–241.
4. *Börjeson L.* Estimates for the Bochner–Riesz operator with negative index // Indiana Univ. Math. J.—1986.—Vol. 35, №2.—P. 225–233.
5. *Karapetyants A. N., Karasev D. N., Nogin V. A.* $L_p - L_q$-estimates for some fractional acoustic potentials and some related operators // Fract. Calc. Appl. Anal.—2005.—Vol. 7, №1.—P. 155–172.
6. *Karasev D. N., Nogin V. A.* On the boundness of some potential–type operators with oscillating kernels // Math. Nachr.—2005.—Vol. 278, № 5.—P. 554–574. DOI: 10.1002/mana.200310258.
7. *Гуров М. Н., Ногин В. А.* $L_p - L_q$-оценки для обобщенных потенциалов Рисса с осциллирующими ядрами // Владикавк. мат. журн.—2017.—Т. 19, № 1.—С. 3–10. DOI: 10.23671/VNC.2017.2.6503.
8. *Карапетянц А. Н., Карасев Д. Н., Ногин В. А.* Оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами // Изв. НАН Армении.—2003.—Т. 38, № 2—С. 37–62.
9. *Карасев Д. Н.* $L_p - L_q$-оценки для некоторых операторов типа потенциала с осциллирующими ядрами // Диф. уравнения.—2003.—Т. 39, № 3.—С. 418–420.

Статья поступила 17 марта 2018 г.

Гуров Михаил Николаевич
ЧОУ «Лицей классического элитарного образования»,
учитель математики
РОССИЯ, 344006, Ростов-на-Дону, ул. Пушкинская, 166 А
E-mail: MGurov@inbox.ru

Ногин Владимир Александрович
Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник отдела мат. анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: nogin@math.rsu.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 4, P. 35–42

$L_p - L_q$-ESTIMATES FOR POTENTIAL-TYPE OPERATORS WITH OSCILLATING KERNELS

Gurov, M. N.[1] and Nogin, V. A.[2]

[1] ISC «Lyceum of Classical Elite Education»,
166 A Pushkinskaya str., Rostov-on-don 344006, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus st., Vladikavkaz 362027, Russia
E-mail: MGurov@inbox.ru, nogin@math.rsu.ru

Abstract. We consider a class of multidimensional potential-type operators whose kernels are oscillating at infinity. The characteristics of these operators are from a wide class of functions including the product of a homogeneous function infinitely differentiable in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ and any function from $C^{m,\gamma}(\dot{R}^1_+)$. We describe convex sets in the $(1/p; 1/q)$-plane for which these operators are bounded from L_p into L_q and indicate the domains where they are not bounded. In some cases, the accuracy of the estimates obtained is proved. In particular, necessary and sufficient conditions for the boundedness of the operators under considered in L_p are obtained. Currently, there is a number of papers on $L_p - L_q$-estimates for convolution operators with oscillating kernels, in particular, for the Bochner–Riesz operators and acoustic potentials arising in various problems of analysis and mathematical physics. These papers cover kernels containing only the radial characteristic $b(r)$, which stabilized at infinity as a Hëlder function. Due to this property, the derivation of estimates for the indicated operators was reduced to the case of an operator with the characteristic $b(r) \equiv 1$. Such a reduction is impossible when the Riesz potential kernel contains a homogeneous characteristic $a(t')$. To receive the results we use new method which based on special representation of the symbols multidimensional potential-type operators. To these representations of the symbols we apply the technique of Fourier-multipliers, which degenerate or have singularities on the unit sphere in $\mathbb{R}^n$.

Key words: potential-type operators, oscillating kernel, $L_p - L_q$-estimates, $\mathscr{L}$-characteristics.

Mathematical Subject Classification (2000): 46E35, 26A33.

For citation: *Gurov, M. N. and Nogin, V. A.* $L_p - L_q$-Estimates for Potential-Type Operators with Oscillating Kernels, *Vladikavkaz Math. J.*, 2018, vol. 20, no. 4, pp. 35–42 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23385.

References

1. *Samko, S. G. Hypersingular Integrals and Their Applications, Internat. Series «Analytical Methods and Special Functions» vol.* 5, London, Taylor and Frances, 2002, 376 p.
2. *Stein, E. M. Harmonic Analysis: Real-Variable Method, Orthogonality, and Oscillatory Integrals*, Princeton, Princeton Univ. Press, 1993, 355 p.
3. *Betilgiriev, M. A., Karasev, D. N. and Nogin V. A.* $L_p - L_q$-Estimates for Some Potential Type Operators with Oscillating Kernels, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2004, vol. 7, no. 2, pp. 213–241.
4. *Börjeson, L.* Estimates for the Bochner–Riesz Operator with Negative Index, *Indiana University Mathematics Journal*, 1986, vol. 35, no. 2, pp. 225–233.
5. *Karapetyants, A. N., Karasev, D. N. and Nogin V. A.* $L_p - L_q$-estimates for some fractional acoustic potentials and some related operators, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 2005, vol. 7, no. 1, pp. 155–72.
6. *Karasev, D. N. and Nogin, V. A.* On the Boundness of Some Potential-Type Operators with Oscillating Kernels, *Mathematische Nachrichten*, 2005, vol. 278, no. 5, pp. 554–574. DOI: 10.1002/mana.200310258.
7. *Gurov, M. N. and Nogin, V. A.* $L_p - L_q$-estimates for Generalized Riss Potentials with Oscillating Kernels, *Vladikavkaz Math. J.*, 2017, vol. 19, no. 2, pp. 3–10 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2017.2.6503.
8. *Karapetyants, A. N., Karasev, D. N. and Nogin, V. A.* Estimates for Some Potential-Type Operators with Oscillating Kernels, *Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia*, 2003, vol. 38, no. 2, pp. 37–62 (in Russian).
9. *Karasev, D. N.* $L_p - L_q$-Estimates for Some Potential Type Operators with Oscillating Kernels, *Differential Equations*, 2003, vol. 39, no. 3, pp. 453–456. DOI: 10.1023/A:1026094323206.

Received March 17, 2018

Michael N. Gurov
ISC «Lyceum of Classical Elite Education»,
166 A Pushkinskaya str., Rostov-on-don 344006, Russia,
Mathematics Teacher
E-mail: `MGurov@inbox.ru`

Vladimir A. Nogin
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus st., Vladikavkaz 362027, Russia,
Senior Researcher of the Department of Math. Analysis
E-mail: `nogin@math.rsu.ru`

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 4, С. 43–49

УДК 519.17
DOI 10.23671/VNC.2018.4.23386

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ СИЛЬНО РЕГУЛЯРНОГО ГРАФА С ПАРАМЕТРАМИ $(117, 36, 15, 9)$

А. К. Гутнова[1], **А. А. Махнев**[2]

[1] Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Россия, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46;
[2] Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
Россия, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16

E-mail: gutnovaalina@gmail.com, makhnev@imm.uran.ru

Аннотация. В предшествующих работах авторов найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графамии для $pG_{s-3}(s,t)$. В частности, локально псевдо $pG_2(5,2)$-граф является сильно регулярным графом с параметрами $(117,36,15,9)$. Основным результатом данной статьи является теорема, в которой найдены возможные порядки и строение подграфов неподвижных точек автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(117,36,15,9)$. Этот граф имеет спектр $36^1, 9^26, -3^90$. Порядок клики в Γ не превосходит $1 + 36/3 = 13$, порядок коклики в Γ не превосходит $117 \cdot 3/39 = 9$. Далее из этого результата выведено следствие, что если группа G автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(117,36,15,9)$ действует транзитивно на множестве вершин, то цоколь T группы G изоморфен либо $L_3(3)$ и $T_a \cong GL_2(3)$ — подгруппа индекса 117, либо $T \cong L_4(3)$ и $T_a \cong U_4(2).Z_2$ — подгруппа индекса 117.

Ключевые слова: сильно регулярный граф, симметричный граф, группа автоморфизмов графа.

Mathematical Subject Classification (2010): 20D45.

Образец цитирования: *Гутнова А. К., Махнев А. А.* Об автоморфизмах сильно регулярного графа с параметрами $(117,36,15,9)$ // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 4.—С. 43–49. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23386.

1. Введение

Мы рассматриваем неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для вершины a графа Γ через $\Gamma_i(a)$ обозначим i-окрестность вершины a, т. е. подграф, индуцированный Γ на множестве всех вершин, находящихся на расстоянии i от a. Положим $[a] = \Gamma_1(a)$, $a^\perp = \{a\} \cup [a]$.

Степенью вершины называется число вершин в ее окрестности. Граф Γ называется *регулярным степени* k, если степень любой вершины из Γ равна k. Граф Γ назовем *реберно регулярным с параметрами* (v,k,λ), если он содержит v вершин, регулярен степени k, и каждое его ребро лежит в λ треугольниках. Граф Γ — *вполне регулярный граф с параметрами* (v,k,λ,μ), если он реберно регулярен с соответствующими параметрами, и $[a] \cap [b]$ содержит μ вершин для любых двух вершин a,b, находящихся на расстоянии 2 в Γ. Вполне регулярный граф диаметра 2 называется *сильно регулярным графом.*

В работах А. А. Махнева и А. К. Гутновой [1–3] найдены массивы пересечений дистанционно регулярных графов, в которых окрестности вершин являются псевдогеометрическими графамии для $pG_{s-3}(s,t)$. В частности, локально псевдо $pG_2(5,2)$-граф является сильно регулярным графом с параметрами $(117,36,15,9)$.

В данной работе найдены возможные автоморфизмы для сильно регулярного графа с параметрами $(117,36,15,9)$. Этот граф имеет спектр $36^1, 9^{26}, -3^{90}$. Порядок клики в Γ не превосходит $1+36/3=13$, порядок кокликии в Γ не превосходит $117\cdot 3/39=9$.

2. Вспомогательные результаты

Лемма 1. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с параметрами $(117,36,15,9)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$. Если $g\in G$, χ_1 — характер проекции представления ψ на подпространство размерности 26, то $\alpha_i(g)=\alpha_i(g^l)$ для любого натурального числа l, взаимно простого с $|g|$, $\chi_1(g)=(\alpha_0(g)+\alpha_1(g)/3-13)/4$. Если $|g|=p$ — простое число, то $\chi_1(g)-26$ делится на p. Если $|g|=p^2$, p — простое число, то p^2 делит $\chi_1(g^p)-26$.*

$\lhd$ Имеем

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 26 & 13/2 & -13/4\\ 90 & -15/2 & 9/4\end{pmatrix}.$$

Поэтому $\chi_1(g)=(8\alpha_0(g)+2\alpha_1(g)-\alpha_2(g))/36$. Подставляя $\alpha_2(g)=117-\alpha_0(g)-\alpha_1(g)$, получим $\chi_1(g)=(\alpha_0(g)+\alpha_1(g)/3-13)/4$.

Остальные утверждения леммы следуют из [5, лемма 1]. $\rhd$

Лемма 2. *Пусть Γ — дистанционно регулярный граф с параметрами $(117,36,15,9)$, A — трехвершинный подграф из Γ, y_i — число вершин из $\Gamma-A$, смежных точно с i вершинами из A. Если A — коклика, то $y_0=33-y_3$, если A — объединение изолированной вершины и ребра, то $y_0=40-y_3$, если A — геодезический путь, то $y_0=47-y_3$, а если A — клика, то $y_0=54-y_3$.*

$\lhd$ Пусть A — коклика. Тогда $y_1=54+3y_3$, $y_2=27-3y_3$ и $y_0=33-3y_3$. Пусть A — клика. Тогда $y_1=18+3y_3$, $y_2=42-3y_3$ и $y_0=54-3y_3$. Аналогично рассматриваются оставшиеся случаи. $\rhd$

Пусть до конца работы Γ — сильно регулярный граф с параметрами $(117,36,15,9)$, $G=\mathrm{Aut}(\Gamma)$, g — элемент простого порядка p из G и $\Omega=\mathrm{Fix}(g)$. Заметим, что если a, b — две вершины из Ω и $p>13$, то $[a]\cap[b]\subset\Omega$.

Лемма 3. *Выполняются следующие утверждения:*

(1) *в Γ нет собственных сильно регулярных подграфов с параметрами $(v',k',15,9)$;*

(2) *если Ω — пустой граф, то $p=13$, $\alpha_1(g)=39$ и $\alpha_2(g)=78$ или $p=3$, $\alpha_1(g)=36l-9$ и $\alpha_2(g)=126-36l$;*

(3) *если Ω является n-кликой, то $n>1$ и либо $p=5$, $n=2,7,12$, $\alpha_1(g)=60l+75-15n$ и $\alpha_2(g)=42+14n-60l$, либо $p=2$, $n=5,7,9,11,13$, $\alpha_1(g)=24l+39-3n$ и $\alpha_2(g)=78+2n-24l$;*

(4) *если Ω не является кликой или пустым графом, то Ω содержит геодезический 2-путь и $p\leqslant 13$.*

$\lhd$ Пусть Δ — сильно регулярный граф с параметрами $(v',k',15,9)$. Так как $n^2=36+4(k'-9)$, то $n=2u, k'=u^2$ и Δ имеет собственные значения $u+3$, $-(u-3)$. Кратность $u+3$ равна $(u-4)u(u^2+u-3)/18$, поэтому $u\geqslant 6$.

Пусть Ω — пустой граф. Так как $117=13\cdot 9$, то $p\in\{3,13\}$. Положим $\alpha_i(g)=pw_i$. Пусть $p=13$. Тогда $\chi_1(g)=13(w_1/3-1)/4$, поэтому $\alpha_1(g)=39$ и $\alpha_2(g)=78$. Пусть

$p = 3$. Тогда $\chi_1(g) = (w_1 - 13)/4$ сравнимо с 2 по модулю 3, поэтому $\alpha_1(g) = 36l - 9$ и $\alpha_2(g) = 126 - 36l$.

Пусть Ω является n-кликой, a — вершина из Ω. Если $n = 1$, то p делит 36 и 80, поэтому $p = 2$, противоречие с тем, что для вершины $u \in \Gamma - a^{\perp}$, подграф $[u] \cap [u^g]$ пересекает Ω.

Если $n > 1$, то p делит 20, 50 и $17 - n$, поэтому либо $p = 5$ и $n = 2, 7, 12$, либо $p = 2$ и $n = 3, 5, \ldots, 13$. В любом случае $\chi_1(g) = (n + pw_1/3 - 13)/4$.

В случае $p = 5$ имеем $\alpha_1(g) = 60l + 75 - 15n$ и $\alpha_2(g) = 42 + 14n - 60l$. В случае $p = 2$ число $(n + 2w_1/3 - 13)/4$ четно, поэтому $\alpha_1(g) = 24l + 39 - 3n$ и $\alpha_2(g) = 78 + 2n - 24l$. Если $n = 3$, то некоторая вершина из $\Gamma - \Omega$ не смежна с вершинами из Ω, противоречие.

Пусть Ω является m-кликой, $m > 1$. Тогда p делит 9 и 26, противоречие.

Пусть Ω содержит ребро и является обьединением $t \geqslant 2$ изолированных клик. Тогда p делит 9 и 20, противоречие.

Пусть Ω содержит геодезический 2-путь. Если $p > 13$, то Ω — сильно регулярный граф с $\lambda = 15$ и $\mu = 9$, противоречие с утверждением (1). $\rhd$

Лемма 4. *Пусть Ω содержит геодезический путь b, a, c. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *если Ω содержит вершину a степени 36, то либо $p = 3$ и $\alpha_0(g) = 45$, либо $p = 2$, $37 \leqslant \alpha_0(g) \leqslant 63$ и число $\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13$ делится на 8;*

(2) *p не больше 7;*

(3) *если $p = 7$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами* $(26, 15, 8, 9)$ *и* $\alpha_1(g) = 24$.

$\lhd$ Пусть Ω содержит вершину a степени 36. Ввиду леммы 2 любая $\langle g\rangle$-орбита длины p не содержит 3-коклик. Так как любая вершина из $\Gamma - a^{\perp}$ смежна с 9 вершинами из $[a]$, то любая $\langle g\rangle$-орбита длины p не содержит геодезических 2-путей. Если $p > 2$, то любая $\langle g\rangle$-орбита длины p является кликой и $p \leqslant 7$. В этом случае

$$\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + (117 - \alpha_0(g))/3 - 13)/4,$$

поэтому $\alpha_0(g) = 6l + 3$ для $p > 3$ и $\alpha_0(g) = 18l + 9$ для $p = 3$. Отсюда $p = 3$ и $\alpha_0(g) = 45$.

Если $p = 2$, то число $\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$ четно. Утверждение (1) доказано.

Пусть $p = 13$. Тогда $\lambda_\Omega = 2, 15$, $\mu_\Omega = 9$, $|\Omega| = 13, 26, 39, 52$ и степени вершин в Ω равны $10, 23$. Если $|\Omega| = 13$, то Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(13, 10, 2, 9)$, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 26$. Если Ω содержит вершину a степени 23, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно 18, но не меньше $23 \cdot 7$, противоречие. Значит, Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(26, 10, 2, 9)$, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 39$. Если Ω содержит вершину a степени 10, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $28 \cdot 9$, но не больше $20 \cdot 10$, противоречие. Значит, Ω — регулярный граф степени 23, противоречие.

Пусть $|\Omega| = 52$. Если Ω содержит вершину a степени 10, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $41 \cdot 9$, но не больше $10 \cdot 21$, противоречие. Значит, Ω — регулярный граф степени 23, и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $28 \cdot 9 = 20y + 7(23 - y)$, поэтому $y = 13$. Но если b, c — две вершины степени 2 в графе $\Omega(a)$, то $[b] \cap [c]$ содержит 13 вершин из $[a] - \Omega$ и не менее 12 вершин из $\Omega_2(a)$, противоречие.

Пусть $p = 11$. Тогда $\lambda_\Omega = 4, 15$, $\mu_\Omega = 9$, $|\Omega| = 18, 29, 40, 51$ и степени вершин в Ω равны $14, 25$. Если Ω содержит вершину a степени 14, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ не меньше $14 \cdot 9$, равно $9(|\Omega| - 15)$, но не больше $14 \cdot 20$, поэтому $|\Omega| = 40$ и указанное число равно $9 \cdot 25 = 20y + 9(14 - y)$. $y = 9$. Но если b, c — две вершины из $\Omega(a)$, смежные с 20 вершинами из $\Omega_2(a)$, то $[b] \cap [c]$ содержит a и не менее 15 вершин из $\Omega_2(a)$, противоречие.

Значит, Ω — регулярный граф степени 25, $|\Omega| = 40$ и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $14 \cdot 9$, но не меньше $9 \cdot 25$, противоречие.

Пусть $p = 7$. Тогда $\lambda_\Omega = 1, 8, 15$, $\mu_\Omega = 2, 9$, $|\Omega| = 19, 26, 33, 40, 47, 54$ и степени вершин в Ω равны $8, 15, 22, 29$. Если $|\Omega| > 33$, то любая $\langle g \rangle$-орбита длины 7 не содержит 3-коклик. Далее, $\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$ и в случае $\alpha_0(g) = 40$ имеем $\alpha_1(g) = 63$. В этом случае на $\Gamma - \Omega$ имеется 5 кликовых $\langle g \rangle$-орбит и 6 орбит степени 4. Противоречие с тем, что для ребра и изолированной от него вершины из $\langle g \rangle$-орбиты степени 4, подграф, состоящий из вершин, смежных с 0 или 3 вершинами из этой тройки, содержит 40 вершин из Ω и 2 вершины из этой $\langle g \rangle$-орбиты, противоречие. В случае $\alpha_0(g) = 47$ имеем $\alpha_1(g) = 42$. В этом случае для геодезического 2-пути из $\langle g \rangle$-орбиты подграф, состоящий из вершин, смежных с 0 или 3 вершинами из этой тройки, содержит 47 вершин из Ω и 2 вершины из этой $\langle g \rangle$-орбиты, противоречие. В случае $\alpha_0(g) = 54$ имеем $\alpha_1(g) = 63$ и $\chi_1(g) = (41 + 21)/4$, противоречие.

Значит, $|\Omega| \leqslant 33$. Если Ω содержит вершину a степени 8, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ не меньше $8 \cdot 6$ и равно $2(|\Omega| - 9)$, поэтому $|\Omega| = 33$ и Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(33, 8, 1, 2)$. В этом случае Ω имеет собственные значения 2, -3 и кратность 2 равна $2 \cdot 8 \cdot 11/10$, противоречие.

Если Ω содержит вершину a степени 22, то число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ не меньше $22 \cdot 6$ и не больше $10 \cdot 9$, противоречие. Значит, Ω — регулярный граф степени 15, $|\Omega| = 26$ и число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $15 \cdot 6 = 10 \cdot 9$. Отсюда Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(26, 15, 8, 9)$ и $\chi_1(g) = (13 + \alpha_1(g)/3)/4$, поэтому $\alpha_1(g) = 24$. $\rhd$

Лемма 5. *Пусть Ω содержит геодезический путь b, a, c. Тогда выполняются следующие утверждения:*

(1) *число p не равно 5;*

(2) *если $p = 3$, то $|\Omega| \leqslant 33$ или $|\Omega| = 45$;*

(3) *если $p = 2$, то $|\Omega| \leqslant 63$.*

$\lhd$ Пусть $p = 5$. Тогда $\lambda_\Omega = 0, 5, 10, 15$, $\mu_\Omega = 4, 9$, $|\Omega| = 12, 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52$, степени вершин в Ω равны $6, 11, 16, 21, 26, 31$ и $\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$.

Пусть Y — множество вершин из $\Omega_2(a)$, смежных с 9 вершинами из $\Omega(a)$, $y = |Y|$. Тогда число ребер между $\Omega(a)$ и $\Omega_2(a)$ равно $6|\Omega(a)| + 5x$. С другой стороны, указанное число ребер равно $9y + 4(|\Omega_2(a)| - y)$ и делится на 5, противоречие.

Пусть $p = 3$. Тогда $\lambda_\Omega = 0, 3, \ldots, 15$, $\mu_\Omega = 0, 3, 6, 9$, $|\Omega| = 6, 9, \ldots, 54$ и степени вершин в Ω равны $0, 3, 6, \ldots, 36$ и $\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$, поэтому $(\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$ сравнимо с 2 по модулю 3.

Если $|\Omega| > 33$, то ввиду леммы 2 любая $\langle g \rangle$-орбита длины 3 является кликой, $\alpha_1(g) = 117 - \alpha_0(g)$ и $(2\alpha_0(g)/3 + 26)/4$ сравнимо с 2 по модулю 3. Поэтому $\alpha_0(g) = 45$ и $\alpha_1(g) = 72$.

Пусть $p = 2$. Тогда $\lambda_\Omega = 1, 3, \ldots, 15$, $\mu_\Omega = 1, 3, \ldots, 9$, $|\Omega| = 5, 7, \ldots, 65$ и степени вершин в Ω равны $0, 2, 4, \ldots, 36$ и $\chi_1(g) = (\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$, поэтому $(\alpha_0(g) + \alpha_1(g)/3 - 13)/4$ четно.

Если $|\Omega| > 63$, то любая $\langle g \rangle$-орбита длины 2 является кликой, $\alpha_1(g) = 117 - \alpha_0(g) = 52$ и $\chi_1(g) = (65 + 52/3 - 13)/4$, противоречие. $\rhd$

Лемма 6. *Пусть Γ является сильно регулярным графом с параметрами $(117, 36, 15, 9)$ и группа $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ действует транзитивно на множестве вершин графа Γ. Пусть f — элемент порядка 13 из G, g — элемент простого порядка $p < 13$ из $C_G(f)$. Тогда $|C_G(f)|$*

делит 26 и если инволюция $g \in G$ централизует f, то $\mathrm{Fix}(g)$ *является 13-кокликой и* $\alpha_1(g) = 0$.

$\lhd$ $|G|$ делится на $9 \cdot 13$. По теореме 1 $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13\}$.

Пусть G содержит подгруппу $\langle h \rangle$ порядка $13p$, p — простое число, меньшее 11, $g = h^{13}$, $f = h^p$. Ввиду теоремы 1 $\mathrm{Fix}\,(f)$ — пустой граф, $p = 2$ и либо $|\Omega| = 13$ и $\alpha_1(g) = 24l$ делится на 13, либо $|\Omega| = 39$. В последнем случае $\chi_1(g) = (\alpha_1(g)/3 + 26)/4$, число $(\alpha_1(g)/3 + 26)/4$ четно и $\alpha_1(g) = 3(8l - 26)$ делится на 13, противоречие. Из действия g на $U_i = \{u \in \Gamma : d(u, u^{f^i}) = 1\}$ следует, что $\Omega = \mathrm{Fix}\,(g)$ пересекает U_i для любого i, не кратного 13, поэтому Ω является 13-кокликой.

Пусть V — подгруппа порядка 4 из $C_G(f)$. Так как $\chi_1(g) - 26$ не делится на 4, то V — элементарная абелева группа. Из действия V на $U = \{u \in \Gamma : d(u, u^f) = 1\}$ следует, что $\Omega = \mathrm{Fix}\,(g)$ содержится в U для любой инволюции $g \in V$, противоречие с действием V на $W = \{w \in \Gamma : d(w, w^f) = 2\}$. $\rhd$

3. Основной результат

Теорема 1. *Пусть Γ — сильно регулярный граф с параметрами* $(117, 36, 15, 9)$, $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$, *g — элемент из G простого порядка p и* $\Omega = \mathrm{Fix}(g)$. *Тогда* $\pi(G) \subseteq \{2, 3, 5, 7, 13\}$ *и выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) Ω *— пустой граф, $p = 13$, $\alpha_1(g) = 39$ и $\alpha_2(g) = 78$ или $p = 3$, $\alpha_1(g) = 36l - 9$ и* $\alpha_2(g) = 126 - 36l$;

(2) Ω *является n-кликой, и либо $p = 5$, $n = 2, 7, 12$, $\alpha_1(g) = 60l + 75 - 15n$ и $\alpha_2(g) = 42 + 14n - 60l$, либо $p = 2$, $n = 5, 7, 9, 11, 13$, $\alpha_1(g) = 24l + 39 - 3n$ и $\alpha_2(g) = 78 + 2n - 24l$;*

(3) Ω *содержит геодезический 2-путь и либо*

(i) $p = 7$, Ω — сильно регулярный граф с параметрами $(26, 15, 8, 9)$ и $\alpha_1(g) = 24$, либо

(ii) $p = 3$, $|\Omega| \leqslant 33$ или $|\Omega| = 45$, либо

(iii) $p = 2$ и $|\Omega| \leqslant 63$.

$\lhd$ Доказательство теоремы опирается на метод Хигмена работы с автоморфизмами дистанционно регулярного графа, представленный в третьей главе монографии Камерона [4]. При этом граф Γ рассматривается как симметричная схема отношений $(X, \mathscr{R})$ с d классами, где X — множество вершин графа, R_0 — отношение равенства на X и для $i \leqslant 1$ класс R_i состоит из пар (u, w) таких, что $d(u, w) = i$. Для $u \in \Gamma$ положим $k_i = |\Gamma_i(u)|$, $v = |\Gamma|$. Классу R_i отвечает граф Γ_i на множестве вершин X, в котором вершины u, w смежны, если $(u, w) \in R_i$. Пусть A_i — матрица смежности графа Γ_i для $i > 0$ и $A_0 = I$ — единичная матрица. Тогда $A_i A_j = \sum p_{ij}^l A_l$ для чисел пересечений p_{ij}^l.

Пусть P_i — матрица, в которой на месте (j, l) стоит p_{ij}^l. Тогда собственные значения $p_1(0), \ldots, p_1(d)$ матрицы P_1 являются собственными значениями графа Γ кратностей $m_0 = 1, \ldots, m_d$. Матрицы P и Q, у которых на месте (i, j) стоят стоят $p_j(i)$ и $q_j(i) = m_j p_i(j)/k_i$ соответственно, называются первой и второй матрицей собственных значений схемы и связаны равенством $PQ = QP = vI$.

Пусть u_j и w_j — левый и правый собственные векторы матрицы P_1, отвечающие собственному значению $p_1(j)$ и имеющие первую координату 1. Тогда w_j являются столбцами матрицы P и $m_j u_j$ являются строками матрицы Q.

Подстановочное представление группы $G = \mathrm{Aut}(\Gamma)$ на вершинах графа Γ обычным образом дает матричное представление ψ группы G в $GL(v, \mathbf{C})$. Пространство $\mathbf{C}^v$ является ортогональной прямой суммой собственных G-инвариантных подпространств

$W_0, \dots, W_d$ матрицы смежности $A = A_1$ графа Γ. Для любого $g \in G$ матрица $\psi(g)$ перестановочна с A, поэтому подпространство W_i является $\psi(G)$-инвариантным. Пусть χ_i — характер представления ψ_{W_i}. Тогда (см. [4, § 3.7]) для $g \in G$ получим

$$\chi_i(g) = v^{-1} \sum_{j=0}^{d} Q_{ij} \alpha_j(g),$$

где $\alpha_j(g)$ — число точек x из X таких, что $d(x, x^g) = j$.

Утверждения 1)–2) следуют из леммы 3. Доказательство утверждения 3) следует из лемм 3–5. ▷

Следствие 1. *Если группа G автоморфизмов сильно регулярного графа с параметрами $(117, 36, 15, 9)$ действует транзитивно на множестве вершин, то цоколь T группы G изоморфен либо $L_3(3)$ и $T_a \cong GL_2(3)$ — подгруппа индекса 117, либо $T \cong L_4(3)$ и $T_a \cong U_4(2).Z_2$ — подгруппа индекса 117.*

◁ Ввиду леммы 6 имеем $S(G) = O_3(G)$. Пусть $\overline{G} = G/O_3(G)$, $\overline{T}$ — цоколь группы $\overline{G}$. Из действия подгруппы порядка 13 на минимальной нормальной подгруппе $\overline{N}$ из $\overline{G}$ следует, что $|\overline{N}|$ делится на 13. Отсюда $\overline{T}$ — простая неабелева группа и ввиду [6, таблица 1] группа $\overline{T}$ изоморфна $L_3(3)$, $L_2(25)$, $U_3(4)$, $PSp_4(5)$, $L_4(3)$, ${}^2F_4(2)'$, $L_2(13)$, $L_2(27)$, $G_2(3)$, ${}^3D_4(2)$, $Sz(8)$, $L_2(64)$, $U_4(5)$, $L_3(9)$, $PSp_6(3)$, $P\Omega_7(3)$, $G_2(4)$, $PSp_4(8)$, $P\Omega_8^+(3)$.

Так как $\overline{T}$ содержит максимальную подгруппу индекса, делящего $13 \cdot 9$, то либо $\overline{T} \cong L_3(3)$ и $\overline{T}_a \cong GL_2(3)$ — подгруппа индекса 117, либо $\overline{T} \cong L_4(3)$ и $\overline{T}_a \cong U_4(2).Z_2$ — подгруппа индекса 117.

В любом случае $O_3(G) = 1$. ▷

Литература

1. *Гутнова А. К., Махнев А. А.* Вполне регулярные графы, в которых окрестности вершин псевдогеометрические графы для $pG_{s-3}(s, t)$ // Докл. АН.—2014.—Т. 454, № 2.—С. 145–148. DOI: 10.7868/S0869565214020042.
2. *Гутнова А. К., Махнев А. А.* Локально псевдо $GQ(4, t)$-графы // Докл. АН.—2015.—Т. 462, № 6.—С. 637–641. DOI: 10.7868/S086956521518005X.
3. *Гутнова А. К., Махнев А. А.* Графы диаметра, не большего 3, в которых окрестности вершин псевдогеометрические графы для $pG_{s-3}(s, t)$// Докл. АН.—2015.—Т. 461, № 6.—С. 629–632. DOI: 10.7868/S0869565215120038.
4. *Cameron P. J.* Permutation Groups.—Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.—(London Math. Soc. Student Texts № 45).
5. *Гаврилюк А. Л., Махнев А. А.* Об автоморфизмах дистанционно регулярного графа с массивом пересечений $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$ // Докл. АН.–2010.—Т. 432, № 5.—С. 512–515.
6. *Zavarnitsine A. V.* Finite simple groups with narrow prime spectrum // Sibirean Electr. Math. Reports.—2009.—Vol. 6.—P. 1–12.

Статья поступила 29 мая 2018 г.

Гутнова Алина Казбековна
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры алгебры и геометрии
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44–46
E-mail: gutnovaalina@gmail.com

Махнев Александр Алексеевич
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского,
зав. отделом алгебры и топологии
РОССИЯ, 620990, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16
E-mail: makhnev@imm.uran.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 4, P. 43–49

ON AUTOMORPHISMS OF A STRONGLY REGULAR GRAPH WITH PARAMETERS $(117, 36, 15, 9)$

Gutnova, A. K.[1] and Makhnev, A. A.[2]

[1] North Ossetian State University,
44–46 Vatutin Street, Vladikavkaz 362025, Russia;
[2] N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja st., Ekaterinburg 620990, Russia
E-mail: `gutnovaalina@gmail.com`, `makhnev@imm.uran.ru`

Abstract. In the previous work of the authors some arrays of intersections of distance-regular graphs were found, in which the neighborhoods of the vertices are pseudogeometric graphs for $pG_{s-3}(s, t)$. In particular, a locally pseudo $pG_2(5, 2)$-graph is a strongly regular graph with parameters $(117, 36, 15, 9)$. The main result of this paper gives a description of possible orders and the structure of the subgraphs of fixed points of automorphisms of a strongly regular graph with parameters $(117, 36, 15, 9)$. This graph has a spectrum of $36^1, 9^26, -3^90$. The order of clicks in Γ does not exceed $1 + 36/3 = 13$, the order of the cocliques in Γ does not exceed $117 \cdot 3/39 = 9$. Further, from this result, the following corollary is derived: if the group Γ of automorphisms of a strongly regular graph with parameters $(117, 36, 15, 9)$ acts transitively on the set of vertices, then the socle T of the group Γ is isomorphic to either $L_3(3)$ and $T_a \cong GL_2(3)$ is a subgroup of index 117, or $T_a \cong GL_2(3)$ and $T_a \cong U_4(2).Z_2$ is a subgroup of index 117.

Key words: strongly regular graph, symmetric graph, automorphism groups of a graph.

Mathematical Subject Classification (2010): 20D45.

For citation: *Gutnova, A. K. and Makhnev, A. A.* On Automorphisms of a Strongly Regular Graph with Parameters $(117, 36, 15, 9)$, *Vladikavkaz Math. J.*, 2018, vol. 20, no. 4, pp. 43–49 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23386.

References

1. *Gutnova, A. K. and Makhnev, A. A.* Completely Regular Graphs in Which Neighborhoods of Vertices are Pseudogeometric Graphs for $pG_{s-3}(s, t)$, *Doklady Mathematics*, 2014, vol. 454, no. 2, pp. 145–148 (in Russian). DOI: 10.7868/S0869565214020042.
2. *Gutnova, A. K. and Makhnev, A. A.* Locally Pseudo $GQ(4, t)$-Graphs, *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 462, no. 6, pp. 637–641 (in Russian). DOI: 10.7868/S086956521518005X.
3. *Gutnova, A. K. and Makhnev, A. A.* Graphs of Diameter not Greater than 3, in Which Neighborhoods of Vertices are Pseudogeometric Graphs for $pG_{s-3}(s, t)$, *Doklady Mathematics*, 2015, vol. 461, no. 6, pp. 629–632 (in Russian). DOI: 10.7868/S0869565215120038.
4. *Cameron, P. J. Permutation Groups. London Math. Soc. Student Texts, no.* 45, Cambridge, Cambridge Univ. Press, 1999.
5. *Gavrilyuk, A. L. and Makhnev, A. A.* On Automorphisms of Amply Regular Graphs with the Intersection Array $\{56, 45, 1; 1, 9, 56\}$, *Doklady Mathematics*, vol. 432, no. 5, pp. 512–515. (in Russian).
6. *Zavarnitsine, A. V.* Finite Simple Groups with Narrow Prime Spectrum, *Sibirean Electr. Math. Reports*, 2009, vol. 6, pp. 1–12.

Received May 29, 2018

Alina K. Gutnova
North Ossetian State University,
44–46 Vatutin Street, Vladikavkaz 362025, Russia,
Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry
E-mail: `gutnovaalina@gmail.com`

Alexander A. Makhnev
N. N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics,
16 S. Kovalevskaja st., Ekaterinburg 620990, Russia,
Head of Departament of Algebra and Topology
E-mail: `makhnev@imm.uran.ru`
https://orcid.org/0000-0003-2868-6713

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 4, С. 50–58

УДК 517.956
DOI 10.23671/VNC.2018.4.23387

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ — САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ С РАЗРЫВНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. Г. Езаова[1]

[1] Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова, Россия, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173

E-mail: alena_ezaova@mail.ru

Аннотация. В работе исследована однозначная разрешимость задачи типа задачи Бицадзе — Самарского для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами в односвязной области. Краевое условие поставленной задачи содержит оператор дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса, от значений решения на характеристиках поточечно связанных со значениями решения и производной от него на линии вырождения. При определенных ограничениях типа неравенства на заданные функции и порядки дробных производных в краевом условии, методом интегралов энергии, доказана единственность решения поставленной задачи. Получены функциональные соотношения между следом искомого решения и производной от него, принесенные на линию вырождения из гиперболической и параболической частей смешанной области. При выполнении условий теорем единственности, доказано существование решения задачи путем эквивалентной редукции к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода относительно производной от следа искомого решения, безусловная разрешимость которого заключается из единственности решения задачи. Так же определены промежутки изменения порядков операторов дробного интегро-дифференцирования, при которых решение задачи существует и единственно. Установлен эффект влияния коэффициента при младшей производной в уравнении на разрешимость поставленной задачи.

Ключевые слова: оператор дробного интегро-дифференцирования, метод интегралов энергии, уравнение с разрывными коэффициентами, краевая задача, интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

Mathematical Subject Classification (2000): 35M10.

Образец цитирования: *Езаова А. Г.* Однозначная разрешимость одной задачи типа задачи Бицадзе — Самарского для уравнения с разрывными коэффициентами // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 4.—С. 50–58. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23387.

1. Введение

Теория краевых задач для вырождающихся уравнений гиперболического и смешанного типов в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений с частными производными. Это обусловлено как непосредственными связями уравнений смешанного типа с проблемами теории сингулярных интегральных уравнений, теории интегральных преобразований и специальных функций, так и прикладными задачами механики и математической физики, сводящимися к таким уравнениям. Основы этой теории были заложены в трудах Ф. Трикоми [1] и С. Геллерстедта [2].

Следующим этапом в развитии теории уравнений смешанного типа стали работы Ф. И. Франкля [3, 4], где он заметил важные приложения задачи Трикоми и других родственных ей задач в трансзвуковой газодинамике. Академик И. Н. Векуа указал на важность уравнений смешанного типа при решении задач, возникающих в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей, а так же в безмоментной теории оболочек с кривизной переменного знака.

Трехмерный аналог задачи Трикоми был впервые предложен А. В. Бицадзе [5] в случае, когда поверхность изменения типа уравнений является поверхностью временного типа. В задаче Трикоми часть характеристического многообразия Г свободна от граничных условий. Следовательно, точки Г не являются равноправными как носители граничных данных. Этот факт не дает возможность найти непосредственный аналог задачи Трикоми для уравнений смешанного типа в многомерных областях, особенно в случае, когда поверхность изменения типа пространственно ориентирована.

В связи с этим в шестидесятых годах А. В. Бицадзе была выдвинута проблема поиска правильной постановки краевых задач для гиперболического и смешанного типов уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, когда все точки характеристической части границы равноправны как носители краевых данных.

В 1969 г. А. М. Нахушев [6, 7] предложил ряд нелокальных задач нового типа, которые явились непосредственным обобщением задачи Трикоми и вошли в математическую литературу под названием краевых задач со смещением. Они являются обобщением задачи Трикоми, а также содержат широкий класс корректных самосопряженных задач. Эти задачи сразу вызвали большой интерес многих авторов.

В последние годы исследования задач со смещением для уравнений смешанного и гиперболического типа ведутся особенно интенсивно. Но в этих работах краевые условия, как правило, содержат классические операторы Римана — Лиувилля. Нелокальным краевым задачам, содержащим операторы более сложной структуры, посвящено сравнительно мало работ. Начало исследований краевых задач со смещением для гиперболического уравнения Эйлера — Дарбу — Пуассона, где имеются обобщенные операторы дробного интегро-дифференцирования, было положено работами японского математика М. Сайго [8].

Результаты О. А. Репина [9] являются продолжением исследований в этом направлении и посвящены локальным и нелокальным краевым задачам для уравнений гиперболического и смешанного типов с вырождением первого и второго рода. Поставленные и исследуемые задачи отличаются от изучавшихся другими авторами прежде всего тем, что краевые условия содержат обобщенные операторы дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса.

В работах для вырождающихся гиперболических и эллиптико-гиперболического типов уравнений многими авторами исследовались задачи со смещением (по терминологии А. М. Нахушева) и задачи типа задачи Бицадзе — Самарского, когда на гиперболической части границы области задано локальное условие, поточечно связывающее значения искомого решения или производной, вообще говоря, дробной определенного порядка, зависящего от порядка вырождения уравнения. Этими авторами не были рассмотрены задачи со смещением, когда в краевых условиях участвуют дробные производные или интегралы произвольных порядков, не зависящих от порядка вырождения уравнения [9, 10].

Естественным обобщением теории нелокальных краевых задач явились нелокальные задачи для вырождающихся гиперболических и смешанного типов уравнений с операторами более сложной структуры — обобщенными операторами дробного интегро-дифференцирования с гипергеометрической функцией Гаусса. Этому направлению посвящено немало работ, среди которых работы таких авторов как М. С. Салахитдинова, О. А. Репина, С. К. Кумыковой, А. В. Псху и др. В опубликованных работах, краевые условия содержат классические операторы или операторы дробного в смысле Римана — Лиувилля интегро-дифференцирования [10–15].

В данной работе рассматривается смешанное гиперболо-параболическое уравнение с разрывными коэффициентами, краевое условие которого содержит оператор дробного интегро-дифференцирования. Путем редукции задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода определены промежутки изменения порядков операторов дробного интегро-дифференцирования, при которых решение существует и единственно. Также установлен эффект влияния коэффициента при младшей производной в уравнении на разрешимость задачи.

2. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$0=\begin{cases} cu_{xxx}+p_2(x,y)u_{xx}+p_1(x,y)u_x+p_0(x,y)u-u_y, & y>0,\\ (-y)^m u_{xx}-u_{yy}+p(-y)^{\frac{m}{2}-1}u_x, & y<0,\ m\geqslant 2, \end{cases} \tag{1}$$

где $p=\mathrm{const}\neq 0$ — вещественная постоянная в односвязной области Ω, ограниченной отрезками AA_0, A_0B_0, B_0B прямых $x=0$, $y=1$, $x=1$ соответственно при $y>0$, и характеристиками

$$AC: x-\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=0,\quad BC: x+\frac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}=1$$

уравнения (1) при $y<0$.

Пусть $\Omega_1=\Omega\cap(y>0)$, $\Omega_2=\Omega\cap(y<0)$, $I\equiv AB$ — интервал $0<x<1$ прямой $y=0$; $\Theta_0(x)=\frac{x}{2}-i\left[\frac{m+2}{4}x\right]^{\frac{2}{m+2}}$ — точка пересечения характеристики уравнения (1) при $y<0$, выходящей из точки $(x,0)\in I$ с характеристикой AC.

Задача 1. Найти функцию $u\,(x,y)$ такую, что

$$u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\Omega)\cap C^{3,1}_{x,y}(\Omega_2)\cap C^{2,2}_{x,y}(\Omega_2),$$

являющуюся решением уравнения (1) в области Ω при $y\neq 0$ и удовлетворяющей условиям

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\quad u(1,y)=\varphi_2(y),\quad u_x(0,y)=\varphi_3(y),\quad 0\leqslant y\leqslant 1, \tag{2}$$

$$p(x)D^a_{0x}\delta(x)u\left[\Theta_0(x)\right]+c(x)u(x,0)-\gamma(x)u_y(x,0)=f(x)\quad (\forall\, x\in I), \tag{3}$$

где $c(x)$, $p(x)$, $\gamma(x)$, $f(x)$, $\varphi_i(y)$ $(i=1,2,3)$ — заданные известные функции, причем $c(x)$, $p(x)$, $\gamma(x)$, $f(x)\in C'(\overline{I})\cap c^3(I)$; $p_i(x,y)\in C^i(\overline{\Omega})$; выполняется неравенство $c^2(x)+p^2(x)+\gamma^2(x)\neq 0$; $\varphi_i(y)\in C[0,1]\cap C^2]0,1[$; D^a_{0x} — оператор дробного интегро-дифференцирования [4].

Подобного типа задачи изучались ранее в работах Репина О. А. [9], Кумыковой С. К. [10].

3. Основные результаты

Обозначим

$$\alpha=\frac{m-2p}{2(m+2)},\quad \beta=\frac{m+2p}{2(m+2)},\quad \varepsilon=\alpha+\beta=\frac{m}{m+2},\quad \gamma=\frac{2}{m+2}.$$

Теорема 1. *Пусть $|p|<\frac{m}{2}$. Тогда решение задачи (1)–(3) в Ω единственно, если выполняются следующие условия:*

$$p_2(x,0)\geqslant 0,\quad p''_{2x}(x,0)-p'_{1x}(x,0)+2p_0(x,0)\leqslant 0,\quad p_i(x,y)\in C^i(\Omega_1), \tag{4}$$

и в случае

$$a=\alpha,\quad \delta(x)=x^{-\gamma} \tag{5}$$

выполняются условия

$$A_1(x)=\frac{\Gamma\,(\varepsilon)p(x)}{\Gamma(\beta)}+c(x)x^{1-\beta}\neq 0\quad (\forall\, x\in \overline{I}), \tag{6}$$

$$p(1)=0,\quad \frac{\sin(\pi\varepsilon)}{2}\left(\frac{p(x)}{A_1(x)}\right)'\leqslant 0;\quad \frac{x^{1-\beta}\gamma(x)}{A_1(x)}\geqslant 0, \tag{7}$$

а в случае

$$a=1-\beta,\quad \delta(x)=1 \tag{8}$$

выполняются условия

$$A_2(x)=p(x)+l_1x^{\alpha}\gamma(x)\neq 0\quad (\forall\, x\in \overline{I}) \tag{9}$$

$$p(1)=0,\quad \sin\frac{\pi\varepsilon}{2}\left(\frac{p(x)}{A_2(x)}\right)'\leqslant 0,\quad \frac{x^{\alpha}c(x)}{A_2(x)}\geqslant 0\quad (\forall\, x\in \overline{I}), \tag{10}$$

где

$$l_1=\frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(2-\varepsilon)}\left(\frac{4}{m+2}\right)^{\gamma}.$$

$\lhd$ Устремляя $y\to +0$ в уравнении (1), получим основное функциональное соотношение между функциями $\tau(x)=u(x,0)$ и $v(x)=u_y(x,0)$, принесенное на $\overline{I}$ из Ω_1 в виде [16]

$$v(x)=\tau'''(x)+p_2(x,0)\tau''(x)+p_1(x,0)\tau'(x)+p_0(x,0)\tau(x), \tag{11}$$

при этом граничные условия (2) принимают вид

$$\tau(0)=\varphi_1(0),\quad \tau(1)=\varphi_2(0),\quad \tau'(0)=\varphi_3(0).$$

Умножим выражение (11) на $v(x)$ и, интегрируя от 0 до 1, после некоторых преобразований получим

$$J^*=\int\limits_0^1\tau(x)v(x)\,dx=-\frac{1}{2}(\tau'(1))^2-\int\limits_0^1 p_2(x,0)\tau'^2(x)\,dx$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\big(p''_{2x}(x,0)-p'_{1x}(x,0)+2p_0(x,0)\tau^2(x)\,dx\big)=0. \tag{12}$$

При выполнении условий (4) теоремы 1 получаем, что

$$J^* = \int\limits_0^1 \tau(x)v(x)\,dx \leqslant 0.$$

Решение задачи Коши для уравнения (1) в области Ω_2 имеет вид [17]

$$u(x,y) = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int\limits_0^1 \tau\left[x + \gamma(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right] t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}\,dt$$
$$+ \frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} \cdot (-y) \int\limits_0^1 v\left[x + \gamma(-y)^{\frac{m+2}{2}}(2t-1)\right] t^{-\alpha}(1-t)^{-\beta}\,dt.$$

Удовлетворяя последнее условию (3), получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $v(x)$, принесенное на линию AB из Ω_2 вида [17, 18]

$$-p(x)\frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\gamma} D_{0x}^{a}\delta(x)D_{x1}^{b-1}x^{-\alpha}\nu(x)$$
$$+ p(x)\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\beta)} D_{0x}^{a}\delta(x)x^{\gamma}D_{0x}^{-\alpha}x^{\beta-1}\tau(x) - \gamma(x)v(x) + c(x)\tau(x) = f(x).$$

При выполнении условия (5) теоремы 1 последнее соотношение принимает вид

$$\left[\frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\beta)}p(x)x^{\beta-1} + c(x)\right]\tau(x)$$
$$= \frac{\Gamma(2-\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{\gamma} p(x)D_{0x}^{\alpha}x^{-\gamma}D_{0x}^{\beta-1}x^{-\alpha}v(x) + \gamma(x)v(x) + f(x). \tag{13}$$

Так как

$$J_1 = D_{0x}^{\alpha}x^{-\gamma}x^{-\alpha}v(x) = \gamma\frac{\Gamma(2-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)}{\left[\Gamma(1-\alpha)(1-\beta)\right]^2}x^{-\alpha-\gamma}D_{0x}^{\varepsilon-1}v(x),$$

то после некоторых преобразований (13) принимает вид [2]

$$\tau(x) = B(x)D_{0x}^{\varepsilon-1}v(x) + \gamma_1(x)v(x) + f_1(x), \tag{14}$$

где

$$B(x) = \frac{K \cdot p(x)}{A_1(x)}, \quad K = \frac{1}{2}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{-\frac{m}{m+2}} \frac{\Gamma^2(2-\varepsilon)\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma^3(1-\alpha)\Gamma^2(1-\beta)},$$
$$A_1(x) = \frac{\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\beta)}p(x) + c(x)x^{1-\beta} \neq 0, \quad f_1(x) = \frac{x^{1-\beta}f(x)}{A_1(x)}, \quad \gamma_5(x) = \frac{x^{1-\beta}\gamma(x)}{A_1(x)}.$$

Выражение (14) есть основное функциональное соотношение между функциями $\tau(x)$ и $\gamma(x)$, принесенное на AB из Ω_2.

Пусть выполнены условия (6), (7) теоремы 1. Умножая (14) на $v(x)$, в случае (5) при $f_1(x)=0$, и рассматривая интеграл

$$J^*=\int\limits_0^1 \tau(x)v(x)\,dx,$$

получим, что $J^*\geqslant 0$ для любого $x\in\overline{I}$. Следовательно, $J^*\equiv 0\Rightarrow v(x)=0$ и из (14) при $f_1(x)=0$ получаем $\tau(x)=0$. Таким образом, $u(x,y)\equiv 0$ в Ω_2, как решение задачи Коши уравнения (1) с нулевыми данными, а в Ω_1 — $u(x,y)\equiv 0$, как решение однородной задачи (1), (2).

Для доказательства существования решения задачи в случае (5) проинтегрируем трижды соотношение (11) от 0 до x. С учетом краевых условий (2) получаем

$$\tau(x)-\frac{x^2}{2}\int\limits_0^1 k(1,t)\tau(t)\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^x k(x,t)\tau(t)\,dt$$
$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^x (x-t)^2 v(t)\,dt-\frac{x^2}{2}\int\limits_0^1 (1-t)^2 v(t)\,dt+g(x), \qquad (15)$$

где

$$k(x,t)=2p_2(t,0)+2(x-t)\left[p_1(t,0)-2p_2'(t,0)\right]+(x-t)^2\left[p_0(t,0)-p_1'(t,0)+p"_2(t,0)\right];$$
$$g(x)=\varphi_3(0)(x-x^2)+\varphi_2(0)x^2+\varphi_3(0)(1-x^2+p_2(0,0)(x-x^2)).$$

Подставляя (14) в (15) и проделав некоторые преобразования, получим

$$v(x)+\int\limits_0^1 N(x,t)v(t)\,dt=M(x), \qquad (16)$$

где

$$N(x,t)=\begin{cases}N_1(x,t), & 0\leqslant t<x;\\ N_2(x,t), & x<t\leqslant 1,\end{cases}$$

$$N_1(x,t)=\frac{x^2}{2}K_1(1,t)\gamma_1(t)+\frac{1}{2}K(x,t)\gamma_1(t)+\frac{B(x)}{\Gamma(1-\varepsilon)(x-t)^2}$$
$$+\frac{1-x^2}{2\Gamma(1-\varepsilon)}\int\limits_0^t \frac{K(1,z)B(z)}{(z-t)^\varepsilon}\,dz-\frac{1}{2}(x-t)^2+\frac{x^2}{2}(1-t)^2,$$

$$N_2(x,t)=-\frac{x^2}{2}K(1,t)\gamma_1(r)-\frac{x^2}{2\Gamma(1-\varepsilon)}\int\limits_0^t \frac{K(1,z)B(z)}{(z-t)^\varepsilon}\,dz+\frac{x^2}{2}(1-t)^2,$$

$$M(x)=g(x)-f_1(x)+\frac{x^2}{2}\int\limits_0^1 K(1,t)f_1(t)\,dt-\frac{1}{2}\int\limits_0^x K(x,t)f_1(t)\,dt.$$

Уравнение (16) есть уравнение Фредгольма 2-го рода относительно функции $v(x)$, безусловная разрешимость которого следует из единственности решения поставленной задачи. Единственное решение уравнения (16) находится по формуле

$$v(x) = F(x) + \int\limits_0^1 R(x,t)F(t)\,dt,$$

где $R(x,t)$ — резольвента ядра $N(x,t)$.

При выполнении условий (9)–(11) доказательство единственности и существования решения задачи проводится аналогичным образом. $\rhd$

Пусть теперь $p = \pm\frac{m}{2}$.

Теорема 2. *В области Ω существует единственное решение задачи* (1)–(3), *если выполняются условия* (4) *теоремы* 1, *и при $p = \frac{m}{2}$ выполняются условия*

$$a = 1-\varepsilon, \quad \delta(x) \equiv 1, \quad p(1) = 0, \quad \sin\frac{\pi\varepsilon}{2}\left(\frac{p(x)}{f(x)}\right)' \geqslant 0, \quad \frac{c(x)}{A_7(x)} \leqslant 0,$$
$$A_3(x) = \Gamma(1-\varepsilon)p(x) - n\gamma(x) \neq 0, \quad n = \frac{m+2}{2}\left(\frac{m+2}{4}\right)^{-\gamma},$$

а при $p = -\frac{m}{2}$ выполняются условия

$$a = 1, \quad \delta(x) \equiv 1, \quad \frac{c(x)}{A_4(x)} \leqslant 0, \quad A_4(x) = p(x) - nx^{\varepsilon}\gamma(x) \neq 0.$$

$\lhd$ Доказательство аналогично доказательству теоремы 1. $\rhd$

Литература

1. *Трикоми Ф.* О линейных уравнениях смешанного типа.—М.: Гостехиздат, 1947.
2. *Gellerstedt S.* Sur un Probleme aux Limits Pour One Equation Linear aux Derives Partielles du Second Order de Type Mixed.—Thesis: Uppsala, 1935.
3. *Франкль Ф. И.* О задачах Чаплыгина для смешанных до и сверхзвуковых течений // Изв. АН СССР. Сер. Мат.—1945.—Т. 9, № 2.—С. 121–142.
4. *Франкль Ф. И.* Обобщение задачи Трикоми и его применение к решению прямой задачи теории сопла Лаваля // Мат. сб.—1961.—Т. 54, № 2.—С. 225–236.
5. *Бицадзе А. В.* Некоторые классы уравнений в частных производных.—М.: Наука, 1981.—448 с.
6. *Нахушев А. М.* О некоторых краевых задачах для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения.—1969.—Т. 5, № 1.—С. 44–59.
7. *Нахушев А. М.* Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения // Докл. АН СССР.—1969.—Т. 187, № 4.—С. 736–739.
8. *Saigo M.* A Certain boundary value problem for the Euler–Dorboux equation. III // Mathematical Japonica.—1981.—Vol. 26, № 1.—P. 103–119.
9. *Репин О. А.* О нелокальной краевой задаче с оператором М. Сайго для обобщенного уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу // Интегральные преобразования и краевые задачи. Сб. науч. тр. ин-та матем. Украины.—Черновцы, 1996.—Вып. 13.—С. 175–181.
10. *Репин О. А., Кумыкова С. К.* О задаче с обобщенными операторами дробного дифференцирования для вырождающегося внутри области гиперболического уравнения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2012.—Вып. 9 (100).—С. 52–60.
11. *Нахушев А. М.* Задачи со смещением для уравнений в частных производных.—М.: Наука, 2006.—287 с.
12. *Езаова А. Г.* Об одной нелокальной задаче для уравнения смешенного типа третьего порядка // Изв. Кабардино-Балкарского гос. ун-та.—2011.—Т. 1, № 4.—С. 26–31.

13. *Репин О. А., Кумыкова С. К.* Внутреннекраевая задача с операторами Римана — Лиувилля для уравнения смешанного типа третьего порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки.—2016.—Т. 20, № 1.—С. 43–53.
14. *Езаова А. Г., Думаева Л. В.* Об одной внутреннекраевой задаче для уравнения третьего порядка с группой младших членов // Фундаментальные исслед.—2015.—№ 2 (27).—С. 6032–6036.
15. *Бицадзе А. В.* Об уравнениях смешанного типа в трехмерных областях // Докл. АН СССР.—1962.—Т. 143, № 5.—С. 1017–1019.
16. *Смирнов М. М.* Уравнения смешанного типа.—М.: Высшая школа, 1985.—304 с.
17. *Смирнов М. М.* Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения.—М.: Наука, 1966.—292 с.
18. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.—Минск: Наука и техника, 1987.—688 с.

Статья поступила 14 сентября 2018 г.

Езаова Алена Георгиевна
Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х. М. Бербекова,
доцент кафедры алгебры и дифференциальных уравнений
РОССИЯ, 360004, Нальчик, ул. Чернышевского, 173
E-mail: alena_ezaova@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 4, P. 50–58

UNIQUE SOLVABILITY OF A BITSADZE–SAMARSKIY TYPE PROBLEM FOR EQUATIONS WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENT

Ezaova, A. G.[1]

[1] Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevsky st., Nalchik 360004, Russian
E-mail: alena_ezaova@mail.ru

Abstract. In this paper, unique solvability of a Bitsadze–Samarsky type problem for a third-order equation with discontinuous coefficients in a simply connected domain is investigated. The boundary condition of the problem contains the fractional integro-differentiation operator with the Gauss hypergeometric function. Under certain inequality type constraints on given functions and orders of fractional derivatives in the boundary condition, the energy integrals method enables one to proved the uniqueness of the solution of the problem.
The functional relations between the trace of the desired solution and its derivative are obtained, which are brought to the degeneration line from the hyperbolic and parabolic parts of the mixed region. Under the conditions of the uniqueness theorem the existence of a solution to the problem is proved by equivalent reduction to the second kind Fredholm integral equations with the derivative of the sought function as an unknown, the unconditional solvability of which is deduced from the uniqueness of the solution of the problem. The limits of the change of orders of fractional integro-differential operators in which the solution of the problem exists and is unique are also determined. The effect of the coefficient of the lowest derivative in the equation on the solvability of the problem is established.

Key words: fractional integro-differential operators, energy integrals method, equation with discontinuous coefficients, boundary value problem, second kind Fredholm integral equation.

Mathematical Subject Classification (2000): 35M10.

For citation: *Ezaova, A. G.* Unique Solvability of a Bitsadze–Samarskiy Type Problem for Equations with Discontinuous Coefficient, *Vladikavkaz Math. J.*, 2018, vol. 20, no. 4, pp. 50–58 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23387.

References

1. *Tricomi F. O lineynykh uravneniyakh smeshannogo tipa* [On Linear Equations of Mixed Type], Moscow, Gostekhizdat, 1947 (in Russian).
2. *Gellerstedt S. Sur un Probleme aux Limits Pour One Equation Linear aux Derives Partielles du Second Order de Type Mixed*, Thesis, Uppsala, 1935.
3. *Frankl F. I.* On the Problems of Chaplygin for Mixed Before and Supersonic Flows, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1945, vol. 9, no. 2, pp. 121–142 (in Russian).
4. *Frankl F. I.* Generalization of the Tricomi Problem and Its Application to the Solution of the Direct Problem of Laval Nozzle Theory, *Mat. Sb.* (*N.S.*), 1961, vol. 54 (96), no. 2, pp. 225–236 (in Russian).
5. *Bitsadze A. V. Some Classes of Partial Differential Equations*, Moscow, Nauka Publ., 1981, 488 p. (in Russian).
6. *Nakhushev A. M.* On Some Boundary Value Problems for Hyperbolic Equations and Equations of Mixed Type, *Differential Equations*, 1969, vol. 5, no. 1, pp. 44–59 (in Russian).
7. *Nakhushev A. M.* New Boundary Value Problem for a Degenerate Hyperbolic Equation, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1969, vol. 187, no. 4, pp. 736–739 (in Russian).
8. *Saigo M. A.* Certain Boundary Value Problem for the Euler-Dorboux Equation, III, *Mathematical Japonica*, 1981, vol. 26, no. 1, pp. 103–119.
9. *Repin O. A.* On a Nonlocal Boundary Value Problem with M. Saigo Operators for the Generalized Equation of Euler–Poisson–Darboux Equations, *Integral Transforms and Boundary Value Problems. Collection of Scientific Works. A Institute of Mathematics of Ukraine*, 1996, no. 13, pp. 175–181 (in Russian).
10. *Repin O. A., Kumykova S. K.* On the Problem with Generalized Operators of Fractional Differentiation for Degenerate Hyperbolic Equation Within the Domain, *Vestnik of Samara State University. Natural Science Series*, 2012, no. 9 (100), pp. 52–60 (in Russian).
11. *Nakhushev A. M. Displacement Problems for Partial Differential Equations*, Moscow, Nauka Publ., 2006, 287 p. (in Russian).
12. *Ezaova A. G.* On One Nonlocal Problem for Mixed Type Equation of the Third Order, *Proceedings of the Kabardino-Balkarian State University*, 2011, vol. 1, no. 4, pp. 26–31 (in Russian).
13. *Repin O. A., Kumykova S. K.* Task with the Operators of Riemann–Liouville for the Mixed Type Equation of the Third Order, *Vestnik of Samara State Technical University. Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2016, vol. 20, no. 1, pp. 43–53 (in Russian).
14. *Ezaova A. G., Dumaeva L. V.* On One Inner-Boundary Value Problem for the Equation of the Third Order with a Group of Younger Members, *Fundamental Research*, 2015, no. 2 (27), pp. 6032–6036 (in Russian).
15. *Bitsadze A. V.* On Mixed-Type Equations in Three-Dimensional Domains, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1962, vol. 143, no. 5, pp. 1017–1019 (in Russian).
16. *Smirnov M. M. Uravneniya smeshannogo tipa* [Equations of Mixed Type], Moscow, Vysshaya shkola, 1985, 304 p. (in Russian).
17. *Smirnov M. M. Vyrozhdaiushchiesia ellipticheskie i giperbolicheskie uravneniia* [Degenerate Elliptic and Hyperbolic Equations], Moscow, Nauka Publ., 1966, 292 p. (in Russian).
18. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I. Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ih prilozheniya* [Integrals and Derivatives of FractiOnal Order and Some of Their Applications], Minsk, Nauka i tekhnika, 1987, 688 p. (in Russian).

Received September 14, 2018

Alena G. Ezaova
Kabardino-Balkarian State University,
173 Chernyshevsky st., Nalchik 360004, Russian,
Associate Professor of the Department
of Algebra and Differential Equations
E-mail: alena_ezaova@mail.ru

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 4, P. 59–66

УДК 519.17
DOI 10.23671/VNC.2018.4.23388

TRANSVERSAL DOMINATION IN DOUBLE GRAPHS

S. R. Nayaka[1], Puttaswamy[1] and K. N. Prakash[2]

[1] P.E.S. College of Engineering, Mandya, Karnataka 571401, India;
[2] Vidyavardhaka College of Engineering,
P.B. No.206, Gokulam III Stage, Mysuru 570002, Karnataka, India
E-mail: nayaka.abhi11@gmail.com, prof.puttaswamy@gmail.com,
prakashamaths@gmail.com

Abstract. Let G be any graph. A subset S of vertices in G is called a dominating set if each vertex not in S is adjacent to at least one vertex in S. A dominating set S is called a transversal dominating set if S has nonempty intersection with every dominating set of minimum cardinality in G. The minimum cardinality of a transversal dominating set is called the transversal domination number denoted by $\gamma_{td}(G)$. In this paper, we are considering special types of graphs called double graphs obtained through a graph operation. We study the new domination parameter for these graphs. We calculate the exact value of domination and transversal domination number in double graphs of some standard class of graphs. Further, we also estimate some simple bounds for these parameters in terms of order of a graph.

Key words: transversal dominating set, transversal domination number, direct product, double graph.

Mathematical Subject Classification (2010): 05C69.

For citation: *Nayaka, S. R., Puttaswamy and Prakash, K. N.* Transversal Domination in Double Graphs, *Vladikavkaz Math. J.*, 2018, vol. 20, no. 4, pp. 59–66. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23388.

1. Introduction

Let G be a graph. A subset S of vertices is called a *dominating set* of G if every vertex not in S is adjacent to at least one vertex in S. The minimum cardinality of a dominating set is called the *domination number*, denoted by $\gamma(G)$. For any graph G, there may be many dominating sets of different cardinalities between $\gamma(G)$ and the order of G. The concept of transversal domination in graphs is defined and studied in [1]. A dominating set is called the *transversal dominating set* if it intersects every minimum dominating set in G. The minimum cardinality of a transversal dominating set is called the *transversal domination number*, denoted by $\gamma_{td}(G)$. In [1], authors have obtained fundamental results related to transversal domination parameter including exact values for standard graphs and bounds in terms of order and domination number.

Let G and H be any two graphs. The direct product of G and H is a graph denoted by $G \times H$ with the vertex set $V(G) \times V(H)$ such that two vertices (v_1, w_1) and (v_2, w_2) are adjacent in $G \times H$ if and only if v_1 and v_2 are adjacent in G and w_1 and w_2 are adjacent in H. The *total graph* T_n of order n is the graph associated to the total relation (where every vertex is adjacent to each vertex). In fact, T_n can be obtained from the complete graph K_n by adding a loop to every vertex. Given a simple graph G, the double of G is a simple graph denoted by $\mathfrak{D}(G)$ and is defined by $\mathfrak{D}(G) = G \times T_2$. In the double graph $\mathfrak{D}(G)$, two vertices (v_1, w_1) and (v_2, w_2) are adjacent if and only if v_1 and v_2 are adjacent in G.

From the definition of a double graph [2], it follows that if G is a graph of order n and size m then $\mathfrak{D}(G)$ is a graph of order $2n$ and size $4m$. In particular, the degree of a vertex (v, k) will be $2\deg_G v$. The pentagonal prism with modified lateral edges and its double graph are as shown in Figure 1. The double graph $\mathfrak{D}(G)$ always decomposes into two subgraphs G_0 and G_1 such that $G_0 \cap G_1 = \varnothing$ and $G_0 \cup G_1$ is a spanning subgraph of $\mathfrak{D}(G)$. Then $\{G_0, G_1\}$ is called the decomposition of $\mathfrak{D}(G)$. The double graph operation is defined for any graph G, throughout this paper, by a graph G, we mean a graph without loops and multiple edges. The multi-star graph $K_m(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ is a graph of order $a_1 + a_2 + \cdots + a_m + m$ formed by joining $a_1, a_2, \ldots, a_m$ end-edges to m vertices of K_m. For example, $K_2(a_1, a_2)$ is a double star.

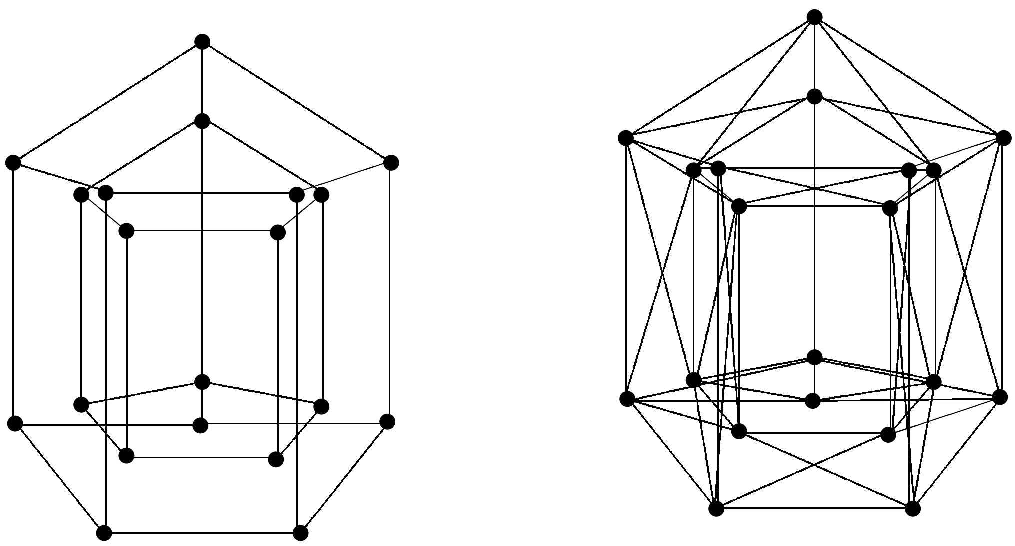

Fig. 1. Double graph of a Pentagonal prism.

Lemma 1.1. *Let G be a path of order n. Then*

$$\gamma(\mathfrak{D}(G)) = \begin{cases} 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor, & \text{if } n \equiv 0 \text{ or } 1 \,(mod\ 3); \\ 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1, & \text{if } n \equiv 2 \,(mod\ 3). \end{cases}$$

$\lhd$ Let G be a path of order n. Then $\mathfrak{D}(G)$ is a $\{2, 4\}$-regular graph of order $2n$. First, suppose $n \equiv 0$ or $1 \,(\mathrm{mod}\ 3)$. Let S' be a minimum dominating set in G. For each vertex u_i' of S', attach a vertex v_{i+1} from another copy of G, which is adjacent to u' in $\mathfrak{D}(G)$. The resulting set S of cardinality $2\gamma(G)$ dominates $\mathfrak{D}(G)$ and minimality holds since each vertex in S has a private neighbor. Thus, $\gamma(\mathfrak{D}(G)) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Finally, assume $n \equiv 2(\mathrm{mod}\ 3)$. Let v be a pendant vertex of G and let G' be a graph obtained by removing the vertex v. Then, clearly, $\gamma(\mathfrak{D}(G)) = \gamma(\mathfrak{D}(G')) + 1$. Since, G' will be isomorphic to a path of order $3n$ or $3n+1$, it follows that $\gamma(\mathfrak{D}(G)) = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 1$. $\rhd$

Theorem 1.1. *Let G be a path of order $n \geqslant 3$. Then $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) = \gamma(\mathfrak{D}(G)) + 1$.*

$\lhd$ Let G be a path of order n. Since the γ-set of $\mathfrak{D}(G)$ is obtained by choosing vertices from the γ-set of copies of G, it will be clear that there are atmost two possibilities to select vertices from a γ-set of copies of G. Thus, for any vertex u of γ-set of G which is not in γ-set

S of $\mathfrak{D}(G)$, the set $S \cup \{u\}$ will be a dominating set intersecting the minimum dominating sets in $\mathfrak{D}(G)$. Minimality of the set $S_1 = S \cup \{u\}$ since for any vertex v of S_1, there always exists a γ-set of $\mathfrak{D}(G)$ not intersecting S_1. Hence, $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) = \gamma(\mathfrak{D}(G)) + 1$. $\rhd$

Lemma 1.2. *Let G be a complete graph. Then $\gamma(\mathfrak{D}(G)) = 2$.*

Theorem 1.2. *Let G be a complete graph of order n. Then $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) = 2n - 1$.*

$\lhd$ Let G be a complete graph of order n. Then $\mathfrak{D}(G)$ will be a regular graph order $(2n-2)$. Since every pair of vertices, taken from each copies of G, is a dominating set it follows that $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) = 2n - 1$. $\rhd$

Theorem 1.3. *Let G be a cycle of order $n \geqslant 4$. Then*

$$\gamma(\mathfrak{D}(G)) = \begin{cases} 5, & \textit{if } n = 4; \\ 3, & \textit{if } n = 5; \\ 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

$\lhd$ Let G be a cycle of order $n \geqslant 3$. Then $\mathfrak{D}(G)$ is a 4-regular graph of order $2n$. If $n = 4$, then clearly $\gamma(\mathfrak{D}(G)) = 5$. Assume $n = 5$. Then, any minimum dominating set of a copy of G, in which a vertex u of S replaced by the corresponding vertex u', will be a minimum dominating set and so $\gamma(\mathfrak{D}(G)) = 3$.

Now, suppose $n \geqslant 6$. We may consider three possible cases here. First, suppose $n = 3k$. As the graph $\mathfrak{D}(G)$ consists of two copies of C_n, choose a minimum dominating set S' of one copy, which dominates $\mathfrak{D}(G)$ except the vertices corresponding to the vertices of S'. So that, the set S obtained by taking the vertices not dominated by S' together with S', will be a dominating set of $\mathfrak{D}(G)$. Further, for any vertex v of S, the set $S - \{v\}$ will not be a dominating set in G and so in $\mathfrak{D}(G)$. Therefore, $\gamma(\mathfrak{D}(G)) = 2|S'| = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$.

Next, suppose $n = 3k + 1$. As in the previous case, choose a minimum dominating set S' of a copy G and then select the corresponging vertices from another copy of G. This will be a dominating set but not minimal as the vertices v_1 and v'_n have two neighbors in the set. Hence, $S' - \{v_1, v'_n\}$ will be a minimum dominating set in G. Therefore, $\gamma(\mathfrak{D}(G)) = |S' - \{v_1, v'_n\}| = 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. Finally, if $n = 3k+2$, similar to the above case, for any set S' consists of vertices from γ-set of G and the corresponding vertices in other copy of G, the set $S = (S' - \{v'_1, v_{n-1}\}) \cup \{v'_n\}$ will be a minimum dominating set of cardinality $2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$. $\rhd$

Theorem 1.4. *Let G be a cycle of order $n \geqslant 3$. Then*

$$\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) = \begin{cases} 2\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + 3, & \textit{if } n \equiv 0 \textit{ or } 1 \,(\textit{mod } 3); \\ \frac{2(n+4)}{3}, & \textit{if } n \equiv 2 \,(\textit{mod } 3). \end{cases}$$

$\lhd$ Let G be a cycle of order $n \geqslant 3$ and let $V(\mathfrak{D}(G)) = \{v_i, v'_j : \ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$. First we note that any minimum dominating set in $\mathfrak{D}(G)$ contains a vertex from $V' = \{v_1, v_2, v'_2, v_n, v_n, \}$. Let H be a spanning sub-graph of G having the vertex set $V - V'$. Then $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) = \gamma(H) + |V'|$. Further, it can be noted that H will be isomorphic to a double graph $\mathfrak{D}(P_{n-3})$. Therefore, $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) = \gamma(\mathfrak{D}(P_{n-3})) + 5$, establishing the result. $\rhd$

Theorem 1.5. *Let $G \cong K_m(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ be a multi-star. Then $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) = m + 1$.*

$\lhd$ Let $G \cong K_m(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ be a multi-star of order $a_1 + a_2 + \cdots + a_m$. Clearly $\gamma(G) = m$. Consider the double graph of G and the minimum dominating set S. As every vertex in S covers the leaves adjacent to it and the vertices adjacent to the corresponding vertices in another copy, it follows that S itself a minimum dominating set in $\mathfrak{D}(G)$. Therefore, $\gamma(\mathfrak{D}(G)) = |S| = m$. Finally, since $\mathfrak{D}(G)$ contains exactly two vertex disjoint dominating sets, $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) = m + 1$. $\rhd$

Definition 1.1. For $m \geqslant 2$, Jahangir graph $J_{n,m}$ is a graph of order $nm+1$, consisting of a cycle of order nm with one vertex adjacent to exactly m vertices of C_{nm} at a distance n to each other. Jahangir graph $J_{2,16}$ is shown in figure 1.

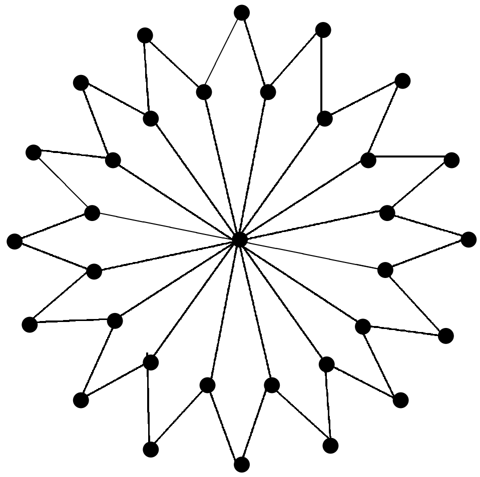

Fig. 2. $J_{2,16}$.

Proposition 1.1 [3]. *Let $G \cong J_{2,m}$ be a Jahangir graph with $m \geqslant 3$. Then*

$$\gamma(G) = \begin{cases} 2, & \text{if } m = 3; \\ \lceil \frac{m}{2} \rceil + 1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Theorem 1.6. *Let $G \cong J_{n,m}$ be a Jahangir graph with $m, n \geqslant 3$. Then*

$$\gamma(G) = \begin{cases} \frac{m(n-1)}{3} + 1, & \text{if } n \equiv 1 \,(mod\ 3); \\ \lceil \frac{mn}{3} \rceil, & \text{if } n \equiv 0 \text{ or } 2 \,(mod\ 3). \end{cases}$$

$\lhd$ Let $G \cong J_{n,m}$ be a Jahangir graph with $m, n \geqslant 3$ and let $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_{nm}, v_{nm+1}\}$, where v_{nm+1} is the vertex at the center, adjacent to vertices of C_{nm}. First assume $n \equiv 1(\text{mod } 3)$, i. e., $n = 3k+1$, for some positive integer k. From the definition, the vertex v_{nm+1} is adjacent to m vertices of C_{nm} at a distance $3k+1$. Removing the vertex v_{nm+1} from G, the graph induced by $V(G) - \{v_{nm+1}\}$ splits into m components each component isomorphic to P_{3k}. Therefore, the minimum dominating set of G is obtained by taking dominating set from each component together with v_{nm+1}. That is, if $S = \cup_{i=1}^{m} S_i$, where S_i denotes γ-set of i^{th} component, then $S \cup \{v_{nm+1}\}$ will be a minimum dominating set of G. Since any vertex not in $S \cup \{v_{nm+1}\}$ will be adjacent to exactly one vertex in $S \cup \{v_{nm+1}\}$, no proper subset will be dominating set in G. Thus, $\gamma(G) = \frac{m(n-1)}{3} + 1$.

Next, suppose $n \equiv 2(\text{mod } 3)$. Here, we may consider three possible cases. First, assume $m \equiv 0(\text{mod } 3)$. Then $\{v_m, v_{2m}, v_{3m}, \ldots, v_{nm}\}$ will be a dominating set of cardinality $\frac{nm}{3}$. On the other hand, let D be a dominating set in G and assume $v_{nm+1} \in D$. As the vertex v_{nm+1} dominates m vertices, to cover the remaining vertices, at least $m\lceil \frac{n}{3} \rceil$ vertices are necessary. Thus, we must have, $|D| \geqslant m\lceil \frac{n}{3} \rceil + 1$, which is not possible. Hence, $v_{nm+1} \notin D$. This shows that the domination number of G co-incides with that of a cycle. Therefore, $\gamma(G) = \lceil \frac{nm}{3} \rceil$. Next, suppose $m \equiv 1(\text{mod } 3)$. In this case $\{v_1, v_3, v_6, \ldots, v_{nm-1}\}$ will be a dominating set of size $\frac{nm+2}{3}$, i. e., $\lceil \frac{nm}{3} \rceil$. On the other hand, as in the above case, it is easy to observe that $v_{nm+1} \notin D$, for any dominating set D of G. Therefore, $\gamma(G) = \lceil \frac{nm}{3} \rceil$.

Finally, assume $n \equiv 0(\text{mod } 3)$. For any integer $m \geqslant 3$, clearly nm will be a multiple of 3. Further, no dominating set D contains the center vertex v_{nm+1}. Hence, $\gamma(G) = \gamma(C_{nm})$, i. e., $\gamma(G) = \frac{nm}{3}$. $\rhd$

Proposition 1.2. *Suppose $m \geqslant 3$ and $n \equiv 1(mod\ 3)$, then*

$$\gamma_{td}(J_{n,m}) = \begin{cases} \frac{m(n-1)}{3} + 2, & \textit{if } m = 3\ ; \\ \frac{m(n-1)}{3} + 1, & \textit{otherwise.} \end{cases}$$

$\lhd$ Let $J_{n,m}$ be a Jahangir graph with $m \geqslant 3$ and $n \equiv 1(\text{mod } 3)$. If $m = 3$, then $J_{n,3}$ contains three minimum dominating sets among which two of them having a common vertex. Thus, $\gamma_{td}(J_{n,m}) = \frac{m(n-1)}{3} + 2$. Next, Assume $m \geqslant 4$. Then, $J_{n,m}$ contains three minimum dominating sets. The dominating set $\{3, 7, 11, \ldots, v_{nm-1}, v_{nm+1}\}$ intersects other two sets and hence itself become a transversal dominating set. Therefore, $\gamma_{td}(J_{n,m}) = \frac{m(n-1)}{3} + 1$. $\rhd$

Theorem 1.7. *Suppose $m \geqslant 3$ and $n \equiv 1(mod\ 3)$, then $\gamma(\mathfrak{D}(J_{n,m})) = 2\gamma(J_{n,m})$.*

$\lhd$ Let $J_{n,m}$ be a Jahangir graph with $m \geqslant 3$ and $n \equiv 1(\text{mod } 3)$. Let S be any minimum dominating set of $J_{n,m}$. Then, S dominate the double graph $\mathfrak{D}(J_{n,m})$ except the corresponding vertices of S in the other copy of $J_{n,m}$. Since none of the vertices in S have common neighbor in itself, the minimum dominating set of $\mathfrak{D}(J_{n,m})$ is obtained by adding the corresponding vertices of S. Therefore, $\gamma(\mathfrak{D}(J_{n,m})) = 2\gamma(J_{n,m})$. $\rhd$

Proposition 1.3. *Suppose $m \geqslant 3$ and $n \equiv 1(mod\ 3)$. Then $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(J_{n,m})) = \gamma(\mathfrak{D}(J_{n,m}))$.*

$\lhd$ Let $J_{n,m}$ be a Jahangir graph with $m \geqslant 3$ and $n \equiv 1(\text{mod } 3)$. We observe that $J_{n,m}$ contains a unique dominating set, the double graph $\mathfrak{D}(J_{n,m})$ also contains only one dominating set and hence, $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(J_{n,m})) = \gamma(\mathfrak{D}(J_{n,m}))$. $\rhd$

Theorem 1.8. *Let $G \cong J_{n,m}$ be a Jahangir graph with $n \equiv 2(mod\ 3)$. Then*

$$\gamma_{td}(G) = \begin{cases} \lceil \frac{mn}{3} \rceil + 2, & \textit{if } m \equiv 0\,(mod\ 3); \\ \lceil \frac{mn}{3} \rceil + 1, & \textit{if } m \equiv 1\,(mod\ 3); \\ \lceil \frac{mn}{3} \rceil, & \textit{if } m \equiv 2\,(mod\ 3). \end{cases}$$

$\lhd$ Let $G \cong J_{n,m}, m \geqslant 3$ be a Jahangir graph such that $n \equiv 2(\text{mod } 3)$. First, we note that dominating set in $J_{n,m}$ arises from dominting set of the cycle C_{nm} and hence any transversal dominating set in $J_{n,m}$ contains at least one vertex from the set $D = \{v_1, v_2, v_3\}$. There are three possible cases here. suppose $m \equiv 0(\text{mod } 3)$, then $nm \equiv 0(\text{mod } 3)$. Thus, $J_{n,m}$ contains exactly three vertex disjoint dominating sets each of cardinality $\frac{nm}{3}$. Therefore $\gamma_{td}(G) \leqslant \frac{nm}{3} + 2$. On the other hand, since any γ-set contains vertex from D, it follows that $\gamma_{td}(G) = 3+\gamma(H)$, where H is the graph induced by $V(J_{n,m}) - D$. Clearly, $H \cong P_{mn-5}$ and hence, $\gamma_{td}(J_{n,m}) = \lceil \frac{nm}{3} \rceil + 2$. Suppose $m \equiv 1(\text{mod } 3)$, then $J_{n,m}$ contains two vertex disjoint dominating sets. Hence, γ_{td}-set of $J_{n,m}$ is obtained by adding one vertex to the γ-set of $J_{n,m}$. Therefore, $\lceil \frac{mn}{3} \rceil + 1$. Finally, suppose $m \equiv 2(\text{mod } 3)$. As the graph $J_{n,m}$ contains only one dominating set $\{v_1, v_4, v_7, \ldots, v_{mn-4}, v_{mn-1}\}$ and hence itself a transversal dominating set. Therefore, $\gamma_{td}(J_{n,m}) = \gamma(J_{n,m}) = \lceil \frac{mn}{3} \rceil$. $\rhd$

Theorem 1.9. *Let $G \cong J_{n,m}$ be a Jahangir graph with $n \equiv 2(mod\ 3)$. Then $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) = 2\lceil \frac{nm}{3} \rceil - \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + 1$. Further, $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) = \gamma(\mathfrak{D}(G))$.*

$\lhd$ Let $G \cong J_{n,m}$ be a Jahangir graph with $n \equiv 2(\text{mod } 3)$. Let S be a minimum dominating set in G. Then, S dominates the double graph $\mathfrak{D}(G)$ except the vertices in the second copy of G corresponding to that of S. Also, the vertex v'_{nm+1} at the center will be adjacent to exactly $\lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor$ vertices of S. Hence, the minimum dominating set will be obtained by choosing $|S| - \lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor$ vertices from the second copy of G. Therefore, $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) = 2\lceil\frac{nm}{3}\rceil - \lfloor\frac{m-1}{2}\rfloor + 1$. Next, since any dominating set in $\mathfrak{D}(G)$ contains the center vertex v_{nm+1}, it follows that any γ-set itself a transversal dominating set in $\mathfrak{D}(G)$. Hence, $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) = \gamma(\mathfrak{D}(G))$. $\rhd$

Proposition 1.4. *Let $G \cong J_{n,m}$ be a Jahangir graph with $n \equiv 0(mod\ 3)$ and $m \geqslant 3$. Then $\gamma_{td}(G) = \gamma(G)$.*

$\lhd$ Let $G \cong J_{n,m}$ be a Jahangir graph with $n \equiv 0(\text{mod } 3)$ and $m \geqslant 3$. For any value of m, we have $nm \equiv 0(\text{mod } 3)$ and so G contains unique dominating set $\{v_1, v_4, v_7, \ldots, v_{nm-5}, v_{nm-2}\}$. Therefore, $\gamma_{td}(G) = \gamma(G) = \lceil\frac{mn}{3}\rceil$. $\rhd$

Theorem 1.10. *Let $G \cong J_{n,m}$ be a Jahangir graph with $m \geqslant 3$. If $n \equiv 0(mod\ 3)$, then $\gamma(\mathfrak{D}(G)) = \frac{nm}{3} + 1$.*

$\lhd$ Let $G \cong J_{n,m}$ be a Jahangir graph with $m \geqslant 3$ and $n \equiv 0(\text{mod } 3)$. Since G contains a unique dominating set $D = \{v_1, v_4, v_7, \ldots, v_{nm-5}, v_{nm-2}\}$ and the set fails to dominates the corresponding vertices in the second copy of G. Therefore, $\gamma(G) \geqslant \frac{nm}{3} + 1$. On other hand, since the center vertex v_{nm+1} is adjacent to every vertex in D, the set $D \cup \{v_{nm+1}\}$ will be a dominating set and hence, $\gamma(\mathfrak{D}(G)) = \frac{nm}{3} + 1$. $\rhd$

Theorem 1.11. *Let $G \cong J_{n,m}$ be a Jahangir graph with $m \geqslant 3$. If $n \equiv 0(mod\ 3)$, then $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) = \frac{nm}{3} + 2$.*

$\lhd$ Let $G \cong J_{n,m}$ be a Jahangir graph with $m \geqslant 3$ and $n \equiv 0(\text{mod } 3)$. From the above theorem, it follows that G conatins exactly two dominating sets having no vertex in common. Thus adding one vertex from a dominating set to other set, the transversal dominating set will be obtained. therefore, $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) = \frac{nm}{3} + 2$. $\rhd$

2. Bounds for $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G))$

Theorem 2.1. *Let G be any connected graph of order n. Then $1 \leqslant \gamma(G) \leqslant \gamma(\mathfrak{D}(G)) \leqslant \gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) \leqslant 2n$. Further, $\gamma(\mathfrak{D}(G)) = \gamma_{td}(\mathfrak{D}(G))$ holds if and only if G contains a unique dominating set of size 1.*

$\lhd$ Let G be any connected graph of order n. Since any dominating set of double graph of G dominates G also, it follows that $\gamma(G) \leqslant \gamma(\mathfrak{D}(G))$. Assume $\gamma(\mathfrak{D}(G)) = \gamma_{td}(\mathfrak{D}(G))$. On contrary, suppose $\gamma(G) \geqslant 2$ and let S be a γ-set. Then S dominates the double graph $\mathfrak{D}(G)$ except the corresponding vertices of S in other copy of G. Therefore, S cannot be a transversal dominating set in $\mathfrak{D}(G)$, showing that $\gamma(\mathfrak{D}(G)) \neq \gamma_{td}(\mathfrak{D}(G))$. Conversly, if G contains a unique dominating set of cardinality one, then $\mathfrak{D}(G)$ contains unique dominating set and so $\gamma(\mathfrak{D}(G)) = \gamma_{td}(\mathfrak{D}(G))$. $\rhd$

Corollary 2.1. *Let G be any graph. Then $2 \leqslant \gamma(\mathfrak{D}(G)) \leqslant \gamma_{td}(\mathfrak{D}(G))$. Further, $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) = 2$ if and only if G is a star.*

$\lhd$ Let G be any graph. First, assume $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) = 2$. From the above theorem it follows that $\gamma(\mathfrak{D}(G)) = \gamma_{td}(\mathfrak{D}(G))$ and so G must contain exactly one vertex of degree $n-1$, proving that G is a star. Converse is obvious. $\rhd$

There is no exact relation between $\gamma_{td}(G)$ and $\gamma(\mathfrak{D}(G))$. For example, if G is a star, then $\gamma(\mathfrak{D}(G)) = \gamma_{td}(\mathfrak{D}(G))$. Let G be a complete graph of order $n \geqslant 4$, then $\gamma_{td}(G) = n - 1 > 2 = \gamma(\mathfrak{D}(G))$. Finally, let G be a path of P_6. Then $\gamma_{td}(G) = 5$ but $\gamma(\mathfrak{D}(G)) = 6$.

Proposition 2.1. *Let G be a connected graph of order $n \geqslant 2$. Then $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) \leqslant \gamma(\mathfrak{D}(G)) + \delta(\mathfrak{D}(G))$.*

◁ Let G be a connected graph of order $n \geqslant 2$. Then, $\delta(G) \geqslant 1$ and let v be a vertex of degree $\delta(G)$. Clearly, any dominating set in $\mathfrak{D}(G)$ must contain either v or a vertex from $N(v)$. Thus, $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) \leqslant \gamma(\mathfrak{D}(G)) + |N(v)|$. This proves that, $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) \leqslant \gamma(\mathfrak{D}(G)) + \delta(\mathfrak{D}(G))$. ▷

Theorem 2.2. *Let G be any graph. Then $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) = 2n - 1$ if and only if G is a complete graph.*

◁ Let G be a connected graph of order n. Assume that $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G)) = 2n - 1$. Then, any subset S' of vertices of order atmost $2n-2$ is not a transversal dominating set in $\mathfrak{D}(G)$. From the minimality of $\gamma_{td}(\mathfrak{D}(G))$, it follows that, $V - S' = \{u, v\}$ is a dominating set in $\mathfrak{D}(G)$. Further, $V - S'$ must contains at least one vertex from each copy of G. Thus, $\gamma(G) = 1$. As the vertices u, v are chosen arbitrarily, each vertex in G must have degree $n - 1$, proving that G is a complete graph. Converse is obvious. ▷

References

1. *Nayaka, S. R., Alwardi A. and Puttaswamy. Transversal Domination in Graphs*, *Gulf Journal of Mathematics*, 2018, vol. 6, no. 2, pp. 41–49.
2. *Munarini, E., Perelli Cippo, C., Scagliola, A. and Zagaglia Salvi, N.* Double Graphs, *Discrete Mathematics*, 2008, vol. 308, pp. 242–254.
3. *Mojdeh, D. A. and Ghameshlou, A. N.* Domination in Jahangir Graph $J_{2,m}$, *Int. J. Contemp. Math. Sciences*, 2007, vol. 2, no. 24, pp. 1193–1199.

Received November 29, 2017

Someshwarapura R. Nayaka
P.E.S. College of Engineering,
Mandya, Karnataka 571401, India,
Assistant Professor
E-mail: `nayaka.abhi11@gmail.com`

Puttaswamy
P.E.S. College of Engineering,
Mandya, Karnataka 571401, India,
Professor
E-mail: `prof.puttaswamy@gmail.com`

K. N. Prakasha
Vidyavardhaka College of Engineering,
P.B. No.206, Gokulam III Stage,
Mysuru 570002, Karnataka, India
Assistant Professor
E-mail: `prakashamaths@gmail.com`

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 4, С. 59–66

ТРАНСВЕРСАЛЬНОЕ ДОМИНИРОВАНИЕ В ДВОЙНЫХ ГРАФАХ

Наяка С. Р.[1], Путтасвами[1], Пракаша К. Н.[2]

[1] Инженерный колледж, Мандья, Карнатака 571401, Индия;
[2] Инженерный колледж Видьявардхаки, Майсур, Карнатака 571401, Индия
E-mail: `nayaka.abhi11@gmail.com`, `prof.puttaswamy@gmail.com`,
`prakashamaths@gmail.com`

Аннотация. Пусть G — произвольный граф. Подмножество S множества всех вершин G называется доминирующим множеством, если каждая вершина, не входящая в S, примыкает, по меньшей мере, к одной из вершин из S. Доминирующее множество S называется трансверсальным доминирующим множеством, если S имеет непустое пересечение с каждым доминирующим множеством минимальной мощности в G. Минимальная мощность трансверсального доминирующего множества называется числом трансверсального доминирования, обозначаемым $\gamma_{td}(G)$. В данной статье рассматриваются специальные типы графов, называемые двойными графами, получаемыми с помощью операций над графами. Мы изучаем новый параметр доминирования для этих графов. Вычисляется точное значение числа доминирования и числа поперечного доминирования в двойных графах некоторого стандартного класса графов. Кроме того, получены некоторые простые оценки для этих параметров в терминах порядка графа.

Ключевые слова: поперечное доминирующее множество, число поперечного доминирования, прямое произведение, двойной граф.

Mathematical Subject Classification (2010): 05C69.

Образец цитирования: *Nayaka S. R., Puttaswamy, Prakash K. N.* Transversal Domination in Double Graphs // *Владикавк. мат. журн.*—2018.—Т. 20, № 4.—С. 59–66 (in English). DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23388.

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 4, С. 67–75

УДК 517.983
DOI 10.23671/VNC.2018.4.23389

О ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ СВЕРТКИ В ПРОСТРАНСТВАХ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

Д. А. Полякова[1,2]

[1] Южный федеральный университет,
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8 а;
[2] Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22

E-mail: `forsites1@mail.ru`

Аннотация. В работе рассматриваются пространства ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа на числовой прямой, задаваемые весами определенного вида. Указанные пространства представляют собой обобщенные проективные аналоги известных классов Жевре. В данных пространствах исследуется неоднородное уравнение свертки (дифференциальное уравнение бесконечного порядка с постоянными коэффициентами), определяемое символом, имеющим только простые нули и удовлетворяющим естественным ограничениям роста. По нулям символа в явном виде строится симметричная последовательность точек действительной оси, в которых модуль символа имеет подходящую оценку снизу. Построенная последовательность порождает абсолютно представляющую систему экспонент с мнимыми показателями в рассматриваемом пространстве. Это позволяет разложить правую часть исследуемого уравнения в абсолютно сходящийся ряд по указанной системе и выписать частное решение уравнения также в виде абсолютно сходящегося ряда, коэффициенты которого, естественно, определяются правой частью уравнения. В этом заключается основной результат работы. Доказательство существенным образом опирается на аналогичные результаты, полученные ранее в случае пространств на конечном интервале, а также на свойство устойчивости слабо достаточных множеств и абсолютно представляющих систем. В работе приводятся конкретные примеры построения нужной последовательности точек.

Ключевые слова: пространство ультрадифференцируемых функций, неоднородное уравнение свертки.

Mathematical Subject Classification (2000): 44A35, 46E10.

Образец цитирования: *Полякова Д. А.* О частном решении неоднородного уравнения свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 4.—С. 68–75. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23389.

1. Введение

Пусть ω — весовая функция, φ_ω^* — сопряженная по Юнгу с $\varphi_\omega(x) = \omega(e^x)$. Пространством ультрадифференцируемых функций (УДФ) Берлинга нормального типа на числовой прямой, задаваемым весом ω, называется следующее пространство бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций на $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R}) = \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}) : \ |f|_{\omega,q,l} = \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \sup_{|x|\leqslant l} \frac{|f^{(j)}(x)|}{\exp q\varphi_\omega^*(j/q)} < \infty \ \ (\forall\, q \in (0,1),\ \forall\, l \in (0,\infty)) \right\}.$$

Пространства УДФ нормального типа (как на числовой прямой, так и на конечном интервале) достаточно активно изучаются в последние 10–15 лет. Одним из основных направлений является исследование уравнений свертки в указанных пространствах. В частности, в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ к настоящему времени полностью изучена (см. [1]) задача о разрешимости неоднородного уравнения свертки

$$T_\mu f = g. \tag{1}$$

Здесь T_μ — оператор свертки, действующий линейно и непрерывно в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$; μ — его символ, т. е. целая функция, удовлетворяющая определенным условиям роста. Затем в работе [2] рассматривался вопрос о частном решении уравнения (1) определенного вида. Именно, по символу μ уравнения (1) строилась последовательность точек $(\nu_j)_{j=1}^\infty$ действительной и мнимой оси так, чтобы система $\left\{e^{-i\nu_j x} \,:\, j \in \mathbb{N}\right\}$ была абсолютно представляющей системой (АПС) в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ и чтобы для $|\mu(\nu_j)|$, $j \in \mathbb{N}$, выполнялись подходящие оценки снизу. Это позволило установить, что если правая часть g уравнения (1) разложена в абсолютно сходящийся ряд $\sum_{j=1}^\infty g_j e^{-i\nu_j x}$, то функция

$$f = \sum_{j=1}^\infty \frac{g_j}{\mu(\nu_j)}\, e^{-i\nu_j x} \tag{2}$$

является решением уравнения (1) в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Естественным недостатком результатов работы [2] можно считать то, что система точек $(\nu_j)_{j=1}^\infty$ строится неконструктивно. Вызвано это тем, что в [2] рассматривается случай произвольного веса ω.

В настоящей работе исследуется важный с точки зрения приложений случай весов $\omega(t) = t^{\rho(t)}$, где $\rho(t) \to \rho \in (0,1)$ — некоторый уточненный порядок. Соответствующие пространства $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ представляют собой обобщенные проективные аналоги известных классов Жевре. Известно, что в этих пространствах все уравнения свертки представляют собой дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами

$$\sum_{k=0}^\infty a_k f^{(k)} = g. \tag{3}$$

Основной результат работы заключается в явном построении последовательности $(\nu_j)_{j=1}^\infty$, которая позволяет выписать частное решение уравнения (3) в виде (2). Заметим, что точки ν_j выбираются симметрично на действительной оси. Доказательство базируется на аналогичных результатах из [3], полученных для случая конечного интервала, а также на свойстве устойчивости слабо достаточных множеств (СДМ) и АПС из [4].

2. Предварительные сведения

В настоящем параграфе содержатся все необходимые сведения о рассматриваемых пространствах и операторах свертки в них. Кроме того, приводятся некоторые понятия и факты из теории СДМ и АПС, нужные для дальнейшего.

Начнем с более подробного определения исследуемых пространств. Напомним, что настоящая работа посвящена пространствам $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ УДФ Берлинга нормального типа на числовой прямой, порождаемым весами $\omega(t) = t^{\rho(t)}$, $\rho(t) \to \rho \in (0,1)$ — некоторый уточненный порядок. Однако для удобства изложения мы введем пространства в случае произвольного веса ω и на произвольном интервале.

Итак, пусть ω — неквазианалитическая весовая функция, т. е. непрерывная неотрицательная неубывающая функция на $[0,\infty)$, обладающая определенными свойствами (см. [3]). Положим $\omega(z):=\omega(|z|)$, $z\in\mathbb{C}$; $\varphi_\omega(x):=\omega(e^x)$, $x\geqslant 0$; $\varphi^*_\omega(y)=\sup\{xy-\varphi_\omega(x):x\geqslant 0\}$, $y\geqslant 0$. Для заданной величины $0<a\leqslant\infty$ определим *пространство УДФ Берлинга нормального типа* на интервале $I=(-a,a)$ (который может быть как конечным, так и бесконечным):

$$\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)=\big\{f\in C^\infty(I):\,|f|_{\omega,q,l}<\infty\quad\big(\forall\,q\in(0,1),\,\forall\,l\in(0,a)\big)\big\}.$$

Величина $|f|_{\omega,q,l}$ была определена во введении. Пространство $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ наделяется естественной топологией, задаваемой набором преднорм $\{|\cdot|_{\omega,q,l}\,:\,q\in(0,1),\,l\in(0,a)\}$, и является с ней (FS)-пространством (см. [5]).

Сильное сопряженное пространство $\big(\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)\big)'_\beta$ посредством преобразования Фурье — Лапласа функционалов

$$F:\varphi\in\big(\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)\big)'\mapsto\widehat{\varphi}(z):=\varphi_x(e^{-ixz}),\quad z\in\mathbb{C},$$

реализуется (см. [6]) в виде следующего весового пространства целых функций:

$$H^1_{(\omega),I}=\bigcup_{q\in(0,1)}\bigcup_{l\in(0,a)}H_{\omega,q,l},$$

где

$$H_{\omega,q,l}=\left\{f\in H(\mathbb{C}):\,\|f\|_{\omega,q,l}=\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|f(z)|}{\exp\big(q\omega(z)+l|\operatorname{Im}z|\big)}\right\}<\infty.$$

Пространство $H^1_{(\omega),I}$ наделяется естественной индуктивной топологией и относится к классу (DFS)-пространств (см. [5]).

Оператор свертки T_μ в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ определяется как сопряженный к оператору умножения $\Lambda_\mu:f\mapsto\mu f$, действующему в пространстве $H^1_{(\omega),I}$. *Символ* μ представляет собой целую функцию, являющуюся мультипликатором пространства $H^1_{(\omega),I}$. В общем случае действие оператора T_μ на функции из $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$ определяется равенством

$$(T_\mu f)(x):=\langle\psi_\mu,f(x+\cdot)\rangle,\quad x\in I,\ f\in\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I).$$

Здесь $\psi_\mu:=F^{-1}(\mu)\in\big(\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)\big)'$.

Известно (см. [3] и бибиографию там), что если целая функция $\mu(z)=\sum_{k=0}^\infty a_k(-i)^kz^k$ является *сильным мультипликатором* пространства $H^1_{(\omega),I}$, т. е. удовлетворяет условию

$$\sup_{z\in\mathbb{C}}\frac{|\mu(z)|}{e^{\varepsilon\omega(z)}}<\infty\quad(\forall\,\varepsilon>0),$$

то оператор T_μ представляет собой дифференциальный оператор бесконечного порядка с постоянными коэффициентами: $T_\mu f=\sum_{k=0}^\infty a_kf^{(k)}$, $f\in\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I)$.

В заключение параграфа приведем необходимые сведения, касающиеся СДМ, АПС и связи между ними. В соответствии с [7], последовательность $(x_j)_{j=1}^\infty$ элементов локально выпуклого пространства E называется АПС в E, если любой элемент $x\in E$ раскладывается в абсолютно сходящийся ряд $x=\sum_{j=1}^\infty c_jx_j$.

Далее, пусть заданы нормированные пространства целых функций

$$H_k=\left\{f\in H(\mathbb{C}^N):\,\|f\|_k=\sup_{z\in\mathbb{C}^N}\frac{|f(z)|}{\exp\varphi_k(z)}<\infty\right\},\quad k\in\mathbb{N},$$

где $0 < \varphi_k \leqslant \varphi_{k+1} < \infty$, $k \in \mathbb{N}$, — некоторые заданные функции. Тогда можно ввести пространство $H = \cup_{k=1}^{\infty} H_k$ и наделить его топологией индуктивного предела $\operatorname{ind}_k H_k$. Множество $S \subset \mathbb{C}^N$ называется *слабо достаточным* для H (см. [8]), если исходная топология $\operatorname{ind}_k H_k$ совпадает с топологией $\operatorname{ind}_k H_{k;S}$ индуктивного предела полунормированных пространств

$$H_{k;S} = \left\{ f \in H(\mathbb{C}^N) : \ \|f\|_k = \sup_{z \in S} \frac{|f(z)|}{\exp \varphi_k(z)} < \infty \right\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Результат о связи АПС и СДМ содержится, например, в [9, теорема K].

3. Основной результат

Итак, мы будем исследовать неоднородное уравнение свертки $T_\mu f = g$ в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$, задаваемом весом $\omega(t) = t^{\rho(t)}$, $\rho(t) \to \rho \in (0,1)$ — некоторый уточненный порядок. Положим $\rho(z) := \rho(|z|)$, $z \in \mathbb{C}$. Напомним, что в соответствии с введенными выше обозначениями, $\left(\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})\right)'_\beta \simeq H^1_{(\omega),\mathbb{R}}$.

Будем предполагать, что символ $\mu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (-i)^k z^k$ рассматриваемого уравнения задан своими простыми нулями:

$$\mu(z) = \prod_{s=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_s}\right), \quad |\lambda_s| \uparrow \infty\,,$$

причем последовательность нулей удовлетворяет условию

$$\lim_{s \to \infty} \frac{s}{|\lambda_s|^{\rho(\lambda_s)}} = 0. \tag{4}$$

Равенство (4) обеспечивает то, что μ имеет нулевой тип при порядке $\rho(r)$, а значит, является сильным мультипликатором пространства $H^1_{(\omega),\mathbb{R}}$. Соответственно, исследуемое уравнение свертки представляет собой дифференциальное уравнение бесконечного порядка с постоянными коэффициентами (3).

Будем также считать, что последовательность (λ_s) образует R-множество (см. [10]): точки λ_s расположены внутри углов с общей вершиной в начале координат, не имеющих других общих точек, причем если перенумеровать точки множества (λ_s) внутри любого из этих углов в порядке возрастания их модулей, то для точек, попавших внутрь одного угла,

$$|\lambda_{s+1}| - |\lambda_s| > d|\lambda_s|^{1-\rho(\lambda_s)}, \quad s \in \mathbb{N},\ d > 0. \tag{5}$$

При этом μ будет иметь вполне регулярный рост при порядке $\rho(r)$, так что вне некоторого исключительного множества кружков $C_s = \{z : |z - \lambda_s| < r_s\}$, $s \in \mathbb{N}$, будет выполняться асимптотическое равенство

$$\lim_{z \to \infty} \frac{\ln |\mu(z)|}{|z|^{\rho(z)}} = 0. \tag{6}$$

Заметим, что в рассматриваемом случае в качестве радиусов r_s исключительных кружков можно взять любое фиксированное число $\gamma > 0$ (см. [11, замечание после теоремы 1.2.6]). В силу [1, теорема 2], данное условие обеспечивает то, что уравнение (3) разрешимо в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ при любой правой части $g \in \mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$.

На основании перечисленных свойств функции μ построим возрастающую последовательность $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ положительных чисел, которая будет порождать в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ АПС экспонент $\left\{e^{\mp i\nu_j x}\right\}_{j=1}^{\infty}$.

При каждом $p \in \mathbb{N}$ возьмем число $\gamma^{(p)}$ так, чтобы выполнялись следующие условия: $\gamma^{(p)} < \frac{1}{4 \cdot 2^p}$; $\gamma^{(p+1)} < \gamma^{(p)}$; исключительные кружки $C_s^{(p)} = \{z : |z - \lambda_s| < \gamma^{(p)}\}$, $s = 1, 2, \ldots$, вне которых выполняется равенство (6), попарно не пересекаются. Рассмотрим функцию $\sin 2^p z$ и ее положительные нули $\frac{\pi n}{2^p}$, $n \in \mathbb{N}$. Разобьем их на две возрастающие последовательности $\xi_1^{(p)}, \xi_2^{(p)}, \ldots$ и $\eta_1^{(p)}, \eta_2^{(p)}, \ldots$ по правилу: точки $\pm\eta_j^{(p)}$ не попадают в исключительные кружки $C_s^{(p)}$, а $\xi_j^{(p)}$ или $-\xi_j^{(p)}$ попадают в $C_s^{(p)}$. Будем считать, что точек $\xi_j^{(p)}$ бесконечно много, поскольку это наиболее сложная ситуация. Положим $K_{j,\pm}^{(p)} = \{z : |z \mp \xi_j^{(p)}| < \gamma^{(p)}\}$, $j \in \mathbb{N}$.

Далее, на основании теоремы 1.2.3 из [11] выделим из последовательности $\left(\frac{\pi}{2 \cdot 2^p} + \frac{\pi n}{2^p}\right)_{n=1}^{\infty}$ подпоследовательность $(\zeta_k^{(p)})_{k=1}^{\infty}$ такую, что $\pm\zeta_k^{(p)} \notin \bigcup_s C_s^{(p)}$, для которой

$$\lim_{k\to\infty} \frac{k}{\left(\zeta_k^{(p)}\right)^{\rho(\zeta_k^{(p)})}} = \frac{1}{\pi}\,\operatorname{tg}\frac{\pi\rho}{2};$$

$$\zeta_{k+1}^{(p)} - \zeta_k^{(p)} > d_p\left(\zeta_k^{(p)}\right)^{1-\rho(\zeta_k^{(p)})}, \quad k \in \mathbb{N},\ d_p > 0.$$

При этом $\zeta_k^{(p)} \notin \bigcup_j K_{j,\pm}^{(p)}$, $k \in \mathbb{N}$.

Построенные последовательности $\left(\eta_k^{(p)}\right)_{k=1}^{\infty}$ и $\left(\zeta_k^{(p)}\right)_{k=1}^{\infty}$ объединяем в одну возрастающую последовательность $\left(\nu_j^{(p)}\right)_{j=1}^{\infty}$. При этом система $\left\{1, e^{\mp i\nu_j^{(p)}x}\right\}_{j=1}^{\infty}$ будет АПС в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I^{(p)})$, где $I^{(p)} = (-2^p, 2^p)$ (более подробно об этом см. ниже в доказательстве леммы 1). Кроме того, все точки $\pm\nu_j^{(p)}$ лежат вне исключительных кружков $C_s^{(p)}$.

Отметим некоторые очевидные свойства последовательностей $\left(\nu_j^{(p)}\right)_{j=1}^{\infty}$, $p \in \mathbb{N}$. Во-первых, понятно, что $\left(\nu_j^{(p)}\right)_{j=1}^{\infty} \subset \left(\nu_j^{(p+1)}\right)_{j=1}^{\infty}$, $p \in \mathbb{N}$. Далее, если обозначить через $n^{(p)}(r)$, $r > 0$, количество элементов последовательности $\left(\nu_j^{(p)}\right)_{j=1}^{\infty}$ на промежутке $(0, r]$, то

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{n^{(p)}(r)}{r} < \infty, \quad p \in \mathbb{N}.$$

Действительно, на любом полуинтервале длиной π количество элементов последовательности $\left(\nu_j^{(p)}\right)_{j=1}^{\infty}$ не превышает 2^{p+1}. Следовательно, если $l\pi < r \leqslant (l+1)\pi$, $l \in \mathbb{N}$, то $n^{(p)}(r) \leqslant (l+1)2^{p+1} \leqslant \left(\frac{r}{\pi} + 1\right)2^{p+1}$. Таким образом, $\limsup_{r\to\infty} \frac{n^{(p)}(r)}{r} \leqslant \frac{2^{p+1}}{\pi} < \infty$.

Сделаем еще одно полезное замечание. Понятно, что если нули λ_s символа $\mu(z)$ отграничены от действительной оси, т. е. если

$$|\operatorname{Im}\lambda_s| \geqslant \delta_0, \quad s \geqslant s_0, \tag{7}$$

то при каждом $p \in \mathbb{N}$ в качестве точек $\eta_k^{(p)}$ можно взять $\eta_k^{(p)} = \frac{\pi k}{2^p}$, $k \in \mathbb{N}$.

Перейдем, наконец, к построению искомой последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$. Возьмем элементы последовательности $\left(\nu_j^{(1)}\right)_{j=1}^{\infty}$, лежащие на промежутке $(0, l_1\pi]$ (натуральные числа $l_1 < l_2 < \ldots$ будут выбраны ниже). Занумеруем их по возрастанию: $\nu_1, \ldots, \nu_{j_1}$. Затем выберем элементы последовательности $\left(\nu_j^{(2)}\right)_{j=1}^{\infty}$, попадающие на промежуток $\left(l_1\pi, (l_1 + l_2)\pi\right]$, и обозначим их $\nu_{j_1+1}, \ldots, \nu_{j_2}$. Далее, пусть $\nu_{j_2+1}, \ldots, \nu_{j_3}$ — занумерованные по возрастанию элементы последовательности $\left(\nu_j^{(3)}\right)_{j=1}^{\infty}$ из промежутка

$\big((l_1+l_2)\pi,(l_1+l_2+l_3)\pi\big]$. Продолжая этот процесс далее, получим возрастающую последовательность $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ положительных чисел. При этом по построению каждая последовательность $\big(\nu_j^{(p)}\big)_{j=1}^{\infty}$, $p\in\mathbb{N}$, за исключением конечного числа элементов будет подпоследовательностью последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$. Кроме того, все точки $\pm\nu_j$ будут находиться вне исключительных кружков функции μ. Следовательно, для каждого $\varepsilon>0$ найдется номер $j(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ такой, что

$$|\mu(\pm\nu_j)|\geqslant\exp\big\{-\varepsilon\nu_j^{\rho(\nu_j)}\big\},\quad j\geqslant j(\varepsilon). \tag{8}$$

Отметим еще одно полезное свойство последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$. Именно, оценим величину $n(r)$ — количество элементов последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ на промежутке $(0,r]$. Зафиксируем $r>l_1\pi$ и найдем $p\in\mathbb{N}$ такое, что $\sum_{j=1}^{p-1}l_j\pi<r\leqslant\sum_{j=1}^{p}l_j\pi$. Тогда $n(r)\leqslant\sum_{j=1}^{p}l_j\cdot 2^{j+1}\leqslant p\cdot l_l\cdot 2^{p+1}$. При этом $r>\sum_{j=1}^{p-1}l_j\pi>l_{p-1}\cdot\pi>l_{p-1}$. Исходя из полученных оценок, числа l_p подберем так, чтобы

$$\lim_{r\to\infty}\frac{n(r)}{r^{1+\varepsilon}}=0\quad(\forall\,\varepsilon>0). \tag{9}$$

Возьмем, например, $l_p=2^{p^2}$. Тогда

$$\frac{n(r)}{r^{1+\varepsilon}}\leqslant\frac{p\cdot 2^{p^2}\cdot 2^{p+1}}{2^{(1+\varepsilon)(p-1)^2}}=p\cdot 2^{-\varepsilon p^2+3p+2p\varepsilon-\varepsilon}\to 0,\quad p\to\infty,$$

так что условие (9) выполнено.

Прежде чем переходить к основным результатам работы, приведем конкретный пример построения последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$.

Пример 1. Пусть $\omega(t)=t^{\frac12}$. Нули $(\lambda_s)_{s=1}^{\infty}$ символа $\mu(z)=\prod_{s=1}^{\infty}\big(1-\frac{z}{\lambda_s}\big)$ удовлетворяют условиям (5), (6) и (7). Тогда можно взять

$$\eta_k^{(p)}=\frac{\pi k}{2^p},\quad \zeta_k^{(p)}=\frac{\pi}{2\cdot 2^p}+\frac{\pi[2^p\pi k^2]}{2^p},\quad k\in\mathbb{N},\ p\in\mathbb{N}.$$

Здесь, как обычно, через $[x]$ обозначена целая часть числа x. После этого последовательность $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ строится из точек $\eta_k^{(p)}$ и $\zeta_k^{(p)}$, $k\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{N}$, указанным выше способом.

Докажем следующую основную лемму.

Лемма 1. *Система экспонент $\big\{e^{\mp i\nu_j x}\big\}_{j=1}^{\infty}$ является АПС в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$, а множество $S=\{\pm\nu_j : j\in\mathbb{N}\}$ слабо достаточно для $H^1_{(\omega),\mathbb{R}}$.*

$\lhd$ Доказательство базируется на аналогичном результате из [3], где было фактически показано, что при каждом $p\in\mathbb{N}$ система $\big\{1,e^{\mp i\nu_j^{(p)}x}\big\}_{j=1}^{\infty}$ является АПС в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I^{(p)})$, где $I^{(p)}=\big(-2^p,2^p\big)$. Для этого в указанной работе проверялось известное достаточное условие АПС из [12, теорема 3]. Именно, при фиксированном $p\in\mathbb{N}$ была построена целая функция $L(z)=L_1(z)\cdot L_2(z)$, где

$$L_1(z)=2^p z\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\big(\eta_k^{(p)}\big)^2}\right),\quad L_2(z)=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{z^2}{\big(\zeta_k^{(p)}\big)^2}\right),$$

обладающая определенными свойствами (см. [3, § 6; свойства (А), (В) и (Г)]). Из этого в [3] был сделан ошибочный, по всей вероятности, вывод о том, что система $\big\{e^{-i\nu_j^{(p)}x}\big\}_{j=1}^{\infty}$

является АПС в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I^{(p)})$. Обусловлено это неточностью в достаточной части теоремы 3 из [12]. Именно, у функции $L(z)$ помимо точек, фигурирующих в показателях экспонент, других нулей быть не должно. Поскольку построенная в [3] функция $L(z)$ имеет нули в точках $0, \pm\nu_j^{(p)}$ (других нулей у нее нет), то можно гарантировать, что система $\{1, e^{\mp i\nu_j^{(p)}x}\}_{j=1}^{\infty}$ будет АПС в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I^{(p)})$, $p \in \mathbb{N}$.

Сделаем еще одно полезное замечание, касающееся результатов из [3]. Нетрудно видеть, что свойства (А), (В) и (Г) функции $L(z)$ инварианты относительно деления на многочлен. Другими словами, если этими свойствами обладает функция $L(z)$, то ими же будет обладать и функция $\widetilde{L}(z) = \frac{L(z)}{P(z)}$, $P(z)$ — многочлен (естественно, при условии, что $\widetilde{L}(z)$ — целая функция). Это означает, что если из системы $\{1, e^{\mp i\nu_j^{(p)}x}\}_{j=1}^{\infty}$ отбросить любое конечное число элементов, то она останется АПС в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I^{(p)})$.

Учитывая только что сделанное замечание и тот факт, что каждая последовательность $(\nu_j^{(p)})_{j=1}^{\infty}$, $p \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого номера, является подпоследовательностью последовательности $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$, делаем вывод, что система $\{e^{\mp i\nu_j x}\}_{j=1}^{\infty}$ будет АПС в каждом пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(I^{(p)})$, $p \in \mathbb{N}$. Следовательно, в силу [9, теорема К], множество $S = \{\pm\nu_j : j \in \mathbb{N}\}$ является СДМ для каждого пространства $H^1_{(\omega),I^{(p)}}$, $p \in \mathbb{N}$.

На основании свойства устойчивости СДМ (см. [4, теорема 2]) заключаем, что множество S слабо достаточно для $H^1_{(\omega),\mathbb{R}}$. Действительно, как нетрудно видеть, если положить в теореме 2 из [4]

$$h_k(z) = q_k\big(\omega(z) + |\operatorname{Im} z|\big), \quad z \in \mathbb{C},\ 0 < q_k \uparrow 1;$$
$$b_m(z) = \big(2^m - 2^{m-1}\big)|\operatorname{Im} z|, \quad z \in \mathbb{C},\ m \in \mathbb{N};$$

то все условия указанной теоремы будут выполнены (даже в случае произвольного веса ω; и, в частности, для $\omega(t) = t^{\rho(t)}$). Заметим, что при этом необходимо воспользоваться известными свойствами весовых функций (см., например, [3, свойство (γ)] и [6, неравенство (5)]).

В заключение снова применяем теорему К из [9] и получаем, что система $\{e^{\mp i\nu_j x}\}_{j=1}^{\infty}$ является АПС в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$. Тем самым лемма доказана. $\rhd$

Лемма 1 позволяет разложить правую часть уравнения (3) в абсолютно сходящийся ряд по системе $\{e^{\mp i\nu_j x}\}_{j=1}^{\infty}$ и найти частное решение данного уравнения также в виде ряда по указанной системе. В этом заключается основной результат работы, который представлен в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть символ $\mu(z)$ уравнения (3) удовлетворяет перечисленным условиям; $(\nu_j)_{j=1}^{\infty}$ — построенная последовательность положительных чисел. Предположим, что правая часть уравнения (3) разложена в абсолютно сходящийся ряд $g = \sum_{j=1}^{\infty} g_j^+ e^{-i\nu_j x} + \sum_{j=1}^{\infty} g_j^- e^{i\nu_j x}$. Тогда функция*

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j^+}{\mu(\nu_j)} e^{-i\nu_j x} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{g_j^-}{\mu(-\nu_j)} e^{i\nu_j x}$$

является частным решением уравнения (3) в пространстве $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$ (последний ряд сходится абсолютно в $\mathscr{E}^1_{(\omega)}(\mathbb{R})$).

$\lhd$ Доказательство данного результата базируется на неравенстве (8), а также на оценках норм $\left|e^{\mp i\nu_j x}\right|_{\omega,q,l}$, $q \in (0,1)$, $l \in (0,\infty)$, из [6, лемма 3]. В целом оно практически дословно повторяет доказательство теоремы 1 из [3], поэтому здесь мы его опускаем. $\rhd$

Литература

1. *Абанин А. В., Абанина Д. А.* Теорема деления в некоторых весовых пространствах целых функций // Владикавк. мат. журн.—2010.—Т. 12, № 3.—С. 3–21.
2. *Абанина Д. А.* Представление решений уравнений свертки в неквазианалитических классах ультрадифференцируемых функций Берлинга нормального типа // Изв. вузов. Математика.—2011.—№ 6.—С. 1–9.
3. *Полякова Д. А.* О решениях уравнений свертки в пространствах ультрадифференцируемых функций // Алгебра и анализ.—2014.—Т. 26, № 6.—С. 121–142.
4. *Абанин А. В.* О продолжении и устойчивости слабо достаточных множеств // Изв. вузов. Математика.—1987.—Т. 299, № 4.—С. 3–10.
5. *Жаринов В. В.* Компактные семейства ЛВП и пространства FS и DFS // Успехи мат. наук.—1979.—Т. 34, № 4.—С. 97–131.
6. *Абанин А. В., Филипьев И. А.* Аналитическая реализация пространств, сопряженных к пространствам бесконечно дифференцируемых функций // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 3.—С. 485–500.
7. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. Математика.—1978.—Т. 42, № 2.—С. 325–355.
8. *Schneider D. M.* Sufficient sets for some spaces of entire functions // Trans. Amer. Math. Soc.—1974.—Vol. 197.—P. 161–180. DOI: 10.2307/1996933.
9. *Коробейник Ю. Ф.* Индуктивные и проективные топологии. Достаточные множества и представляющие системы // Изв. АН СССР. Сер. Математика.—1986.—Т. 50, № 3.—С. 539–565.
10. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций.—М.: Гостехиздат, 1956.—632 с.
11. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.
12. *Абанин А. В.* Нетривиальные разложения нуля и абсолютно представляющие системы // Мат. заметки.—1995.—Т. 57, № 4.—С. 483–497.

Статья поступила 5 апреля 2018 г.

Полякова Дарья Александровна
Южный федеральный университет,
доцент кафедры математического анализа
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, Мильчакова, 8 а;

Южный математический институт — филиал ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник отдела математического анализа
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: forsites1@mail.ru
http://orcid.org/0000-0002-0202-2102

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 4, P. 68–75

ON A PARTICULAR SOLUTION OF A NONHOMOGENEOUS CONVOLUTION EQUATION IN SPACES OF ULTRADIFFERENTIABLE FUNCTIONS

Polyakova, D. A.[1,2]

[1] Southern Federal University,
8 a Mil'chakova st., Rostov-on-Don 344090, Russia;
[2] Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus st., Vladikavkaz 362027, Russia
E-mail: forsites1@mail.ru

Abstract. We consider the Beurling spaces of ultradifferentiable functions of mean type on the real axis determined by special weight functions. These spaces are the general projective analogs of the well-known Gevrey classes. In these spaces we investigate a nonhomogeneous convolution equation (differential equation of infinite order with constant coefficients) generated by the symbol which has only simple zeros and satisfies some natural growth estimates. Given the zeros of a symbol, a symmetric sequence of real numbers is explicitly constructed, in each of which the module of the symbol has a suitable lower estimate. This sequence determines a system of exponentials with imaginary indexes which is absolutely representing in the corresponding space. This allows us to represent the right-hand side of the equation as an absolutely convergent series with respect to this system. Then we establish a particular solution of the equation under considering as an absolutely convergent series with respect to this system, too. The coefficients of the series are naturally determined by the right-hand side of the equation. The proof is essentially based on the analogous results which were earlier obtained in the case of spaces on finite interval. We also use the stability property of weakly sufficient sets and absolutely representing systems. Some concrete examples of constructing the desired sequences are also given in the paper.

Key words: space of ultradifferentiable functions, nonhomogeneous convolution equation.

Mathematical Subject Classification (2000): 44A35, 46E10.

For citation: *Polyakova, D. A.* On a Particular Solution of a Nonhomogeneous Convolution Equation in Spaces of Ultradifferentiable Functions, *Vladikavkaz Math. J.*, 2018, vol. 20, no. 4, pp. 68–75 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23389.

References

1. *Abanin, A. V. and Abanina, D. A.* Division Theorem in Some Weighted Spaces of Entire Functions, Vladikavkaz. Math. J., 2010, vol. 12, no. 3, pp. 3–21 (in Russian).
2. *Abanina, D. A.* Representation of Solutions of Convolution Equations in Nonquasianalytic Beurling Classes of Ultradifferentiable Functions of Mean Type, *Russian Mathematics*, 2011, vol. 55, no. 6, pp. 1–8. DOI: 10.3103/S1066369X11060016.
3. *Polyakova, D. A.* On Solutions of Convolution Equations in Spaces of Ultradifferentiable Functions, *St. Petersburg Math. J.*, 2015, vol. 26, no. 6, pp. 949–963. DOI: 10.1090/spmj/1369.
4. *Abanin, A. V.* On the Continuation and Stability of Weakly Sufficient Sets, *Soviet Mathematics* (*Izvestiya VUZ. Matematika*), 1987, vol. 31, no. 4, pp. 1–10.
5. *Zharinov, V. V.* Compact Families of Locally Convex Topological Vector Spaces, Frechet–Schwartz and Dual Frechet–Schwartz Spaces, *Russian Mathematical Surveys*, 1979, vol. 34, no. 4, pp. 105–143. DOI: 10.1070/RM1979v034n04ABEH002963.
6. *Abanin, A. V. and Filip'ev I. A.* Analytic Implementation of the Duals of Some Spaces of Infinitely Differentiable Functions, *Siberian Mathematical Journal*, 2006, vol. 47, no. 3, pp. 397–409. DOI: 10.1007/s11202-006-0052-3.
7. *Korobeinik, Yu. F.* Representing Systems, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1978, vol. 12, no. 2, pp. 309–335. DOI: 10.1070/IM1978v012n02ABEH001856.
8. *Schneider, D. M.* Sufficient Sets for Some Spaces of Entire Functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1974, vol. 197, pp. 161–180. DOI: 10.2307/1996933.
9. *Korobeinik, Yu. F.* Inductive and Projective Topologies. Sufficient Sets and Representing Systems, *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 1987, vol. 28, no. 3, pp. 529–554. DOI: 10.1070/IM1987v028n03 ABEH000896.
10. *Levin, B. Ja. Distribution of Zeros of Entire Functions, Transl. Math. Monogr., vol.* 5, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1972, 523 p.
11. *Leont'ev, A. F. Ryady ehksponent* [Exponential Series], Moscow, Nauka Publ., 1976, 536 p. (in Russian).
12. *Abanin, A. V.* Nontrivial Expansions of Zero and Absolutely Representing Systems, *Mathematical Notes*, 1995, vol. 57, no. 4, pp. 335–344. DOI: 10.1007/BF02304161.

Received April 5, 2018

Darya A. Polyakova
Southern Federal University,
8 a Mil'chakova st., Rostov-on-Don 344090, Russia,
Associate Professor Department of Mathematical Analysis;
Southern Mathematical Institute VSC RAS,
22 Marcus st., Vladikavkaz 362027, Russia,
Senior Researcher
E-mail: `forsites1@mail.ru`

Владикавказский математический журнал
2018, Том 20, Выпуск 4, С. 76–91

УДК 517.518.85
DOI 10.23671/VNC.2018.4.23390

СХОДИМОСТЬ ПРОЦЕССОВ ЛАГРАНЖА — ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИИ

А. Ю. Трынин[1]

[1] Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского, Россия, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83

E-mail: atrynin@gmail.com

Аннотация. Установлена равномерная сходимость внутри интервала $(a,b) \subset [0,\pi]$ процессов Лагранжа, построенных по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля $L_n^{SL}(f,x) = \sum_{k=1}^n f(x_{k,n}) \frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})}$. (Здесь через $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \dots < x_{n,n} < \pi$ обозначены нули собственной функции U_n задачи Штурма — Лиувилля.) Непрерывные на $[0,\pi]$ функции f ограниченной вариации на $(a,b) \subset [0,\pi]$ могут быть равномерно приближены внутри интервала $(a,b) \subset [0,\pi]$. Получен признак равномерной сходимости внутри интервала (a,b) интерполяционных процессов, построенных по собственным функциям регулярной задачи Штурма — Лиувилля. Условие признака сформулировано в терминах максимума суммы модулей разделенных разностей функции f. Вне интервала (a,b) построенный интерполяционный процесс может расходиться. Установлена ограниченность в совокупности фундаментальных функций Лагранжа, построенных по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля. Рассмотрен случай регулярной задачи Штурма — Лиувилля с непрерывным потенциалом ограниченной вариации. Изучены краевые условия задачи Штурма — Лиувилля третьего рода без условий Дирихле. При наличии сервисных функций вычисления собственных функций регулярной задачи Штурма — Лиувилля изучаемый оператор Лагранжа — Штурма — Лиувилля легко реализуется на вычислительной технике.

Ключевые слова: равномерная сходимость, синк приближения, ограниченная вариация, процессы Лагранжа — Штурма — Лиувилля.

Mathematical Subject Classification (2000): 41A05, 41A58, 94A12.

Образец цитирования: *Трынин А. Ю.* Сходимость процессов Лагранжа — Штурма — Лиувилля для непрерывных функций ограниченной вариации // Владикавк. мат. журн.—2018.—Т. 20, вып. 4.—С. 76–91. DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23390.

1. Введение

В отличие от подхода Крамера [1], положившего начало изучению аппроксимативных свойств лагранжевых операторов с узлами интерполирования в собственных значениях задачи Штурма — Лиувилля, Г. И. Натансон в [2] получил признак Дини — Липшица равномерной сходимости внутри интервала $(0,\pi)$, т. е. равномерной на любом компакте, содержащемся в $(0,\pi)$, процессов Лагранжа — Штурма — Лиувилля вида

$$L_n^{SL}(f,x) = \sum_{k=1}^n f(x_{k,n}) \frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x-x_{k,n})} = \sum_{k=1}^n f(x_{k,n}) l_{k,n}^{SL}(x). \tag{1.1}$$

Где U_n есть n-ая собственная функция регулярной задачи Штурма — Лиувилля

$$\begin{cases} U'' + [\lambda - q]U = 0, \\ U'(0) - hU(0) = 0, \\ U'(\pi) + HU(\pi) = 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

с непрерывным потенциалом q ограниченной вариации на $[0, \pi]$ и граничными условиями, гарантирующими, что главный член в асимптотических формулах для U_n будет косинусом, т. е. $h \neq \pm\infty$, $H \neq \pm\infty$. Здесь через $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n} < \pi$ обозначены нули функции U_n.

Свойства операторов интерполирования функций вида (1.1) тесно переплетаются с поведением так называемых синк-приближений

$$L_n(f, x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(nx - k\pi)}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin nx}{nx - k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right), \tag{1.3}$$

используемых в теореме отсчетов Уиттекера — Котельникова — Шеннона (см. [3–6]). Оператор (1.3) представляет собой оператор (1.1), построенный по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля (1.3), в случае нулевого потенциала и краевых условий первого рода. Достаточно подробный обзор результатов, полученных в области исследования свойств синк-аппроксимаций (1.3) аналитических на действительной оси функции, экспоненциально убывающих на бесконечности, а также наиболее важные приложения синк-аппроксимаций можно найти, например, в [5].

Синк-приближения активно используются при построении различных численных методов математической физики и приближения функций как одной так и нескольких переменных [6–25] в теории квадратурных и кубатурных формул [5] и всплесков или теории вейвлет-преобразований [3, 4, 6].

До появления работ [11, 12, 14, 16–19, 22] приближение такими операторами на отрезке или ограниченном интервале осуществлялось только для некоторых классов аналитических функций (см., например, [5]) сведением к случаю оси с помощью конформного отображения. В [19] получена оценка сверху наилучшего приближения непрерывных функций комбинациями синков.

В [20] установлено, что при попытке приближения негладких непрерывных функций значениями операторов (1.3) возможно появление резонанса, приводящего к неограниченному росту погрешности аппроксимации на всем интервале $(0, \pi)$. В [21–25] предложены различные модификации синк-приближений (1.3), позволяющие аппроксимировать непрерывные функции на отрезке $[0, \pi]$. Исследование полноты системы синков (1.3) в [24] в пространствах $C[0, \pi]$ и $C_0[0, \pi] = \{f : f \in C[0, \pi], f(0) = f(\pi) = 0\}$ позволяет сделать вывод о бесполезности попыток построить сумматорный оператор из синков, допускающий возможность равномерной аппроксимации произвольной непрерывной функции на отрезке.

Изучение операторов Лагранжа — Штурма — Лиувилля (1.1) также тесно связано с исследованием аппроксимативных свойств операторов интерполирования, построенных по решениям задач Коши с линейными дифференциальными выражениями второго порядка [26]. Операторы, предложенные в [26], являются обобщением операторов Лагранжа — Штурма — Лиувилля (1.1) и классических синк-приближений (1.3) одновременно. В [27] приводятся некоторые приложения результатов работы [26] к исследованию аппроксимативных свойств классических алгебраических интерполяционных многочленов Лагранжа с матрицей узлов интерполирования, каждая строка которой состоит из нулей многочленов Якоби $P_n^{\alpha_n, \beta_n}$ с параметрами, зависящими от n.

Изучению различных свойств операторов Лагранжа — Штурма — Лиувилля (1.1) посвящены также работы [28–34]. В работе [31] устанавливается существование непрерывной на $[0,\pi]$ функции, интерполяционный процесс Лагранжа — Штурма — Лиувилля (1.1) которой неограниченно расходится почти всюду на $[0,\pi]$. Исследования, проведенные в [28–30], показывают, что задача представления непрерывной функции как предела значений операторов (1.1) некорректна по Адамару.

В монографии [34] приведены более подробные доказательства и исправлены опечатки, обнаруженные в некоторых формулах более ранних публикаций.

В настоящей работе, используя концепции исследований в [35–42], установлена равномерная внутри интервала (a,b) сходимость интерполяционных процессов (1.1), построенных по решениям задачи Штурма — Лиувилля (1.2) для непрерывных на $[0,\pi]$ и имеющих ограниченное изменение на $[a,b]$ функций f.

В этой работе будем считать потенциал q задачи Штурма — Лиувилля (1.2) непрерывной функцией с ограниченным изменением на $[0,\pi]$. Пусть также каждая собственная функция будет удовлетворять условию нормировки $U_n(0)=1$. Рассматриваем краевые условия (1.2) третьего рода, из которых исключены условия первого рода, т. е. $h\neq\pm\infty$, $H\neq\pm\infty$. Для любых $0\leqslant a<b\leqslant\pi$, $0<\varepsilon<(b-a)/2$ индексы p_1, p_2, m_1 и m_2 определим с помощью соотношений

$$
\begin{gathered}
x_{p_1,n}\leqslant a+\varepsilon<x_{p_1+1,n},\quad x_{p_2,n}\leqslant b-\varepsilon<x_{p_2+1,n},\\
x_{k_1-1,n}<a\leqslant x_{k_1,n},\quad x_{k_2+1,n}\leqslant b<x_{k_2+2,n},\\
m_1=\left[\frac{k_1}{2}\right]+1,\quad m_2=\left[\frac{k_2}{2}\right]
\end{gathered}
\tag{1.4}
$$

после добавления к множеству нулей $x_{1,n}<x_{2,n}<\dots<x_{n,n}$ n-ой собственной функции U_n точек $x_{0,n}=0$ и $x_{n+1,n}=\pi$. Здесь $[z]$ обозначает целую часть числа z. Если не оговорено иное, штрих у суммы в этой работе будет означать отсутствие слагаемого со знаменателем, равным нулю.

Модуль непрерывности функции $f\in C[0,\pi]$ обозначим, как обычно,

$$
\omega(f,\delta)=\sup_{\substack{|h|<\delta;\\ x,x+h\in[0,\pi]}}|f(x+h)-f(x)|.
$$

Будем называть модулем изменения функции f на отрезке $[a,b]$ функцию натурального аргумента

$$
v(n,f)=\sup_{T_n}\sum_{k=0}^{n-1}\bigl|f(t_{k+1})-f(t_k)\bigr|,
$$

где $T_n=\{a\leqslant t_0<t_1<t_2<\dots<t_{n-1}<t_n\leqslant b\}$, $n\in\mathbb{N}$. Заметим, что функция f является функцией ограниченной вариации на отрезке $[a,b]$, т. е. $f\in V[a,b]$, если существует константа M_f такая, что для любого натурального n справедливо неравенство $v(n,f)\leqslant M_f$.

Теорема 1.1. *Пусть $0\leqslant a<b\leqslant\pi$, $0<\varepsilon<(b-a)/2$. Для любой функции $f\in C[0,\pi]\cap V[a,b]$ выполняется соотношение*

$$
\lim_{n\to\infty}\|f-L_n^{SL}(f,\cdot)\|_{C[a+\varepsilon,b-\varepsilon]}=0,
\tag{1.5}
$$

где оператор Лагранжа — Штурма — Лиувилля $L_n^{SL}(f,\cdot)$ определен в (1.1).

Замечание 1.1. При этом на множестве $[0,\pi]\setminus[a,b]$ соотношение

$$\lim_{n\to\infty}|f(x)-L_n^{SL}(f,x)|=0$$

может вовсе не выполняться (см., например, [28, 31, 34]).

2. Вспомогательные утверждения

Прежде чем доказывать эту теорему убедимся в справедливости ряда вспомогательных утверждений.

Лемма 2.1. *Пусть U_n — собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n, регулярной задачи Штурма — Лиувилля (1.2). Через $0<x_{1,n}<x_{2,n}<\dots<x_{n,n}<\pi$ обозначим нули функции U_n. Тогда имеют место следующие асимптотические формулы:*

$$U_n(x)=\cos nx+\frac{\beta(x)}{n}\sin nx+O(n^{-2}),\tag{2.1}$$

$$U_n'(x)=-n\sin nx+\beta(x)\cos nx+O(n^{-1}),\tag{2.2}$$

$$U_n''(x)=-n^2\cos nx-n\beta(x)\sin nx+O(1),\tag{2.3}$$

$$U_n'(x_{k,n})=(-1)^k n+O(n^{-1}),\tag{2.4}$$

$$x_{k,n}=\frac{2k-1}{2n}\pi+n^{-2}\beta\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)+O(n^{-3}),\tag{2.5}$$

$$\sqrt{\lambda_n}=n+O(n^{-1}),\tag{2.6}$$

где

$$\beta(x)=-cx+h+\frac{1}{2}\int\limits_0^x q(\tau)\,d\tau,$$

$c=\frac{1}{\pi}\Big(h+H+\frac{1}{2}\int_0^\pi q(\tau)\,d\tau\Big)$, а оценка остаточного члена во всех формулах (2.1)–(2.5) равномерна по $x\in[0,\pi]$ или $1\leqslant k\leqslant n$.

$\lhd$ По поводу доказательства (2.1), (2.2) и (2.6) смотрите, например, [44]. Убедимся в справедливости (2.5). Пусть $x_{k,n}$ — k-ый нуль собственной функции U_n. Из асимптотической формулы (2.1) получаем соотношение

$$\left|\cos nx_{k,n}+\frac{\beta(x_{k,n})}{n}\sin nx_{k,n}\right|=O(n^{-2}).$$

Положив $\cos\alpha_{k,n}:=\frac{n}{\sqrt{n^2+\beta^2(x_{k,n})}}$, получим асимптотическую формулу

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}+nx_{k,n}-\alpha_{k,n}\right)\right|=O(n^{-2}).$$

Следовательно, имеем соотношение $\left|\frac{\pi}{2}+nx_{k,n}-\alpha_{k,n}-\pi k\right|=O(n^{-2})$. Но функция β, по крайней мере, один раз непрерывно дифференцируема, поэтому имеет место асимптотическая формула

$$x_{k,n}=\frac{2k-1}{2n}\pi+n^{-2}\beta\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)+O(n^{-3}).$$

Формула (2.3) следует из (2.1) и (1.2), а (2.4) — из (2.2) и (2.5). $\rhd$

Замечание 2.1. Из асимптотической формулы (2.1) видно, что выбранная нормировка собственных функций U_n обеспечивает их ограниченность в совокупности. Обозначим

$$\mathbb{M}=\sup\bigl\{|U_n(x)|:\, x\in[0,\pi], n\in\mathbb{N}\bigr\}<\infty, \tag{2.7}$$

Пусть $\rho_\lambda = o\bigl(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\bigr)$ при $\lambda\to+\infty$. Считаем, что значения функции $h(\lambda)\in\mathbb{R}$ для произвольного неотрицательного λ. Обозначим через q_λ произвольную функцию из шара $V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ радиуса ρ_λ в пространстве функций ограниченной вариации, исчезающих в нуле, т. е.

$$V_0^\pi[q_\lambda]\leqslant\rho_\lambda,\quad \rho_\lambda=o\biggl(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\biggr),\quad \lambda\to\infty,\ q_\lambda(0)=0. \tag{2.8}$$

Для произвольного потенциала $q_\lambda\in V_{\rho_\lambda}[0,\pi]$ при $\lambda\to+\infty$ нули решения задачи Коши

$$\begin{cases} y''+\bigl(\lambda-q_\lambda(x)\bigr)\,y=0,\\ y(0,\lambda)=1,\quad y'(0,\lambda)=h(\lambda), \end{cases} \tag{2.9}$$

или, при дополнительном условии $h(\lambda)\neq 0$

$$V_0^\pi[q_\lambda]\leqslant\rho_\lambda,\quad \rho_\lambda=o\biggl(\frac{\sqrt{\lambda}}{\ln\lambda}\biggr),\quad \lambda\to\infty,\ q_\lambda(0)=0,\ h(\lambda)\neq 0, \tag{2.10}$$

задачи Коши

$$\begin{cases} y''+\bigl(\lambda-q_\lambda(x)\bigr)y=0,\\ y(0,\lambda)=0,\quad y'(0,\lambda)=h(\lambda), \end{cases} \tag{2.11}$$

попадающих в отрезок $[0,\pi]$, пронумеруем следующим образом:

$$0\leqslant x_{0,\lambda}<x_{1,\lambda}<\ldots<x_{n(\lambda),\,\lambda}\leqslant\pi\quad (x_{-1,\lambda}<0,\quad x_{n(\lambda)+1,\lambda}>\pi).$$

(Здесь $x_{-1,\lambda}<0$, $x_{n(\lambda)+1,\lambda}>\pi$ обозначают нули какого-либо продолжения решения задачи Коши (2.9) или (2.11) при сохранении ограниченности вариации потенциала q_λ вне $[0,\pi]$). В [26, 34] описано множество непрерывных на отрезке $[0,\pi]$ функций f, допускающих равномерную внутри интервала $(0,\pi)$ аппроксимацию значениями операторов следующего вида. Определим оператор, построенный по решениям задачи Коши (2.9) или (2.11), ставящий в соответствие каждой конечнозначной на множестве $\{x_{k,\lambda}\}_{k=0,n=1}^{n,\infty}$ непрерывную функцию по правилу

$$S_\lambda(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda},\lambda)(x-x_{k,\lambda})}f(x_{k,\lambda})=\sum_{k=0}^{n}s_{k,\lambda}(x)f(x_{k,\lambda}). \tag{2.12}$$

Очевидно, что значение оператора (2.12) интерполирует функцию f в узлах $\{x_{k,\lambda}\}_{k=0}^{n}$.

Обозначим $C_0[0,\pi]=\{f:\,f\in C[0,\pi],\ f(0)=f(\pi)=0\}$. При приближении с помощью операторов (1.1) функций $f\in C[0,\pi]\setminus C_0[0,\pi]$ вблизи концов отрезка $[0,\pi]$ возникает явление Гиббса (см., например, [21, теорема 2], [34]). Заметим, что эта проблема решается с помощью обобщения оператора (2.12), предложенного в [26, формула (1.9)], [34], вида

$$T_\lambda(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{y(x,\lambda)}{y'(x_{k,\lambda})(x-x_{k,\lambda})}\biggl\{f(x_{k,\lambda})-\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x_{k,\lambda}-f(0)\biggr\}+\frac{f(\pi)-f(0)}{\pi}x+f(0),$$

где $y(x,\lambda)$ — решение задачи Коши (2.9) или (2.11) и $x_{k,\lambda}$ — нули этого решения.

В следующей лемме выделяется главная часть погрешности аппроксимации функций $f\in C_0[0,\pi]$ с помощью операторов вида (2.12).

Лемма 2.2 [26, предложение 9], [34]**.** *Пусть $y(x,\lambda)$ — решение задачи Коши (2.9) или (2.11), и предположим, что в случае задачи Коши (2.9) выполняются условия (2.8), а в случае задачи Коши (2.11) — условия (2.10). Если $f \in C_0[0,\pi]$, то равномерно на $[0,\pi]$ справедливо соотношение*

$$\lim_{\lambda\to\infty}\left(f(x) - S_\lambda(f,x) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\bigl(f(x_{k+1,\lambda}) - f(x_{k,\lambda})\bigr)s_{k,\lambda}(x)\right) = 0. \tag{2.13}$$

Далее, нам потребуются следующие утверждения.

Лемма 2.3. *Пусть U_n — собственная функция, соответствующая собственному значению λ_n, регулярной задачи Штурма — Лиувилля (1.2). Тогда существует константа C_1, зависящая только от q, h, H, такая, что для всех $x \in [0,\pi]$ и всех $n = 1,2,3,\ldots$ справедливо неравенство*

$$\left|l^{SL}_{k,n}(x)\right| = \left|\frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})}\right| \leqslant C_1. \tag{2.14}$$

◁ Если для каких либо $1 \leqslant k \leqslant n$ и $n \in \mathbb{N}$ окажется $x = x_{k,n}$, то $\left|l^{SL}_{k,n}(x)\right| = 1$. Рассмотрим теперь случай $x \neq x_{k,n}$. Пусть сначала $0 < |x - x_{k,n}| \leqslant n^{-1}$, $x \in [0,\pi]$. Тогда по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа из (2.3) и (2.4) следует неравенство

$$\left|l^{SL}_{k,n}(x)\right| \leqslant \left|\frac{U_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n}) + U_n''(\xi_{k,n})(x - x_{k,n})^2/2}{U_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})}\right| = 1 + \frac{O(n^2)}{n + O(n^{-1})}\frac{1}{n} \leqslant C_{1,1}$$

для некоторой константы $C_{1,1}$, выбор которой зависит только от параметров задачи Штурма — Лиувилля q, h и H. Осталось рассмотреть случай $|x - x_{k,n}| > n^{-1}$, $x \in [0,\pi]$. В силу асимптотических формул (2.1) и (2.4) существует константа $C_{1,2}$, для которой справедливо неравенство

$$\left|l^{SL}_{k,n}(x)\right| \leqslant n\left|\frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})}\right| \leqslant \left|\frac{\cos nx + \frac{\beta(x)}{n}\sin nx + O(n^{-2})}{n + O(n^{-1})}\right| n \leqslant C_{1,2}.$$

Положив $C_1 = \max(C_{1,1}, C_{1,2})$, убедимся в справедливости леммы 2.3. ▷

Лемма 2.4. *Существуют константа C_2 и номер $n_0 \in \mathbb{N}$, не зависящие от функции $f \in C[0,\pi]$, $0 \leqslant a < b \leqslant \pi$ и $0 < \varepsilon < (b-a)/2$ такие, что для произвольных $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ и $n > n_0$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{2}\sum_{k\in[1,n-1]\setminus[k_1,k_2]}\left|\bigl(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})\bigr)l^{SL}_{k,n}(x)\right| \leqslant C_2\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\ln\frac{\pi}{\varepsilon}. \tag{2.15}$$

◁ Введем обозначение

$$\psi_{k,n} = f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n}), \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1;\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.16}$$

Учитывая, что $f \in C[0,\pi]$ и (2.5), убедимся, что существует константа C_3 такая, что справедлива оценка

$$|\psi_{k,n}| \leqslant C_3\omega\Bigl(f,\frac{\pi}{n}\Bigr), \quad 1 \leqslant k \leqslant n-1;\ n \in \mathbb{N}. \tag{2.17}$$

Возьмем произвольное $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$. Сумму в (2.15) представим в виде двух слагаемых, каждое из которых оценим следующим образом:

$$\sum_{k\in[1,n-1]\setminus[k_1,k_2]} \left|\psi_{k,n} l_{k,n}^{SL}(x)\right| \leqslant C_3\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}|l_{k,n}^{SL}(x)| + \sum_{k=k_2+1}^{n-1}|l_{k,n}^{SL}(x)|\right).$$

Воспользовавшись (2.2), (2.4) и формулой конечных приращений Лагранжа, продолжим оценку суммы в (2.15) следующим образом:

$$\sum_{k\in[1,n-1]\setminus[k_1,k_2]} \left|\psi_{k,n} l_{k,n}^{SL}(x)\right| \leqslant C_3\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)\frac{|U_n(x)|}{n}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}\frac{1}{|x-x_{k,n}|} + \sum_{k=k_2+1}^{n}\frac{1}{|x-x_{k,n}|}\right)$$
$$+ C_3\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)\sum_{k\in[1,n-1]\setminus[k_1,k_2]}\left|\frac{|U_n(x)|}{|U_n'(x_{k,n})||x-x_{k,n}|} - \frac{|U_n(x)|}{n|x-x_{k,n}|}\right|$$
$$= C_3\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)\frac{|U_n(x)|}{n}\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}\frac{1}{|x-x_{k,n}|} + \sum_{k=k_2+1}^{n}\frac{1}{|x-x_{k,n}|}\right) + \omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)O(n^{-1}).$$

Из асимптотической формулы (2.5) для нулей собственных функций U_n находим номер n_0, выбор которого зависит только от параметров задачи Штурма — Лиувилля, начиная с которого будет выполняться неравенство

$$\min_{1\leqslant k\leqslant n-1}|x_{k+1,n}-x_{k,n}| \geqslant \frac{\pi}{2n}. \tag{2.18}$$

В силу того, что $\max_{x\in(0,\pi)}\big\{\ln|x(\pi-x)|\big\} = 2\ln\frac{\pi}{2}$, $\inf\ln\frac{\pi}{\varepsilon} \geqslant \ln 2$, (2.7) и (2.18) сумму в (2.15) равномерно на всем отрезке $[a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ можно оценить таким образом:

$$\sum_{k\in[1,n-1]\setminus[k_1,k_2]} \left|\psi_{k,n} l_{k,n}^{SL}(x)\right| \leqslant C_3\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)\frac{|U_n(x)|}{n}$$
$$\times\left(\sum_{k=1}^{k_1-1}\frac{1}{x_{k+1,n}-x_{k,n}}\int_{x_{k,n}}^{x_{k+1,n}}\frac{dt}{x-t} + \sum_{k=k_2+1}^{n-1}\frac{1}{x_{k,n}-x_{k-1,n}}\int_{x_{k-1,n}}^{x_{k,n}}\frac{dt}{t-x}\right)$$
$$+\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)O(n^{-1}) \leqslant \left(\frac{4C_3\mathbb{M}}{\pi} + \frac{1}{\ln\frac{\pi}{\varepsilon}}O(n^{-1})\right)\ln\frac{\pi}{\varepsilon}\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big). \tag{2.19}$$

Откуда следует существование константы C_2, выбор которой зависит только от параметров задачи Штурма — Лиувилля (1.2). $\rhd$

Для любых $0\leqslant a<b\leqslant\pi$, $0<\varepsilon<(b-a)/2$ обозначим

$$Q_n^*(f,[a,b],\varepsilon) := \max_{p_1\leqslant p\leqslant p_2}\sum_{m=m_1}^{m_2}{}'\left|\frac{f(x_{2m+1,n})-f(x_{2m,n})}{p-2m}\right|. \tag{2.20}$$

Лемма 2.5. *Если функция $f\in C[0,\pi]$, то из соотношения*

$$\lim_{\lambda\to\infty}Q_n^*(f,[a,b],\varepsilon) = 0 \tag{2.21}$$

следует утверждение (1.5).

$\lhd$ Заметим, что из (2.16), (2.2) и (2.4) вытекает равномерная на всем отрезке $[0,\pi]$ оценка

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=k_1}^{k_2}\big(f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})\big)l_{k,n}^{SL}(x)-\sum_{k=k_1}^{k_2}\psi_{k,n}\frac{(-1)^kU_n(x)}{n(x-x_{k,n})}\right|\\ \leqslant\sum_{k=k_1}^{k_2}|\psi_{k,n}|\left|\frac{U_n(x)}{(x-x_{k,n})}\right|\left|\frac{(-1)^kn-U_n'(x_{k,n})}{nU_n'(x_{k,n})}\right|=\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big)O(n^{-1}).\end{aligned}\tag{2.22}$$

Положив в случае задачи Коши (2.9) $h(\lambda)\equiv h$, $\lambda=\lambda_n$, где λ_n — собственное значение задачи Штурма — Лиувилля (1.2), получим тождество $U_n(x)\equiv y(x,\lambda_n)$. Следовательно, значения операторов (1.1) и (2.12) при $\lambda=\lambda_n$ тождественно совпадают. Из (2.15), леммы 2.2 в случае задачи Коши (2.9) $\lambda=\lambda_n$ и (2.22) получаем соотношение

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-L_n^{SL}(f,x)-\frac12\sum_{k=0}^{n-1}\big(f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})\big)l_{k,n}^{SL}(x)\right)\\ =\lim_{n\to\infty}\left(f(x)-L_n^{SL}(f,x)-\frac12\sum_{k=k_1}^{k_2}\psi_{k,n}\frac{(-1)^kU_n(x)}{n(x-x_{k,n})}\right)=0.\end{aligned}\tag{2.23}$$

Выберем и зафиксируем некоторое $x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$. Найдем индекс $p=p(x,\lambda)$, для которого выполняется соотношение $x\in[x_{p,n},x_{p+1,n})$. Тогда $x=x_{p,n}+\alpha(x_{p+1,n}-x_{p,n})$, где $\alpha=\alpha(x,\lambda)\in[0,1)$, и

$$x-x_{k,n}=\frac{p-k+\alpha+\beta_{k,n}}{n}\pi.$$

Из (2.17) и (2.5) одновременно для всех $x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ и настолько больших n, что для всех $1\leqslant k\leqslant n-1$ имеет место неравенство $|\beta_{k,n}|<1$, справедлива оценка

$$\begin{aligned}\left|\sum_{\substack{k:k_1\leqslant k\leqslant k_2;\\ |p-k|\geqslant3}}\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k+\alpha+\beta_{k,n}}-\sum_{\substack{k:k_1\leqslant k\leqslant k_2;\\ |p-k|\geqslant3}}\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\right|\\ \leqslant C_3\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\sum_{\substack{k:k_1\leqslant k\leqslant k_2;\\ |p-k|\geqslant3}}\frac{\alpha}{|p-k|(|p-k|-2)}\leqslant3C_3\omega\Big(f,\frac{\pi}{n}\Big).\end{aligned}\tag{2.24}$$

Учитывая обозначение (2.16) разобьем сумму в (2.23) на два слагаемых

$$\frac12\sum_{k=k_1}^{k_2}\big(f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})\big)l_{k,n}^{SL}(x)=\frac12\sum_{\substack{k:k_1\leqslant k\leqslant k_2;\\ |p-k|\geqslant3}}\psi_{k,n}l_{k,n}^{SL}(x)+\frac12\sum_{\substack{k:k_1\leqslant k\leqslant k_2;\\ |p-k|<3}}\psi_{k,n}l_{k,n}^{SL}(x).\tag{2.25}$$

Следовательно, из неравенства треугольника, (2.14), (2.16), (2.17), (2.23) и (2.24) имеем равномерную по $x\in[a+\varepsilon,b-\varepsilon]$ оценку

$$\left|\frac12\sum_{k=k_1}^{k_2}\big(f(x_{k+1,n})-f(x_{k,n})\big)l_{k,n}^{SL}(x)-\frac{U_n(x)}{2\pi}{\sum_{k=k_1}^{k_2}}'\frac{(-1)^k\psi_{k,n}}{p-k}\right|=o(1).\tag{2.26}$$

Из (2.26) и (2.23) также равномерно по $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ вытекает соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x) - L_n^{SL}(f,x) - \frac{U_n(x)}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}' \frac{(-1)^k \psi_{k,n}}{p-k}\right) = 0. \tag{2.27}$$

Оценим последнее слагаемое в соотношении (2.27), используя (2.1), (2.7), (2.17) и неравенство треугольника,

$$\left|\frac{U_n(x)}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}' \frac{(-1)^k \psi_{k,n}}{p-k}\right| \leqslant 2\,\frac{\mathbb{M}}{2\pi}\sum_{m=m_1}^{m_2}{}'\left|\frac{\psi_{2m,n}}{p-2m}\right| + \frac{\mathbb{M}}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'\left|\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| + O\left(\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\right). \tag{2.28}$$

Можно подобрать последовательность натуральных чисел $\{l_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющую свойствам:

$$l_n = o(n), \quad \lim_{n\to\infty} l_n = \infty, \quad \lim_{\lambda\to\infty}\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{l_n}\frac{1}{k} = 0. \tag{2.29}$$

Оценим вторую сумму в (2.28) следующим образом:

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'\left|\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|\leqslant l_n}{}'\left|\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| + \frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|>l_n}{}'\left|\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right|. \tag{2.30}$$

Из неравенства (2.17) для достаточно больших n следует оценка

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|\leqslant l_n}{}'\left|\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|\leqslant l_n}{}'\left|\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| \leqslant \frac{C_3}{\pi}\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)\sum_{k=1}^{l_n}\frac{1}{k}. \tag{2.31}$$

Вторая сумма в (2.30) после преобразования Абеля в случае $k \in [k_1, k_2] : |p-k| > l_n$ может быть оценена следующим образом

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{k:|p-k|>l_n}{}'\left|\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| \leqslant \frac{4\|f\|_{C[a,b]}}{l_n+1} + 4\|f\|_{C[a,b]}\sum_{k=l_n}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}.$$

Отсюда, из (2.29), (2.30) и (2.31) равномерно по $x \in [a+\varepsilon, b-\varepsilon]$ получаем асимптотическую формулу

$$\frac{\mathbb{M}}{2\pi}\sum_{k=k_1}^{k_2}{}'\left|\frac{\psi_{k,n}}{p-k}\right| = o(1). \tag{2.32}$$

Теперь из (2.27), (2.28), (2.32) и неравенства треугольника получаем оценку

$$\left|f(x) - L_n^{SL}(f,x)\right| \leqslant \frac{\mathbb{M}}{\pi}\,Q_n^*(f,[a,b],\varepsilon) + o(1).$$

Следовательно, из выполнения условия (2.21) следует равномерная сходимость (1.5). $\triangleright$

3. Равномерная сходимость интерполяционных процессов Лагранжа — Штурма — Лиувилля внутри интервала (a,b)

Убедимся в справедливости утверждения сформулированной ранее теоремы 1.1.

$\lhd$ Доказательство теоремы 1.1. В силу непрерывности функции f на отрезке $[0,\pi]$, для любого положительного $\tilde{\epsilon}$ существуют натуральные числа ν и n_1 такие, что для всех $n \geqslant n_1$ $(n \in \mathbb{N})$ одновременно справедливы два соотношения

$$\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} < \frac{\tilde{\epsilon}}{6} \tag{3.1}$$

и

$$24\, \|f\|_{C[a,b]} < \tilde{\epsilon}\nu. \tag{3.2}$$

Пусть $n \geqslant n_1$. Найдем индекс p_0, зависящий от n, a, b, ε и f на котором достигается максимум в определении (2.20), т. е.

$$Q_n^*(f,[a,b],\varepsilon) = {\sum_{m=m_1}^{m_2}}' \left| \frac{f(x_{2m+1,n}) - f(x_{2m,n})}{p_0 - 2m} \right|.$$

Обозначим

$$Q_n^{**}(f,[a,b],\varepsilon) := {\sum_{k=k_1}^{k_2}}' \left| \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{p_0 - k} \right|.$$

Так как $Q_n^{**}(f,[a,b],\varepsilon)$ получается из $Q_n^*(f,[a,b],\varepsilon)$ добавлением неотрицательных слагаемых, то для любого натурального n справедливо неравенство

$$Q_n^*(f,[a,b],\varepsilon) \leqslant Q_n^{**}(f,[a,b],\varepsilon). \tag{3.3}$$

Разобьем $Q_n^{**}(f,[a,b],\varepsilon)$ на два слагаемых

$$Q_n^{**}(f,[a,b],\varepsilon) = {\sum_{k=k_1}^{k_2}}' \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0 - k|} - 2 {\sum_{k=k_1}^{k_2}}'' \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0 - k|} = S_1(p_0) + S_2(p_0), \tag{3.4}$$

где два штриха означают, что в сумме неотрицательных слагаемых и слагаемого с индексом $k = p_0$ нет.

Сначала займемся оценкой первой суммы. Для чего представим ее в виде

$$S_1(p_0) = \sum_{\substack{k:k\in[k_1,k_2],\\ 0<|p_0-k|<\nu}} \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0 - k|} + \sum_{\substack{k:k\in[k_1,k_2],\\ |p_0-k|\geqslant\nu}} \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0 - k|} = S_{1,1}(p_0) + S_{1,2}(p_0). \tag{3.5}$$

В случае $\{k : k \in [k_1,k_2],\ 0 < |p_0 - k| \geqslant \nu\} = \varnothing$ считаем второе слагаемое равным нулю.

Из неравенства (3.1) для всех $n \geqslant n_1$ имеем соотношение

$$|S_{1,1}(p_0)| \leqslant 2\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^{\nu} \frac{1}{k} < \frac{\tilde{\epsilon}}{3}. \tag{3.6}$$

Теперь оценим $S_{1,2}(p_0)$. Если для p_0 имеют место неравенства $p_0 - k_1 \geqslant \nu$ и $k_2 - p_0 \geqslant \nu$, то используем (3.2) и с помощью преобразования Абеля получим оценку

$$\begin{aligned} |S_{1,2}(p_0)| &\leqslant \left| \sum_{k=k_1}^{p_0-\nu} \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{p_0 - k} \right| + \left| \sum_{k=p_0+\nu}^{k_2} \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{k - p_0} \right| \\ &\leqslant 4\|f\|_{C[a,b]} \sum_{i=\nu}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{4\|f\|_{C[a,b]}}{\nu} \leqslant \frac{8\|f\|_{C[a,b]}}{\nu} < \frac{\tilde{\epsilon}}{3}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Точно также доказывается (3.7) в ситуации, когда индекс p_0 удовлетворяет одному из соотношений $p_0 - \nu < k_1 \leqslant p_0 < p_0 + \nu \leqslant k_2$ или $k_1 \leqslant p_0 - \nu < p_1 \leqslant k_2 < p_0 + \nu$. Из возможных вариантов остался случай, когда $p_0 - \nu < k_1 \leqslant p_1 \leqslant k_2 < p_0 + \nu$. В этой ситуации $|S_{1,2}(p_0)| = 0$.

Таким образом, из (3.5), (3.6) и (3.7) для всех $n \geqslant n_1$ имеем оценку

$$|S_1(p_0)| \leqslant \frac{2\tilde{\epsilon}}{3}. \tag{3.8}$$

Перейдем к изучению свойств суммы $S_2(p_0)$. Возьмем произвольное натуральное m : $1 \leqslant m \leqslant k_2 - k_1 - 2$ и представим $S_2(p_0)$ в виде двух слагаемых

$$\begin{aligned} S_2(p_0) = -2 &\sum_{\substack{k:k\in[k_1,k_2],\\ |p_0-k|\leqslant m}}{}^{''} \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0 - k|} \\ &- 2 \sum_{\substack{k:k\in[k_1,k_2],\\ |p_0-k|> m}}{}^{''} \frac{f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})}{|p_0 - k|} = S_{2,1}(p_0) + S_{2,2}(p_0). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Выберем достаточно большой номер $n_2 \geqslant n_1$, зависящий только от параметров задачи Штурма — Лиувилля, начиная с которого, в силу (2.5), будут выполняться неравенства $\max_{1\leqslant k\leqslant n} |x_{k+1,n} - x_{k,n}| \leqslant \frac{3\pi}{2n}$. Функция $f \in C[0, \pi]$, начиная с n_2 будем иметь соотношение

$$|f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})| \leqslant 10K_f\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right). \tag{3.10}$$

Поэтому,

$$S_{2,1}(p_0) = 2 \sum_{\substack{k:k\in[k_1,k_2],\\ |p_0-k|\leqslant m}}{}^{''} \frac{|f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})|}{|p_0 - k|} \leqslant 10K_f\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}. \tag{3.11}$$

Далее оценим сумму $S_{2,2}(p_0)$:

$$\begin{aligned} 0 \leqslant S_{2,2}(p_0) \leqslant 2 &\sum_{k=k_1}^{p_0-m-1} \frac{-(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n}))_-}{p_0 - k} \\ &+ 2 \sum_{k=p_0+m+1}^{k_2} \frac{-(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n}))_-}{k - p_0}, \end{aligned} \tag{3.12}$$

где $z_- = \frac{z-|z|}{2}$. Если $p_0 - m \leqslant k_1$ или $p_0 + m \geqslant k_2$, то в (3.12) исчезает соответственно первое или второе слагаемое. В случае $p_0 - m < k_1 < k_2 < p_0 + m$ сумма $S_{2,2}(p_0)$ в (3.9) вообще отсутствует. Учитывая то, что $f \in V[a,b]$, с помощью преобразования Абеля и (3.10) оценим (3.12)

$$0 \leqslant S_{2,2}(p_0) \leqslant 4M_f \sum_{k=m+1}^{k_2-k_1-1} \frac{v(k,f)}{k^2} + 10K_f\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right).$$

Отсюда (3.9), (3.11) и (3.12) имеем

$$0 \leqslant S_2(p_0) \leqslant 10K_f\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k} + 4M_f \sum_{k=m+1}^{k_2-k_1-1} \frac{v(k,f)}{k^2} + 10K_f\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right).$$

Положив при каждом $n \geqslant n_2$ $m := l_n$, выбранное как в (2.29), получим, что в силу ограниченности последовательности $\{v(k,f)\}_{k=1}^{\infty}$ и сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} v(k,f)/k^2$ существует номер $n_3 \in \mathbb{N}$, $n_3 \geqslant n_2$, такой, что для произвольного $n \geqslant n_3$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant S_2(p_0) \leqslant \frac{\tilde{\epsilon}}{3}.$$

Отсюда и из (3.3), (3.4), (3.5), (3.8) получаем, что для произвольного $\tilde{\epsilon} > 0$ можно найти номер $n_3 \in \mathbb{N}$ такой, что для всех $n > n_3$ будут справедливы неравенства $Q_n^*(f,[a,b],\varepsilon) \leqslant Q_n^{**}(f,[a,b],\varepsilon) < \tilde{\epsilon}$. Теорема 1.1 доказана. $\rhd$

Литература

1. *Kramer H. P.* A generalized sampling theorem // J. Math. Phus.—1959.—Vol. 38.—P. 68–72.
2. *Натансон Г. И.* Об одном интерполяционном процессе // Ученые записки Ленинград. пед. ин-та.—1958.—Т. 166.—С. 213–219.
3. *Новиков И. Я., Стечкин С. Б.* Основы теории всплесков // Успехи мат. наук.—1998.—Т. 53, № 6 (324).—С. 53–128.
4. *Новиков И. Я., Стечкин С. Б.* Основные конструкции всплесков // Фундамент. и прикл. математика.—1997.—Т. 3, № 4.—С. 999–1028.
5. *Stenger F.* Numerical Metods Based on Sinc and Analytic Functions.—N. Y.: Springer, 1993.—565 p.
6. *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам.—Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
7. *Oren E. Livne, Achi E. Brandt.* MuST: The multilevel sinc transform // SIAM J. Sci. Comput.—2011.—Vol. 33, № 4.—P. 1726–1738. DOI: 10.1137/100806904.
8. *Coroianu L., Sorin G. Gal.* Localization results for the non-truncated max-product sampling operators based on Fejer and sinc-type kernels // Demonstratio Mathematica.—2016.—Vol. 49, № 1.—P. 38–49.
9. *Richardson M., Trefethen L.* A sinc function analogue of Chebfun // SIAM J. Sci. Comput.—2011.—Vol. 33, № 5.—P. 2519–2535.
10. *Khosrow M., Yaser R., Hamed S.* Numerical Solution for First Kind Fredholm Integral Equations by Using Sinc Collocation Method // Int. J. Appl. Phy. Math.—2016.—Vol. 6, № 3.—P. 120–128.
11. *Трынин А. Ю.* Необходимые и достаточные условия равномерной на отрезке синк-аппроксимации функций ограниченной вариации // Изв. Сарат. ун-та. Нов. серия. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2016.—Т. 16, № 3.—С. 288–298.
12. *Trynin A. Yu., Sklyarov V. P.* Error of sinc approximation of analytic functions on an interval // Sampling Theory in Signal and Image Processing.—2008.—Vol. 7, № 3.—P. 263–270.
13. *Marwa M. Tharwat.* Sinc approximation of eigenvalues of Sturm–Liouville problems with a Gaussian multiplier // Calcolo: a Quarterly on Numerical Analysis and Theory of Computation.—2014.—Vol. 51, № 3.—P. 465–484. DOI: 10.1007/s10092-013-0095-3.
14. *Трынин А. Ю.* Об оценке аппроксимации аналитических функций интерполяционным оператором по синкам // Математика. Механика.—Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005.—Т. 7.—С. 124–127.

15. *Zayed A. I., Schmeisser G.* New Perspectives on Approximation and Sampling Theory, Applied and Numerical Harmonic Analysis.—N. Y.–Dordrecht–London: Springer Int. Publ. Switzerland, 2014. DOI: 10.1007/978-3-319-08801-3.
16. *Трынин А. Ю.* Оценки функций Лебега и формула Неваи для sinc-приближений непрерывных функций на отрезке // Сиб. мат. журн.—2007.—Т. 48, № 5.—С. 1155–1166.
17. *Трынин А. Ю.* Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке // Мат. сб.—2007.—Т. 198, № 10.—С. 141–158.
18. *Трынин А. Ю.* Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке // Изв. высш. учебных заведений. Математика.—2008.—№ 6.—С. 66–78.
19. *Sklyarov V. P.* On the best uniform sinc-approximation on a finite interval // East J. Approx.—2008—Vol. 14, № 2.—P. 183–192.
20. *Трынин А. Ю.* О расходимости синк-приближений всюду на $(0, \pi)$ // Алгебра и анализ.—2010.—Т. 22, № 4.—С. 232–256.
21. *Трынин А. Ю.* О некоторых свойствах синк-аппроксимаций непрерывных на отрезке функций // Уфимский мат. журн.—2015.—Т. 7, № 4.—С. 116–132.
22. *Шарапудинов И. И., Умаханов А. Я.* Интерполяция функций суммами Уиттекера их модификациями: условия равномерной сходимости // Владикавк. мат. журн.—2016.—Т. 18, № 4.—С. 61–70.
23. *Шарапудинов И. И., Умаханов А. Я.* Интерполяция функций суммами Уиттекера и их модификациями: условия равномерной сходимости // Материалы 18-й междунар. Саратовской зимней шк. «Современные проблемы теории функций и их приложения».—Саратов, 2016.—С. 332–334.
24. *Трынин А. Ю.* О необходимых и достаточных условиях сходимости синк-аппроксимаций // Алгебра и анализ.—2015.—Т. 27, № 5.—С. 170–194.
25. *Трынин А. Ю.* Приближение непрерывных на отрезке функций с помощью линейных комбинаций синков // Изв. высш. учебных заведений. Математика.—2016.—№ 3.—С. 72–81.
26. *Трынин А. Ю.* Обобщение теоремы отсчетов Уиттекера — Котельникова — Шеннона для непрерывных функций на отрезке // Мат. сб.—2009.—Т. 200, № 11.—С. 61—108. DOI: 10.4213/sm4502.
27. *Трынин А. Ю.* Об операторах интерполирования по решениям задачи Коши и многочленах Лагранжа — Якоби // Изв. РАН. Сер. Мат.—2011.—Т. 75, № 6.—С. 129–162. DOI: 10.4213/im4275.
28. *Трынин А. Ю.* Об отсутствии устойчивости интерполирования по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля // Изв. высш. учебных заведений. Математика.—2000.—Т. 9.—С. 60–73.
29. *Трынин А. Ю.* Дифференциальные свойства нулей собственных функций задачи Штурма — Лиувилля // Уфимский мат. журн.—2011.—Т. 3, № 4.—С. 133–143.
30. *Трынин А. Ю.* Об одной обратной узловой задаче для оператора Штурма — Лиувилля // Уфимский мат. журн.—2013.—Т. 5, № 4.—С. 116–129.
31. *Трынин А. Ю.* О расходимости интерполяционных процессов Лагранжа по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля // Изв. высш. учебных заведений. Математика.—2010.—Т. 11.—С. 74–85.
32. *Трынин А. Ю.* Принцип локализации для процессов Лагранжа — Штурма — Лиувилля // Математика. Механика: Сб. науч. тр.—Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2006.—Т. 8.—С. 137–140.
33. *Трынин А. Ю.* Об одном интегральном признаке сходимости процессов Лагранжа — Штурма — Лиувилля // Математика. Механика: Сб. науч. тр.—Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2007.—Т. 9.—С. 94–97.
34. *Трынин А. Ю.* Теорема отсчетов на отрезке и ее обобщения.—LAP LAMBERT Acad. Publ., 2016.—488 с.
35. *Голубов Б. И.* Сферический скачок функции и средние Бохнера — Рисса сопряженных кратных рядов и интегралов Фурье // Мат. заметки.—2012.—Т. 91, № 4.—С. 506–514.
36. *Дьяченко М. И.* Об одном классе методов суммирования кратных рядов Фурье // Мат. сб.—2013.—Т. 204, № 3.—С. 3–18.
37. *Скопина М. А., Максименко И. Е.* Многомерные периодические всплески // Алгебра и анализ.—2003.—Т. 15, № 2.—С. 1–39.
38. *Дьяченко М. И.* Равномерная сходимость гиперболических частичных сумм кратных рядов Фурье // Мат. заметки.—2004.—Т. 76, № 5.—С. 723–731.
39. *Borisov D. I., Dmitriev S. V.* On the spectral stability of kinks in 2D Klein–Gordon model with parity-time-symmetric perturbation // Stud. Appl. Math.—2017.—Vol. 138, № 3.—P. 317–342.
40. *Голубов Б. И.* Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье // Мат. заметки.—1985.—Т. 37, № 1.—С. 13–24.
41. *Борисов Д. И., Знойил М.* О собственных значениях $\mathscr{P}\mathscr{T}$-симметричного оператора в тонком слое // Мат. сб.—2017.—Т. 208, № 2.—С. 3–30.
42. *Иванникова Т. А., Тимашова Е. В., Шабров С. А.* О необходимом условии минимума квадратич-

ного функционала с интегралом Стилтьеса и нулевым коэффициентом при старшей производной на части интервала // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика.—2013.—Т. 13, № 2 (1).—С. 3–8.
43. *Фарков Ю. А.* О наилучшем линейном приближении голоморфных функций // Фундамент. и прикл. математика.—2014.—Т. 19, № 5.—С. 185–212.
44. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 1, 2.—М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1953.

Статья поступила 13 июня 2017 г.

Трынин Александр Юрьевич
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского,
РОССИЯ, 410012, Саратов, ул. Астраханская, 83
профессор кафедры математической экономики
E-mail: atrynin@gmail.com, tayu@rambler.ru
https://orcid.org/0000-0002-6304-4962

Vladikavkaz Mathematical Journal
2018, Volume 20, Issue 4, P. 76–91

CONVERGENCE OF THE LAGRANGE–STURM–LIOUVILLE PROCESSES FOR CONTINUOUS FUNCTIONS OF BOUNDED VARIATION

Trynin, A. Y.[1]

[1] Saratov State University, 83 Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia
E-mail: atrynin@gmail.com

Abstract. The uniform convergence within an interval $(a, b) \subset [0, \pi]$ of Lagrange processes in eigenfunctions $L_n^{SL}(f, x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) \frac{U_n(x)}{U_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})}$ of the Sturm–Liouville problem is established. (Here $0 < x_{1,n} < x_{2,n} < \cdots < x_{n,n} < \pi$ denote the zeros of the eigenfunction U_n of the Sturm–Liouville problem.) A continuous functions f on $[0, \pi]$ which is of bounded variation on $(a, b) \subset [0, \pi]$ can be uniformly approximated within the interval $(a, b) \subset [0, \pi]$. A criterion for uniform convergence within an interval (a, b) of the constructed interpolation processes is obtained in terms of the maximum of the sum of the moduli of divided differences of the function f. Outside the interval (a, b), the Lagrange interpolation process may diverge. The boundedness in the totality of the Lagrange fundamental functions constructed from eigenfunctions of the Sturm–Liouville problem is established. The case of the regular Sturm–Liouville problem with a continuous potential of bounded variation is also considered. The boundary conditions for the third kind Sturm–Liouville problem without Dirichlet conditions are studied. In the presence of service functions for calculating the eigenfunctions of the regular Sturm–Liouville problem, the Lagrange–Sturm–Liouville operator under study is easily implemented by computer technology.

Key words: uniform convergence, sinc approximations, bounded variation, Lagrange–Sturm–Liouville processes.

Mathematical Subject Classification (2000): 41A05, 41A58, 94A12.

For citation: *Trynin, A. Y.* Convergence of the Lagrange–Sturm–Liouville Processes for Continuous Functions of Bounded Variation, *Vladikavkaz Math. J.*, 2018, vol. 20, no. 4, pp. 76–91 (in Russian). DOI: 10.23671/VNC.2018.4.23390.

References

1. *Kramer, H. P.* A Generalized Sampling Theorem, *J. Math. Phus.*, 1959, vol. 38, pp. 68–72.
2. *Natanson, G. I.* Ob odnom interpolyatsionnom protsesse, *Uchen. zapiski Leningrad. ped. in-ta im. A. I. Gertsena*, 1958, vol. 166, pp. 213–219. (in Russian).

3. *Novikov, I. Ya. and Stechkin, S. B.* Basic Wavelet Theory, *Russian Mathematical Surveys*, 1998, vol. 53, no. 6, pp. 1159–1231. DOI: 10.1070/RM1998v053n06ABEH000089.
4. *Novikov, I. Ya. and Stechkin, S. B.* Basic Constructions of Wavelets, *Fundamental and Applied Mathematics*, 1997, vol. 3, no. 4, pp. 999–1028. (in Russian).
5. *Stenger, F. Numerical Metods Based on Sinc and Analytic Functions*, N. Y., Springer, 1993, 565 p.
6. *Dobeshi, I. Ten Lectures on Wavelets, Society for Industrial and Appled Mathematics*, Philadelphia, Pennsylvana, 1992.
7. *Oren, E. Livne and Achi E. Brandt.* MuST: the Multilevel Sinc Transform, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2011 vol. 33, no. 4, pp. 1726–1738. DOI: 10.1137/100806904.
8. *Coroianu, L. and Sorin, G. Gal.* Localization results for the non-truncated max-product sampling operators based on Fejer and sinc-type kernels, *Demonstratio Mathematica*, 2016, vol. 49, no. 1, pp. 38–49.
9. *Richardson, M. and Trefethen, L.* A Sinc Function Analogue of Chebfun, *SIAM Journal on Scientific Computing*, 2011, vol. 33, no. 5, pp. 2519-–2535. DOI: 10.1137/110825947.
10. *Khosrow, M., Yaser, R. and Hamed, S.* Numerical Solution for First Kind Fredholm Integral Equations by Using Sinc Collocation Method, *International Journal of Applied Physics and Mathematics*, 2016, vol. 6, no. 3, pp. 88–94. DOI: 10.17706/ijapm.2016.6.3.88-94.
11. *Trynin, A. Yu.* Necessary and Sufficient Conditions for the Uniform on a Segment Sinc-Approximations Functions of Bounded Variation, *Izv. Saratov Univ. (N. S.), Ser. Math. Mech. Inform.,* vol. 16, no. 3, pp. 288–298 (in Russian). DOI: 10.18500/1816-9791-2016-16-3-288-298.
12. *Trynin, A. Yu. and Sklyarov, V. P.* Error of Sinc Approximation of Analytic Functions on an Interval, *Sampling Theory in Signal and Image Processing*, 2008, vol. 7, no 3, pp. 263–270.
13. *Marwa M. Tharwat.* Sinc Approximation of Eigenvalues of Sturm–Liouville Problems with a Gaussian Multiplier, *Calcolo: a Quarterly on Numerical Analysis and Theory of Computation*, 2014, vol. 51, no. 3, pp. 465–484. DOI: 10.1007/s10092-013-0095-3.
14. *Trynin, A. Yu.* On the Estimation of the Approximation of Analytic Functions by an Interpolation Operator with Respect to Syncs, *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics], Saratov, Saratov Univ., 2005, vol. 7, pp. 124–127. (in Russian).
15. *Zayed, A. I. and Schmeisser, G.* New Perspectives on Approximation and Sampling Theory, *Applied and Numerical Harmonic Analysis*, N. Y.–Dordrecht–London, Springer Int. Publ. Switzerland, 2014. DOI: 10.1007/978-3-319-08801-3.
16. *Trynin, A. Yu.* Estimates for the Lebesgue Functions and the Nevai Formula for the Sinc-Approximations of Continuous Functions on an Interval, *Siberian Mathematical Journal*, 2007, vol. 48, no. 5, pp. 929–938. DOI: 10.1007/s11202-007-0096-z.
17. *Trynin, A. Yu.* Tests for Pointwise and Uniform Convergence of Sinc Approximations of continuous functions on a Closed Interval, *Sbornik: Mathematics*, 2007, vol. 198, no. 10, pp. 1517–1534. DOI: 10.1070/SM2007v198n10ABEH003894.
18. *Trynin, A. Yu.* A Criterion for the Uniform Convergence of Sinc-Approximations on a Segment, *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 2008, vol. 52, no. 6, pp. 58–69. DOI: 10.3103/S1066369X08060078.
19. *Sklyarov, V. P.* On the Best Uniform Sinc-Approximation on a Finite Interval, *East Journal on Approximations*, 2008, vol. 14, no. 2, pp. 183–192.
20. *Trynin, A. Yu.* On Divergence of Sinc-Approximations Everywhere on $(0, \pi)$, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2011, vol. 22, pp. 683–701. DOI: 10.1090/S1061-0022-2011-01163-X.
21. *Trynin, A. Yu.* On Some Properties of Sinc Approximations of Continuous Functions on the Interval, *Ufa Mathematical Journal*, 2015, vol. 7, no. 4, pp. 111–126. DOI: 10.13108/2015-7-4-111.
22. *Umakhanov, A. Y. and Sharapudinov, I. I.* Interpolation of Functions by the Whittaker Sums and Their Modifications: Conditions for Uniform Convergence, *Vladikavkaz Math. J.*, 2016, vol. 18, pp. 61–70. DOI: 10.23671/VNC.2016.4.5995.
23. *Umakhanov, A. Y. and Sharapudinov, I. I.* Interpolation of Functions by Whittaker Sums and their Modifications: Conditions of Uniform Convergence, *Materialy 18th Intern. Saratov Winter School. «Modern Problems of the Theory of Functions and their Applications»*, Saratov, 2016, pp. 332–334.
24. *Trynin, A. Yu.* On Necessary and Sufficient Conditions for Convergence of Sinc-Approximations, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2016, vol. 27, no. 5, pp. 825–840. DOI: 10.1090/spmj/1419.
25. *Trynin, A. Yu.* Approximation of Continuous on a Segment Functions with the Help of Linear Combinations of Sincs, *Russian Mathematics (Iz. VUZ)*, 2016, vol. 60, no. 3, pp. 63–71. DOI: 10.3103/S1066369X16030087.
26. *Trynin, A. Yu.* A Generalization of the Whittaker–Kotel'nikov–Shannon Sampling Theorem for Continuous Functions on a Closed Interval, *Sbornik: Mathematics*, 2009, vol. 200, no. 11, pp. 1633–1679. DOI: 10.1070/SM2009v200n11ABEH004054.

27. *Trynin, A. Yu.* On Operators of Interpolation with Respect to Solutions of a Cauchy Problem and Lagrange–Jacobi Polynomials, *Izvestiya: Mathematics*, 2011, vol. 75, no. 6, pp. 1215–1248. DOI: 10.1070/IM2011v075n06ABEH002570.
28. *Trynin, A. Yu.* On the Absence of Stability of interpolation in Eigenfunctions of the Sturm–Liouville Problem, *Russian Mathematics* (*Iz. VUZ*), 2000, vol. 44, no. 9, pp. 58–71.
29. *Trynin, A. Yu.* Differential Properties of Zeros of Eigenfunctions of the Sturm–Liouville Problem, *Ufa Mathematical Journal*, 2011, vol. 3, no. 4, pp. 130–140.
30. *Trynin, A. Yu.* On Inverse Nodal Problem for Sturm–Liouville Operator, *Ufa Mathematical Journal*, 2013, vol. 5, no. 4, pp. 112–124. DOI: 10.13108/2013-5-4-112.
31. *Trynin, A. Yu.* The Divergence of Lagrange Interpolation Processes in Eigenfunctions of the Sturm–Liouville Problem, *Russian Mathematics* (*Iz. VUZ*), 2010, vol. 54, no. 11, pp. 66–76. DOI: 10.3103/S1066369X10110071.
32. *Trynin, A. Yu.* Localization Principle for Lagrange–Sturm–Liouville Processes, *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics], Saratov, Saratov Univ., 2005, vol. 8, pp. 137–140 (in Russian).
33. *Trynin, A. Yu.* On one Integral Sign of Convergence of Lagrange–Sturm–Liouville Processes, *Matematika. Mekhanika* [Mathematics. Mechanics], Saratov, Saratov Univ., 2007, vol. 9, pp. 94–97.
34. *Trynin, A. Yu. Teorema otschetov na otrezke i ee obobscheniya,* LAP LAMBERT Acad. Publ., 2016, 488 p. (in Russian).
35. *Golubov, B. I.* Spherical Jump of a Function and the Bochner–Riesz Means of Conjugate Multiple Fourier Series and Fourier Integrals, *Mathematical Notes*, 2012, vol. 91, no. 3–4, pp. 479–486. DOI: 10.4213/mzm8739.
36. *Dyachenko, M. I.* On a Class of Summability Methods for Multiple Fourier Series, *Sbornik: Mathematics*, 2013, vol. 204, no. 3, pp. 307–322. DOI: 10.4213/sm8118.
37. *Maksimenko, I. E. and Skopina, M. A.* Multidimensional Periodic Wavelets, *St. Petersburg Mathematical Journal*, 2004, vol. 15, no. 2, pp. 165–190. DOI: 10.1090/S1061-0022-04-00808-8.
38. *Dyachenko, M. I.* Uniform Convergence of Hyperbolic Partial Sums of Multiple Fourier Series, *Mathematical Notes*, 2004, vol. 76, no. 5, pp. 673–681. DOI: 10.4213/mzm139.
39. *Borisov, D. I. and Dmitriev, S. V.* On the Spectral Stability of Kinks in 2D Klein-Gordon Model with Parity-Time-Symmetric Perturbation, *Studies in Applied Mathematics*, 2017, vol. 138, no. 3, pp. 317–342.
40. *Golubov, B. I.* Absolute Convergence of Multiple Fourier Series, *Mathematical Notes*, 1985, vol. 37, no. 1, pp. 8–15. DOI: 10.1007/BF01652507.
41. *Borisov, D. I. and Znojil, M.* On Eigenvalues of a $\mathscr{P}\mathscr{T}$-Symmetric Operator in a thin Layer, *Sbornik: Mathematics*, 2017, vol. 208, no. 2, pp. 173–199. DOI: 10.1070/SM8657.
42. *Ivannikova, T. A., Timashova, E. V. and Shabrov, S. A.* On Necessary Conditions for a Minimum of a Quadratic Functional with a Stieltjes Integral and Zero Coefficient of the Highest Derivative on the Part of the Interval, *Izv. Saratov Univ.* (*N. S.*)*, Ser. Math. Mech. Inform.*, 2013, vol. 13, no. 2(1), pp. 3–8. (in Russian).
43. *Farkov, Yu. A.* On the Best Linear Approximation of Holomorphic Functions, *Journal of Mathematical Sciences*, 2016, vol. 218, no. 5, pp. 678–698. DOI: 10.1007/s10958-016-3050-4.
44. *Sansone, D. Obyknovennye differencial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Moscow, Foreign Languages Publ. House, 1953, vol. 1, 2.

Received June 13, 2017

Alexandr Yu. Trynin
Saratov State University,
83 Astrakhanskaya Str., Saratov 410012, Russia,
Professor of the Department of Mathematical Economics
E-mail: `atrynin@gmail.com`, `tayu@rambler.ru`
https://orcid.org/0000-0002-6304-4962

ПРАВИЛА ДЛЯ АВТОРОВ

Общие положения

1. Периодическое издание «Владикавказский математический журнал» публикует оригинальные научные статьи отечественных и зарубежных авторов, содержащие новые математические результаты по функциональному и комплексному анализу, алгебре, геометрии, дифференциальным уравнениям и математической физике. По заказу редакционной коллегии журнал также публикует обзорные статьи. Журнал предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов. Периодичность — четыре выпуска в год. «Владикавказский математический журнал» публикует статьи на русском и английском языках, объемом, как правило, не более 2 усл.п.л. (17 страниц формата А4). Работы, превышающие 2 усл.п.л., принимаются к публикации по специальному решению Редколлегии журнала. Срок рассмотрения статей обычно не превышает 8 месяцев. При подготовке статей для ускорения их рассмотрения и публикации следует соблюдать правила для авторов.

2. К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Результаты иных авторов, использованные в статье, следует должным образом отразить в ссылках. Направляя статью в журнал, авторы тем самым подтверждают, что для нее выполнены указанные требования.

3. Направляя статью в журнал, каждый из авторов подтверждает, что статья соответствует наивысшим стандартам публикационной этики для авторов и соавторов, разработанным COPE (Committee on Publication Ethics), см. http://publicationethics.org/about.

4. Все материалы, поступившие для публикации в журнале, подлежат регистрации с указанием даты поступления рукописи в редакцию журнала. Решение о публикации, отказе в публикации или направлении рукописи автору для доработки должно быть принято главным редактором и сообщено автору не позднее 4 месяцев со дня поступления рукописи в редакцию журнала. Подробнее см. в разделе Рецензирование.

5. Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего окончательный макет статьи в формате PDF направляется автору на корректуру.

6. Условием публикации статей, принятых к печати, является подписанием авторами договора о передаче авторских прав. Бланк договора можно скачать по ссылке.

7. Полнотекстовые версии статей, публикуемых в журнале, размещаются в Интернете в свободном доступе на официальном сайте журнала http://www.vlmj.ru, а также на сайтах Научной электронной библиотеки eLIBRARY.RU, Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и Научной электронной библиотеки «КиберЛенинка».

8. Публикации в журнале для авторов бесплатны.

Подготовка и представление рукописи статьи

1. Все материалы предоставляются в редакцию в электронном виде. Рукопись должна быть тщательно выверена. Все страницы рукописи, включая рисунки, таблицы и список литературы, следует пронумеровать.

2. Работа должна быть подготовлена на компьютере в издательской системе LaTeX. Машинописные рукописи и рукописи, набранные на компьютере в системах, отличных от TeX, не рассматриваются. Файлы статьи *.tex и *.ps (*.pdf) высылаются в адрес редакции по электронной почте rio@smath.ru.

3. В тексте статьи указывается индекс УДК, название работы, затем следуют инициалы и фамилии авторов, приводятся аннотации на русском и английском языках (объемом не менее 200 слов, достаточную для понимания содержания статьи), даются списки ключевых слов на русском и английском языках, а также коды согласно Mathematics Subjects Classifications (2010). Далее в файле приводятся полностью Фамилия, Имя, Отчество каждого автора, должность, полное название научного учреждения, почтовый адрес с индексом почтового отделения, номер телефона с кодом города или номер мобильного телефона, адрес электронной почты и ORCID.

4. Датой поступления статьи считается дата поступления электронной копии статьи на официальный e-mail журнала. Текст электронного сообщения должен быть оформлен как сопроводительное письмо, из текста которого ясно следует, что авторы направляют свою статью во Владикавказский математический журнал. Необходимо указать автора, ответственного за переписку с редакцией.

5. В аннотации не допускается использование громоздких формул, ссылок на текст работы или список литературы.

6. При подготовке файла статьи особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета LaTeX. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела.

7. Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков. Черно-белые рисунки должны быть подготовлены в формате EPS (Encapsulated PostScript) таким образом, чтобы обеспечивать адекватное восприятие их при последующем оптическом уменьшении в два раза. При использовании рисунков необходимо подключить пакет epsfig. Подпись к рисунку должна быть центрирована под рисунком и состоять из слова «Рис. » с последующим номером. Номера рисунков должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к рисунку следует приводить в тексте статьи. Таблицы сопровождаются отформатированной слева надписью «Таблица» с последующим номером. Номера таблиц должны иметь сквозную нумерацию по тексту статьи. Пояснения к таблице приводятся в тексте статьи. Графики выполняются в виде рисунков.

8. Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы, расположенные в порядке цитирования. Ссылки на неопубликованные работы, результаты которых используются в доказательствах, не допускаются. Список литературы печатается в конце текста статьи, оформленные в соответствии с правилами издания, на основании требований, предусмотренных действующими ГОСТами. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

9. Список литературы полностью дублируется на английском языке, приводится полностью отдельным блоком в конце статьи, повторяя список литературы к русскоязычной части, независимо от того, имеются или нет в нем иностранные источники. Если в списке есть ссылки на иностранные публикации, они полностью повторяются в списке, готовящемся в романском алфавите. Список References используется международными библиографическими базами (Scopus, WoS и др.) для учета цитирования авторов.

Примечание: более подробную информацию можно найти на официальном сайте журнала http://www.vlmj.ru.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 20

Выпуск 4

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-70008 от 31 мая 2017 г.

Подписано в печать 24.12.2018. Дата выхода в свет 28.12.2018.
Формат бумаги $60\times84^1/_8$. Гарн. шрифта Computer modern.
Усл. п. л. 10,93. Тираж 100 экз. Цена свободная.

Учредитель:
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Федеральный научный центр «Владикавказский научный центр
Российской академии наук» (ВНЦ РАН)

Издатель:
Южный математический институт — филиал ФГБУН ФНЦ
«Владикавказский научный центр Российской академии наук»

Адрес издателя:
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.

Индекс 57380