Главный редактор

А. Г. КУСРАЕВ
Южный математический институт ВНЦ РАН;
Северо-Осетинский госуниверситет им. К. Л. Хетагурова

Редакционная коллегия

А. В. АБАНИН
Южный федеральный университет;
Южный математический институт ВНЦ РАН

Н. А. ВАВИЛОВ
Санкт-Петербургский госуниверситет

А. О. ВАТУЛЬЯН
Южный федеральный университет;
Южный математический институт ВНЦ РАН

С. К. ВОДОПЬЯНОВ
Институт математики Сибирского отделения РАН

Е. И. ГОРДОН
Иллинойсский университет, Урбана, США

А. И. КОЖАНОВ
Институт математики Сибирского отделения РАН

В. А. КОЙБАЕВ
Южный математический институт ВНЦ РАН;
Северо-Осетинский госуниверситет им. К. Л. Хетагурова

Ю. Ф. КОРОБЕЙНИК
Южный федеральный университет;
Южный математический институт ВНЦ РАН

С. С. КУТАТЕЛАДЗЕ
Институт математики Сибирского отделения РАН

В. Д. МАЗУРОВ
Институт математики Сибирского отделения РАН

А. М. НАХУШЕВ
Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН

С. Г. САМКО
Южный федеральный университет;
Университет Алгарве, Португалия

В. Г. ТРОИЦКИЙ
Альбертский университет, Эдмонтон, Канада

Ш. С. ХУБЕЖТЫ
Южный математический институт ВНЦ РАН

А. Б. ШАБАТ
Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН;
Карачаево-Черкесский государственный университет им. У. Д. Алиева

И. И. ШАРАПУДИНОВ
Дагестанский государственный педагогический университет;
Южный математический институт ВНЦ РАН

Ответственный секретарь

Е. К. БАСАЕВА
Южный математический институт ВНЦ РАН;
Северо-Осетинский госуниверситет им. К. Л. Хетагурова

Журнал основан в 1999 г. Выходит четыре раза в год
Электронная версия: **www.vmj.ru**

© Южный математический институт ВНЦ РАН, 2016

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ НАУЧНЫЙ ЦЕНТР
ЮЖНЫЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 18, выпуск 1 январь–март, 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Владикавказ
2016

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 1, С. 3–8

УДК **517.98+519.46**

О ПРОДОЛЖЕНИИ МАЖОРИРУЕМЫХ ОПЕРАТОРОВ УРЫСОНА[1]

Н. М. Абасов, М. А. Плиев

Александру Ефимовичу Гутману
к его пятидесятилетию

В работе изучается процедура продолжения ортогонально аддитивного отображения, мажорируемого латерально непрерывным оператором, с латерального идеала на все пространство. Показано, что продолженный ортогонально аддитивный оператор является мажорируемым и сохраняет латеральную непрерывность.

Ключевые слова: векторная решетка, решеточно нормированное пространство, мажорируемый оператор Урысона, латеральный идеал, латерально непрерывный оператор.

Введение

Ортогонально аддитивные операторы в векторных решетках впервые попали в поле зрения исследователей в начале 90-х годов прошлого века [1, 2]. Позже в работах [3–5] концепция ортогональной аддитивности была обобщена на отображения, заданные в решеточно нормированных пространствах. В настоящее время теория ортогонально аддитивных операторов является активной областью функционального анализа [6–13].

1. Предварительные сведения

Здесь мы приведем некоторые предварительные сведения, необходимые для дальнейшего. Цель настоящего параграфа — зафиксировать терминологию, обозначения и ввести требуемые понятия. Все необходимые сведения о векторных решетках и решеточно нормированных пространствах можно найти в [14, 15].

Все векторные решетки, рассматриваемые ниже в тексте, являются архимедовыми, а решеточно нормированные пространства — разложимыми. Элемент y решеточно нормированного пространства (V, E) называется *осколком* элемента $x \in V$, если $|\!|y|\!| \perp |\!|x - y|\!|$. Запись $y \sqsubseteq x$ выражает тот факт, что y — осколок x. Множество всех осколков элемента x обозначается через $\mathscr{F}_x$.

Пусть E и F — векторные решетки. Ортогонально аддитивный оператор $T : E \to F$ называется: *положительным*, если $Tx \geqslant 0$ в F для любого $x \in E$; *порядково ограниченным*, если T отображает порядково ограниченные множества в E в порядково ограниченные множества в F.

© 2016 Абасов Н. М., Плиев М. А.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 14-01-91339_ННИО-а.

Порядково ограниченный, ортогонально аддитивный оператор $T : E \to F$ называется *абстрактным оператором Урысона*. Векторное пространство всех абстрактных операторов Урысона из E в F обозначается через $\mathscr{U}(E, F)$.

Пусть E — векторная решетка и X — векторное пространство. Ортогонально аддитивный оператор $T : E \to X$ называется *четным*, если $T(x) = T(-x)$ для любого $x \in E$. Если E, F — векторные решетки, то множество всех четных абстрактных операторов Урысона из E в F обозначается через $\mathscr{U}^{ev}(E, F)$. Отметим, что в случае порядковой полноты векторной решетки F пространство $\mathscr{U}^{ev}(E, F)$ отлично от нуля. Согласно [1, предложение 3.4] для любого $T \in \mathscr{U}(E, F)$ существует четный оператор $\widetilde{T} \in U_+^{ev}(E, F)$, заданный формулой

$$\widetilde{T} f = \sup\{|T|g : \ |g| \leqslant |f|\}.$$

Лемма 1.1 [11, лемма 3.2]. *Пусть E, F — векторные решетки и решетка F порядково полна. Тогда $\mathscr{U}^{ev}(E, F)$ — порядково полная векторная подрешетка в $\mathscr{U}(E, F)$.*

Пусть (V, E) и (W, F) — решеточно нормированные пространства. Оператор $T : V \to W$ называется *ортогонально аддитивным*, если $T(u + v) = Tu + Tv$ для любых $u, v \in V$, $u \perp v$. Ортогонально аддитивный оператор $T : V \to W$ называется *мажорируемым оператором Урысона*, если существует $S \in \mathscr{U}_+^{ev}(E, F)$ такой, что $\lvert Tv\rvert \leqslant S\lvert v\rvert$ для любого $v \in V$. В этом случае говорят, что S — *мажоранта* для T. Множество всех мажорант оператора T обозначается через $\mathrm{Domin}(T)$. Если в множестве $\mathrm{Domin}(T)$ существует наименьший элемент относительно порядка, индуцированного из $\mathscr{U}_+^{ev}(E, F)$, то он называется *наименьшей* или *точной* мажорантой T и обозначается через $\lvert T\rvert$. Множество всех мажорируемых операторов Урысона из V в W обозначается через $\mathscr{D}_U(V, W)$.

Пример 1.2. Пусть X, Y — нормированные пространства. Рассмотрим решеточно нормированные пространства $(X, \mathbb{R})$ и $(Y, \mathbb{R})$. Тогда отображение $T : X \to Y$ принадлежит $\mathscr{D}_U(X, Y)$ тогда и только тогда, когда существует четная функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ такая, что $f(0) = 0$, множество $f(D)$ ограниченно в $\mathbb{R}$ для любого ограниченного подмножества $D \subset \mathbb{R}$ и для любого $x \in X$ выполняется неравенство $\|Tx\| \leqslant f(\|x\|)$.

Пример 1.3. Пусть E, F — векторные решетки и решетка F порядково полна. Рассмотрим решеточно нормированные пространства (E, E) и (F, F), где векторная норма совпадает с модулем. Можно показать, что векторные пространства $\mathscr{D}_U(E, F)$ и $\mathscr{U}(E, F)$ совпадают. Действительно, если $T \in \mathscr{D}_U(E, F)$, то существует $S \in \mathscr{U}_+^{ev}(E, F)$ такой, что $|Tx| \leqslant S|x|$ для любого $x \in E$. Следовательно, оператор T порядково ограничен. Если же $T \in \mathscr{U}(E, F)$, то согласно [1, предложение 3.4] существует $S \in \mathscr{U}_+^{ev}(E, F)$ такой, что $|Tf| \leqslant S(f) \leqslant S(|f|)$ и $T \in \mathscr{D}_U(E, F)$.

2. Продолжение мажорируемого оператора Урысона

Если для линейного мажорируемого оператора в решеточно нормированном пространстве естественной областью определения является (bo)-идеал, то для ортогонально аддитивного оператора такой областью является в общем случае нелинейное множество, обладающее некоторой специфической структурой. Дадим точное определение.

Подмножество D решеточно нормированного пространства V называется *латеральным идеалом*, если выполняются следующие условия: 1) если $x \in D$, то $y \in D$ для любого $y \in \mathscr{F}_x$; 2) если $x, y \in D$, $x \perp y$, то $x + y \in D$.

Приведем некоторые примеры.

Пример 2.1. Пусть V — решеточно нормированное пространство. Каждый (bo)-идеал в V является латеральным идеалом.

Пример 2.2. Пусть V — решеточно нормированное пространство и $x \in V$. Тогда $\mathscr{F}_x$ — это латеральный идеал. Действительно, пусть $y \sqsubseteq x$ и $z \sqsubseteq y$. Тогда $|x-y| \perp |y|$ и $|y-z| \perp |z|$. Далее имеем

$$\begin{aligned}|x-z| \wedge |z| &= |x-y+y-z| \wedge |z| \leqslant \big(|x-y|+|y-z|\big) \wedge |z| \\ &\leqslant |x-y| \wedge |z| + |y-z| \wedge |z| \leqslant |x-y| \wedge |y| + |y-z| \wedge |z| = 0.\end{aligned}$$

Пусть теперь $y_1 \sqsubseteq x$, $y_2 \sqsubseteq x$ и $y_1 \perp y_2$. Тогда справедливы соотношения

$$|x-y_1-y_2| \wedge |y_1| \leqslant \big(|x-y_1|+|y_2|\big) \wedge |y_1| \leqslant |x-y_1| \wedge |y_1| + |y_2| \wedge |y_1| = 0;$$

$$|x-y_1-y_2| \wedge |y_2| \leqslant \big(|x-y_2|+|y_1|\big) \wedge |y_2| \leqslant |x-y_2| \wedge |y_2| + |y_1| \wedge |y_2| = 0;$$

$$\begin{aligned}|x-y_1-y_2| \wedge |y_1+y_2| &= |x-y_1-y_2| \wedge \big(|y_1|+|y_2|\big) = |x-y_1-y_2| \wedge \big(|y_1| \vee |y_2|\big) \\ &= \big(|x-y_1-y_2| \wedge |y_1|\big) \vee \big(|x-y_1-y_2| \wedge |y_2|\big) = 0.\end{aligned}$$

Пример 2.3. Пусть V, W — решеточно нормированные пространства и $T \in \mathscr{D}_U(V,W)$. Тогда $\mathfrak{K}_T := \{x \in V : Tx = 0\}$ — латеральный идеал в V.

Лемма 2.4. *Пусть (V,E) — решеточно нормированное пространство и $D \subset V$. Если D — латеральный идеал в V, то латеральным идеалом в E будет множество $|D| := \big\{|x| : x \in D\big\}$.*

$\lhd$ Пусть $e_i = |x_i|$, $i \in \{1,2\}$, где $x_1, x_2 \in D$ и $e_1 \perp e_2$. Тогда

$$e_1 + e_2 = |x_1| + |x_2| = |x_1 + x_2| \in |D|.$$

Пусть теперь $e = |x| \in |D|$ и $f \sqsubseteq e$. Тогда $|x| = f + (|x| - f)$, и, воспользовавшись разложимостью векторной нормы в V, найдем такие элементы $x_1, x_2 \in V$, что $|x_1| = f$; $\quad |x_2| = |x| - f$. Тогда x_1, x_2 — осколки элемента x, и в силу того, что D — латеральный идеал получаем $x_1, x_2 \in D$ и, следовательно, $f \in |D|$. $\rhd$

Следующая техническая лемма будет использована ниже.

Лемма 2.5. *Пусть (V,E) — решеточно нормированное пространство и D — латеральный идеал в V. Тогда для любого $x \in V$ множество $\mathscr{F}_x \cap D$ направлено вверх относительно отношения порядка $\sqsubseteq$.*

$\lhd$ Пусть $x_1, x_2 \in \mathscr{F}_x \cap D$. Тогда $|x_1|, |x_2| \in \mathscr{F}_{|x|} \cap |D|$. Элементы $|x_1|$ и $|x_2| - \big(|x_2| \wedge |x_2|\big)$ являются взаимно дизъюнктными осколками $|x|$, принадлежащими латеральному идеалу $|D|$, в силу чего $|x_1| + |x_2| - (|x_2| \wedge |x_2|) \in \mathscr{F}_{|x|} \cap |D|$, и найдется такой элемент $y \in \mathscr{F}_x \cap D$, что $x_i \sqsubseteq y$, $i \in \{1,2\}$. $\rhd$

Рассмотрим решеточно нормированное пространство V. Подмножество $D \subset V$ называется *латерально аддитивным*, если для любых $x, y \in D$ таких, что $x \perp y$, их сумма $x + y$ также принадлежит D.

Пусть V — решеточно нормированное пространство, D — латерально аддитивное подмножество V и X — действительное векторное пространство. Отображение $T\colon D \to X$ называется *ортогонально аддитивным*, если $T(x+y) = T(x) + T(y)$ для любых дизъюнктных элементов $x, y \in D$. Пусть теперь (W,F) — решеточно нормированное пространство над порядково полной векторной решеткой F и D — латерально аддитивное подмножество в (V,E). Ортогонально аддитивное отображение $T\colon D\to W$ называется *мажорируемым*, если найдется оператор $S\in\mathscr{U}_+^{ev}(E,F)$ такой, что $|Tx|\leqslant S|x|$ для любого $x\in D$.

Пусть (V,E) — решеточно нормированное пространство. Сеть $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\subset V$ называется *латерально сходящейся* к $x\in V$, если $x_\alpha\sqsubseteq x_\beta\sqsubseteq x$ для любых индексов $\alpha<\beta$ и $x_\alpha\xrightarrow{\text{bo}}x$. В этом случае будем писать $x_\alpha\xrightarrow{\text{lat}}x$.

Пусть (W,F) — другое решеточно нормированное пространство. Ортогонально аддитивный оператор $T:V\to W$ называется *латерально непрерывным* (*σ-латерально непрерывным*), если из соотношения $x_\alpha\xrightarrow{\text{lat}}x$ ($x_n\xrightarrow{\text{lat}}x$) следует, что $Tx_\alpha\xrightarrow{\text{bo}}Tx$ ($Tx_n\xrightarrow{\text{bo}}Tx$).

Сформулируем теперь основной результат статьи.

Теорема 2.6. *Пусть (V,E) — решеточно нормированное пространство, (W,F) — пространство Банаха — Канторовича над порядково полной векторной решеткой F, D — латеральный идеал в V и $T:D\to W$ — ортогонально аддитивное отображение, мажорируемое латерально непрерывным (σ-латерально непрерывным) оператором $S\in\mathscr{U}_+^{ev}(E,F)$. Тогда существует мажорируемый, латерально непрерывный оператор Урысона $\widetilde{T}_D\in\mathscr{D}_U(V,W)$ такой, что $\widetilde{T}_Dx=Tx$ для любого $x\in D$.*

$\lhd$ Зададим отображение $\widetilde{T}_D:V\to W$ формулой

$$\widetilde{T}_Dx=\underset{y\in\mathscr{F}_x\cap D}{bo\text{-}\lim}\,Ty. \tag{1}$$

Покажем, что отображение (1) задано корректно. В силу леммы 2.5, множество $\mathscr{F}_x\cap D$ направлено вверх и может быть представлено как $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, где $x_\alpha\sqsubseteq x_\beta$, $\alpha\leqslant\beta$ и Λ — некоторое индексное множество. Напомним некоторые полезные формулы:

$$(x_\beta-x_\alpha)\perp x_\alpha;\quad |x_\beta|=|x_\beta-x_\alpha|+|x_\alpha|;\quad S|x_\beta|=S|x_\beta-x_\alpha|+S|x_\alpha|.$$

Теперь воспользуемся следующими оценками:

$$|Tx_\beta-Tx_\alpha|=|T(x_\beta-x_\alpha)|\leqslant S\bigl(|x_\beta-x_\alpha|\bigr)=\bigl(S|x_\beta|-S|x_\alpha|\bigr)\xrightarrow{\text{o}}0.$$

Таким образом, сеть $(Tx_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ (bo)-фундаментальна и в силу полноты пространства W сходится к единственному пределу в W. Установим ортогональную аддитивность отображения $\widetilde{T}_D$. Возьмем произвольные элементы $v_1,v_2\in V$, $v_1\perp v_2$, и пусть $y\in\mathscr{F}_{v_1+v_2}\cap D$. Тогда можем написать $|y|\sqsubseteq(|v_1|+|v_2|)$, и согласно декомпозиционной лемме Рисса и тому факту, что $|D|$ — латеральный идеал, найдутся $e_1,e_2\in|D|$ такие, что $|y|=e_1+e_2$. В силу разложимости векторной нормы в V и того факта, что D — латеральный идеал в V, существуют элементы $y_1,y_2\in D$ такие, что $y=y_1+y_2$ и $y_1\perp y_2$. Таким образом, любой осколок $y\in\mathscr{F}_{v_1+v_2}\cap D$ представляется в виде суммы осколков $y_1\in\mathscr{F}_{v_1}\cap D$, $y_2\in\mathscr{F}_{v_2}\cap D$. Ясно, что сумма двух осколков указанного вида будет осколком вида $y\in\mathscr{F}_{v_1+v_2}\cap D$. Так как $Ty=Ty_1+Ty_2$, то, переходя к пределу в правой и левой частях по всем осколкам $y\in\mathscr{F}_{v_1+v_2}\cap D$, получаем, что $\widetilde{T}_D(v_1+v_2)=\widetilde{T}_Dv_1+\widetilde{T}_Dv_2$, устанавливая тем самым ортогональную аддитивность оператора $\widetilde{T}_D$. Пусть теперь x — произвольный элемент V и $y\in\mathscr{F}_v\cap D$. Мажорируемость оператора $\widetilde{T}_D$ вытекает из оценок $|Ty|\leqslant S|y|\leqslant S|x|$. Переходя к пределу в левой части по всем осколкам $y\in\mathscr{F}_v\cap D$, получаем $|\widetilde{T}_Dx|\leqslant S|x|$ для любого $x\in V$.

Покажем, наконец, что $\widetilde{T}_D$ является латерально непрерывным оператором, σ-непрерывность доказывается аналогично. Возьмем латерально сходящуюся сеть $(v_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}\subset$

V такую, что $v_\alpha \xrightarrow{\text{lat}} v$. Тогда можем написать

$$|\widetilde{T}_D v - \widetilde{T}_D v_\alpha| = |\widetilde{T}_D(v - v_\alpha)| \leqslant S|v - v_\alpha| = S(|v| - |v_\alpha|) = (S|v| - S|v_\alpha|) \xrightarrow{\text{o}} 0,$$

и латеральная непрерывность оператора $\widetilde{T}_D$ установлена. $\rhd$

Литература

1. *Mazón J. M., Segura de León S.* Order bounded orthogonally additive operators // Rev. Roumaine Math. Pures Appl.—1990.—Vol. 35, № 4.—P. 329–353.
2. *Mazón J. M., Segura de León S.* Uryson operators // Rev. Roumaine Math. Pures Appl.—1990.—Vol. 35, № 5.—P. 431–449.
3. *Кусраев А. Г., Плиев М. А.* Ортогонально аддитивные операторы в решеточно нормированных пространствах // Владикавк. мат. журн.—1999.—Т. 1, вып. 3.—С. 33–43.
4. *Кусраев А. Г., Плиев М. А.* Слабое интегральное представление мажорируемого ортогонально аддитивного оператора // Владикавк. мат. журн.—1999.—Т. 1, вып. 4.—С. 22–39.
5. *Плиев М. А.* Мажорируемые операторы Урысона в пространствах со смешанной нормой // Владикавк. мат. журн.—2007.—Т. 9, вып. 3.—С. 47–57.
6. *Abasov N., Pliev M.* Order properties of the space of dominated Uryson operators // Int. J. of Math. Anal.—2015.—Vol. 9, № 45.—P. 2211–2219.
7. *Ben Amor M. A., Pliev M.* Laterally continuous part of an abstract Uryson operator // Int. J. of Math. Anal.—2013.—Vol. 7, № 58.—P. 2853–2860.
8. *Getoeva A., Pliev M.* Domination problem for orthogonally additive operators in lattice-normed spaces // Int. J. of Math. Anal.—2015.— Vol. 9, № 27.—P. 1341–1352.
9. *Gumenchuk A. V., Pliev M. A., Popov M. M.* Extensions of orthogonally additive operators // Math. Stud.—2014.—Vol. 41, № 2.—P. 214–219.
10. *Pliev M., Popov M.* Narrow orthogonally additive operators // Positivity.—2014.—Vol. 18, № 4.—P. 641–667.
11. *Pliev M., Popov M.* Dominated Uryson operators // Int. J. of Math. Anal.—2014.—Vol. 8, № 22.—P. 1051–1059.
12. *Pliev M.* Domination problem for narrow orthogonally additive operators // Positivity.—DOI 10.1007/s11117-016-0401-9.
13. *Pliev M. A., Weber M. R.* Disjointness and order projections in the vector lattices of abstract Uryson operators // Positivity.—DOI 10.1007/s11117-015-0381-1.
14. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
15. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—Dordrecht: Springer, 2006.

Статья поступила 20 января 2016 г.

Абасов Нариман Магамедович
МАТИ — Российский государственный
технологический университет им. К. Э. Циолковского,
доцент кафедры высшей математики
РОССИЯ, 121552, Москва, ул. Оршанская, 3
E-mail: `abasovn@mail.ru`

Плиев Марат Амурханович
Южный математический институт ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: `plimarat@yandex.ru`

ON EXTENSION OF DOMINATED URYSON OPERATORS

Abasov N. M., Pliev M. A.

We investigate the procedure of extension of a dominated orthogonally additive map dominated by a laterally continuous operator from laterally ideal to the whole space. It is established that such operator admits an extension that is dominated and laterally continuous.

Key words: vector lattice, lattice-normed space, dominated Uryson operator, lateral ideal, lateral band, laterally continuous operator.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 1, С. 9–20

УДК **519.652**

О СУЩЕСТВОВАНИИ БАЗИСА В ДОПОЛНЯЕМОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ ЯДЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА КЁТЕ ИЗ КЛАССА (d_2)

А. К. Дронов

В работе дано доказательство существования базиса в произвольном дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте из класса (d_2). Показано также, что в любом таком подпространстве существует базис, квазиэквивалентный части базиса ортов.

Ключевые слова: гипотеза Пелчинского, пространство Кёте, базис, дополняемое подпространство, конус, интерполяция.

Введение

В 1970 г. А. Пелчинским была сформулирована гипотеза о существовании базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Фреше с базисом [15]. В силу теоремы Дынина — Митягина об абсолютном базисе [16] эта гипотеза эквивалентна утверждению о том, что дополняемое подпространство пространства Кёте тоже является пространством Кёте. До сих пор эта проблема остается открытой, хотя она была положительно решена для многих частных случаев. При этом применялся интерполяционный метод Митягина — Хенкина [13] и метод декомпозиции Фогта [17]. Также при различных дополнительных условиях на матрицу Кёте, либо на дополняемое подпространство, это задача решалась в [7] и [8] (см. также [10] и [9], где изучались близкие задачи).

В настоящей работе дано доказательство существования базиса в дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте из класса (d_2). Доказательство основано на использовании интерполяционных свойств троек нормированных конусов вида $(Q \cap c_0^+(a_0), c_0^+(a_1), Q \cap c_0^+(a))$, где Q — конус в пространстве всех числовых последовательностей.

В первой части работы сообщаются необходимые определения и результаты (подробно постановка задачи теории интерполяции линейных операторов, ограниченных на конусах, представлена в [5]). Во второй части — приведены основные сведения из теории базисов в пространствах Фреше и доказательство основного результата. Техника доказательства опирается на использование интерполяционных свойств операторов, ограниченных на конусах в банаховых пространствах числовых последовательностей, сходящихся к нулю с весом, а также на метод «тупикового» пространства Б. С. Митягина.

В статье будут использованы следующие обозначения: ω — линейное пространство всех числовых последовательностей, φ — линейное пространство всех финитных числовых последовательностей, c_0 — линейное пространство всех сходящихся к нулю числовых последовательностей, ω^+, φ^+, c_0^+ — конусы неотрицательных последовательностей в ω,

© 2016 Дронов А. К.

φ, c_0 соответственно, $l_2(a_r)$ — гильбертово пространство числовых последовательностей, наделенное нормой

$$\|x\|_{l_2(a_2)} = \|x\|_r = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^2 a_r^2(n)},$$

$c_0(a_r)$ — банахово пространство числовых последовательностей, сходящихся к нулю с весом $(a_r(n))_{n=1}^{\infty} \subset \omega^+$, наделенное нормой

$$\|x\|_{c_0(a_r)} = |x|_r = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x(n)| a_r(n).$$

1. Некоторые сведения из теории интерполяции линейных операторов, действующих в банаховых пространствах

В данном параграфе используется терминология теории интерполяции линейных операторов, подробное изложение которой можно найти в [1] и [12].

Подмножество Q линейного пространства E называется *конусом*, если для любых $x, y \in Q$, $\lambda \geqslant 0$ имеем: $x + y \in Q$, $\lambda x \in Q$. Конус Q в E называется *воспроизводящим*, если его линейная оболочка $\operatorname{span}\{Q\}$ совпадает с E. Конус Q в линейном топологическом пространстве E называется *тотальным*, если его линейная оболочка плотна в E. Конус Q в нормированном пространстве E называется *несплющенным*, если существует константа $c > 0$ такая, что для любого $x \in \operatorname{span}\{Q\}$ найдутся $y, z \in Q$ такие, что $x = y - z$, $\|y\| \leqslant c\|x\|$, $\|z\| \leqslant c\|x\|$. Наименьшая из таких констант называется *константой несплющенности конуса* Q и обозначается через $\gamma(Q)$.

Пусть E, F — нормированные пространства и $T : E \to F$ — линейный оператор, ограниченный на элементах несплющенного конуса $Q \subset E$:

$$\|Tx\|_F \leqslant C\|x\|_E, \quad x \in Q.$$

Тогда оператор T ограничен на подпространстве $\operatorname{span}\{Q\}$. Действительно, если $x = y - z$, где $y, z \in Q$, то

$$\|Tx\|_F \leqslant \|Ty\|_F + \|Tz\|_F \leqslant C\|y\|_E + C\|x\|_E \leqslant 2 \cdot C\gamma(Q)\|x\|_E.$$

Рассмотрим пример несплющенного конуса, который понадобится нам в дальнейшем. Пусть $B : E \to E$ — положительный оператор, действующий в банаховом пространстве числовых последовательностей с монотонной нормой E (т. е. $\|x\| \leqslant \|y\|$ при $|x| \leqslant |y|$, см. [2]) и $\|B\| \leqslant \frac{1}{2}$. Введем конус $Q(B) = \{x \in E^+, \, x \geqslant Bx\}$. В данном случае в силу биективности B конус $Q(B)$ является воспроизводящим (т. е. $\operatorname{span}\{Q(B)\} = E$). Действительно, поскольку для любого $y \in \omega$ справедливо разложение $y = y_+ - y_-$, где

$$y_+ = \max(y(n), 0),$$

$$y_- = \max(-y(n), 0),$$

то

$$x = (I - B)^{-1}((I - B)x)_+ - (I - B)^{-1}((I - B)x)_-.$$

Ясно, что $(I - B)^{-1}((I - B)x)_\pm \in Q(B)$. При этом, поскольку $\|(I - B)^{-1}\| \leqslant 2$, $\|(I - B)\| \leqslant 2$, и, в силу монотонности нормы, $\|((I - B)x)_\pm\| \leqslant \|(I - B)x\|$, справедлива оценка

$$\|(I - B)^{-1}((I - B)x)_\pm\| \leqslant 2\|(I - B)x\| \leqslant 4\|x\|, \quad x \in E.$$

Следовательно, конус $Q(B)$ является несплющенным с константой несплющенности, не превосходящей 4.

Пусть $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ — отделимые вещественные линейные топологические пространства, $\overline{E} = (E_0, E_1)$, $\overline{F} = (F_0, F_1)$ — банаховы пары, $E_i \subset \mathscr{A}$, $F_i \subset \mathscr{B}$ и Q_i — конусы в пространствах E_i $(i = 0, 1)$. В этом случае будем говорить, что $\overline{Q} = (Q_0, Q_1)$ — пара конусов в банаховой паре $\overline{E}$. Конус Q в пространстве $\mathscr{A}$ называется *промежуточным* для пары $\overline{Q}$, если

$$Q_0 \cap Q_1 \subset Q \subset Q_0 + Q_1.$$

Пусть банаховы пространства E и F являются промежуточными пространствами банаховых пар $\overline{E}$ и $\overline{F}$, причем банахова тройка (E_0, E_1, E) интерполяционна относительно банаховой тройки (F_0, F_1, F). Пусть $T : E_0 + E_1 \longrightarrow F_0 + F_1$ — непрерывный линейный оператор. Если $T|_{Q_i} : Q_i \longrightarrow F_i$ и $\|Tx\|_{F_i} \leqslant M_i \|x\|_{E_i}$ при $x \in Q_i$, то будем говорить, что T — ограниченный оператор из пары нормированных конусов $\overline{Q} = (Q_0, Q_1)$ в банахову пару $\overline{F} = (F_0, F_1)$. Пусть конус $Q \subset E$ и является промежуточным для пары $\overline{Q}$. Если существует постоянная $c = c(\overline{E}, \overline{F}, \overline{Q}, E, F, Q) > 0$ такая, что $T|_Q : Q \longrightarrow F$ и

$$\|Tx\|_F \leqslant c \max\{M_0, M_1\} \|x\|_E \quad \text{при } x \in Q, \tag{1.1}$$

то будем говорить, что тройка конусов (Q_0, Q_1, Q) обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F).

Пусть теперь задано семейство троек конусов

$$\mathscr{M} = \{(Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q^\alpha)\}_{\alpha \in \mathrm{A}},$$

где А — некоторое множество индексов. Пусть семейство $\mathscr{M}$ удовлетворяет условиям:

1) для любого $\alpha \in \mathrm{A}$ справедливы вложения $Q_0^\alpha \subset E_0$, $Q_1^\alpha \subset E_1$, $Q^\alpha \subset E$, причем конус Q^α — промежуточный конус для пары $\overline{Q^\alpha} = (Q_0^\alpha, Q_1^\alpha)$;

2) для любого $\alpha \in \mathrm{A}$ тройка $(Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q^\alpha)$ обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F).

В этом случае будем говорить, что семейство $\mathscr{M}$ обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F). При этом постоянная $\{c = c(\overline{E}, \overline{F}, \overline{Q^\alpha} E, F, Q^\alpha)\}$ в неравенстве (1.1), вообще говоря, зависит от выбора тройки $(Q_0^\alpha, Q_1^\alpha, Q^\alpha)$ из семейства $\mathscr{M}$. Если для всех троек конусов из $\mathscr{M}$ может быть выбрана одинаковая интерполяционная постоянная $c = c(\overline{E}, \overline{F}, E, F)$, то будем говорить, что семейство $\mathscr{M}$ обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F).

Для доказательства основного утверждения нам понадобится следующее хорошо известное (см. [1, 14]) условие интерполяционности тройки $(c_0(a_0), c_0(a_1), c_0(a))$ по отношению к банаховой тройке $(c_0(a_0), c_0(a_1), c_0(a))$:

$$a = a_1 h\left(\frac{a_0}{a_1}\right), \quad b = b_1 h\left(\frac{b_0}{b_1}\right),$$

где $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — квазивогнутая функция.

В частности, для проверки интерполяционности достаточно установить справедливость неравенства

$$\frac{b(m)}{a(n)} \leqslant C \max\left\{\frac{b_0(m)}{a_0(n)}, \frac{b_1(m)}{b_1(n)}\right\}.$$

Следующая теорема играет важную роль при доказательстве основного результата. Укажем предварительно, что подмножество A упорядоченного пространства E называется *нижней полурешеткой*, если $\min(x, y) \in A$ для любых $x, y \in A$.

Теорема 1.1. *Пусть $E_i = c_0(a_i)$, $F = c_0(b_i)$ $(i = 0, 1)$, $E = c_0(a)$, $F = c_0(b)$, причем $E_1 \subset E \subset E_0$, $F_1 \subset F \subset F_0$, и банахова тройка (E_0, E_1, E) обладает интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке (F_0, F_1, F). Пусть $\mathscr{A}$ — множество конусов в ω^+ такое, что для каждого $Q \in \mathscr{A}$ выполняются условия:*

1) Q — нижняя полурешетка в ω;

2) $Q \cap E_1^+$ — тотальный конус в $c_0(a_1)$;

3) $Q \cap E_1^+$ содержит последовательность, все члены которой положительны.

Тогда каждое из семейств троек конусов

$$\mathscr{L} = \{(E_0^+, Q \cap E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathscr{A}\},$$

и

$$\mathscr{M} = \{(Q \cap E_0^+, E_1^+, Q \cap E^+) : Q \in \mathscr{A}\}$$

обладает равномерным интерполяционным свойством по отношению к банаховой тройке $(c_0(b_0), c_0(b_1), c_0(b))$.

Доказательство данной теоремы, а также подробное изложение постановки задачи теории интерполяции на конусах можно найти в [5].

2. Основная теорема

Пространством Фреше называется полное метризуемое линейное локально выпуклое пространство. Важнейший класс пространств Фреше — счетно-гильбертовы ядерные пространства Кёте числовых последовательностей. Пусть $E = \bigcap_{r \geqslant 1} H_r$, где $H_r = l_2(a_r(n))$ — пространство Кёте, топология которого задана счетным набором гильбертовых норм $\{\|\cdot\|_r\}_{r=1}^{\infty}$:

$$\|x\|_r = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 a_r^2(n)}, \quad r = 1, 2, \dots$$

Матрицу $(a_r(n))$ всегда можно считать монотонной по $r : a_{r+1}(n) \geqslant a_r(n)$. Как известно [3], условие ядерности пространства E имеет вид

$$(\forall\, r)\ (\exists\, s(r)) \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{s(r)}(n)} < +\infty\right).$$

Базисом в пространстве E называют систему элементов $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ из E такую, что каждый элемент $x \in E$ однозначно представим в виде

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n,$$

где $x_n^*(x)$ — числа.

Если при этом ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n$ сходится абсолютно, т. е.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n^*(x)| \|x_n\|_r < +\infty$$

для всех r, то базис $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называют *абсолютным*.

Аналогично, если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n$ сходится к x безусловно, т. е.

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}^*(x)x_{\sigma(n)}$$

для любой перестановки (биективного отображения) $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, то базис $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ называют *безусловным*.

Последовательность $(x_n)_1^{\infty}$ пространства Фреше E называется *правильной в смысле Драгилева*, если для некоторой определяющей системы преднорм $(|\cdot|)_1^{\infty}$ в E выполняются неравенства (полагают $0/0 = 0$):

$$\frac{|x_n|_p}{|x_n|_{p+1}} \geqslant \frac{|x_{n+1}|_p}{|x_{n+1}|_{p+1}}, \quad n, p = 1, 2, \ldots$$

Матрица Кёте $(a_r(n))$ называется *правильной в смысле Драгилева*, если

$$(\forall\, r)\ (\exists\, s = s(r)) \quad \frac{a_r(n)}{a_{s(r)}(n)} \downarrow 0 \quad \text{при } n \to \infty,\ r = 1, 2, \ldots$$

Без ограничения общности можно считать, что $s(r) = r + 1$ (этого всегда можно добиться, переходя к эквивалентной системе норм). Пространство Фреше с правильным базисом изоморфно пространству Кёте с правильной матрицей.

Пространство Кёте E с правильной матрицей относится к классу (d_1), если

$$(\forall\, r)\ (\exists\, s = s(r))\ (c = c(r) > 0) \quad (a_r^2(n) \leqslant c(r)a_1(n)a_s(r)(n)).$$

Пространство Кёте E с правильной матрицей относится к классу (d_2), если

$$(\forall\, r)\ (\exists\, s)\ (\forall\, q)\ (\exists\, c = c(r, q) > 0) \quad (a_r(n)a_q(n) \leqslant c(r, q)a_s^2(n)).$$

Классы (d_1) и (d_2) были введены М. М. Драгилевым [4] в связи с изучением локально выпуклых пространств аналитических функций. Типичными представителями пространств классов (d_1) и (d_2) являются пространство целых функций и пространство функций аналитических в круге с топологией компактной сходимости соответственно.

Пусть $E \subset (d_2)$ — ядерное пространство Кёте и $F \subset E$ — его дополняемое подпространство. Покажем, что в пространстве F существует абсолютный базис и, следовательно, оно изоморфно пространству Кёте числовых последовательностей. Так как $E \subset (d_2)$, то

$$(\forall\, r)\ (\exists\, s_1(r))\ (\forall\, q)\ (\exists\, c(r, q) > 0) \quad (a_r(n)a_q(n) \leqslant c(r, q)a_{s_1(r)}^2(n)).$$

В силу ядерности E имеем

$$(\forall\, r)\ (\exists\, s_2(r)) \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{s_2(r)}(n)} < +\infty\right).$$

Пусть $s(r) = \max\{s_1(r), s_2(r)\}$. Тогда условия, приведенные выше, можно записать в виде

$$a_r(n)a_q(n) \leqslant c(r, q)a_{s(r)}(n)$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{s(r)}(n)} < +\infty.$$

Кроме того, без ограничения общности можно считать, что $s(r) = r+1$. Итак, пусть

$$(\forall\, r)\ (\exists\, c(r,q)) \quad (a_r(n)a_q(n) \leqslant c(r,q)a^2_{r+1}(n)) \tag{2.1}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} < +\infty, \quad r = 1, 2, \dots \tag{2.2}$$

Отметим также, что функцию $c(r,q)$ можно считать возрастающей по r и q, так как в противном случае можно перейти в оценке (2.1) к функции

$$\widetilde{c}(r,q) = \max_{\substack{1\leqslant r'\leqslant r\\ 1\leqslant q'\leqslant q}} c(r',q').$$

Из условия ядерности следует, что системы l_2-норм и соответствующие системы sup-норм являются эквивалентными [3]. Отметим, что это утверждение в нашем случае легко выводится непосредственно из условия (2.2), причем справедливы оценки

$$|x|_r \leqslant \|x\|_r \leqslant N(r)|x|_{r+1},$$

где

$$\|x\|_r = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 a_r^2(n)}, \qquad |x|_r = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_r(n)|x(n)|.$$

С помощью диагонального преобразования можно добиться выполнения условия $a_1(n) \equiv 1$. В дальнейшем будем предполагать, что это преобразование выполнено.

Теорема 2.1. *Пусть $E \subset (d_2)$ — ядерное пространство Кёте, $F \subset E$ — дополняемое подпространство в E. Тогда F имеет абсолютный базис.*

$\lhd$ Введем обозначения: $H_r = l_2(a_r(n))$, $G_r = c_0(a_r(n))$. Тогда $E = \bigcap_{r\geqslant 1} H_r = \bigcap_{r\geqslant 1} G_r$, причем $G_1 \supset G_r \supset G_{r+1}$, $H_1 \supset H_r \supset H_{r+1}$.

Пусть P — непрерывный проектор в E такой, что $F = P(E)$. Так как E — пространство с абсолютным базисом (из ядерности E и теоремы Дынина — Митягина [16] следует, что всякий безусловный базис в E является абсолютным), то оператор $|P| : E \longrightarrow E$ также непрерывен. Здесь $|P|$ — модуль оператора P в смысле теории векторных решеток [2]. Если (p_{ij}) — матрица P в базисе $(e_i)_{i=1}^{\infty}$, то $(|p_{ij}|)$ — матрица $|P|$ в этом же базисе. Запишем условие непрерывности оператора $|P|$:

$$(\forall\, r)\ (\exists\, s(r))\ (C_1(r) > 0) \quad \||P|x\|_r \leqslant C_1(r)|x|_{s(r)}. \tag{2.3}$$

Заметим, что из (2.3) следует

$$\|Px\|_r \leqslant c_1(r)|x|_{s(r)}. \tag{2.4}$$

Функции $C_1(r)$ и $s(r)$ в (2.3) и (2.4) можно считать монотонными по r. Кроме того, без ограничения общности можно принять, что $s(r) = r+1$.

Переход к эквивалентной системе норм вида

$$|x|'_r = \alpha(r)|x|_r, \quad \|x\|'_r = \alpha(r)\|x\|_r$$

не меняет условий на матрицу Кёте (так как это соответствует замене $a_r(n) \to \alpha(r)a_r(n)$). Выбирая последовательность $\alpha(r) \uparrow \infty$ из условия

$$C_1(r)\frac{\alpha(r)}{\alpha(r+1)} \leqslant \frac{1}{2},$$

можно добиться выполнения неравенств

$$|||P|||'_r \leqslant \frac{1}{2}|x|'_{r+1}, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Будем считать, что это преобразование выполнено, т. е.

$$|||P|x\|_r \leqslant \frac{1}{2}|x|_{r+1}, \quad r = 1, 2, \ldots, \tag{2.5}$$

и, соответственно,

$$|||P|||_{c_0(a_{r+1}) \longrightarrow l_2(a_r)} \leqslant \frac{1}{2}, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Определим весовое «тупиковое» гильбертово пространство H_∞ и пространство $G_{\infty,0} = c_0(a^2_{\infty,0}(n))$ так, чтобы $G_{\infty,0} \subset H_\infty \subset H_r$ для любого r и оператор $|P|$ непрерывно действовал из $G_{\infty,0}$ в H_∞. Пусть $a_{\infty,0}(n) = \sum_{r=1}^{\infty} \gamma_r a_r(n)$, где последовательность $\{\gamma_r\}$ будет выбрана ниже.

Так как $a_r(n) a_q(n) \leqslant c(r,q) a^2_{r+1}(n)$, то

$$a_r(n) \sum_{q=1}^{\infty} \gamma_q a_q(n) \leqslant \left(\sum_{q=1}^{\infty} \gamma_q c(r,q) \right) a^2_{r+1}(n).$$

Выберем γ_q так, чтобы

$$\sum_{q=1}^{\infty} \gamma_q c(r,q) < +\infty, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Пусть $\gamma_q = \frac{1}{2^q c(q,q)}$. Так как $\frac{c(r,q)}{c(q,q)} \leqslant 1$ при $q > r$, то

$$c'(r) = \sum_{q=1}^{\infty} \gamma_q c(r,q) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{1}{2^q} \cdot \frac{c(r,q)}{c(q,q)} < +\infty, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Таким образом,

$$a_r(n) a_{\infty,0}(n) \leqslant c'(r) a^2_{r+1}(n) \quad (\forall\, n). \tag{2.6}$$

Итак, пусть $G_{\infty,0} = c_0(a^2_{\infty,0}(n))$.

Определим теперь гильбертово пространство H_∞ нормой

$$\|x\|^2_{H_\infty} = \|x\|^2_\infty = \sum_{r=1}^{\infty} \delta_r^2 \|x\|_r^2,$$

где $\{\delta_r\}_{r=1}^{\infty}$ — некоторая числовая последовательность. Тогда $H_\infty = l_2(a_\infty)$, где

$$a^2_\infty(n) = \sum_{r=1}^{\infty} \delta_r^2 a_r^2(n).$$

Выберем эту последовательность так, чтобы оператор $T = |P|$ непрерывно действовал из $G_{\infty,0}$ в H_∞.

Так как $G_{\infty,0} \subset H_r$ для любого r, то

$$\|x\|_r \leqslant D_1(r) \|x\|_{G_{\infty,0}}, \quad r = 1, 2, \ldots,$$

следовательно,

$$|||P|x\|_r \leqslant D(r)\|x\|_{G_{\infty,0}}, \quad r = 1, 2, \ldots$$

Функцию $D(r)$ будем считать возрастающей, принимающей значения, не меньшие 1 (в противном случае можно перейти к функции $\widetilde{D}(r') = \max\limits_{1\leqslant r\leqslant r'}\{1, D(r)\}$). Далее, полагая $\delta_r^2 = \min\left\{\gamma_r^2, \frac{1}{2^r D^2(r)}\right\}$, получим

$$|||P|x\|_{H_\infty}^2 \leqslant \sum_{r=1}^{\infty} \delta_r^2 |||P|x\|_r^2 \leqslant \left(\sum_{r=1}^{\infty} \delta_r^2 D^2(r)\right) \|x\|_{G_{\infty,0}}^2 \leqslant \|x\|_{G_{\infty,0}}^2. \tag{2.7}$$

Введем еще одно пространство $G_\infty = c_0(a_\infty)$, определяемое нормой

$$\|x\|_{G_\infty} = |x|_\infty = \sup a_\infty(n)|x(n)|.$$

Ясно, что $G_{\infty,0} \subset H_\infty \subset G_\infty \subset H_r$ и $|||P|x\|_{G_\infty} \leqslant |x|_{G_{\infty,0}}$. Заметим также, что $a_\infty(n) \leqslant a_{\infty,0}(n)$ для всех n в силу выбора δ_r. Следовательно, учитывая (2.6),

$$a_r(n) a_\infty(n) \leqslant c'(r) a_{r+1}^2(n). \tag{2.8}$$

Покажем, что для любого r оператор $J_r = \frac{a_{r+1}}{a_r}$ непрерывно действует из $G_{\infty,0}$ в G_∞. Действительно,

$$\begin{gathered}\left\|\frac{a_{r+1}}{a_r} x\right\|_{G_\infty} \leqslant \|a_{r+1}x\|_{G_\infty} = \sup_{n\in\mathbb{N}} a_{r+1}(n) a_\infty(n)|x(n)| \\ \leqslant c'(r+1) \sup_{n\in\mathbb{N}} a_{r+2}^2(n)|x(n)| \leqslant \gamma_r^{-2} c'(r+1) \sup_{n\in\mathbb{N}} a_{\infty,0}^2(n)|x(n)| = M(r)\|x\|_{G_{\infty,0}},\end{gathered} \tag{2.9}$$

где $M(r) = \gamma_r^{-2} c'(r+2)$.

Пополним линейное многообразие $L = \{Px : x \in G_\infty\}$ по нормам $\|\cdot\|_r$ и $\|\cdot\|_\infty$. Получим гильбертовы пространства F_r и F_∞ такие, что

$$F_1 \supset F_r \supset F_{r+1} \supset F_\infty.$$

Пусть $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — «общий» ортогональный базис пространств F_1 и F_∞. Для определенности будем считать его нормированным в F_1. Докажем, что $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ — абсолютный базис в $F = \bigcap_{r\geqslant 1} F_r$. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_i)$, где $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$ и $n \in \mathbb{N}$. Введем операторы

$$P_{n,\varepsilon} x = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k f_k'(Px) f_k,$$

где $f_k'(x) = (f_k, x)_{H_1}$. По известному критерию безусловной базисности [4] последовательность $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ будет безусловным базисом в F, если $\{P_{n,\varepsilon}\}$ — равностепенно непрерывное семейство операторов в E (так как ряд $\sum_{k=1}^\infty f_k'(f) f_k$ сходится к f при $f \in F_\infty$ и F_∞ плотно в F). Так как $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — ортогональный базис и в F_1, и в F_∞, то

$$\|P_{n,\varepsilon}x\|_1 \leqslant \|Px\|_1, \qquad \|P_{n,\varepsilon}x\|_\infty \leqslant \|Px\|_\infty. \tag{2.10}$$

Так как $\|Px\|_r \leqslant D'(r)|x|_\infty$, где $D'(r)$ — некоторая постоянная, то

$$\|P_{n,\varepsilon}x\|_r \leqslant D'(r)|x|_\infty \ \text{ при } \ x \in G_\infty.$$

Далее, вводя оператор $|P|$, из (2.10) получим $\|P_{n,\varepsilon}x\|_1 \leqslant \| \, |P|x\|_1$, если $x \in \varphi^+$, так как $\|Px\|_1 \leqslant \| \, |P|x\|_1$ при $x \in \varphi^+$.

Фиксируем $r \in \mathbb{N}$. Тогда из условия ядерности следует, что

$$\frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} \in l_1.$$

Для любого $y \in E$ имеем

$$\|y\|_1 = \|y\|_{l_2} \leqslant C_0\|y\|_{l_1} = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} |y(n)| = C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} \left(\frac{a_{r+1}(n)}{a_r(n)} |y(n)| \right)$$
$$\leqslant C_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_r(n)}{a_{r+1}(n)} \cdot \sup |y(n)| \frac{a_{r+1}(n)}{a_r(n)} = \widetilde{C}(r) \left\| \frac{a_{r+1}}{a_r} y \right\|_{l_\infty} = \widetilde{C}(r) \left| \frac{a_{r+1}}{a_r} y \right|_1 .$$

Используя это неравенство, получим

$$\|P_{n,\varepsilon}x\|_1 \leqslant C_1(r) \left| \frac{a_{r+1}}{a_r} |P|x \right|_1, \quad x \in \varphi^+.$$

Так как $\|x\|_1 \geqslant |x|_1$, то

$$|P_{n,\varepsilon}x|_1 \leqslant C_1(r) \left| \frac{a_{r+1}}{a_r} |P|x \right|_1 .$$

Таким образом, существуют постоянные $C_1(r)$, $C_2(r)$ такие, что

$$|P_{n,\varepsilon}x|_1 \leqslant C_1(r) \left| \frac{a_{r+1}}{a_r} |P|x \right|_1, \quad |P_{n,\varepsilon}x|_r \leqslant C_2(r)|x|_\infty, \quad x \in \varphi^+.$$

Далее нам понадобятся оценки для оператора $|P|$. Из (2.5) имеем

$$\left| \frac{a_{r+1}}{a_r} |P|x \right|_r = ||P|x|_{r+1} \leqslant \frac{1}{2}|x|_{r+2} = \frac{1}{2} \left| \frac{a_{r+2}}{a_r} x \right|_r .$$

Следовательно,

$$\left| \frac{a_{r+1}}{a_r} |P| \frac{a_r}{a_{r+2}} x \right|_r \leqslant \frac{1}{2}|x|_r. \tag{2.11}$$

Введем операторы

$$A_r = J_r|P|J'_r, \quad J_r = \frac{a_{r+1}}{a_r}, \quad J'_r = \frac{a_r}{a_{r+2}}.$$

Тогда из (2.11) следует, что $|A_r x|_r \leqslant \frac{1}{2}|x|_r$, т. е. $\|A_r\|_{G_r \to G_r} \leqslant \frac{1}{2}$. Таким образом, для любого $x \in \varphi^+$ справедливы неравенства

$$\left|P_{n,\varepsilon}J'_r x\right|_1 \leqslant C_1(r)|A_r x|_1, \quad \left|P_{n,\varepsilon}J'_r x\right|_r \leqslant C_2(r)\left|J'_r x\right|_\infty \leqslant C_2(r)|x|_\infty.$$

Пусть

$$\left(Q^{(N)}x\right)(n) = \begin{cases} x(n), & n = 1, 2, \ldots, N, \\ 0, & n > N. \end{cases}$$

Положим

$$S_{n,\varepsilon,r} = P_{n,\varepsilon}J'_r, \quad S^{(N)}_{n,\varepsilon,r} = S_{n,\varepsilon,r}Q^{(N)}, \quad A^{(N)}_r = A_r Q^{(N)}.$$

Тогда

$$|S^{(N)}_{n,\varepsilon,r}x|_1 \leqslant C_1(r)|A^{(N)}_r x|_1 \qquad \text{при всех} \quad x \in \omega^+,$$
$$|S^{(N)}_{n,\varepsilon,r}x|_r \leqslant C_2(r)|x|_\infty \qquad \text{при всех} \quad x \in \omega^+ \cap G_\infty.$$

Так как $|\cdot|_1$ — монотонная норма, то при $x \geqslant A^{(N)}_r x \geqslant 0$ справедлива оценка $|A^{(N)}_r x|_1 \leqslant |x|_1$. Рассмотрим в пространстве ω конус

$$Q_N = \bigl\{x \in \omega^+ : \, A^{(N)}_r x \leqslant x\bigr\}.$$

Тогда

$$\bigl|S^{(N)}_{n,\varepsilon,r}x\bigr|_1 \leqslant C_2(r)|x|_1 \qquad \text{при} \quad x \in Q_N \cap G^+_1,$$
$$\bigl|S^{(N)}_{n,\varepsilon,r}x\bigr|_r \leqslant C_2(r)|x|_\infty \qquad \text{при} \quad x \in G^+_\infty.$$

Покажем, что из этих неравенств следует ограниченность оператора $S^{(N)}_{n,\varepsilon,r}$ на элементах конуса $Q_N \cap G^+_r$. Действительно,

$$\bigl|S^{(N)}_{n,\varepsilon,r}x\bigr|_{r-1} \leqslant C_3(r)|x|_r \quad \text{при} \quad x \in Q_N \cap G^+_r.$$

Чтобы убедиться в интерполяционности тройки (G_1, G_∞, G_r) относительно тройки (G_1, G_r, G_{r-1}), достаточно проверить выполнение неравенства

$$\frac{a_{r-1}(m)}{a_r(n)} \leqslant C_r \max\left\{1, \frac{a_r(m)}{a_\infty(n)}\right\}.$$

Пусть $n \geqslant m$. Из условия правильности, учитывая, что $a_1(n) = 1$ для всех n, получаем

$$\frac{1}{a_{r-1}(n)} \leqslant \frac{1}{a_{r-1}(m)},$$

откуда

$$\frac{a_{r-1}(m)}{a_r(n)} \leqslant \frac{a_{r-1}(m)}{a_{r-1}(n)} \leqslant 1.$$

Пусть $m > n$. Покажем, что

$$\frac{a_{r-1}(m)}{a_r(n)} \leqslant C_r \frac{a_r(m)}{a_\infty(n)}. \tag{2.12}$$

Действительно, в силу условия правильности, с учетом (2.8), полагая $C_r = c'(r-\ 1)$, будем иметь

$$\frac{a_{r-1}(m)}{a_r(m)} \leqslant \frac{a_{r-1}(n)}{a_r(n)} \leqslant C_r \frac{a_r(n)}{a_\infty(n)}.$$

Следовательно, тройка (G_1, G_∞, G_r) интерполяционна относительно тройки (G_1, G_r, G_{r-1}).

Покажем теперь, что выполняются условия теоремы 1.2. Рассмотрим оператор $I - A^{(N)}_r : G_r \to G_r$. Поскольку $\|A^{(N)}_r\|_{G_r \to G_r} \leqslant \frac{1}{2}$, то $I - A^{(N)}_r$ биективно действует из G_r в G_r. Условие $x \geqslant A^{(N)}_r x$ равносильно тому, что $x = \bigl(I - A^{(N)}_r\bigr)^{-1} h$, где $h \in G^+_r$. Ядро оператора $I - A^{(N)}_r : G_r \to G_r$ состоит из нулевого элемента. Тогда ядро его сужения

$I - A_r^{(N)} : G_\infty \to G_\infty$ также состоит из нулевого вектора. Учитывая (2.9), (2.7), конечномерность оператора $|P|J'_rQ^{(N)} : G_{\infty,0} \to G_\infty$, а также эквивалентность всех норм в конечномерном пространстве, имеем

$$\big\|A_r^{(N)}x\big\|_{G_\infty} = \big\|J_r|P|J'_rQ^{(N)}x\big\|_{G_\infty} \leqslant M(r)\big\||P|J'_rQ^{(N)}x\big\|_{G_{\infty,0}}$$
$$\leqslant M(r)C(N)\big\||P|J'_rQ^{(N)}x\big\|_{G_\infty} \leqslant M(r)C(N)\big\|Q^{(N)}x\big\|_{G_{\infty,0}} \leqslant M(r)C^2(N)\|x\|_{G_\infty},$$

где $C(N)$ — некоторая зависящая от N константа. Оператор $A_r^{(N)} : G_\infty \to G_\infty$ является непрерывным конечномерным и, следовательно, компактным. Тогда к оператору $I - A_r^{(N)} : G_\infty \to G_\infty$ применима альтернатива Фредгольма, и потому его инъективность влечет биективность. В предыдущем параграфе было показано, что из биективности оператора $I - A_r^{(N)} : G_\infty \to G_\infty$ следует воспроизводимость конуса $Q_N \cap G_\infty^+$. Ясно, что из биективности оператора $I - A_r^{(N)} : G_\infty \to G_\infty$ также следует наличие строго положительного вектора в $Q_N \cap G_\infty^+$.

Наконец, конус $Q_N \cap G_\infty^+$ является нижней полурешеткой в ω. Действительно, пусть $x, y \in Q_N \cap G_\infty^+$, т. е. $y \geqslant A_r^{(N)}y$, $y \geqslant A_r^{(N)}y$. В силу положительности оператора $A_r^{(N)}$ (именно, $A_r^{(N)} > 0$ при $x > 0$) имеем $x \geqslant A_r^{(N)}\min(x, y)$, $x \geqslant A_r^{(N)}\min(x, y)$. Откуда следует, что $\min(x, y) \geqslant A_r^{(N)}\min(x, y)$. Следовательно, для всех троек конусов из семейства $\{(Q_N \cap G_1^+, G_\infty^+, Q_N \cap G_r)\}_N$ выполнены условия теоремы 1.1, и справедлива оценка

$$\big\|S_{n,\varepsilon,r}^{(N)}x\big\|_{r-1} \leqslant C_3(r)\|x\|_r, \quad x \in Q_N \cap G_r^+.$$

Поскольку оператор $A_r^{(N)}$ положителен, $\|A_r^{(N)}\|_{G_r \to G_r} \leqslant \frac{1}{2}$ и норма $\|\cdot\|_{G_r}$ монотонна, то конус Q_N, как было показано в начале предыдущего параграфа, несплющен с константой несплющенности, не превышающей 4. Поэтому

$$\|S_{n,\varepsilon,r}^{(N)}x\|_{r-1} \leqslant 8 \cdot C_3(r)\|x\|_r, \quad x \in G_r.$$

Пусть $C(r) = 8 \cdot C_3(r)$. Переходя к пределу при $N \to \infty$, получим

$$\big\|S_{n,\varepsilon,r}x\big\|_{r-1} \leqslant C(r)\|x\|_r, \quad x \in G_r,$$

или

$$\|P_{n,\varepsilon}J'_rx\|_{r-1} \leqslant C(r)\|x\|_r, \quad x \in G_r.$$

Тогда

$$\|P_{n,\varepsilon}x\|_{r-1} \leqslant C(r)\big\|J_r'^{-1}x\big\|_r = C(r)\left\|\frac{a_{r+2}}{a_r}x\right\|_r = C(r)\|x\|_{r+2},$$

или, поскольку наши рассуждения не зависят от выбора r,

$$\|P_{n,\varepsilon}x\|_r \leqslant C(r)\|x\|_{r+3}.$$

Таким образом, $\{P_{n,\varepsilon}\}$ — равностепенно непрерывное семейство операторов в E, а значит, $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ — безусловный, а поэтому и абсолютный (так как F — ядерно) базис в F. $\rhd$

Утверждение о квазиэквивалентности [4] каждого базиса в дополняемом подпространстве части абсолютного базиса пространства Фреше называют гипотезой Бессаги. В работах В. П. Кондакова (см. [6, с. 52]) доказана справедливость гипотезы Бессаги для пространств Кёте из класса (d_2). Доказанная теорема позволяет немедленно сформулировать следующий результат.

Теорема 2.2. *В любом дополняемом подпространстве ядерного пространства Кёте из класса (d_2) существует базис, квазиэквивалентный базису ортов.*

Литература

1. *Берг Й., Лефстрем Й.* Интерполяционные пространства.—М.: Мир, 1980.—264 с.
2. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 1961.—407 с.
3. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Введение в теорию линейных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.—М.: Наука, 1965.—448 с.
4. *Драгилев М. М.* Базисы в пространствах Кёте.—Ростов-н/Д.: Изд-во РГУ, 1983.—144 с.
5. *Каплицкий В. М., Дронов А. К.* К теории интерполяции операторов, ограниченных на конусах в весовых пространствах числовых последовательностей // Записки научных семинаров ПОМИ.—2014.—Т. 424.—С. 154–178.
6. *Кондаков В. П.* Вопросы геометрии ненормируемых пространств.—Ростов-н/Д: Изд-во РГУ, 1983.—72 с.
7. *Кондаков В. П.* Об операторах и дополняемых подпространствах в пространствах Кёте, определяемых разряжёнными матрицами // Сиб. мат. журн.—1995.—Т. 36, № 5.—С. 1096–1112.
8. *Кондаков В. П.* Геометрические свойства пространств Фреше и выделение базисных последовательностей // Мат. заметки.—1999.—Т. 66, № 1.—С. 102–111.
9. *Кондаков В. П.* Замечание о существовании базисов в весовых счетно-гильбертовых пространствах и их дополняемых подпространствах // Сиб. мат. журн.—2001.—Т. 43, № 6.—С. 1300–1313.
10. *Кондаков В. П., Ефимов А. И.* О классах пространств Кёте, в которых каждое дополняемое подпространство имеет базис // Владикавк. мат. журн.—2008.—Т. 10, вып. 2.—С. 21–29.
11. *Крейн М. Г.* О минимальном разложении функционала на положительные составляющие // Докл. АН СССР.—1940.—Т. 28, № 1—С. 18–22.
12. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.—М.: Наука, 1978.
13. *Митягин Б. С., Хенкин Г. М.* Линейные задачи комплексного анализа // Успехи мат. наук.—1970.—Т. 26, вып. 4.—С. 93–153.
14. *Peetre J.* On interpolation functions III // Acta Sci. Math.—1969.—Vol. 30, № 3, 4.—P. 235–239.
15. *Pelczynski A.* Problem 37 // Stud. Math.—1970.—Vol. 38.—P. 18–22.
16. *Пич А.* Ядерные локально выпуклые пространства.—М.: Мир, 1970.
17. *Vogt D.* Ein Isomorphiesatz für Potenzreihenräume // Arch. Match.—1982.—Vol. 38.—P. 540–548.

Статья поступила 23 октября 2014 г.

Дронов Алексей Константинович
Ростовский государственный экономический университет (РИНХ),
ассистент кафедры прикладной и фундаментальной мат-ки
РОССИЯ, 344002, Ростов-на-Дону, ул. Большая Садовая, д. 69
E-mail: floberrr@mail.ru

ON THE EXISTENCE OF A BASIS IN A COMPLEMENTED SUBSPACE OF A NUCLEAR KÖTHE SPACE OF TYPE d_2

Dronov A. K.

The existence of a basis in a complemented subspace of a nuclear Köthe space of the class d_2 is proved. It is also shown that in each such subspace there is a basis quasiequivalent to the part of the basis of orts.

Key words: Pelczynski hypothesis, Köthe space, basis, complemented subspace, cone, interpolation.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 1, С. 21–25

УДК **517.98**

TWO MEASURE-FREE VERSIONS OF THE BREZIS–LIEB LEMMA

E. Yu. Emelyanov, M. A. A. Marabeh

Dedicated to Professor A. E. Gutman
on the occasion of his 50th anniversary

We present two measure-free versions of the Brezis–Lieb lemma for *uo*-convergence in Riesz spaces.

Mathematics Subject Classification (2010): 28A20, 46E30, 46B42.

Key words: Brezis–Lieb lemma, uniformly integrable sequence, Riesz space, *uo*-convergence, almost order bounded set, σuo-continuous mapping.

1. Introduction

The Brezis–Lieb lemma [2, Theorem 2] has numerous applications mainly in calculus of variations (see, for example [3, 6]). We begin with its statement. Let $j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be a continuous function with $j(0) = 0$. In addition, let j satisfy the following hypothesis: for every sufficiently small $\varepsilon > 0$, there exist two continuous, nonnegative functions φ_ε and ψ_ε such that

$$|j(a+b) - j(a)| \leqslant \varepsilon\varphi_\varepsilon(a) + \psi_\varepsilon(b) \tag{1}$$

for all $a, b \in \mathbb{C}$. The following result has been stated and proved by H. Brezis and E. Lieb in [2].

Theorem 1.1 (Brezis–Lieb lemma [2, Theorem 2])**.** *Let (Ω, Σ, μ) be a measure space. Let the mapping j satisfy the above hypothesis, and let $f_n = f + g_n$ be a sequence of measurable functions from Ω to $\mathbb{C}$ such that:*

(i) $g_n \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$;
(ii) $j \circ f \in L^1$;
(iii) $\int \varphi_\varepsilon \circ g_n d\mu \leqslant C < \infty$ *for some C independent of ε and n;*
(iv) $\int \psi_\varepsilon \circ f d\mu < \infty$ *for all $\varepsilon > 0$.*

Then, as $n \to \infty$,

$$\int (j(f+g_n) - j(g_n) - j(f))d\mu \to 0. \tag{2}$$

Here we reproduce its proof from [2, Theorem 2] with several simple remarks.

$\lhd$ Fix $\varepsilon > 0$ and let $W_{\varepsilon,n} = [|j \circ f_n - j \circ g_n - j \circ f| - \varepsilon\varphi_\varepsilon \circ g_n]_+$. As $n \to \infty$, $W_{\varepsilon,n} \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$. On the other hand,

$$|j \circ f_n - j \circ g_n - j \circ f| \leqslant |j \circ f_n - j \circ g_n| + |j \circ f| \leqslant \varepsilon\varphi_\varepsilon \circ g_n + \psi_\varepsilon \circ f + |j \circ f|.$$

© 2016 Emelyanov E. Yu., Marabeh M. A. A.

[1] This research was funded by Middle East Technical University BAP, research project № BAP-01-01-2016-001.

Therefore, $0 \leqslant W_{\varepsilon,n} \leqslant \psi_\varepsilon \circ f + |j \circ f| \in L^1$. By dominated convergence,

$$\lim_{n\to\infty} \int W_{\varepsilon,n} d\mu = 0. \tag{3}$$

However,

$$|j \circ f_n - j \circ g_n - j \circ f| \leqslant W_{\varepsilon,n} + \varepsilon\varphi_\varepsilon \circ g_n \tag{4}$$

and thus

$$I_n := \int |j \circ f_n - j \circ g_n - j \circ f| d\mu \leqslant \int [W_{\varepsilon,n} + \varepsilon\varphi_\varepsilon \circ g_n] d\mu.$$

Consequently, $\limsup I_n \leqslant \varepsilon C$. Now let $\varepsilon \to 0$. $\rhd$

Remark 1.1. (i) The conditions (3) and (4) mean that the sequence $|j \circ f_n - j \circ g_n|$ lies eventually in the set $[-|j \circ f|, |j \circ f|] + \frac{3\varepsilon C}{2} B_{L^1}$, where B_{L^1} is the unit ball of L^1. In other words, the sequence $j \circ f_n - j \circ g_n$ is almost order bounded.

(ii) The superposition operator $J_j : L^0 \to L^0$, $J_j(f) := j \circ f$ induced by the mapping j in the proof above can be replaced by a mapping $J : L^0 \to L^0$ satisfying some reasonably mild conditions for keeping the statement of the Brezis–Lieb lemma.

(iii) Theorem 1.1 is equivalent to its partial case when the $\mathbb{C}$-valued functions are replaced by $\mathbb{R}$-valued ones.

The following proposition is motivated directly by the proof of [2, Theorem 2].

Proposition 1.2 (Brezis–Lieb lemma for mappings on L^0)**.** *Let (Ω, Σ, μ) be a measure space, $f_n = f + g_n$ be a sequence in L^0 such that $g_n \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$, and $J : L^0 \to L^0$ be a mapping satisfying $J(0) = 0$ and such that the sequence $J(f_n) - J(g_n)$ is almost order bounded. Then*

$$\lim_{n\to\infty} \int \big(J(f + g_n) - (J(g_n) + J(f))\big)\, d\mu = 0. \tag{5}$$

$\lhd$ As in the proof of the Brezis–Lieb lemma above, denote $I_n := \int |J(f + g_n) - (J(f) + J(g_n))|\, d\mu$. By the conditions, the sequence

$$J(f + g_n) - (J(f) + J(g_n)) = (J(f_n) - J(g_n))) - J(f)$$

a.e.-converges to 0 and is almost order bounded. Therefore, by the generalized dominated convergence, $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$. $\rhd$

Since almost order boundedness is equivalent to uniform integrability in finite measure spaces, the following corollary is immediate.

Proposition 1.3 (Brezis–Lieb lemma for uniform integrable sequence $J(f_n) - J(g_n)$)**.** *Let (Ω, Σ, μ) be a finite measure space, $f_n = f + g_n$ be a sequence in L^0 such that $g_n \xrightarrow{\text{a.e.}} 0$, and $J : L^0 \to L^0$ be a mapping satisfying $J(0) = 0$ and such that the sequence $J(f_n) - J(g_n)$ is uniformly integrable. Then*

$$\lim_{n\to\infty} \int (J(f + g_n) - (J(g_n) + J(f))) d\mu = 0\,. \tag{6}$$

2. Two variants of the Brezis–Lieb lemma in Riesz spaces

Recall that a sequence x_n in a Riesz space E is *order convergent* (or o-convergent, for short) to $x \in E$ if there is a sequence z_n in E satisfying $z_n \downarrow 0$ and $|x_n - x| \leqslant z_n$ for all $n \in \mathbb{N}$ (we write $x_n \xrightarrow{\text{o}} x$). In a Riesz space E, a sequence x_n is *unbounded order convergent* (or *uo*-convergent, for short) to $x \in E$ if $|x_n - x| \wedge y \xrightarrow{\text{o}} 0$ for all $y \in E_+$ (we write $x_n \xrightarrow{\text{uo}} x$).

Here we give two variants of the Brezis–Lieb lemma in Riesz space setting by replacing *a.e.*-convergence by *uo*-convergence, integral functionals by strictly positive functionals and the continuity of the scalar function j (in Theorem 1.1) by the so called σ-unbounded order continuity of the mapping $J : E \to F$ between Riesz spaces E and F. As standard references for basic notions on Riesz spaces we adopt the books [1, 7, 8] and on unbounded order convergence the papers [4, 5].

It is well known that if (Ω, Σ, μ) be a σ-finite measure space, then in L^p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, *uo*-convergence of sequences is the same as the almost everywhere convergence (see, for example [5]). Therefore, in order to obtain versions of Brezis–Lieb lemma in Riesz spaces, we shall replace the *a.e.*-convergence by the *uo*-convergence.

A mapping $f : E \to F$ between Riesz spaces is said to be σ-unbounded order continuous (in short, σuo-continuous) if $x_n \xrightarrow{\text{uo}} x$ in E implies $f(x_n) \xrightarrow{\text{uo}} f(x)$ in F. Clearly this definition is parallel to the well-known notion of σ-order continuous mappings between Riesz spaces.

Let F be a Riesz space and l be a strictly positive linear functional on F. Define the following norm on F:

$$\| x \|_l := l(|x|). \tag{7}$$

Recall that a Banach lattice E is said to be *order continuous* if every order null net is norm null, and a subset A of E is said to be *almost order bounded* if for any $\varepsilon > 0$ there exists $u_\varepsilon \in E_+$ such that $A \subset [-u_\varepsilon, u_\varepsilon] + \varepsilon B_E$, where B_E is the closed unit ball in E. We say that a net x_α is almost order bounded if the set of its members is almost order bounded.

The next lemma will be used to prove a version of Brezis–Lieb lemma for arbitrary strictly positive linear functionals.

Lemma 2.1 (See [5, Proposition 3.7])**.** *Let X be an order continuous Banach lattice. If a net x_α is almost order bounded and uo-convergent to x, then x_α converges to x in norm.*

Suppose that F is a Riesz space and l is a strictly positive linear functional on F, then the $\| \cdot \|_l$-completion $(F_l, \| \, . \, \|_l)$ of $(F, \| \cdot \|_l)$ is an AL-space, and so it is order continuous Banach lattice. The following result is a measure-free version of Proposition 1.2.

Proposition 2.2 (A Brezis–Lieb lemma for strictly positive linear functionals)**.** *Let E be a Riesz space and F_l be the AL-space constructed above. Let $J : E \to F_l$ be σuo-continuous with $J(0) = 0$, and x_n be a sequence in E such that:*

(i) $x_n \xrightarrow{\text{uo}} x$ *in E;*

(ii) *the sequence $(J(x_n) - J(x_n - x))_n$ is almost order bounded in F_l.*

Then

$$\lim_{n\to\infty} \| J(x_n) - J(x_n - x) - J(x) \|_l = 0. \tag{8}$$

$\lhd$ Since $x_n \xrightarrow{\text{uo}} x$ and J is σuo-continuous, then $J(x_n) \xrightarrow{\text{uo}} J(x)$ and $J(x_n - x) \xrightarrow{\text{uo}} J(0) = 0$. Thus, $J(x_n) - J(x_n - x) \xrightarrow{\text{uo}} J(x)$. It follows from Lemma 2.1 that $\lim\limits_{n\to\infty} \| J(x_n) - J(x_n - x) - J(x) \|_l = 0$. $\rhd$

In the following Brezis–Lieb type lemma, the σuo-continuity of mappings between Riesz spaces is used.

Proposition 2.3 (A Brezis–Lieb lemma for σuo-continuous linear functionals)**.** *Let E, F be Riesz spaces, l a σuo-continuous linear functional on F, $J : E \to F$ a σuo-continuous mapping with $J(0) = 0$, and $x_n \xrightarrow{\text{uo}} x$ in E. Then*

$$\lim_{n\to\infty} l(J(x_n) - J(x_n - x) - J(x)) = 0\,. \tag{9}$$

$\lhd$ Since $x_n \xrightarrow{\text{uo}} x$ and J is σuo-continuous, then $J(x_n) \xrightarrow{\text{uo}} J(x)$ and $J(x_n - x) \xrightarrow{\text{uo}} J(0) = 0$. Thus, $(J(x_n) - J(x_n - x) - J(x)) \xrightarrow{\text{uo}} 0$. But l is σuo-continuous, so $l(J(x_n) - J(x_n - x) - J(x)) \xrightarrow{\text{uo}} 0$. Since in $\mathbb{R}$ the uo-convergence, the o-convergence, and the standard convergence are all equivalent, then $\lim\limits_{n\to\infty} l(J(x_n) - J(x_n - x) - J(x)) = 0$. $\rhd$

Note that in opposite to Proposition 2.3, in Proposition 2.2 we do not suppose the functional l to be σuo-continuous.

References

1. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive operators.—Orlando, Florida: Acad. Press, Inc., 1985.—xvi+367 p.—(Pure and Appl. Math. Vol. 119).
2. *Brezis H., Lieb E.* A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals // Proc. Amer. Math. Soc.—1983.—Vol. 88, № 3.—P. 486–490.
3. *Brezis H., Nirenberg L.* Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents // Comm. Pure Appl. Math.—1983.—Vol. 36, № 4.—P. 437–477.
4. *Gao N., Troitsky V., Xanthos F.* Uo-convergence and its applications to Cesàro means in Banach lattices.—Preprint, arXiv:1509.07914.
5. *Gao N., Xanthos F.* Unbounded order convergence and application to martingales without probability // J. Math. Anal. Appl.—2014.—Vol. 415, № 2.—P. 931–947.
6. *Lieb E.* Sharp constants in the Hardy–Littlewood–Sobolev and related inequalities // Ann. of Math.—1983.—Vol. 118, № 2.—P. 349–374.
7. *Luxemburg W. A. J., Zaanen A. C.* Riesz Spaces. Vol. I.—Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1971.—viii+514 p.
8. *Zaanen A. C.* Riesz Spaces II // North-Holland Mathematical Library.—Amsterdam: North-Holland Publ. Comp., 1983.—xi+720 p.

Received January 11, 2016.

Eduard Yu. Emelyanov
Middle East Technical University,
Department of Mathematics, *Prof.*
TURKEY, 06800, Ankara, Dumlupinar Bulvari, 1
E-mail: `eduard@metu.edu.tr`;
Sobolev Institute of Mathematics,
Laboratory of Functional Analysis, *leading researcher*
4 Koptyug Avenue, Novosibirsk, 630090, Russia
E-mail: `emelanov@math.nsc.ru`

Mohammad A. A. Marabeh
Middle East Technical University,
Department of Mathematics, *Ph.D. student*
TURKEY, 06800, Ankara, Dumlupinar Bulvari, 1
E-mail: `mohammad.marabeh@metu.edu.tr`

ДВА ВАРИАНТА ЛЕММЫ БРЕЗИСА — ЛИБА БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ

Емельянов Э. Ю., Мараби М. А. А.

Рассматриваются две версии леммы Брезиса — Либа для uo-сходимости в пространствах Рисса.

Ключевые слова: лемма Брезиса — Либа, равномерно интегрируемая последовательность, пространство Рисса, uo-сходимость, почти порядково ограниченное множество, σuo-сходимость.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 1, С. 26–35

УДК **519.652**

ξ-ЛИЕВЫ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ НА АЛГЕБРАХ ЛОКАЛЬНО ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

И. М. Жураев

Изучаются ξ-лиевы дифференцирования на алгебрах локально измеримых операторов $LS(M)$, где M — алгебра фон Неймана, не содержащая прямых абелевых слагаемых.

Ключевые слова: алгебра фон Неймана, локально измеримый оператор, дифференцирование, лиево дифференцирование, ξ-лиево дифференцирование, центрозначный след.

Пусть A — некоторая ассоциативная алгебра. Аддитивное (линейное) отображение $D : A \to A$ называется *аддитивным* (*линейным*) *дифференцированием*, если $D(xy) = D(x)y + xD(y)$ при всех $x, y \in A$. Каждый элемент $a \in A$ определяет линейное ассоциативное дифференцирование D_a в алгебре A по правилу $D_a(x) = ax - xa = [a, x]$, $x \in A$. Дифференцирования вида D_a называются *внутренними*.

Аддитивное (линейное) отображение $L : A \to A$ называется *аддитивным* (*линейным*) *лиевым дифференцированием*, если $L([x, y]) = [L(x), y] + [x, L(y)]$ для всех $x, y \in A$, где $[x, y]$ — коммутатор элементов x, y, т. е. $[x, y] = xy - yx$.

Аддитивное (линейное) отображение $L : A \to A$ называется *аддитивным* (*линейным*) *ξ-лиевым дифференцированием*, если $L([x, y]_\xi) = [L(x), y]_\xi + [x, L(y)]_\xi$ для всех $x, y \in A$, где $[x, y]_\xi = xy - \xi yx$, $\xi \in \mathbb{C}$, $\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел.

Обозначим через $Z(A)$ центр A. Аддитивное (линейное) отображение $E : A \to Z(A)$ называется *аддитивным* (*линейным*) *следом* со значениями в $Z(A)$, если $E(xy) = E(yx)$ для всех $x, y \in A$.

Хорошо известно, что любое лиево дифференцирование L на C^*-алгебре A единственным образом представляется в виде $L = D + E$, где D — (ассоциативное) дифференцирование и E — центрозначный след на A [6]. Такое представление лиевого дифференцирования L называют *стандартной формой* для L. В случае, когда A является алгеброй фон Неймана, стандартная форма лиевого дифференцирования $L : A \to A$ имеет вид $L = D_a + E$ для некоторого $a \in A$ [8]. Проблема о представлении всякого лиевого дифференцирования в стандартной форме для случая $S(M)$-алгебр измеримых операторов была рассмотрена в [3].

Мы в данной работе изучаем более общий вопрос в этом направлении, т. е. изучаем ξ-лиевы дифференцирования на алгебрах локально измеримых операторов $LS(M)$, где алгебра фон Неймана M не содержит прямых абелевых слагаемых.

Пусть H — гильбертово пространство над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, $B(H)$ — $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H, M — подалгебра фон

© 2016 Жураев И. М.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Европейского Союза в рамках программы Erasmus Mundus, проект Target II № 2011-2569.

Неймана в $B(H)$, $\mathscr{P}(M) = \{p \in M : p^2 = p = p^*\}$ — решетка всех проекторов из M и $\mathscr{P}_{fin}(M)$ — ее подрешетка всех конечных проекторов из $\mathscr{P}(M)$. Через $Z(M)$ обозначим центр алгебры M, а через $\mathbf{1}$ — единичный оператор из M.

Линейное подпространство $\mathscr{D}$ в H называется *присоединенным к алгебре фон Неймана* M (обозначение: $\mathscr{D}\,\eta\, M$), если $u(\mathscr{D}) \subseteq \mathscr{D}$ для любого унитарного оператора u из коммутанта $M' = \{y \in B(H) : xy = yx \ (\forall\, x \in M)\}$ алгебры фон Неймана M.

Линейное подпространство $\mathscr{D}$ в H называется *сильно плотным в* H *относительно алгебры фон Неймана* M, если $\mathscr{D}\,\eta\, M$ и существует такая последовательность проекторов $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathscr{P}(M)$, что $p_n \uparrow \mathbf{1}$, $p_n(H) \subset \mathscr{D}$ и $p_n^{\perp} := \mathbf{1} - p_n \in \mathscr{P}_{fin}(M)$ для любого $n \in \mathbb{N}$, где $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел.

Линейный оператор x, действующий в H, с плотной областью определения $\mathscr{D}(x)$ называется *присоединенным к алгебре фон Неймана* M, если $\mathscr{D}(x)\ \eta\ M$ и $ux(\xi) = xu(\xi)$ для всех $\xi \in \mathscr{D}(x)$ и любого унитарного оператора $u \in M'$.

Замкнутый линейный оператор x, присоединенный к M, называется *измеримым относительно алгебры фон Неймана* M, если $\mathscr{D}(x)$ сильно плотно в H. Множество $S(M)$ всех операторов, измеримых относительно M, является $*$-алгеброй с единицей $\mathbf{1}$ над полем $\mathbb{C}$ относительно операций сильного сложения, сильного умножения и перехода к сопряженному оператору (умножение на скаляры определяется обычным образом, при этом считается, что $0 \cdot x = 0$) [10].

Замкнутый линейный оператор x, присоединенный к M, называется *локально измеримым относительно алгебры фон Неймана* M, если существует такая последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов из M, что $z_n \uparrow \mathbf{1}$ и $xz_n \in S(M)$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Множество $LS(M)$ всех локально измеримых относительно M операторов также образует $*$-алгебру с единицей $\mathbf{1}$ относительно операций сильного сложения, сильного умножения и перехода к сопряженному оператору, при этом $S(M)$ и M есть $*$-подалгебры в $LS(M)$ [7, гл. II, § 2.3]. Центр $Z(LS(M))$ в $*$-алгебре $LS(M)$ совпадает с $*$-алгеброй $S(Z(M))$, и в случае когда M — фактор, либо M — конечная алгебра фон Неймана, всегда верно равенство $LS(M) = S(M)$.

Если M — коммутативная алгебра фон Неймана, то алгебра $LS(M)$ также коммутативна [7, гл. II, § 2.2], и поэтому для любой подалгебры A в $LS(M)$ имеем, что $Z(A) = A$. Следовательно, в этом случае, класс лиевых дифференцирований на A совпадает с классом $Z(A)$-значных следов на A.

Пусть M — алгебра фон Неймана с центром $Z = Z(M)$ и M не имеет прямых абелевых слагаемых. В этом случае в M существует такой ненулевой проектор p, что $z(p) = z(\mathbf{1} - p)$, где $z(p)$ — центральный носитель для p [4, Problem 6.1.9]. Рассмотрим произвольную идеальную $*$-подалгебру A в $LS(M)$, для которой $M \subset A$.

Положим $p_1 = p$, $p_2 = \mathbf{1} - p$ и $S_{ij} = p_i\, A\, p_j = \{p_i x p_j : x \in A\}$, $i, j = 1, 2$. Ясно, что S_{ij} есть подалгебра в A. Из равенства

$$x = (p + (\mathbf{1} - p))x(p + (\mathbf{1} - p)) = p_1xp_1 + p_1xp_2 + p_2xp_1 + p_2xp_2$$

следует $A = \sum_{i,j=1,2} p_iAp_j$. Кроме того, для $x \in S_{ik}$, $y \in S_{lj}$ имеем, что $xy = 0$, если $k \neq l$ и $xy = (p_ixp_k)(p_lyp_j) \in S_{ij}$, т. е. $S_{ik}S_{lj} \subset S_{ij}$ для всех $i, j, k, l = 1, 2$. Отметим также, что из включения $M \subset A$ следует, что $p_iMp_j \subset S_{ij}$ для любых $i, j = 1, 2$.

Для каждого $x \in A$ через $z(x)$ обозначим центральный носитель для x, т. е. $z(x) := \mathbf{1} - \sup\{z \in \mathscr{P}(Z(M)) : zx = 0\}$. Ниже рассмотрим ξ-лиево дифференцирование на алгебрах локально измеримых операторов, где $\xi \neq 1$.

Лемма 1. *Справедливы равенства*

$$pL(\mathbf{1})(\mathbf{1} - p) = (\mathbf{1} - p)L(\mathbf{1})p = 0$$

и

$$(\mathbf{1}-p)L(p)(\mathbf{1}-p) = pL(\mathbf{1}-p)p = 0.$$

$\lhd$ Так как $p(\mathbf{1}-p)=0$, то $[L(p),\mathbf{1}-p]_\xi + [p, L(\mathbf{1}-p)]_\xi = 0)$. Таким образом,

$$L(p)(\mathbf{1}-p) - \xi(\mathbf{1}-p)L(p) + pL(\mathbf{1}-p) - \xi L(\mathbf{1}-p)p = 0, \tag{1}$$

следовательно, $(\mathbf{1}-p)p = 0$, $[L(\mathbf{1}-p),p]_\xi + [\mathbf{1}-p, L(p)]_\xi = 0$, т. е.

$$L(\mathbf{1}-p)p - \xi pL(\mathbf{1}-p) + (\mathbf{1}-p)L(p) - \xi L(p)(\mathbf{1}-p) = 0. \tag{2}$$

Умножая равенство (1) слева и справа на p и $\mathbf{1}-p$ соответственно, имеем

$$pL(p)(\mathbf{1}-p) + pL(\mathbf{1}-p)(\mathbf{1}-p) = 0,$$

и поэтому $pL(\mathbf{1})(\mathbf{1}-p) = 0$. Умножая равенство (2) слева и справа на $\mathbf{1}-p$ и p соответственно, имеем

$$(\mathbf{1}-p)L(\mathbf{1}-p)p + (\mathbf{1}-p)L(p)p = 0,$$

и поэтому $(\mathbf{1}-p)L(\mathbf{1})p = 0$. Умножая равенство (1) с обеих сторон на $\mathbf{1}-p$, имеем

$$(\mathbf{1}-p)L(p)(\mathbf{1}-p) - \xi(\mathbf{1}-p)L(p)(\mathbf{1}-p) = 0,$$

и поэтому $(\mathbf{1}-p)L(p)(\mathbf{1}-p) = 0$. Умножая равенство (2) с обеих стороны на p, имеем

$$pL(\mathbf{1}-p)p - \xi pL(\mathbf{1}-p)p = 0,$$

и поэтому $pL(\mathbf{1}-p)p = 0$. $\rhd$

Определим отображение $\delta : LS(M) \to LS(M)$ следующим образом: $\delta(x) = L(x) + ax - xa$ для всех $x \in LS(M)$, где $a = pL(p)(\mathbf{1}-p) - (\mathbf{1}-p)L(p)p$. Ясно, что δ является аддитивным отображением и $[\delta(x),y]_\xi + [x,\delta(y)]\xi = \delta([x,y])$ для всех $x,y \in LS(M)$, где $xy = 0$. Кроме того, согласно лемме 1 имеем $p\delta(\mathbf{1})(\mathbf{1}-p) = (\mathbf{1}-p)\delta(\mathbf{1})p = (\mathbf{1}-p)\delta(p)(\mathbf{1}-p) = p\delta(\mathbf{1}-p)p = 0$.

Таким образом,

$$\delta(p) = L(p) + bp - pb = pL(p)p = p\delta(p)p - p(bp-pb)p = p\delta(p)p, \tag{3}$$

$$\begin{aligned}\delta(\mathbf{1}-p) &= L(\mathbf{1}-p) + b(\mathbf{1}-p) - (\mathbf{1}-p)b = (\mathbf{1}-p)L(\mathbf{1}-p)(\mathbf{1}-p)\\ &= (\mathbf{1}-p)(\mathbf{1}-p)(\mathbf{1}-p) - (\mathbf{1}-p)(b(\mathbf{1}-p) - (\mathbf{1}-p)b)(\mathbf{1}-p)\\ &= (\mathbf{1}-p)\delta(\mathbf{1}-p)(\mathbf{1}-p).\end{aligned} \tag{4}$$

Лемма 2. *Для $i = 1,2$ справедливо $\delta(S_{ii}) \subseteq S_{ii}$.*

$\lhd$ Пусть $x_{11} \in S_{11}$. Так как $x_{11}(\mathbf{1}-p) = 0$, то $[\delta(x_{11}),\mathbf{1}-p]_\xi + [x_{11},\delta(\mathbf{1}-p)]_\xi = 0$. Из этого равенства и (4) имеем

$$\delta(x_{11})(\mathbf{1}-p) - \xi(\mathbf{1}-p)\delta(x_{11}) = 0. \tag{5}$$

Умножая равенство (4) слева на p, получаем

$$p\delta(x_{11})(\mathbf{1}-p) = 0. \tag{6}$$

Умножая равенство (4) с обеих сторон на $\mathbf{1}-p$, получаем $(\mathbf{1}-\xi)(\mathbf{1}-p)\delta(x_{11})(\mathbf{1}-p)=0$, откуда следует

$$(\mathbf{1}-p)\delta(x_{11})(\mathbf{1}-p)=0, \tag{7}$$

поскольку $\xi\neq 1$. С другой стороны, $(\mathbf{1}-p)x_{11}=0$, и мы имеем $[\delta(\mathbf{1}-p),x_{11}]_\xi+[\mathbf{1}-p,\delta(x_{11})]=0$. Таким образом, $(\mathbf{1}-p)\delta(x_{11})-\xi\delta(x_{11})(\mathbf{1}-p)=0$. Умножая это равенство на p, имеем

$$(\mathbf{1}-p)\delta(x_{11})p=0. \tag{8}$$

Из равенств (6)–(8) получаем $\delta(x_{11})\in S_{11}$. Поэтому $\delta(S_{11})\subseteq S_{11}$. Случай $\delta(S_{22})\subseteq S_{22}$ рассматривается аналогично. $\triangleright$

Лемма 3. *$\delta(\mathbf{1})\in Z(LS(M))$ и $\delta(p_i)x_{ij}=x_{ij}\delta(p_j)$ для любых $x_{ij}\in S_{ij}$, $i\neq j=1,2$.*

$\triangleleft$ Пусть $x_{12}\in S_{12}$. Так как $x_{12}p_1=0$, то имеем

$$\delta(-\xi x_{12})=[\delta(x_{12}),p_1]_\xi+[x_{12},\delta(p_1)]_\xi=\delta(x_{12})p_1-\xi p_1\delta(x_{12})+x_{12}\delta(p_1)-\xi\delta(p_1)x_{12}. \tag{9}$$

Так как $p_2x_{12}=0$, то

$$\delta(-\xi x_{12})=[\delta(p_2),x_{12}]_\xi+[p_2,\delta(x_{12})]_\xi=\delta(p_2)x_{12}-\xi x_{12}\delta(p_2)+p_2\delta(x_{12})-\xi\delta(x_{12})p_2. \tag{10}$$

Из равенств (9) и (10) получаем

$$\begin{aligned}\delta(x_{12})p_1-\xi p_1\delta(x_{12})p_1+x_{12}\delta(p_1)-\xi\delta(p_1)x_{12}\\ =\delta(p_2)x_{12}-\xi x_{12}\delta(p_2)+p_2\delta(x_{12})-\xi\delta(x_{12})p_2.\end{aligned} \tag{11}$$

При $\xi\neq 0$, умножая равенство (11) слева и справа на p_1 и p_2, согласно равенствам (3) и (4) имеем $\delta(p_1)x_{12}=p_1\delta(p_1)p_1x_{12}=x_{12}p_2\delta(p_2)p_2=x_{12}\delta(p_2)$. При $\xi=0$, используя равенство $(p_1+x_{12})(x_{12}-p_2)=(x_{12}-p_2)(p_1+x_{12})=0$, имеем

$$(\delta(p_1)+\delta(x_{12}))(x_{12}-p_2)+(p_1+x_{12})(\delta(x_{12})-\delta(p_2))=0$$

и

$$(\delta(x_{12})-\delta(p_2))(p_1+x_{12})+(x_{12}-p_2)(\delta(p_1)+\delta(x_{12}))=0,$$

откуда получаем

$$\delta(p_1)x_{12}+\delta(x_{12})x_{12}-\delta(x_{12})p_2+p_1\delta(x_{12})+x_{12}\delta(x_{12})-x_{12}\delta(p_2)=0$$

и

$$\delta(x_{12})p_1+\delta(x_{12})x_{12}+x_{12}\delta(x_{12})-p_2\delta(x_{12})=0.$$

Из последних равенств следует $\delta(p_1)x_{12}=x_{12}\delta(p_2)$. Далее, учитывая равенства (3) и (4), имеем $p_1\delta(p_1)p_1x_{12}=x_{12}p_2\delta(p_2)p_2$. Таким образом, заключаем, что

$$\delta(p_1)x_{12}=p_1\delta(p_1)p_1x_{12}=x_{12}p_2\delta(p_2)p_2=x_{12}\delta(p_2)$$

для всех $x_{12}\in S_{12}$. Заметим, что $p_1\delta(p_2)p_1=p_2\delta(p_1)p_2=0$. Отсюда $p_1\delta(1)p_1x_{12}=x_{12}p_2\delta(\mathbf{1})p_2$, и поэтому

$$\delta(\mathbf{1})x_{12}=(p_1\delta(\mathbf{1})p_1+p_2\delta(\mathbf{1})p_2)x_{12}=x_{12}(p_2\delta(\mathbf{1})p_2+p_1\delta(\mathbf{1})p_1)=x_{12}\delta(\mathbf{1}) \tag{12}$$

для всех $x_{12}\in S_{12}$. Аналогично можно показать, что

$$\delta(p_2)x_{21}=x_{21}\delta(p_1),\quad \delta(\mathbf{1})x_{21}=x_{21}\delta(\mathbf{1}),\quad x_{21}\in S_{21}. \tag{13}$$

Теперь из равенств (12), (13) имеем $\delta(\mathbf{1})\in Z(LS(M))$. $\triangleright$

Лемма 4. *Для всех* $x_{ij} \in S_{ij}$ $(1 \leqslant i \neq j \leqslant 2)$ *следующие утверждения эквивалентны:*
1) *если* $\xi \neq -1$, *то* $\delta(x_{ij}) \in S_{ij}$;
2) *если* $\xi = -1$, *то* $p_1\delta(x_{ij})p_1 = p_2\delta(x_{ij})p_2 = 0$ *и* $\delta(x_{ij})x_{ij} + x_{ij}\delta(x_{ij}) = 0$.

$\lhd$ Для любого $x_{12} \in S_{12}$ верно равенство (11). Умножая это равенство с обеих сторон на p_1 и p_2 соответственно и принимая во внимание, что $\xi \neq 1$, а также и равенства (3), (4), легко видеть, что
$$p_1\delta(x_{12})p_1 = p_2\delta(x_{ij})p_2 = 0. \tag{14}$$
Полное доказательство утверждения 1) следует из равенства $p_2\delta(x_{12})p_1 = 0$. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $\xi = 0$.

Для любого x_{12} имеем $x_{12}p_1 = 0$, поэтому
$$\delta(x_{12})p_1 = x_{12}\delta(p_1) = 0. \tag{15}$$

Умножая равенство (15) слева на p_2, получим $p_2\delta(x_{12})p_1 = 0$. Таким образом, имея ввиду это равенство и равенство (14), имеем $\delta(x_{12}) = p_1\delta(x_{12})p_2 \in S_{12}$.

Случай 2. $\xi \neq 0, -1$.

Пусть $x_{12}, y_{12} \in S_{12}$. Так как $(y_{12} - p_2)(p_1 + x_{12}) = 0$, то согласно равенствам (3), (4) имеем
$$\begin{gathered}\delta(-\xi x_{12} + \xi x_{12}) = \delta([y_{12} - p_2, p_1 + x_{12}]_\xi) = [\delta(y_{12} - p_2), p_1 + x_{12}]_\xi \\ + [y_{12} - p_2, \delta(p_1 + x_{12})]_\xi = \delta(y_{12})p_1 + \delta(y_{12})x_{12} - \xi p_1\delta(y_{12}) - \xi x_{12}\delta(y_{12}) \\ + \xi x_{12}\delta(p_2) + y_{12}\delta(x_{12}) - p_2\delta(x_{12}) - \xi\delta(p_1)y_{12} - \xi\delta(x_{12})y_{12} + \xi\delta(x_{12})p_2.\end{gathered} \tag{16}$$
Умножая равенство (16) с обеих сторон на p_2 и применяя равенство (14), получаем
$$p_2\delta(y_{12})p_1x_{12} = \xi p_2\delta(x_{12})p_1y_{12} \quad (\forall\, x_{12}, y_{12} \in S_{12}). \tag{17}$$
Умножая равенство (9) на p_2 и p_1 слева и справа соответственно, имеем
$$p_2\delta(x_{12})p_1 = p_2\delta(-\xi x_{12})p_1 \quad (\forall\, x_{12} \in S_{12}). \tag{18}$$
Из равенств (17) и (18) имеем
$$-p_2\delta(y_{12})p_1x_{12} = p_2\delta(\xi y_{12})p_1x_{12} = \xi p_2\delta(x_{12})p_1(\xi y_{12}) = \xi^2 p_2\delta(x_{12})p_1y_{12}$$
для всех $x_{12}, y_{12} \in S_{12}$. Таким образом, из равенства (17) вытекает, что
$$p_2\delta(x_{12})p_1y_{12} = 0 \quad (\forall\, x_{12}, y_{12} \in S_{12}). \tag{19}$$
Аналогично, умножая равенство (16) на p_1 с обеих сторон и используя равенства (14) и (18), получаем
$$y_{12}p_2\delta(x_{12})p_1 = 0 \quad (\forall\, x_{12} \in S_{12}). \tag{20}$$
Также заметим, что $p_2\delta(x_{12})p_1y_{21} = y_{21}p_2\delta(x_{12})p_1 = 0$ для всех $y_{12} \in S_{12}$. Тогда из равенств (19), (20) следует, что $p_2\delta(x_{12})p_1 \in Z(LS(M))$, и поэтому $p_2\delta(x_{12})p_1 = 0$. Таким образом, доказано утверждение 1).

Для доказательства утверждения 2) заметим, что при $\xi = -1$ имеет место равенство $xy = 0 \Rightarrow \delta(xy+yx) = \delta(x)y + x\delta(y) + \delta(y)x + y\delta(x)$. Так как $x_{12} \in S_{12}$, $(p_1+x_{12})(x_{12}-p_2) = 0$, то $\delta(p_1+x_{12})(x_{12}-p_2) + (x_{12}-p_2)\delta(p_1+x_{12}) + \delta(x_{12}-p_2)(p_1+x_{12}) + (p_1+x_{12})\delta(x_{12}-p_2) = 0$.

Отсюда, используя равенство (11), заключаем, что $\delta(x_{12})x_{12} + x_{12}\delta(x_{12}) = 0$. Учитывая это и равенство (14), получаем (2). $\rhd$

Лемма 5. *Имеют место следующие утверждения:*

1) *если* $\xi \neq 0, -1$, *то* $\delta(\xi xy) = \xi\delta(x)y + \xi x\delta(y)$ *для всех* $x, y \in LS(M)$;

2) *если* $\xi = 0$, *то существует аддитивное дифференцирование* φ *такое, что* $\delta(x) = \varphi(x) + \delta(\mathbf{1})x$ *для всех* $x \in LS(M)$;

3) *если* $\xi = -1$, *то* $\delta(x^2) = \delta(x)x + x\delta(x)$ *для всех* $x \in LS(M)$, *т. е.* δ *есть аддитивное йорданово дифференцирование.*

$\lhd$ *Случай* 1. $\xi \neq 0, -1$.

В этом случае докажем, что $\delta(\xi xy) = \xi\delta(x)y + \xi x\delta(y)$ для всех $x, y \in LS(M)$.

1. $\delta(\xi x_{ii}y_{ij}) = \xi\delta(x_{ii})y_{ij} + \xi x_{ii}\delta(y_{ij})$ для всех $x_{ii}, y_{ij} \in S_{ij}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 2$. На самом деле для всех $x_{ii} \in S_{ii}$, $y_{ij} \in S_{ij}$ имеем $y_{ij}x_{ii} = 0$. Согласно лемме 2 и утверждению 1) леммы 4 имеем

$$\begin{aligned}-\delta(\xi x_{ii}y_{ij}) &= \delta([y_{ij}, x_{ii}]_\xi) \\ &= \delta(y_{ij})x_{ii} - \xi x_{ii}\delta(y_{ij}) + y_{ij}\delta(x_{ii}) - \xi\delta(x_{ii})y_{ij} = -\xi x_{ii}\delta(y_{ij}) - \xi\delta(x_{ii})y_{ij},\end{aligned}$$

т. е. $\delta(\xi x_{ii}y_{ij}) = \xi x_{ii}\delta(y_{ij}) + \xi\delta(x_{ii})y_{ij}$ для всех $x_{ii} \in S_{ii}$ и $y_{ij} \in S_{ij}$. Аналогичным образом можно получить, что

2. $\delta(\xi x_{ij}y_{jj}) = \xi x_{ij}\delta(y_{jj}) + \xi\delta(x_{ij})y_{jj}$ для всех $x_{ij} \in S_{ij}$ и $y_{jj} \in S_{jj}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 2$;

3. $\delta(\xi x_{ii}y_{ii} = \xi\delta(x_{ii})y_{ii}) + \xi x_{ii}\delta(y_{ii})$ для всех $x_{ii}, y_{ii} \in S_{ii}$, $i = 1, 2$.

Пусть $i \neq j$. Для любых $x_{ii}, y_{ii} \in S_{ii}$, $i = 1, 2$, и $s_{ij} \in S_{ij}$, согласно п. 1 получим

$$\delta(\xi x_{ii}y_{ii}s_{ij}) = \xi\delta(x_{ii})y_{ii}s_{ij} + \xi x_{ii}y_{ii}\delta(s_{ij}).$$

С другой стороны,

$$\delta(\xi x_{ii}y_{ii}s_{ij}) = \xi\delta(x_{ii})y_{ii}s_{ij}\xi x_{ii}\delta(y_{ii}s_{ij}) = \xi\delta(x_{ii})y_{ii}s_{ij} + \xi^2 x_{ii}\delta(\xi^{-1}y_{ii})s_{ij} + \xi x_{ii}y_{ii}\delta(s_{ij}).$$

Сопоставляя последние два равенства, получаем

$$\Big(\delta(x_{ii}y_{ii}) - \delta(x_{ii})y_{ii} - \xi x_{ii}\delta(\xi^{-1}y_{ii})\Big)s_{ij} = 0.$$

Следовательно,

$$\Big(\delta(\xi x_{ii}y_{ii}) - \xi\delta(x_{ii})y_{ii} - \xi x_{ii}\delta(yii)\Big)s_{ij} = 0 \tag{21}$$

для всех $s_{ij} \in S_{ij}$. Аналогично для всех $s_{ji} \in S_{ij}$ имеем

$$s_{ji}\Big(\delta(\xi x_{ii}y_{ii}) - \xi\delta(x_{ii})y_{ii} - \xi x_{ii}\delta(y_{ii})\Big) = 0. \tag{22}$$

Также согласно лемме 2 имеем

$$s_{ij}\Big(\delta(\xi x_{ii}y_{ii}) - \xi\delta(x_{ii})y_{ii} - \xi x_{ii}\delta(y_{ii})\Big) = \Big(\delta(\xi x_{ii}y_{ii}) - \xi\delta(x_{ii})y_{ii} - \xi x_{ii}\delta(y_{ii})\Big)s_{ji} = 0.$$

Из равенств (21) и (22) вытекает $\delta(\xi x_{ii}y_{ii}) - \xi\delta(x_{ii})y_{ii} - \xi x_{ii}\delta(y_{ii}) \in Z(LS(M))$, откуда получаем $\delta(\xi x_{ii}y_{ii}) - \xi\delta(x_{ii})y_{ii} - \xi x_{ii}\delta(y_{ii}) = 0$.

4. $\delta(\xi x_{ij}y_{ji}) = \xi\delta(x_{ij})y_{ji} + \xi x_{ij}\delta(y_{ji})$ для всех $x_{ij} \in S_{ij}$, $y_{ji} \in S_{ji}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 2$.

Для любых $x_{ij} \in S_{ij}$, $y_{ji} \in S_{ji}$, $i \neq j$, $(x_{ij}y_{ji} - x_{ij} - y_{ji} + p_j) = 0$. Отсюда, согласно определению $-\delta$, имеем

$$\delta(x_{ij}y_{ji} - \xi x_{ij} - \xi y_{ji}x_{ij}y_{ji} - \xi y_{ji}x_{ij}) = \delta\big([x_{ij}y_{ji} - x_{ij} - y_{ji} + p_j, p_i + y_{ji}]_\xi\big) = 0.$$

Таким образом, согласно лемме 2 и утверждению 1) леммы 4 имеем

$$\delta(\xi x_{ij}y_{ji}) - \delta(\xi x_{ij}) - \delta(\xi y_{ji}x_{ij}) = \delta(x_{ij})y_{ji} + \delta(y_{ji})p_i - \delta(p_j)y_{ji} - \xi\delta(x_{ij})$$
$$- \xi y_{ji}\delta(x_{ij}) - x_{ij}y_{ji}\delta(p_i) + x_{ij}\delta(y_{ji}) + y_{ji}\delta(p_i) - p_j\delta(y_{ji}) - \xi\delta(p_i)x_{ij} - \xi\delta(y_{ji})x_{ij}.$$

Умножая это равенство с обеих сторон на p_j и применяя леммы 2 и 4, получаем $\delta(\xi y_{ji}x_{ij}) = \xi\delta(y_{ji})x_{ij} + \xi y_{ji}\delta(x_{ij})$.

Теперь для произвольных $x, y \in LS(M)$ согласно пп. 1–4 и аддитивности δ имеем $\delta(\xi xy) = \xi\delta(x)y + \xi x\delta(y)$ для всех $x, y \in LS(M)$. Таким образом, в итоге получим утверждение 1) леммы 5.

Случай 2. Пусть δ удовлетворяет условию: если $xy = 0$, то $\delta(x)y + x\delta(y) = 0$. Покажем, что

$$\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y) - \delta(\mathbf{1})xy$$

для всех $x, y \in LS(M)$. Пусть $1 \leqslant i \neq j \leqslant 2$. Согласно лемме 2 и утверждению 1) леммы 4 имеем $(x_{ii} + x_{ii}y_{ij})(p_j - y_{ij}) = 0$. Отсюда

$$\delta(x_{ii}y_{ij}) = \delta(x_{ii})y_{ij} + x_{ii}\delta(y_{ij}) - x_{ii}y_{ij}\delta(p_j) \tag{23}$$

для всех $x_{ii} \in S_{ii}$ и $y_{ij} \in S_{ij}$. Из равенства $(p_i - x_{ij})(y_{jj} + x_{ij}y_{jj}) = 0$ вытекает

$$\delta(x_{ij}y_{jj}) = \delta(x_{ij})y_{jj} + x_{ij}\delta(y_{jj}) - \delta(p_i)x_{ij}y_{jj} \tag{24}$$

для всех $x_{ij} \in S_{ij}$ и $y_{jj} \in S_{jj}$. Тогда согласно лемме 3 и равенству (23), рассуждая аналогично п. 3 случая 1, имеем

$$\delta(x_{ii}y_{ii}) = \delta(x_{ii})y_{ii} + x_{ii}\delta(y_{ii}) - x_{ii}y_{ii}\delta(p_i) \tag{25}$$

для всех $x_{ii}, y_{ii} \in S_{ii}$. Теперь, используя равенство $(x_{ij} + x_{ij}y_{ji})(p_i - y_{ji}) = 0$, лемму 2 и утверждение 1) леммы 4, имеем

$$\delta(x_{ij}y_{ji}) = \delta(x_{ij})y_{ji} + x_{ij}\delta(y_{ji}) - x_{ij}y_{ji}\delta(p_i) \tag{26}$$

для всех $x_{ij} \in S_{ij}$ и $y_{ji} \in S_{ji}$. Аналогично для аддитивного δ, сопоставляя равенства (23)–(26), получим $\delta(xy) = \delta(x)y + x\delta(y) - \delta(\mathbf{1})xy$ для всех $x, y \in LS(M)$. Теперь φ определим следующим образом: $\varphi(x) = \delta(x) - \delta(\mathbf{1})x$. Заметим, что $\delta(\mathbf{1}) \in Z(LS(M))$. Таким образом, имеем

$$\varphi(xy) = \delta(xy) - \delta(\mathbf{1})xy = \delta(x)y + x\delta(y) - 2\delta(\mathbf{1})xy$$
$$= (\varphi(x) + \delta(\mathbf{1})x)y + x(\varphi(y) + \delta(\mathbf{1})y) - 2\delta(\mathbf{1})xy = \varphi(x)y + x\varphi(y)$$

для всех $x, y \in LS(M)$. Поэтому δ является аддитивным дифференцированием и $\delta(x) = \varphi(x) + \delta(\mathbf{1})x$ для всех x.

Случай 3. $\xi = -1$.

В этом случае δ удовлетворяет условию

$$xy = 0 \Rightarrow \delta(yx) = \delta(x)y + x\delta(y) + \delta(y)x + y\delta(x).$$

Покажем, что δ — йорданов гомоморфизм, удовлетворяющий условию (3).

Пусть $1 \leqslant i \neq j \leqslant 2$. Для любых $x_{ii} \in S_{ii}$ и $y_{ij} \in S_{ij}$ имеем $y_{ij}x_{ii} = 0$. Согласно лемме 2 и утверждению 2) леммы 4 имеем

$$\delta(x_{ii}y_{ij}) = \delta(x_{ii})y_{ij} + x_{ii}\delta(y_{ij}) + \delta(y_{ij})x_{ii} \tag{27}$$

для всех $x_{ij} \in S_{ij}$ и $y_{jj} \in S_{jj}$, поскольку $y_{jj}x_{ij} = 0$. Согласно лемме 2 и утверждению 2) леммы 4 имеем

$$\delta(x_{ij}y_{jj}) = \delta(x_{ij})y_{jj} + x_{ij}\delta(y_{jj}) + y_{jj}\delta(x_{ij}) \tag{28}$$

для всех $x_{ii}, y_{ii} \in S_{ii}$. Согласно лемме 3 и равенству (27) аналогично п. 3 случая 1, можно показать, что

$$\delta(x_{ii}y_{ii}) = \delta(x_{ii})y_{ii} + x_{ii}\delta(y_{ii}). \tag{29}$$

Для любых $x_{ij} \in S_{ij}$ и $y_{ji} \in S_{ji}$ имеем $(x_{ij}x_{ji} + x_{ij} + x_{ji} + p_j)(p_i - x_{ij} - x_{ji} + x_{ji}x_{ij}) = 0$. Согласно лемме 2 и утверждению (2) леммы 4 получаем

$$\delta(x_{ij}x_{ji}) = \delta(x_{ij})x_{ji} + x_{ij}\delta(x_{ji}), \quad \delta(x_{ji}x_{ij}) = \delta(x_{ji})x_{ij} + x_{ji}\delta(x_{ij}). \tag{30}$$

Теперь, комбинируя равенства (27)–(30), получаем $\delta(x^2) = \delta(x)x + x\delta(x)$ для всех $x \in LS(M)$, т. е. δ — йорданово дифференцирование. $\rhd$

Лемма 6. *Если $\xi \neq 0, -1$, то существует аддитивное дифференцирование φ, удовлетворяющее равенству $\varphi(\xi\mathbf{1}) = \xi\delta(\mathbf{1})$, такое, что $\delta(x) = \varphi(x) + \delta(\mathbf{1})x$ для всех x; в частности, для рациональных комплексных ξ, δ является аддитивным.*

$\lhd$ Согласно утверждению 1) леммы 5 имеем $\delta(\xi xy) = \xi(\delta(x)y + x\delta(y)$ для любых $x, y \in LS(M)$. В частности, для любых x, y, где $xy = 0$, имеем $\xi(\delta(x)y + x\delta(y) = \delta(\xi xy) = \delta(0) = 0$. Таким образом, $\delta(x)y + x\delta(y) = 0$ для любых x, y, где $xy = 0$ так, что δ удовлетворяет условию $\xi = 0$. Тогда согласно утверждению 2) леммы 5 существует аддитивное дифференцирование φ такое, что $\delta(x) = \varphi(x) + \delta(\mathbf{1})x$ для всех x. Кроме того, $\delta(\xi\mathbf{1}) = \xi\delta(\mathbf{1})\mathbf{1} + \xi\mathbf{1}\delta(\mathbf{1})$, так как $\delta(\xi\ \mathbf{1}\ ) \in Z(LS(M))$ и $\varphi(\xi\mathbf{1}) = \xi\delta(\mathbf{1})$ согласно лемме 3. Поскольку δ — аддитивное для любого комплексного рационального числа r и любого $x \in LS(M)$, то имеем $\delta(rx) = r\delta(x)$. Так как $0 = -\varphi(\mathbf{1}) = \varphi(i^2\mathbf{1}) = \varphi(i\mathbf{1})i\mathbf{1} + i\mathbf{1}\varphi(i\mathbf{1}) = 2i\varphi(i\mathbf{1})$, то $\varphi(i\mathbf{1}) = 0$, $\delta(i\mathbf{1}) = i\delta(\mathbf{1})$, для любого комплексного рационального числа i. Таким образом, если ξ — рациональное комплексное число, то $xi\delta(\mathbf{1}) = \delta(xi\mathbf{1}) = 2xi\delta(\mathbf{1})$. Отсюда $\delta(\mathbf{1}) = 0$, так как $\delta = \varphi$ является аддитивным дифференцированием. $\rhd$

Теорема 1. *Пусть $LS(M)$ — алгебра локально измеримых операторов, где M не содержит прямого абелевого слагаемого. Пусть $L : LS(M) \to LS(M)$ — аддитивное отображение и $\xi \neq 1$.*

Тогда $L([x, y]_\xi) = [L(x), y]_\xi + [x, L(y)]_\xi$ для всех $x, y \in LS(M)$, где $xy = 0$ тогда и только тогда, когда $L(1) \in Z(LS(M))$ и выполняются следующие условия:

1) при $\xi \neq 0, -1$ существует аддитивное дифференцирование φ, где $\varphi(\xi\mathbf{1}) = \xi L(\mathbf{1})$ такое, что $L(x) = \varphi(x) + L(\mathbf{1})x$ для всех $x \in LS(M)$; в частности, L — аддитивное дифференцирование, где ξ — комплексное рациональное число;

2) при $\xi = 0$ существует аддитивное дифференцирование φ такое, что $L(x) = \varphi(x) + L(\mathbf{1})x$ для всех $x \in LS(M)$;

3) при $\xi = -1$ отображение L является йордановым дифференцированием, т. е. $L(x^2) = L(x)x + xL(x)$ для всех $x \in LS(M)$.

$\lhd$ Ясно, что из каждого утверждения 1)–3) вытекает

$$xy = 0 \Rightarrow L([x, y]_\xi) = [L(x), y]_\xi + [x, L(y)]_\xi.$$

Пусть утверждение 1) выполняется. Тогда для любых x, y, $xy = 0$, имеем

$$\begin{aligned} L([x, y]_\xi) &= -L(\xi yx) = -(\varphi(\xi yx) + \xi L(\mathbf{1})yx) = -(\varphi(\xi\mathbf{1})yx + \xi\varphi(yx) + \xi L(\mathbf{1})yx) \\ &= -(\xi\varphi(y)x + \xi y\varphi(x) + 2\xi L(\mathbf{1})yx) = \varphi(x)y + x\varphi(y) + 2L(\mathbf{1})xy \\ &\quad -(\xi\varphi(y)x + \xi y\varphi(x) + 2\xi L(\mathbf{1})yx) = [L(x), y]_\xi + [x, L(y)]_\xi. \end{aligned}$$

Заметим, что $L(x) = \delta(x) + xs - sx$ для всех $x \in LS(M)$ и $L(\mathbf{1}) = \delta(\mathbf{1})$. Согласно леммам 5 и 6 отображение L имеет требуемую в теореме 1 форму. $\triangleright$

Следствие. *Пусть алгебра фон Неймана M типа I_∞ или типа III. Пусть $L : LS(M) \to LS(M)$ — аддитивное отображение и $L([x,y]_\xi) = [L(x),y]_\xi + [x,L(y)]_\xi$, $\xi \neq 0, 1, -1$, для всех $x, y \in LS(M)$, где $xy = 0$.*

Тогда $L = D_a$ для всех $x \in LS(M)$, где D_a — внутреннее дифференцирование на алгебре $LS(M)$.

$\triangleleft$ Согласно утверждению 1) теоремы 1 существует аддитивное дифференцирование φ, где $\varphi(\xi\mathbf{1}) = \xi L(\mathbf{1})$ и $L(x) = \varphi(x) + L(\mathbf{1})x$ для всех $x \in LS(M)$. В случае алгебры фон Неймана M типа I_∞, либо типа III, как показано в [2, следствие 3.4], любое аддитивное ассоциативное дифференцирование на $LS(M)$ является внутренним. Отсюда и из равенства $\varphi(\xi\mathbf{1}) = \xi L(\mathbf{1})$ получаем, что $L(1) = 0$. Итак, $L = \varphi = D_a$ для некоторого $a \in LS(M)$. $\triangleright$

При $\xi = 1$ получим

Теорема 2 (ср. [12, теорема 2])**.** *Если M — алгебра фон Неймана типа I_∞ либо типа III, то любое аддитивное лиево дифференцирование L на алгебре $LS(M)$ является линейным лиевым дифференцированием и имеет вид $L = D_a + E$, где D_a — внутреннее дифференцирование на алгебре $LS(M)$ и E — линейный $Z(LS(M))$-значный след на $LS(M)$.*

В случае алгебр фон Неймана типа I_∞ теорема 2 имеет существенное уточнение. В [11] установлено, что для алгебр фон Неймана M, имеющих тип I_∞, всегда верно равенство $[LS(M), LS(M)] = LS(M)$. Поэтому для таких алгебр любой $Z(LS(M))$-значный след на $LS(M)$ тождественно равен нулю, что в силу теоремы 2 влечет

Следствие (ср. [12]). *Пусть M — алгебра фон Неймана типа I_∞. Тогда любое аддитивное лиево дифференцирование в $LS(M)$ является линейным ассоциативным дифференцированием.*

Благодарность. Автор выражает глубокую признательность за гостеприимство Технологическому университету Белфорт-Монбельяр, Франция.

Литература

1. *Albeverio S., Ayupov Sh. A., and Kudaybergenov K. K.* Structure of derivations on various algebras of measurable operators for type I von Neumann algebras // J. Func. Anal.—2009.—Vol. 256.—P. 2917–2943.
2. *Ayupov Sh. A., Kudaybergenov K. K.* Additive derivations algebras of measurable operators // J. Operator Theory.—2012.—Vol. 67, № 2.—P. 101–116.
3. *Жураев И. М.* Структура лиевых дифференцирований алгебр измеримых операторов // Владикавк. мат. журн.—2012.—Т. 14, вып. 3.—С. 58–62.
4. *Kadison R. V., Ringrose J. R.* Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Vol. I: Elementary Theory.—N. Y. etc.: Acad. Press, 1983.—398 p.
5. *Kusraev A. G.* Automorphisms and derivations on a universally complete complex f-algebra // Siberian Math. J.—2006.—Vol 47.—P. 77–85.
6. *Mathieu M., Villena A. R.* The structure of Lie derivations on C^*-algebras // J. Func. Anal.—2003.—Vol. 202.—P. 504–525.
7. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Алгебры измеримых и локально измеримых операторов.—Київ: Праці Ін-ту матемематики НАН України, 2007.—Т. 69.—390 с.
8. *Robert Miers C.* Lie derivations of von Neumann algebras // Duke Math. J.—1973.—Vol. 40.—P. 403–409.
9. *Sakai S.* C^*-Algebras and W^*-Algebras.—N. Y.–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag, 1971.
10. *Segal I.* A non-commutative extention of abstract integration // Ann. Math.—1953.—Vol. 57.—P. 401–457.

11. *Чилин В. И., Жураев И. М.* Коммутаторы локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана типа I // Материалы Республиканской науч. конф.—Ургенч, 2012.—Т. 2.—С. 122–124.
12. *Чилин В. И., Жураев И. М.* Аддитивные лиево дифференцирования на алгебрах локально измеримых операторов // Материалы Республиканской науч. конф.—Ташкент, 2013.—С. 256–258.

Статья поступила 2 марта 2015 г.

Жураев Илхом Мухитдинович
Бухарский государственный университет,
доцент кафедры математики
УЗБЕКИСТАН, 100174, Бухара, Мухаммад Икбол, 11
E-mail: `ijmo64@mail.ru`

ξ-LIE DERIVATIONS ON ALGEBRAS OF LOCALLY MEASURABLE OPERATORS

Juraev I. M.

We study ξ-Lie derivations on algebras of locally measurable operators $LS(M)$, where M is a von Neumann algebra without central summands of type I_1.

Key words: von Neumann algebra, locally measurable operator, derivation, Lie derivations, ξ-Lie derivations, center valued trace.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 1, С. 36–41

УДК **517.983:517.968.25**

О ЧАСТИЧНО КОМПАКТНЫХ ПО МЕРЕ НЕОГРАНИЧЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРАХ В L_2

В. Б. Коротков

Александру Ефимовичу Гутману
в связи с его 50-летием

В статье вводятся частично компактные по мере неограниченные линейные операторы и устанавливается характеристическое свойство предельных спектров операторов, сопряженных к плотно определенным в $L_2(\mu)$ неограниченным частично компактным по мере линейным операторам. Приводятся приложения этого результата к линейным функциональным уравнениям 1-го и 2-го рода с неограниченными операторами.

Ключевые слова: замкнутый оператор, компактный по мере оператор, предельный спектр, линейное функциональное уравнение 1-го или 2-го рода, линейное интегральное уравнение 1-го или 2-го рода.

Пусть (X, μ) — пространство с σ-конечной положительной мерой μ. *Атомом меры* μ называется множество положительной меры из X, не представимое в виде объединения двух непересекающихся множеств с положительными мерами. Будем говорить, что мера μ не является чисто атомической, если в X есть множество положительной меры, не содержащее атомов меры μ. Через $L_2(\mu) := L_2(X, \mu)$ обозначим пространство всех классов μ-эквивалентных μ-измеримых функций на X с суммируемым квадратом. Через $\|\cdot\|$ и $(\cdot, \cdot)$ будем обозначать норму и скалярное произведение в $L_2(\mu)$.

Пусть H, H_1 — гильбертовы пространства. Оператор $F : D_F \subset H \to H_1$ называется *замкнутым*, если из $f_n \in D_F$, $f_n \to u$, $Ff_n \to v$ следует $u \in D_F$ и $Fu = v$. Оператор T^*, сопряженный к плотно определенному замкнутому линейному оператору $T : D_T \subset H \to H_1$, плотно определен и замкнут, при этом $T^{**} = T$ [1, гл. III, § 5].

Пусть $T : D_T \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu_1) := L_2(X_1, \mu_1)$ — линейный оператор, $\|\cdot\|_1$ — норма в $L_2(\mu_1)$. Назовем T компактным по мере, если из $f_n \in D_T$, $\|f_n\| \leqslant 1$, $\|Tf_n\|_1 \leqslant 1$, $n = 1, 2, \dots$, вытекает, что $\{Tf_n\}$ содержит подпоследовательность, сходящуюся по мере μ_1 на каждом множестве конечной меры. Если $D_T = L_2(\mu)$ и T — ограниченный оператор, то это определение совпадает с известным определением из [2]. Линейный оператор $T : D_T \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ назовем *частично компактным по мере*, если найдется множество $e \subset X$, $\mu e > 0$, такое, что $P_e T$ компактен по мере; здесь $P_e f = \chi_e f$, $f \in L_2(\mu)$, χ_e — характеристическая функция множества e.

Будем говорить, что нуль принадлежит предельному спектру $\sigma_c(M)$ оператора $M : D_M \subset H \to H$, если в D_M существует ортонормированная последовательность $\{h_n\}$ такая, что $Mh_n \to 0$.

© 2016 Коротков В. Б.

Теорема 1. *Пусть мера μ σ-конечна, не является чисто атомической и множество e, $0 < \mu e < \infty$, не имеет атомов меры μ, $T : D_T \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ — плотно определенный линейный оператор, $P_e T$ компактен по мере и замкнут. Тогда $0 \in \sigma_c(T^*)$.*

$\lhd$ Определим оператор $i_e : L_2(\mu) \to L_2(e) := L_2(e, \mu)$ равенством $i_e h(s) = h(s)$ для всех $h \in L_2(\mu)$ и всех $s \in e$ и рассмотрим замкнутый оператор $\tau = i_e T : D_T \subset L_2(\mu) \to L_2(e)$. Пользуясь полярным разложением замкнутого оператора [1, гл. VI, § 3], представим τ^* в виде $\tau^* = VS$, где $S = (\tau^{**}\tau^*)^{\frac{1}{2}}$ — самосопряженный оператор в $L_2(e)$, $V : L_2(e) \to L_2(\mu)$ — частично изометрический оператор. Имеем $\tau^{**} = SV^*$. Отсюда $S = \tau^{**}V = \tau V = i_e TV$. Оператор $i_e T$ компактен по мере. Значит, S компактен по мере. Покажем, что $0 \in \sigma_c(S)$. Предположим противное. Тогда размерность подпространства $\ker S$ конечна, здесь $\ker S = \{g : g \in L_2(e), Sg = 0\}$, и можно считать, что $\ker S = \{0\}$ (в противном случае достаточно перейти к оператору $S + P$, где P — ортопроектор на $\ker S$). Из $\ker S = \{0\}$ и $0 \notin \sigma_c(S)$ следует, что существует обратный оператор $S^{-1} : L_2(e) \to D_S \subset L_2(e)$ и этот оператор ограничен. Возьмем любую ортонормированную равномерно ограниченную последовательность $\{\varphi_n\} \subset L_2(e)$. В качестве $\{\varphi_n\}$ можно выбрать систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{n,e}\}$, определенных на e [3] (см. также [4, с. 11–12]). Нетрудно проверить, что $\{\varphi_n\}$ не содержит подпоследовательностей, сходящихся по мере на e. Рассмотрим функции $f_n = S^{-1}\varphi_n$. Имеем $\|f_n\| \leqslant \|S^{-1}\|\|\varphi_n\| = \|S^{-1}\|$, $\|Sf_n\| = \|\varphi_n\| = 1$, $n = 1, 2, \ldots$ Из компактности по мере оператора S вытекает, что последовательность $\{\varphi_n\} = \{Sf_n\}$ компактна по мере, что, как отмечалось выше, невозможно. Значит, $0 \in \sigma_c(S)$. Тогда существует ортонормированная система $\{h_n\} \subset L_2(e)$ такая, что $Sh_n \to 0$. Положив $\widetilde{h_n} = \chi_e h_n$, получим $T^*\widetilde{h_n} = T^* P_e h_n = \tau^* h_n = VSh_n \to 0$. Таким образом, $0 \in \sigma_c(T^*)$. $\rhd$

Пусть $L_0(\mu) := L_0(X, \mu)$ — пространство всех классов μ-эквивалаентных μ-измеримых μ-почти всюду конечных функций на X и $L_0(X \times X, \mu \times \mu)$ — аналогичное пространство. Оператор $K : D_K \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ называется *интегральным*, если существует функция $K \in L_0(X \times X, \mu \times \mu)$ такая, что для всех $f \in D_K$

$$Kf(s) = \int\limits_X K(s,t) f(t)\, d\mu(t) \tag{1}$$

для почти всех $s \in X$. Интервал в (1) понимается в лебеговом смысле. Функция $K(s,t)$ называется *ядром интегрального оператора* K. Будем говорить, что ядро $K(s,t)$ порождает интегральный оператор K по формуле (1).

Из теоремы 1 и в [4, теоремы I.6.2] вытекает следующая

Теорема 2. *Пусть $K : D_K \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ — плотно определенный интегральный оператор, мера μ σ-конечна и не является чисто атомической. Если K продолжается до линейного интегрального оператора $\widetilde{K} : L_2(\mu) \to L_0(\mu)$, то $0 \in \sigma_c(K^*)$.*

Важным примером интегрального оператора, продолжаемого на все $L_2(\mu)$ (со значениями в $L_0(\mu)$), может служить интегральный оператор с ядром $K(s,t)$, удовлетворяющим условию Карлемана

$$\int\limits_X |K(s,t)|^2\, d\mu(t) < \infty$$

для почти всех $s \in X$.

Не каждый плотно определенный замыкаемый интегральный оператор в $L_2(\mu)$ продолжается на все $L_2(\mu)$ со значениями в $L_0(\mu)$ с сохранением интегральности. Соответствующий пример построен в [5].

В [6] показано, что необходимым и достаточным условием продолжимости интегрального оператора $T : D_T \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ с ядром $K(s,t)$ до интегрального оператора из $L_2(\mu)$ в $L_0(\mu)$ является существование положительной функции $a \in L_0(\mu)$ такой, что

$$\int\limits_X |K(s,t)|a(s)\,d\mu(s) \in L_2(\mu).$$

Приведем приложение теоремы 1 к линейным функциональным уравнениям 1-го и 2-го родов с неограниченными операторами. Рассмотрим уравнение

$$\alpha x(s) - \lambda Tx(s) = f(s), \tag{2}$$

где $f \in L_2(\mu)$, α и λ — числовые параметры, $T : D_T \subset L_2(\mu) \to L_2(\mu)$ — плотно определенный частично компактный по мере линейный оператор, решение x ищется в D_T.

Ниже доказывается теорема о редукции уравнения (2) к более простому эквивалентному интегральному уравнению, к которому применимы различные точные или приближенные методы решения. В формулировке этой теоремы нам понадобятся следующие определения.

Определение 1. Пусть (Y,ν) — пространство с σ-конечной положительной мерой ν, $L_2(\nu) := L_2(Y,\nu)$, $|||\cdot|||$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — норма и скалярное произведение в $L_2(\nu)$. Оператор $J : L_2(\nu) \to L_2(\nu)$ называется *ядерным*, если

$$Jh = \sum_{n=1}^{\infty}\langle h, g_n\rangle h_n, \quad h \in L_2(\nu), \tag{3}$$

где $\{g_n\}$, $\{h_n\} \subset L_2(\nu)$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} |||g_n||| \cdot |||h_n||| < \infty. \tag{4}$$

Ядерной нормой оператора J называется число

$$\|J\|_1 = \inf \sum_{n=1}^{\infty} |||g_n||| \cdot |||h_n|||,$$

где инфимум берется по всевозможным $\{g_n\}$, $\{h_n\}$, удовлетворяющим (4) и участвующим в (3). Ясно, что $\|J\| \leqslant \|J\|_1$, где $\|J\|$ — операторная норма J.

Ядерный оператор является интегральным, его ядро $J(\xi,\eta)$ принадлежит пространству $L_2(Y\times Y,\, \nu\times\nu)$ и имеет вид

$$J(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n(\xi)\,\overline{g_n(\eta)}, \tag{5}$$

где ряд в (5) сходится к $J(\xi,\eta)$ в силу (4) абсолютно по норме $L_2(Y\times Y, \nu\times\nu)$ и абсолютно $(\nu\times\nu)$-почти всюду в $Y\times Y$.

Определение 2. Пусть $\{\varphi_n\} \subset L_2(\nu)$, $\{e_n\}$ — последовательность попарно непересекающихся множеств из Y с конечными положительными мерами. Функцию

$$H(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\xi)}{\sqrt{\nu e_n}}\,\overline{\varphi_n(\eta)}$$

назовем *квазивырожденным карлемановским ядром.*

Теорема 3. *Пусть меры μ, ν не являются чисто атомическими и σ-конечны, $L_2(\mu)$, $L_2(\nu)$ — сепарабельные пространства, оператор T в уравнении* (2) *удовлетворяет всем условиям теоремы* 1 *и замыкаем. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить не зависящий от α, λ и f унитарный оператор $U : L_2(\mu) \to L_2(\nu)$, приводящий уравнение* (2) *заменой $y = Ux$, $g = Uf$ к эквивалентному интегральному уравнению*

$$\alpha y(\xi) - \lambda \int\limits_Y \big[N(\xi,\eta) + C(\xi,\eta)\big] y(\eta)\, d\nu(\eta) = g(\xi), \tag{6}$$

где $C(\xi,\eta)$ — квазивырожденное карлемановское ядро, функция $N(\xi,\eta)$ порождает ядерный оператор в $L_2(\nu)$ с ядерной нормой меньшей, чем ε.

$\lhd$ Представим с помощью полярного разложения [1] замкнутый оператор T^* в виде $T^* = WL$, где L — самосопряженный неотрицательный оператор в $L_2(\mu)$, W — частично изометрический оператор в $L_2(\mu)$. По теореме 1 $0 \in \sigma_c(T^*)$. Отсюда и из $L = W^*T^*$ следует, что $0 \in \sigma_c(L)$.

Пусть $\{E_\lambda\}$ — спектральное семейство неотрицательного самосопряженного оператора L, $H_0 = \ker L$, $H_n = (E_{1/n} - E_{1/n+1})L_2(\mu)$, $G_n = (E_{n+1} - E_n)L_2(\mu)$. Удалив из совокупности подпространств H_0, H_n, G_n, $n = 1, 2, \ldots$, совпадающие с $\{0\}$ (если таковые имеются), получим семейство принадлежащих D_L попарно ортогональных подпространств, ортогональная сумма которых равна $L_2(\mu)$. Построим из элементов этих подпространств ортонормированный базис $\{u_n\}$ пространства $L_2(\mu)$. Базис $\{u_n\}$ принадлежит $D_L = D_{T^*}$ и содержит в силу $0 \in \sigma_c(L)$ последовательность $\{z_n\}$, которую L отображает в сходящуюся к 0 последовательность. Имеем $T^*z_n = WLz_n \to 0$.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем подпоследовательность $\{v_n\} \subset \{z_n\}$ так, чтобы $\sum_{n=1}^\infty \|T^*v_n\| < \varepsilon$. Положим $\{w_n\} = \{u_n\} \setminus \{v_{2n}\}$ и определим унитарный оператор $U : L_2(\mu) \to L_2(\nu)$ равенствами

$$Uw_n = \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\nu e_n}}, \quad Uv_{2n} = e_n^\perp, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $\{e_n^\perp\}$ — ортонормированный базис ортогонального дополнения к замкнутой линейной оболочке ортонормированной последовательности $\{\chi_{e_n}/\sqrt{\nu e_n}\}$. Здесь $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из Y с конечными положительными мерами. Обозначив через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ скалярное произведение в $L_2(\nu)$ и разлагая элементы $UTU^{-1}h$ в ряд по ортонормированному базису $\{e_n^\perp, \chi_{e_n}/\sqrt{\nu e_n}\}$ пространства $L_2(\nu)$, получим $UTU^{-1} = N + C$, где оператор N определяется равенством

$$Nh = \sum_{n=1}^\infty \big\langle UTU^{-1}h, e_n^\perp\big\rangle e_n^\perp = \sum_{n=1}^\infty \big\langle h, UT^*v_{2n}\big\rangle e_n^\perp,$$

оператор C представляется в виде

$$Ch = \sum_{n=1}^\infty \left\langle UTU^{-1}h, \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\nu e_n}}\right\rangle \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\nu e_n}} = \sum_{n=1}^\infty \big\langle h, UT^*w_n\big\rangle \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\nu e_n}}.$$

В силу $\sum_{n=1}^\infty \|T^*v_{2n}\| < \varepsilon$ оператор N ядерный и его ядерная норма меньше, чем ε. Так как множества e_n попарно не пересекаются, то C — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром

$$C(\xi,\eta) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\chi_{e_n}(\xi)}{\sqrt{\nu e_n}} \overline{(UT^*w_n)(\eta)}.$$

Сделав в (2) замену $y = Ux$, будем иметь

$$\alpha U^{-1}y - \lambda TU^{-1}y = f.$$

Применим к обеим частям этого уравнения оператор U. Тогда

$$\alpha y - \lambda UTU^{-1}y = Uf = g.$$

Отсюда и из $UTU^{-1} = N + C$ получим уравнение (6). $\rhd$

Если в (6) $\alpha = 0$, то, умножив обе его части на функцию

$$\chi_{e_0} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{1}{\|T^* w_n\| + 1} \chi_{e_n},$$

где $e_0 = Y \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$, придем к эквивалентному интегральному уравнению Фредгольма 1-го рода с ядерным оператором. К такому уравнению применимы теорема Пикара [7, с. 102] и регуляризационные методы решения, например, метод А. Н. Тихонова [8, гл. 4, п. 4.3].

Пусть в (6) $\alpha \neq 0$. Выберем в теореме 3 $\varepsilon < \frac{|\alpha|}{|\lambda|}$. Записав (6) в виде $\alpha(1 - \frac{\lambda}{\alpha}N)y - \lambda Cy = g$ и сделав замену $z = F_\lambda y$, где $F_\lambda = 1 - \frac{\lambda}{\alpha}N$, получим эквивалентное интегральное уравнение 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром

$$K_\lambda(\xi, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\xi)}{\sqrt{\nu e_n}} \overline{(F_\lambda^{-1})^* \varphi_n(\eta)},$$

где $\varphi_n = UT^* w_n$. К этому уравнению применимы приближенные методы решения, предложенные в [7, с. 134–139].

Замечания:

1. Результаты статьи справедливы и в случае вещественных пространств $L_2(\mu)$, $L_2(\nu)$.

2. Условия теорем 1, 2, 3 охватывают важный случай, когда X, Y — произвольные измеримые по Лебегу множества евклидовых пространств, а μ, ν — меры Лебега.

Литература

1. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов.—М.: Мир, 1972.—740 с.
2. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.—М.: Наука, 1966.—500 с.
3. *Aronszajn N., Szeptycki P.* On General Integral Transformations // Math. Ann.—1966.—Vol. 163, № 2.—P. 127–154.
4. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы.—Новосибирск: Наука, 1983.—224 с.
5. *Коротков В. Б.* О приведении семейств операторов к интегральному виду // Сиб. мат. журн.—2006.—Т. 47, № 5.—С. 1092–1098.
6. *Коротков В. Б., Степанов В. Д.* Критерии порождаемости интегральных операторов измеримыми функциями // Сиб. мат. журн.—1982.—Т. 23, № 2.—С. 199–203.
7. *Коротков В. Б.* Некоторые вопросы теории интегральных операторов.—Сиб. отд-ние АН СССР. Ин-т мат-ки, 1988.—148 с.
8. *Верлань А. Ф., Сизиков В. С.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы. Справочное пособие.—Киев: Наукова думка, 1986.—544 с.

Статья поступила 15 января 2016 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
ведущий научный сотрудник лаб. функционального анализа
РОССИЯ, 630090, Новосибирск, пр. Ак. Коптюга, 4

ON PARTIALLY MEASURE COMPACT UNBOUNDED LINEAR OPERATORS ON L_2

Korotkov V. B.

In this paper we introduce partially measure compact unbounded linear operators. We find characteristic property of limit spectrums of the adjoints of unbounded densely defined partially measure compact linear operators on $L_2(\mu)$. Some applications of this result to linear functional equations of the first and second kind with partially measure compact unbounded operators are given.

Key words: closed operator, measure compact operator, limit spectrum, linear functional equations of the first and second kind, linear integral equations of the first and second kind.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 1, С. 42–50

УДК **517.98**

OPERATORS ON INJECTIVE BANACH LATTICES[1]

A. G. Kusraev

To Alexander Gutman
on occasion of his 50th birthday

The paper deals with some properties of bounded linear operators on injective Banach lattice using a Boolean-valued transfer principle from AL-spaces to injectives stated in author's previous work.

Mathematics Subject Classification (2010): 46B04, 46B42, 47B65, 03C90, 03C98.

Key words: AL-space, AM-space, injective Banach lattice, Boolean-valued model, Boolean-valued transfer principle, Daugavet equation, cyclically compact operator, cone $\mathbb{B}$-summing operator.

1. Introduction

In this paper we consider some properties of bounded linear operators on injective Banach lattices using a *Boolean-valued transfer principle* from AL-spaces to injective Banach lattices stated in Kusraev [1]. In Section 2 we collect some Boolean valued representation results for Banach lattices and regular operators (Theorems 2.2, 2.4, and 2.5). In Section 3 we present a Daugavet type equation (Theorem 3.5 and Corollary 3.9) and a Daugavet type inequality (Theorem 3.8) for operators on injective Banach lattices. Section 4 deals with the problem when the spaces of regular (Theorem 4.4), cyclically compact (Theorem 4.7), and cone $\mathbb{B}$-summing (Theorem 4.10) operators are injective Banach lattice.

Recall some basic definitions. A real Banach lattice X is said to be *injective* if, for every Banach lattice Y, every closed vector sublattice $Y_0 \subset Y$, and every positive linear operator $T_0 : Y_0 \to X$ there exists a positive linear extension $T : Y \to X$ of T_0 with $\|T_0\| = \|T\|$. A Dedekind complete AM-space with unit (Abramovich [2] and Lotz [3]) as well as an AL-space (Lotz [3]) is an injective Banach lattice, see Meyer–Nieberg [4].

We denote by $\mathbb{P}(X)$ the Boolean algebra of all band projections on a vector lattice X. A crucial role in the structure theory of injective Banach lattice plays the concept of M-projection. A band projection π in a Banach lattice X is called an *M-projection* if $\|x\| = \max\{\|\pi x\|, \|\pi^{\perp} x\|\}$ for all $x \in X$, where $\pi^{\perp} := I_X - \pi$. The set $\mathbb{M}(X)$ of all M-projections in X forms a Boolean subalgebra of $\mathbb{P}(X)$. Haydon [5] proved that an injective Banach lattice X is an AL-space if and only if $\mathbb{M}(X) = \{0, I_X\}$.

In what follows X and Y denote Banach lattices, while $\mathscr{L}(X,Y)$ and $\mathscr{L}^r(X,Y)$ stand respectively for the spaces of bounded and regular operators from X into Y and $\|T\|_r$ stands for the regular norm of $T \in \mathscr{L}^r(X,Y)$, i. e., $\|T\|_r := \|\,|T|\,\|$. Throughout the sequel $\mathbb{B}$ is

© 2016 Kusraev A. G.

[1] The study was supported by the grants from Russian Foundation for Basic Research, projects № 14-01-91339 ННИО-а and № 15-51-53119 ГФЕН-а.

a complete Boolean algebra with unit $\mathbb{1}$ and zero $\mathbb{O}$, while $\Lambda := \Lambda(\mathbb{B})$ is a Dedekind complete AM-space with unit such that $\mathbb{B} \simeq \mathbb{P}(\Lambda)$; in this event $\mathbb{B}$ and $\mathbb{P}(\Lambda)$ are identified with $\mathbb{1}$ taken as the unit both in $\mathbb{B}$ and $\mathbb{P}(\Lambda)$. A *partition of unity* in $\mathbb{B}$ is a family $(b_\xi)_{\xi\in\Xi} \subset \mathbb{B}$ such that $\bigvee_{\xi\in\Xi} b_\xi = \mathbb{1}$ and $b_\xi \wedge b_\eta = \mathbb{O}$ whenever $\xi \neq \eta$.

For the theory of Banach lattices and positive operators we refer to the books Meyer–Nieberg [4] and Aliprantic and Burkinshaw [6]. The needed information on the theory of Boolean-valued models is briefly presented in Kusraev [7, Chapter 9] and Kusraev and Kutateladze [8, Chapter 1]; details may be found in Bell [9], Kusraev and Kutateladze [10], Takeuti and Zaring [11]. We let := denote the assignment by definition, while $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, and $\mathbb{R}$ symbolize the naturals, the rationals, and the reals.

2. Boolean Valued Representation

In this section we present some Boolean valued representation results needed in the sequel. Assume that X is a Banach lattice and $\mathscr{B}$ is a complete subalgebra of a complete Boolean algebra $\mathbb{B}(X)$ consisting of projection bands and denote by $\mathbb{B}$ the corresponding Boolean algebra of band projections. We will identify $\mathbb{P}(\Lambda)$ and $\mathbb{B}$.

Definition 2.1. If $(b_\xi)_{\xi\in\Xi}$ is a partition of unity in $\mathbb{B}$ and $(x_\xi)_{\xi\in\Xi}$ is a family in X, then there is at most one element $x \in X$ with $b_\xi x_\xi = b_\xi x$ for all $\xi \in \Xi$. This element x, if existing, is called the *mixing* of (x_ξ) by (b_ξ). Clearly, $x = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} b_\xi x_\xi$. A Banach lattice X is said to be $\mathbb{B}$-*cyclic* or $\mathbb{B}$-*complete* if the mixing of every family in the unit ball $U(X)$ of X by each partition of unity in $\mathbb{B}$ (with the same index set) exists in $U(X)$.

A Banach lattice $(X, \|\cdot\|)$ is $\mathbb{B}$-cyclic with respect to a complete Boolean algebra $\mathbb{B}$ of band projections on X if and only if there exists a $\Lambda(\mathbb{B})$-valued norm $|\!\!|\cdot|\!\!|$ on X such that $(X, |\!\!|\cdot|\!\!|)$ is a Banach–Kantorovich space, $|x| \leqslant |y|$ implies $|\!\!|x|\!\!| \leqslant |\!\!|y|\!\!|$ for all $x, y \in X$, and $\|x\| = \||\!\!|x|\!\!|\|_\infty$ $(x \in X)$, see Kusraev and Kutateladze [8, Theorems 5.8.11 and 5.9.1].

Theorem 2.2. *A restricted descent of a Banach lattice from the model $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ is a $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattice. Conversely, if X is a $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattice, then in the model $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ there exists up to the isometric isomorphism a unique Banach lattice $\mathscr{X}$ whose restricted descent $\mathscr{X}{\Downarrow}$ is isometrically $\mathbb{B}$-isomorphic to X. Moreover, $\mathbb{B} = \mathbb{M}(X)$ if and only if $[\![$there is no M-projection in $\mathscr{X}$ other than 0 and $I_{\mathscr{X}}]\!] = \mathbb{1}$.*

$\lhd$ See Kusraev and Kutateladze [8, Theorem 5.9.1]. $\rhd$

Definition 2.3. The elements $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ in Theorem 2.2 and $\mathscr{T} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ in Theorem 2.4 below are said to be the *Boolean valued representations of* X and T, respectively.

Denote by $\mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X, Y)$ the space of all regular $\mathbb{B}$-linear operators from X to Y equipped with the *regular norm* $\|T\|_r := \inf\{\|S\| : S \in \mathscr{L}_{\mathbb{B}}(X, Y), \pm T \leqslant S\}$. Let $\mathscr{X}$ and $\mathscr{Y}$ be the Boolean valued representations of $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattices X and Y, respectively, while $\mathscr{L}^r(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ stands for the space of all regular operators from $\mathscr{X}$ to $\mathscr{Y}$ with the regular norm within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. The following result states that $\mathscr{L}^r(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ is the *Boolean valued representation of* $\mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X, Y)$.

Theorem 2.4. *Assume that X and Y are $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattices, while $\mathscr{X}$ and $\mathscr{Y}$ are their respective Boolean valued representation. The space $\mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X, Y)$ is order $\mathbb{B}$-isometric to the bounded descent $\mathscr{L}^r(\mathscr{X}, \mathscr{Y}){\Downarrow}$ of $\mathscr{L}^r(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. The isomorphism is set up by assigning to any $T \in \mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X, Y)$ the element $\mathscr{T} := T{\uparrow}$ of $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ is uniquely determined from the formulas $[\![\, \mathscr{T} : \mathscr{X} \to \mathscr{Y} \,]\!] = \mathbb{1}$ and $[\![\, \mathscr{T}x = Tx \,]\!] = \mathbb{1}$ $(x \in X)$.*

$\lhd$ According to Theorem 2.2 we may assume without loss of generality that X and Y are the bounded descents of some Banach lattices $\mathscr{X}$ and $\mathscr{Y}$. Moreover, $\mathscr{L}_{\mathbb{B}}(X, Y)$ and

$\mathscr{L}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\Downarrow$ are $\mathbb{B}$-isometric by [7, Theorem 8.3.6]. Since $T(X_+)\uparrow = T\uparrow(X_+\uparrow) = \mathscr{T}(\mathscr{X}_+)$, it follows that $T(X_+) \subset Y_+$ if and only if $[\![\mathscr{T}(\mathscr{X}_+) \subset \mathscr{Y}_+]\!] = \mathbb{1}$. This means that the bijection $T \leftrightarrow \mathscr{T} = T\uparrow$ preserves positivity and hence is an order $\mathbb{B}$-isomorphism between $\mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X,Y)$ and $\mathscr{L}^r(\mathscr{X},\mathscr{Y})\Downarrow$. Since for $S \in \mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X,Y)$ and $\mathscr{S} := S\uparrow$ the relations $\pm T \leqslant S$ and $[\![\pm\mathscr{T} \leqslant \mathscr{S}]\!] = \mathbb{1}$ are equivalent, we have $[\![\|\mathscr{T}\|_r = \lvert T\rvert_r]\!] = \mathbb{1}$, where $\lvert T\rvert_r = \inf\{\lvert S\rvert : S \in \mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X,Y),\ \pm T \leqslant S\}$ and $\lvert S\rvert := \sup\{\lvert Sx\rvert : \lvert x\rvert \leqslant \mathbb{1}\}$. Thus, it remains to prove that $\|T\|_r = \|\lvert T\rvert_r\|_\infty$ $(T \in \mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X,Y))$.

If $\pm T \leqslant S$ then $\|\lvert T\rvert\|_\infty \leqslant \|\lvert S\rvert\|_\infty = \|S\|$ and hence $\|T\|_r \geqslant \|\lvert T\rvert_r\|_\infty$. To prove the reverse inequality take an arbitrary $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ and choose a partition of unity $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}$ in $\mathbb{B}$ and a family $(S_\xi)_{\xi\in\Xi}$ in $\mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X,Y)$ such that $S_\xi \geqslant \pm T$ and $\pi_\xi\lvert S_\xi\rvert \leqslant (1+\varepsilon)\lvert T\rvert_r$ for all $\xi \in \Xi$. Define an operator $S \in \mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X,Y)$ by $Sx := \operatorname{mix}_{\xi\in\Xi} \pi_\xi S_\xi x$ $(x \in X)$, where the mixing exists in Y, since $\lvert S_\xi x\rvert \leqslant (1+\varepsilon)\lvert T\rvert_r\lvert x\rvert$ and hence $(S_\xi x)$ is norm bounded in Y. Moreover, $Sx = \sum_\xi \pi_\xi S_\xi x$ in the sense of Λ-valued norm on Y. Therefore, $S \geqslant \pm T$ and $\lvert S\rvert \leqslant (1+\varepsilon)\lvert T\rvert_r$, whence $\|T\|_r \leqslant \|S\| = \|\lvert S\rvert\|_\infty \leqslant (1+\varepsilon)\|\lvert T\rvert_r\|_\infty$. $\rhd$

Theorem 2.5. *Let X be a $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattice and let $\mathscr{X}$ be its Boolean valued representation in $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Then the following hold:*

(1) $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \vDash$ *"$\mathscr{X}$ is Dedekind complete" if and only if X is Dedekind complete.*

(2) $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \vDash$ *"$\mathscr{X}$ is injective" if and only if X is injective.*

(3) $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \vDash$ *"$\mathscr{X}$ is an AM-space" if and only if X is an AM-space.*

(4) $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})} \vDash$ *"$\mathscr{X}$ is an AL-space" if and only if X is injective and $\mathbb{B} \simeq \mathbb{M}(X)$.*

$\lhd$ See Kusraev and Kutateladze [8, Theorems 5.9.6 (1) and 5.12.1]. $\rhd$

Remark 2.6. As was mentioned in the introduction, Boolean valued analysis approach plays a key role in the proofs below. An alternative approach relies upon Gutman's theory of bundle representation of lattice normed spaces developed in [12, 13].

3. The Daugavet Equation in Injective Banach Latices

Definition 3.1. If X is a real Banach space, a bounded linear operator $T : X \to X$ is said to satisfy the *Daugavet equation* if $\|I_X + T\| = 1 + \|T\|$.

Theorem 3.2. *If T is a bounded operator on an AL-space X then either T or $-T$ satisfies the Daugavet equation.*

$\lhd$ The proof and the history of this theorem see in Abramovich and Aliprantis [14, Theorem 11.23], see also Abramovich [15] and Schmidt [16]. $\rhd$

Definition 3.3. Fix a complete Boolean algebra $\mathbb{B}$ of band projection in X, i.e., $\mathbb{B}$ is a complete subalgebra of $\mathbb{P}(X)$. A bounded linear operator $T : X \to X$ is said to satisfiy the Daugavet equation $\mathbb{B}$-*uniformly* if $\|\pi + T\pi\| = 1 + \|T\pi\|$ for all nonzero $\pi \in \mathbb{B}$. Say that $\rho \in \mathbb{P}(X)$ is *nonzero over* $\mathbb{B}$, whenever $\pi\rho \neq 0$ for all nonzero $\pi \in \mathbb{B}$.

Lemma 3.4. *Let Λ be a normed lattice with the projection property, X be a decomposable lattice normed space over Λ and $\|x\| := \|\lvert x\rvert\|_\infty$ $(x \in X)$. Then for $0 < p \in \mathbb{R}$ and $x, y \in X$ the inequality $\lvert x\rvert \geqslant (\mathbb{1} + \lvert y\rvert^p)^{\frac{1}{p}}$ holds if and only if $\|\pi x\| \geqslant (1 + \|\pi y\|^p)^{\frac{1}{p}}$ for all $0 \neq \pi \in \mathbb{P}(\Lambda)$.*

$\lhd$ Prove that $(\forall \pi \in \mathbb{P}(\Lambda))\, \|\pi x\| \geqslant (1 + \|\pi y\|^p)^{\frac{1}{p}}$ implies $\lvert x\rvert \geqslant (\mathbb{1} + \lvert y\rvert^p)^{\frac{1}{p}}$. If the inequality $\lvert x\rvert \geqslant (\mathbb{1} + \lvert y\rvert^p)^{\frac{1}{p}}$ is not true then there exist a nonzero $\pi_0 \in \mathbb{P}(\Lambda)$ and $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ such that

$(1+\varepsilon)\pi_0|x| < \pi_0(\mathbb{1}+|y|^p)^{\frac{1}{p}}$. Notice that $|\cdot|$ is $\mathbb{P}(\Lambda)$-homogeneous, i.e., $\pi|x| = |\pi x|$ and hence $\pi(\mathbb{1}+|y|^p)^{\frac{1}{p}} = (\pi\mathbb{1}+|\pi y|^p)^{\frac{1}{p}}$ for all $x \in X$ and $\pi \in \mathbb{P}(\Lambda)$, see [8, 5.8.3]. It follows that

$$\|\pi_0 x\| < (1+\varepsilon)\|\pi_0 x\| = \|(1+\varepsilon)\pi_0|x|\,\|_\infty \leqslant \big\|\big(\pi_0\mathbb{1}+|\pi_0 y|^p\big)^{\frac{1}{p}}\big\|_\infty = \|(1+\|\pi_0 y\|^p)^{\frac{1}{p}},$$

a contradiction. The converse implication is immediate from the relations

$$|\pi x| = \pi|x| \geqslant \pi\big(\mathbb{1}+|y|^p\big)^{\frac{1}{p}} = \big(\pi\mathbb{1}+|\pi y|^p\big)^{\frac{1}{p}}, \big\|\big(\mathbb{1}+|y|_r^p\big)^{\frac{1}{p}}\big\|_\infty = \big(1+\||y|_r\|_\infty^p\big)^{\frac{1}{p}}. \;\triangleright$$

Theorem 3.5. *Let X be an injective Banach lattice and an operator $T \in \mathscr{L}(X)$ commutes with all M-projections. Then there exist pair-wise disjoint M-projections π_0, π_1, and π_2 in X such that $\pi_0+\pi_1+\pi_2 = I_X$ and the operators $\pi_1\circ T+\pi_0\circ T-\pi_2\circ T$ and $\pi_1\circ T-\pi_0\circ T-\pi_2\circ T$ satisfy the Daugavet equation $\mathbb{M}(X)$-uniformly. Moreover, for any nonzero M-projections $\rho_k \leqslant \pi_k$ $(k=1,2)$ the operators $-\rho_2\circ T$ and $\rho_1\circ T$ fail to satisfy the Daugavet equation.*

$\triangleleft$ Let $\mathscr{X}, \mathscr{T} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ be the Boolean valued representations of X and T, respectively. By Theorem 3.3 $[\![\mathscr{X}$ is an AL-space and $\mathscr{T} \in \mathscr{L}(\mathscr{X})]\!] = \mathbb{1}$. Let the formula $\psi(T)$ formalize the sentence 'T satisfies the Daugavet equation' and put $\tilde\pi_1 = [\![\psi(\mathscr{T})]\!]$, $\tilde\pi_2 = [\![\psi(-\mathscr{T})]\!]$, $\pi_0 = \tilde\pi_1\circ\tilde\pi_2$, and $\pi_i = \tilde\pi_i - \pi_0$. Clearly, π_0, π_1, and π_2 are pair-wise disjoint. Boolean valued transfer principle together with Theorem 3.1 imply that $[\![$either $\mathscr{T}$ or $-\mathscr{T}$ satisfies the Daugavet equation$]\!] = \mathbb{1}$. It follows from the Transfer Principle that $\tilde\pi_1 \vee \tilde\pi_2 = [\![\psi(\mathscr{T}) \vee \psi(-\mathscr{T})]\!] = \mathbb{1}$, whence $\pi_1+\pi_0+\pi_2 = \mathbb{1}$. Denote by $\mathscr{S}$ the mixing of $(\mathscr{T}, \mathscr{T}, -\mathscr{T})$ by (π_1, π_0, π_2), i. e. $\pi_0+\pi_1 \leqslant [\![\mathscr{S} = \mathscr{T}]\!]$ and $\pi_2 \leqslant [\![\mathscr{S} = -\mathscr{T}]\!]$. If $S := \mathscr{S}{\Downarrow}$ then $S := \pi_1\circ T+\pi_0\circ T-\pi_2\circ T$. By applying [7, A.5 (6)] we have $\pi_0+\pi_1 \leqslant [\![\psi(\mathscr{T})]\!] \wedge [\![\mathscr{S} = \mathscr{T}]\!] \leqslant [\![\psi(\mathscr{S})]\!]$ and $\pi_2 \leqslant [\![\psi(-\mathscr{T})]\!] \wedge [\![\mathscr{S} = -\mathscr{T}]\!] \leqslant [\![\psi(S)]\!]$ which imply $[\![\psi(\mathscr{S})]\!] = \mathbb{1}$. Since $[\![\|\mathscr{S}\| = |S|]\!] = \mathbb{1}$, we have $|I+S| = \mathbb{1}+|S|$ and taking into account Lemma 3.4 and the easy relation $\|\mathbb{1}+\lambda\|_\infty = 1+\|\lambda\|_\infty$ with $\lambda \in \Lambda$ yields $\|\pi+S\pi\| \geqslant 1+\|S\pi\|$ and hence the required equality $\|\pi+S\| = 1+\|S\pi\|$ for all nonzero $\pi \in \mathbb{B}$. The operator $\pi_1\circ T-\pi_0\circ T-\pi_2\circ T$ is handled similarly. $\triangleright$

We now consider Daugavet type inequalities for regular operators.

For $1 \leqslant p \in \mathbb{R}$ and arbitrary $s,t \in \mathbb{R}$ we denote $t^p := \operatorname{sgn}(t)|t|^p$ and $\sigma_p(s,t) := (s^{1/p}+t^{1/p})^p$, where $1/p := p^{-1}$. In a vector lattice X, we introduce new vector operations $\oplus$ and $*$, while the original ordering $\leqslant$ remain unchanged:

$$x \oplus y := \sigma_p(x,y) := (x^{1/p}+y^{1/p})^p, \quad t * x := t^p x \quad (x,y \in X;\; t \in \mathbb{R}).$$

Then $X^{(p)} := (X, \oplus, *, \leqslant)$ is again a vector lattice. Moreover, $(X^{(p)}, \|\cdot\|_p)$ with $\|x\|_p := \|x\|^{1/p}$ is a Banach lattice called the *p-convexification* of X, see Lindenstrauss and Tzafriri [17, pp. 53, 54]. Observe that $\mathbb{P}(X^{(p)}) = \mathbb{P}(X)$ and $\mathbb{M}(X^{(p)}) = \mathbb{M}(X)$. Given a Banach lattice $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ and $1 \leqslant p \in \mathbb{R}$, we denote by $\mathscr{X}^{(p)} := \mathscr{X}^{(p^\wedge)}$ the $p^\wedge$-convexification of $\mathscr{X}$ within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Moreover, if $|\cdot|$ and $|\cdot|_p$ are the respective descents (see [8, 1.5.6]) of $\|\cdot\|$ and $\|\cdot\|_p$ then $|x|_p = |x|^{1/p}$ for all $x \in X$.

Theorem 3.6. *Let $\mathscr{X}$ be an AL-space with a weak order unit and $\mathscr{T}$ be a regular linear operator on $\mathscr{X}^{(p)}$, $1 \leqslant p \in \mathbb{R}$. Then $\mathscr{T} \perp I_{\mathscr{X}^{(p)}}$ if and only if $\|\rho \pm \mathscr{T}\rho\|_r \geqslant (1+\|\mathscr{T}\rho\|_r^p)^{\frac{1}{p}}$ for all nonzero band projections ρ in $\mathscr{X}^{(p)}$.*

$\triangleleft$ This is a reformulation of the main result (Theorem 9) in Schep [18], since in the case of a function space $\mathscr{X}$ we have $\mathscr{X}^{(p)} = \{f :\; |f|^p \in \mathscr{X}\}$. $\triangleright$

To perform the Boolean valued interpretation of Theorem 3.6 we need an auxiliary fact.

Lemma 3.7. *Let $\mathscr{X}$ be a Banach lattice within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Then for each $1 \leqslant p \in \mathbb{R}$ we have*

$$(\mathscr{X}^{(p)}){\Downarrow} = (\mathscr{X}{\Downarrow})^{(p)}.$$

$\lhd$ See Kusraev [19, Lemma 4]. $\rhd$

Theorem 3.8. *Let X be an injective Banach lattice with a weak order unit and an operator $T \in \mathscr{L}^r(X^{(p)})$ commutes with M-projections on $X^{(p)}$. The following are equivalent:*

(1) $T \perp I_{X^{(p)}}$.

(2) $\|\pi\rho \pm \pi T\rho\|_r \geqslant (1 + \|\pi T\rho\|_r^p)^{\frac{1}{p}}$ *with* $0 \neq \pi \in \mathbb{M}(X)$ *and* $\rho \in \mathbb{P}(X)$ *nonzero over* $\mathbb{M}(X)$.

(3) $\|\rho \pm T\rho\|_r \geqslant (1 + \|T\rho\|_r^p)^{\frac{1}{p}}$ *for all nonzero* $\rho \in \mathbb{P}(X)$.

$\lhd$ Let again $\mathscr{X} \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ stand for the Boolean valued representation of X. Then $\mathscr{X}$ is an AL-space with a weak order unit within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ by Theorem 2.5, while $X^{(p)} = (\mathscr{X}^{(p)}){\Downarrow}$ by Lemma 3.7. According to Theorem 2.4 there exists a regular operator $\mathscr{T} \in \mathscr{L}^r(\mathscr{X}^{(p)})$ such that $T = \mathscr{T}{\Downarrow}$. By Boolean valued transfer principle, Schep's result (Theorem 3.6) is valid within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, i. e., $[\![\mathscr{T} \perp I_{\mathscr{X}^{(p)}}]\!] = \mathbb{1}$ if and only if $[\![\|\rho \pm \mathscr{T}\rho\|_r \geqslant (1 + \|\mathscr{T}\rho\|_r^{p^\wedge})^{1/p^\wedge}$ for all nonzero band projections ρ on $\mathscr{X}]\!] = \mathbb{1}$. Clearly, $[\![\rho \neq 0]\!] = \mathbb{1}$ if and only if $\pi\rho \neq 0$ for all nonzero $\pi \in \mathbb{M}(\mathbb{X})$. Observe also that $|T|_r = |\,|T|\,|$ and thus $\|T\|_r = \||T|_r\|_\infty$, since an injective Banach lattice is order complete, see [8, Corollary 5.10.7]. It follows that $T \perp I_{X^{(p)}}$ if and only if $|\rho \pm T\rho|_r \geqslant \big(\mathbb{1} + |T\rho|_r^p\big)^{\frac{1}{p}}$ for each $\rho \in \mathbb{P}(X)$ nonzero over $\mathbb{M}(X)$. By Lemma 3.4 the last inequality is equivalent to $\|\pi\rho \pm \pi T\rho\|_r \geqslant (1 + \|\pi T\rho\|_r^p)^{\frac{1}{p}}$ for all nonzero $\pi \in \mathbb{M}(X)$ and $\rho \in \mathbb{P}(X)$ nonzero over $\mathbb{M}(X)$. Thus, (1) $\iff$ (2), while (3) $\Longrightarrow$ (2) is trivial. To prove (2) $\Longrightarrow$ (3), take arbitrary nonzero $\rho \in \mathbb{P}(X)$ and put $\pi_0 := \sup\{\pi \in \mathbb{M}(X) : \pi\rho = 0\}$, $\bar\rho := \rho + \pi_0$, and $\bar\pi := \pi_0^\perp$. Then $\bar\rho$ is nonzero over $\mathbb{M}(X)$ and $\bar\pi\bar\rho = \rho$. Now, making use of (2), we deduce $\|\rho \pm T\rho\|_r = \|\bar\pi\bar\rho \pm \bar\pi T\bar\rho\|_r \geqslant (1 + \|\bar\pi T\bar\rho\|_r^p)^{\frac{1}{p}} = (1 + \|T\rho\|_r^p)^{\frac{1}{p}}$. $\rhd$

The following corollary generalizes Theorem 1 from Shvidkoy [21].

Corollary 3.9. *Assume that X is an injective Banach lattice with a weak order unit and an operator $T \in \mathscr{L}^r(X)$ commutes with all M-projections on X. Then $T \perp I_X$ if and only if T satisfy the Daugavet equation $\mathbb{P}(X)$-uniformly.*

$\lhd$ This is immediate from Theorem 3.8 and Proposition 2 in Shvidkoy [21]. $\rhd$

4. Injective Banach Latices of Operators

We consider now under which conditions the space of regular operators between Banach lattices is an injective Banach lattice. First, we state results obtained by Wickstead in [22].

Theorem 4.1. *If $\mathscr{X}$ and $\mathscr{Y}$ are Banach lattices, neither of which is the zero space, with $\mathscr{Y}$ Dedekind complete then $\mathscr{L}^r(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ is an AL-space under the regular norm if and only if $\mathscr{X}$ is an AM-space and $\mathscr{Y}$ is an AL-space.*

$\lhd$ See Wickstead [22, Theorem 2.1]. $\rhd$

Theorem 4.2. *If $\mathscr{Y}$ is a nonzero Dedekind complete Banach lattices then $\mathscr{L}^r(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ is an AM-space under the regular norm for every AL-space $\mathscr{X}$ if and only if $\mathscr{Y}$ is an AM-space with a Fatou norm.*

$\lhd$ See Wickstead [22, Theorem 2.3]. $\rhd$

Denote by $\mathscr{K}^r(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ the linear span of positive compact operators from $\mathscr{X}$ to $\mathscr{Y}$ endowed with the k-norm defined as $\|T\|_k := \inf\{\|S\| : \pm T \leqslant S \in \mathscr{K}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})\}$, see [22].

Theorem 4.3. *If $\mathscr{X}$ and $\mathscr{Y}$ are nonzero Banach lattices, then $\mathscr{K}^r(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ is an AL-space under the k-norm if and only if $\mathscr{X}$ is an AM-space and $\mathscr{Y}$ is an AL-space.*

$\lhd$ See Wickstead [22, Theorem 2.5 (i)]. $\rhd$

By Boolean valued transfer principle the above three theorems are true within each Boolean valued model. The proofs below are carried out by externalization of these internal facts with $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y}$ and $\mathscr{T}$ standing for Boolean valued representations of X, Y and T, respectively.

Theorem 4.4. *Let X and Y be $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattices with Y Dedekind complete. Then $\mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X,Y)$ is an injective Banach lattice under the regular norm with $\mathbb{B}\simeq\mathbb{M}(\mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X,Y))$ if and only if X is an AM-space and Y is an injective Banach lattice with $\mathbb{B}\simeq\mathbb{M}(Y)$.*

$\lhd$ This a Boolean valued interpretation of Theorem 4.1. According to Theorems 2.4 and 2.5 (4) $\mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X,Y)$ is an injective Banach lattice under the regular norm with $\mathbb{B}(\mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X,Y))$ isomorphic to $\mathbb{B}$ if and only if $\mathscr{L}^r(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ is an AL-space under the regular norm within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$. Theorem 4.1 (applicable by Theorem 2.5 (1)) tells us that the latter is equivalent to saying that $\mathscr{X}$ is an AM-space and $\mathscr{Y}$ is an AL-space. It remains to refer again to Theorem 2.5 (3, 4). $\rhd$

Theorem 4.5. *Let Y be a nonzero $\mathbb{B}$-cyclic Dedekind complete Banach lattices. Then $\mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X,Y)$ is an AM-space under the regular norm with $\mathbb{M}(\mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X,Y))\simeq\mathbb{B}$ for every injective Banach lattice X with $\mathbb{B}=\mathbb{M}(X)$ if and only if Y is an AM-space with a Fatou norm.*

$\lhd$ The proof is similar to that of Theorem 4.4: Theorem 4.2 is true within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ and hence $\mathscr{L}^r(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ is an AM-space under the regular norm for every AL-space $\mathscr{X}$ if and only if $\mathscr{Y}$ is an AM-space with a Fatou norm. Moreover, Y has the Fatou norm if and only if $[\![\mathscr{Y}$ has the Fatou norm$]\!]=\mathbb{1}$, see [8, Theorem 5.9.6 (2)]. Now, combining Theorems 2.4 and 2.5 completes the proof. $\rhd$

Definition 4.6. Denote by $\mathrm{Prt}(\mathbb{B})$ (respectively, $\mathrm{Prt}_\sigma(\mathbb{B})$) the set of all partitions (respectively, countable partitions) of unity in $\mathbb{B}$. A set U in X is said to be mix-*complete* if, for all $(\pi_\xi)_{\xi\in\Xi}\in\mathrm{Prt}(\mathbb{B})$ and $(u_\xi)_{\xi\in\Xi}\subset U$, there is $u\in U$ such that $u=\mathrm{mix}_{\xi\in\Xi}\,\pi_\xi u_\xi$. Suppose that X is a $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattice, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$, and $x\in X$. Say that a *sequence* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{B}$-*approximates* x if, for each $k\in\mathbb{N}$, we have $\inf\{\sup_{n\geqslant k}\|\pi_n(x_n-x)\|:\ (\pi_n)_{n\geqslant k}\in\mathrm{Prt}_\sigma(\mathbb{B})\}=0$. Call a set $K\subset X$ mix-*compact* if K is mix-complete and for every sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset K$ there is $x\in K$ such that $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{B}$-approximates x. Observe that if $\|x\|=\|\,|x|\,\|_\infty$ $(x\in X)$ with a $\Lambda(\mathbb{B})$-valued norm $|\cdot|$, then a sequence $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X $\mathbb{B}$-approximates x if and only if $\inf_{n\geqslant k}|x_n-x|$ for all $k\in\mathbb{N}$. An operator with values in a $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattice is called *cyclically compact* if (or mix-*compact*) the image of any bounded subset is contained in a cyclically compact set.

It is clear that in case $E=\mathbb{R}$ mix-compactness is equivalent to compactness in the norm topology. Note also that the concept of mix-compactness in Gutman and Lisovskaya [20] coincides with that of cyclically compactness introduced by Kusraev [7], see [20, Theorem 3.4] and [8, Proposition 2.12.C.5].

Given $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattices X and Y, denote by $\mathscr{K}^r_{\mathbb{B}}(X,Y)$ the linear span of positive $\mathbb{B}$-linear cyclically compact operators from X to Y, see [7, 8.5.5]. This is a Banach lattice under the k-norm defined as

$$\|T\|_k:=\inf\{\|S\|:\ \pm T\leqslant S\in\mathscr{K}^r_{\mathbb{B}}(X,Y)\}.$$

Note that $\mathscr{K}^r(X,Y):=\mathscr{K}^r_{\mathbb{B}}(X,Y)$, whenever $\mathbb{B}=\{0,\mathbb{1}\}$, cp. [22].

Theorem 4.7. *Let X and Y be $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattices. Then $\mathscr{K}^r_{\mathbb{B}}(X,Y)$ is an injective Banach lattice under the k-norm with $\mathbb{M}(\mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X,Y)) \simeq \mathbb{B}$ if and only if X is an AM-space and Y is an injective Banach lattice with $\mathbb{M}(Y) \simeq \mathbb{B}$.*

$\lhd$ The proof runs along the lines of the proof of Theorem 4.4. We have only to observe that an operator $T \in \mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X,Y)$ is mix-compact if and only if $[\![\, \mathscr{T} = T\!\uparrow$ is a compact linear operator from $\mathscr{X}$ into $\mathscr{Y}\,]\!] = \mathbb{1}$, see [7, Proposition 8.5.5 (1)]. Thus the $\mathbb{B}$-isometry between $\mathscr{L}^r_{\mathbb{B}}(X,Y)$ and $\mathscr{L}^r(\mathscr{X},\mathscr{Y})\!\Downarrow$ induces a $\mathbb{B}$-isometry between $\mathscr{K}^r_{\mathbb{B}}(X,Y)$ and $\mathscr{K}^r(\mathscr{X},\mathscr{Y})\!\Downarrow$. $\rhd$

Definition 4.8. Let X be a Banach lattice and Y be a $\mathbb{B}$-cyclic Banach space. Denote by $\mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X)$ the collection of all finite subsets of X. For every $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ define

$$\sigma(T) := \sup\left\{ \inf_{(\pi_k)\in \mathrm{Prt}_\sigma(\mathbb{B})} \sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^n \|\pi_k T x_i\| : \ \{x_1,\dots,x_n\} \in \mathscr{P}_{\mathrm{fin}}(X),\ \left\| \sum_{i=1}^n |x_i| \right\| \leqslant 1 \right\}.$$

An operator $T \in \mathscr{L}(X,Y)$ is said to be cone $\mathbb{B}$-*summing* if $\sigma(T) < \infty$. Thus, T is cone $\mathbb{B}$-*summing* if and only if there exists a positive constant C such that for any finite collection $x_1,\dots,x_n \in X$ there is a countable partition of unity $(\pi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{B}$ with

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \sum_{i=1}^n \|\pi_k T x_i\| \leqslant C \left\| \sum_{i=1}^n |x_i| \right\|;$$

moreover, in this event $\sigma(T) = \inf\{C\}$. Denote by $\mathscr{S}_{\mathbb{B}}(X,Y)$ the set of all cone $\mathbb{B}$-summing operators. The class $\mathscr{S}_{\mathbb{B}}(X,Y)$ was introduced in Kusraev [23, Definition 7.1], see also Kusraev and Kutateladze [8, 5.13.1]. Observe that if $\mathbb{B} = \{0, I_Y\}$ then $\mathscr{S}(X,Y) := \mathscr{S}_{\mathbb{B}}(X,Y)$ is the space of cone absolutely summing operators, see Schaefer [24, Ch. 4, § 3, Proposition 3.3 (d)] or (which is the same) 1-concave operators, see Diestel, Jarchow, and Tonge [25, p. 330]. Cone absolutely summing operators were introduced by Levin [26] and later independently by Schlotterbeck, see [24, Ch. 4].

Theorem 4.9. *Let $\mathscr{X}$ and $\mathscr{Y}$ be nonzero Banach lattices. The following are equivalent:*

(1) *$\mathscr{S}(\mathscr{X},\mathscr{Y})$ is an AL-space.*

(2) *$\mathscr{X}$ is an AM-space and $\mathscr{Y}$ is an AL-space.*

$\lhd$ This result was obtained by Schlotterbeck, see Schaefer [24, Ch. 4, Proposition 4.5]. $\rhd$

Theorem 4.10. *Let X be a nonzero Banach lattice and Y be a $\mathbb{B}$-cyclic Banach lattice. The following are equivalent:*

(1) *$\mathscr{S}_{\mathbb{B}}(X,Y)$ is an injective Banach lattice with $\mathbb{M}(\mathscr{S}_{\mathbb{B}}(X,Y))$ isomorphic to $\mathbb{B}$.*

(2) *X is an AM-space and Y is an injective Banach lattice with $\mathbb{M}(Y)$ isomorphic to $\mathbb{B}$.*

$\lhd$ Suppose that X is a Banach lattice, $\mathscr{X}$ is the completion of the metric space $X^\wedge$ within $\mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$, and $\mathscr{Y}$ is the Boolean valued representation of a $\mathbb{B}$-cyclic Banach space Y. Then $[\![\, \mathscr{X}$ is a Banach lattice$\,]\!] = \mathbb{1}$ and the map $x \mapsto x^\wedge$ is a lattice isometry from X to $\mathscr{X}\!\Downarrow$. Moreover, for every $T \in \mathscr{S}_{\mathbb{B}}(X,Y)$ there exists a unique $\mathscr{T} := T\!\uparrow \in \mathbb{V}^{(\mathbb{B})}$ determined from the formulas

$$[\![\, \mathscr{T} \in \mathscr{S}(\mathscr{X},\mathscr{Y}) \,]\!] = \mathbb{1}, \quad [\![\, \mathscr{T} x^\wedge = Tx \,]\!] = \mathbb{1} \quad (x \in X).$$

The map $T \mapsto \mathscr{T}$ is an order preserving $\mathbb{B}$-isometry from $\mathscr{S}_{\mathbb{B}}(X,Y)$ onto the restricted descent $\mathscr{S}(\mathscr{X},\mathscr{Y})\!\Downarrow$, see Kusraev and Kutateladze [7, 8.3.4] and [8, Theorem 5.13.6]. Note also that X is an AM-space if and only if $[\![\, \mathscr{X}$ is an AM-space$\,]\!] = \mathbb{1}$ by Theorem 2.5 (3). Now, the proof can be carried out in similar lines by Boolean valued interpretation of Theorem 4.9. $\rhd$

The author thanks the referee for useful remarks leading to improvement of the article.

References

1. *Kusraev A. G.* Boolean valued transfer principle for injective Banach lattices // Siberian Math. J.—2015.—Vol. 56, № 5.—P. 1111–1129.
2. *Abramovich Yu. A.* Weakly compact sets in topological Dedekind complete vector lattices // Teor. Funkciĭ, Funkcional. Anal. i Priložen.—1972.—Vol. 15.—P. 27–35.
3. *Lotz H. P.* Extensions and liftings of positive linear mappings on Banach lattices // Trans. Amer. Math. Soc.—1975.—Vol. 211.—P. 85–100.
4. *Meyer-Nieberg P.* Banach Lattices.—Springer: Berlin etc., 1991.—xvi+395 p.
5. *Haydon R.* Injective Banach lattices // Math. Z.—1974.—Vol. 156.—P. 19–47.
6. *Aliprantis C. D. and Burkinshaw O.* Positive Operators.—N. Y.: Acad. Press, 1985.—xvi+367 p.
7. *Kusraev A. G.* Dominated Operators.—Dordrecht: Kluwer, 2000.—405 p.
8. *Kusraev A. G. and Kutateladze S. S.* Boolean Valued Analysis: Selected Topics.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2014.—iv+400 p.
9. *Bell J. L.* Boolean-Valued Models and Independence Proofs in Set Theory.—N. Y. etc.: Clarendon Press, 1985.—xx+165 p.
10. *Kusraev A. G. and Kutateladze S. S.* Boolean valued analysis.—Dordrecht a. o.: Kluwer, 1995.
11. *Takeuti G. and Zaring W. M.* Axiomatic set Theory.—N. Y.: Springer-Verlag, 1973.—238 p.
12. *Gutman A. E.* Banach bundles in the theory of lattice-normed spaces // Linear Operators Compatible with Order.—Novosibirsk: Sobolev Institute Press, 1995.—P. 63–211.—[in Russian].
13. *Gutman A. E.* Disjointness preserving operators // Vector Lattices and Integral Operators / Ed. S. S. Kutateladze.—Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1996.—P. 361–454.
14. *Abramovich Y. A. and Aliprantis C. D.* An Invitation to Operator Theory.—Providence (R. I.): Amer. Math. Soc, 2002.—iv+530 p.
15. *Abramovich Y. A.* A generalization of a theorem of J. Holub // Proc. Amer. Math. Soc.—1990.—Vol. 108.—P. 937–939.
16. *Schmidt K. D.* Daugavet's equation and orthomorphisms // Proc. Amer. Math. Soc.—1990.—Vol. 108.—P. 905–911.
17. *Lindenstrauss J. and Tzafriri L.* Classical Banach Spaces. Vol. 2. Function Spaces.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1979.—243 p.
18. *Schep A. R.* Daugavet type inequality for operators on L^p-spaces // Positivity.—2003.—Vol. 7 (1–2)—P. 103–111.
19. *Kusraev A. G.* Kantorovich's Principle in Action: AW^*-modules and injective Banach lattices // Vladikavkaz Math. J.—2012.—Vol. 14, № 1.—P. 67–74.
20. *Gutman A. E. and Lisovskaya S. A.* The boundedness principle for lattice-normed // Siberian Math. J.—2009.—Vol. 50 (5).—P. 830–837.
21. *Shvidkoy R. V.* The largest linear space of operators satisfying the Daugavet equation in L_1 // Proc. Amer. Math.—2002.—Vol. 120 (3).—P. 773–777.
22. *Wickstead A. W.* AL-spaces and AM-spaces of operators // Positivity.—2000.—Vol. 4 (3).—P. 303–311.
23. *Kusraev A. G.* Boolean Valued Analysis Approach to Injective Banach Lattices.—Vladikavkaz: Southern Math. Inst. VSC RAS, 2011.—28 p.—(Preprint № 1).
24. *Schaefer H. H.* Banach Lattices and Positive Operators.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 1974.—376 p.
25. *Diestel J., Jarchow H., and Tonge A.* Absolutely Summing Operators.—Cambridge etc.: Cambridge Univ. Press, 1995.—xv+474 p.
26. *Levin V. L.* Tensor products and functors in categories of Banach spaces determined by KB-lineals // Dokl. Acad. Nauk SSSR.—1965.—Vol. 163 (5).—P. 1058–1060.

Received November 13, 2015.

Kusraev Anatoly Georgievich
Vladikavkaz Science Center of the RAS, *Chaiman*
22 Markus Street, Vladikavkaz, 362027, Russia;
North Ossetian State University
44–46 Vatutin Street, Vladikavkaz, 362025, Russia
E-mail: `kusraev@smath.ru`

ОПЕРАТОРЫ В ИНЪЕКТИВНЫХ БАНАХОВЫХ РЕШЕТКАХ

Кусраев А. Г.

Изучаются некоторые свойства ограниченных линейных операторов в инъективных банаховых решетках, используя булевозначный принцип переноса с AL-пространств на инъективные банаховы решетки, полученный в работе автора [1].

Ключевые слова: AM-пространство, AL-пространство, инъективная банахова решетка, булевозначная модель, булевозначный принцип переноса, уравнение Даугавета, циклически компактный оператор, $\mathbb{B}$-суммирующий оператор.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 1, С. 51–62

УДК **517.98**

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ОДНОРОДНЫХ ПОЛИНОМОВ, СОХРАНЯЮЩИХ ДИЗЪЮНКТНОСТЬ[1]

З. А. Кусраева

Александру Ефимовичу Гутману
в связи с его пятидесятилетием

Цель настоящей работы — дать характеризацию однородных полиномов в векторных решетках, сохраняющих дизъюнктность, и доказать для них теорему о мультипликативном представлении.

Mathematics Subject Classification (2010): 46A40, 47H60, 47H07.

Ключевые слова: степень векторной решетки; однородный полином, сохраняющий дизъюнктность; ортогональная аддитивность; решеточный полиморфизм; мультипликативное представление.

1. Введение

Изучение полиномов в бесконечномерных пространствах в значительной мере стимулировано исследованиями в области бесконечномерной голоморфности. В литературе достаточно хорошо представлены алгебраические свойства полиномов, а также взаимосвязи полиномов с геометрическими и линейно-топологическими свойствами банаховых пространств, см., например, [17].

В то же время, полиномы в векторных решетках обладают интересными порядковыми свойствами и вызывают растущий интерес исследователей, см., например, [22, 23]. Классы полиномов в банаховых решетках, определяемые в смешанных терминах нормы и порядка, имеют богатую структуру и заслуживают самостоятельного изучения [14]. Наибольший прогресс достигнут в изучении ортогонально аддитивных полиномов, см. [6–8, 11, 19, 26]. Эти результаты дают новые возможности для получения детальной информации о строении ортогонально аддитивных полиномов, с одной стороны, и дальнейших приложений в теории операторов в банаховых решетках, с другой.

Цель настоящей работы — исследовать класс полиномов в векторных решетках, сохраняющих дизъюнктность. Этот класс можно рассматривать как абстрактное описание наименьшего множества полиномов, которые можно сконструировать, комбинируя операции взвешенного сдвига, возведения в степень и суммирования.

Структура работы такова. Во втором параграфе вводятся основные понятия и формулируются необходимые для дальнейшего изложения теорема о факторизации ортогонально аддитивного оператора через линейный оператор и канонический полином, теорема о мультипликативном представлении решеточных полиморфизмов и теорема

© 2016 Кусраева З. А.

[1] Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 15-51-53119 ГФЕН-а.

Мейера о строении полилинейных операторов, сохраняющих дизъюнктность. В третьем параграфе даются различные характеризации полинома, сохраняющего дизъюнктность. Основной инструмент здесь — *степень* $E^{s\odot}$ векторной решетки E и *канонический полином* $x \mapsto x^{s\odot} := x \odot \cdots \odot x \in E^{s\odot}$ $(x \in E)$. В частности, показано, что порядково ограниченный полином, сохраняющий дизъюнктность, факторизуется через линейный оператор, сохраняющий дизъюнктность, и канонический полином. В четвертом параграфе показано, что полученное описание полиномов, сохраняющих дизъюнктность, позволит распространить на них теорию А. Е. Гутмана [2, 18] линейных операторов, сохраняющих дизъюнктность, что приводит к результатам о мультипликативном представлении этого класса полиномов.

Общие свойства полиномов см. в [17]; необходимые сведения из теории операторов в векторных решетках см. в [10]. Все рассматриваемые векторные решетки предполагаются вещественными и архимедовыми.

2. Вспомогательные сведения

Введем основные понятия, используемые в дальнейшем. Приведем также необходимые сведения о полилинейных операторах в векторных решетках, большей частью хорошо известных в билинейном случае. Напомним, что *полилинейным* (или, точнее, *s-линейным,* $s \in \mathbb{N}$ — число переменных) называют оператор, линейный по каждой переменной.

Определение 2.1. Пусть E и F — векторные решетки и $1 \leqslant s$ — целое число. Отображение $P : E \to F$ называется *однородным полиномом степени s* (или *s-однородным полиномом*), если существует s-линейный оператор $\varphi : E^s \to F$ такой, что

$$P(x) = \varphi(x, \dots, x) \quad (x \in E). \tag{2.1}$$

Равенство (2.1) можно переписать в виде $P = \varphi \circ \Delta_s$, где $\Delta_s : E \to E^s$ действует по правилу $\Delta_s : x \mapsto (x, \dots, x) \in E^s$. Для любого полинома $P : E \to F$ существует и притом единственный симметричный s-линейный оператор $\varphi : E^s \to F$ такой, что выполняется $P = \varphi \circ \Delta_s$. Этот оператор φ называется *порождающим* для полинома P и часто обозначается символом $\check{P}$, см. [17].

Определение 2.2. Однородный полином $P : E \to F$ называют *ортогонально аддитивным*, если для любых $x, y \in E$ выполняется

$$|x| \wedge |y| = 0 \implies P(x + y) = P(x) + P(y).$$

Возьмем $s \in \mathbb{N}$ векторные решетки $E_1, \dots, E_s$ и фиксированный набор $(a_1, \dots, a_s)$, где $a_i \in E_i$ $(i = 1, \dots, s)$. Обозначим $\overline{a}_k := (a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_s)$. Для отображения $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_s \to F$ определим оператор $\varphi_{\overline{a}_k} : E_k \to F$ формулой

$$\varphi_{\overline{a}_k} : x_k \mapsto \varphi(a_1, \dots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \dots, a_s) \quad (x_k \in E_k). \tag{2.2}$$

В этих обозначениях $k := 1, \dots, s$, причем возникающие при $k = 1$ и $k = s$ символы a_0 и a_{s+1} опускаются. Положительность s-линейного оператора $\varphi : E_1 \times \cdots \times E_s$ означает, что линейный оператор $\varphi_{\overline{a}_k}$ положителен при всех $k := 1, \dots, s$ и $0 \leqslant a_i \in E_i$, $i \neq k$. Как обычно, $\varphi \leqslant \psi$ означает, что $\psi - \varphi \geqslant 0$. Обозначим символом $L^\sim({}^sE, F)$ упорядоченное векторное пространство симметричных s-линейных операторов из E^s в F.

Определение 2.3. Однородный полином $P : E \to F$ называют *положительным* и пишут $P \geqslant 0$, если положительным является порождающий его полилинейный оператор, т. е. $\check{P}(x_1, \dots, x_s) \geqslant 0$ для любых $x_1, \dots, x_s \in E_+$. При этом $P \leqslant Q$ означает, что $Q - P \geqslant 0$.

Всюду далее множество s-однородных порядково ограниченных ортогонально аддитивных полиномов из E в F будем обозначать символом $\mathscr{P}_o^{\sim}({}^sE, F)$. Легко видеть, что $(\mathscr{P}_o^{\sim}({}^sE, F), \leqslant)$ — упорядоченное векторное пространство. При $s = 1$ получаем упорядоченное векторное пространство порядково ограниченных линейных операторов из E в F, которое принято обозначать символом $L^{\sim}(E, F)$.

Определение 2.4. Полилинейный оператор $\varphi : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ называют *решеточным полиморфизмом* или, точнее, *решеточным s-морфизмом,* если для любого $k := 1, \dots, s$ и любых $0 \leqslant a_i \in E_i$, $i \neq k$, оператор $\varphi_{\overline{a}_k}$ является решеточным гомоморфизмом из E в F. Полилинейный оператор $\varphi : E^s \to F$ называют *ортосимметричным,* если $\varphi(x_1, \dots, x_n) = 0$, как только $x_i \perp x_j$ для какой-нибудь пары индексов $i \neq j$ из $\{1, \dots, n\}$.

Определение 2.5. Пусть $2 \leqslant s \in \mathbb{N}$ и E — архимедова векторная решетка. Пара $(E^{s\odot}, \odot_s)$ называется *s-ой степенью* E, если выполнены следующие условия:

(1) $E^{s\odot}$ — архимедова векторная решетка;

(2) $\odot_s : E^s \to E^{s\odot}$ — ортосимметричный решеточный s-морфизм, называемый *каноническим полиморфизмом* или *каноническим s-морфизмомом* решетки E;

(3) для любой архимедовой векторной решетки F и любого ортосимметричного решеточного s-морфизма $\varphi : E^s \to F$ существует единственный решеточный гомоморфизм $S : E^{s\odot} \to F$ такой, что $\varphi = S \circ \odot_s$.

Это определение введено в [13, определение 3.1]. Там же установлено, что для любой архимедовой векторной решетки E и любого натурального $2 \leqslant s \in \mathbb{N}$ существует единственная с точностью до решеточного изомофизма s-ая степень $(E^{s\odot}, \odot_s)$, см. [13, теорема 3.2]. Для удобства полагают $E^{1\odot} = E$ и $\odot_1 = I_E$. Далее будем писать $\odot$ вместо $\odot_s$ и $x_1 \odot \cdots \odot x_s$ вместо $\odot_s(x_1, \dots, x_s)$.

Стоит различать два отображения $(\cdot)^{s\odot}$, $\iota : E \to E^{s\odot}$, определяемые формулами

$$(\cdot)^{s\odot} : x \mapsto x^{s\odot} := \underbrace{x \odot \cdots \odot x}_{s \text{ раз}}, \quad \iota : x \mapsto x \odot \underbrace{|x| \odot \cdots \odot |x|}_{s-1 \text{ раз}}. \tag{2.3}$$

Первое из них — специальный ортогонально аддитивный полином, порождаемый каноническим s-морфизмом $\odot$ и называемый *каноническим полиномом* решетки E. Он играет роль отсутствующей в векторной решетке степенной функции. Второе является нечетной ортогонально аддитивной функцией и осуществляет порядковый (нелинейный) изоморфизм из E в $E^{s\odot}$, причем ι будет биекцией, если E равномерно полна. Заметим также, что эти отображения совпадают на конусе положительных элментов E_+.

Лемма 2.6. *Для произвольной векторной решетки E справедливы утверждения:*

(1) *для любого $u \in E^{s\odot}$ существует такой элемент $e_0 \in E_+$, что для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ можно подобрать $x_{i,1}, \dots, x_{i,n} \in E$ $(i := 1, \dots, s)$ так, что*

$$\left| u - \sum_{j=1}^{n} x_{1,j} \odot \cdots \odot x_{s,j} \right| \leqslant \varepsilon e_0^{s\odot};$$

(2) *для любого $u \in E^{s\odot}$ существует такой элемент $e \in E_+$, что $|u| \leqslant e^{s\odot}$;*

(3) *для любых $x_1, \dots, x_s \in E$ выполняется $x_1 \odot \cdots \odot x_s = 0$ в том и только в том случае, когда $|x_1| \wedge \cdots \wedge |x_s| = 0$;*

(4) *для каждого $0 < u \in E^{s\odot}$ существует $e \in E_+$ такой, что $0 < e^{s\odot} \leqslant u$.*

$\lhd$ Доказательство утверждений (1), (3) и (4) проводится по той же схеме, что и в [15, теорема 2.1], используя определение *фремлиновского тензорного произведения* $E_1 \bar{\otimes} \ldots \bar{\otimes} E_s$ векторных решеток $E_1, \ldots, E_s$ при $s \geqslant 2$ и его свойства (a), (b) и (c) из [25, § 2]. Если $E_1 = \ldots = E_s$, то $E^{s\odot}$ определяется как фактор-решетка векторной решетки $E_1 \bar{\otimes} \cdots \bar{\otimes} E_s$ по равномерно замкнутому идеалу, порожденному элементами вида $x_1 \otimes \cdots \otimes x_s$, где для некоторой пары индексов $1 \leqslant i, j \leqslant s$ выполняется $x_i \perp x_j$. Утверждение (2) легко вытекает из (1). В самом деле, если $x_{i,j}$, e_0 и ε — те же, что и в (1), и положим $e := sn\varepsilon\big(e_0 + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{n}|x_{i,j}|\big)$, то $|u| \leqslant e^{s\odot}$. $\rhd$

Для однородных ортогонально аддитивных полиномов справедлива следующая *теорема о факторизации*:

Теорема 2.7. *Пусть E и F — векторные решетки, причем, по меньшей мере, одна из них равномерно полна. Тогда для любого порядково ограниченного ортогонально аддитивного полинома $P : E \to F$ существует единственный порядково ограниченный линейный оператор $T : E^{s\odot} \to F$ такой, что имеет место представление*

$$P(x) = T(x^{s\odot}) = T(\underbrace{x \odot \cdots \odot x}_{s\ \text{раз}}) \quad (x \in E). \tag{2.4}$$

Более того, соответствие $P \longleftrightarrow T$ является изоморфизмом упорядоченных векторных пространств $\mathscr{P}_o^{\sim}({}^sE, F)$ и $L^{\sim}(E^{s\odot}, F)$.

$\lhd$ Доказательство см. [6, следствие 3]. $\rhd$

Теорема 2.8. *Предположим, что в универсальном пополнении F^u векторной решетки F фиксирована структура f-алгебры с единицей и умножение обозначено символом $\bullet$. Для произвольного решеточного n-морфизма $\varphi : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ существуют n решеточных гомоморфизмов $S_i : E_i \to F^u$ $(i := 1, \ldots, n)$ таких, что*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = S_1(x_1) \bullet \ldots \bullet S_n(x_n) \quad (x_1 \in E_1, \ldots, x_n \in E_n).$$

Если, сверх сказанного, $E := E_1 = \ldots = E_n$ и полиморфизм φ симметричен, то в этом представлении можно взять $S := S_1 = \ldots = S_n$, т. е. имеет место представление

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = S(x_1) \bullet \ldots \bullet S(x_n) \quad (x_1, \ldots, x_n \in E).$$

$\lhd$ Доказательство проводится аналогично билинейному случаю (см. [5, теорема 3.2], а также [21, теорема 3.12.A.3]). $\rhd$

Следствие 2.9. *Пусть E и F — векторные решетки. Для произвольного симметричного решеточного s-морфизма $\varphi : E^s \to F$ существуют векторная решетка G и решеточный гомоморфизм $S : E \to G$ такие, что $G^{s\odot} \subset F$ и имеет место представление*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = S(x_1) \odot \ldots \odot S(x_n) \quad (x_1, \ldots, x_n \in E).$$

$\lhd$ Пусть $S : E \to F^u$ — решеточный гомоморфизм из теоремы 2.8 и положим $G := S(E)$. Тогда G — векторная подрешетка решетки F^u, а отображение $\varphi : (u_1, \ldots, u_s) \mapsto u_1 \bullet \ldots \bullet u_s$ представляет собой ортосимметричный решеточный s-морфизм из G^s в F. В силу условия (3) определения 2.5 существует единственный решеточный гомоморфизм $h : G^{s\odot} \to F$ такой, что $\varphi = h \circ \odot_s$. Если $h(u) = 0$ и $0 < |u| \in G^{s\odot}$, то существует $v \in G_+$ такой, что $0 < v \odot \ldots \odot v \leqslant u$ (см. [15, теорема 2.1 (4)]). Следовательно, $v \bullet \ldots \bullet v = h(v \odot \ldots \odot v) \leqslant h(|u|) = |h(u)| = 0$ и получаем противоречие $v = 0$. Тем самым гомоморфизм h инъективен и, так как степень векторной решетки определяется с точностью до решеточного изоморфизма, можем отождествить $G^{s\odot}$ с подрешеткой в F. $\rhd$

Следствие 2.10. *Решеточный полиморфизм ортосимметричен в том и только в том случае, когда он симметричен.*

$\lhd$ Из следствия 2.9 видно, что симметричный полиморфизм ортосимметричен. Обратное верно для любого положительного полилинейного оператора, см., например, [12, теорема 2] и [16, следствие 2]. $\rhd$

Определение 2.11. Полилинейный оператор $\varphi : E_1 \times \dots \times E_s \to F$ называется *сохраняющим дизъюнктность*, если линейный оператор $\varphi_{\overline{a}_k} : E_k \to F$, $k = 1, \dots, s$, сохраняет дизъюнктность, каковы бы ни были фиксированные $a_i \in E_i$, $i \neq k$, т. е.

$$(\forall\, x, y \in E_k) \quad x \perp y \Rightarrow \varphi_{\overline{a}_k}(x) \perp \varphi_{\overline{a}_k}(y) \quad (k = 1, \dots, s).$$

Теорема 2.12 (теорема Мейера для полилинейных операторов)**.** *Пусть $E_1, \dots, E_s$ и F — векторные решетки, а φ — порядково ограниченный s-линейный оператор из $E_1 \times \dots \times E_s$ в F, сохраняющий дизъюнктность. Тогда φ имеет положительную часть φ^+, отрицательную часть φ^- и модуль $|\varphi|$, являющиеся решеточными полиморфизмами. Более того, $\varphi^+(x_1, \dots, x_s) = (\varphi(x_1, \dots, x_s))^+$ и $\varphi^-(x_1, \dots, x_s) = (\varphi(x_1, \dots, x_s))^-$ для всех $0 \leqslant x_i \in E_i$ и $|\varphi(x_1, \dots, x_s)| = |\varphi|(|x_1|, \dots, |x_s|)$ для всех $x_i \in E_i$ $(i := 1, \dots, s)$.*

$\lhd$ Доказательство повторяет рассуждения из [4, теорема 3.4], относящиеся к билинейному случаю. $\rhd$

3. Полиномы, сохраняющие дизъюнктность

Введем теперь основной объект изучения. Пусть E и F — векторные решетки. Напомним, что все векторные решетки предполагаются вещественными и архимедовыми.

Определение 3.1. Однородный полином $P : E \to F$ степени s называют *сохраняющим дизъюнктность* (соответственно, *решеточным полиморфизмом*), если таковым является порождающий его симметричный полилинейный оператор $\check{P} : E^s \to F$, см. определения 2.4 и 2.11.

Предложение 3.2 (теорема Мейера для полиномов)**.** *Пусть E и F — векторные решетки. Пусть $P : E \to F$ — порядково ограниченный ортогонально аддитивный s-однородный полином, сохраняющий дизъюнктность. Тогда P имеет положительную часть P^+, отрицательную часть P^- и модуль $|P|$, являющиеся полиморфизмами. Более того, $P^+(x) = (Px)^+$, $P^-(x) = (Px)^-$ и $|P|(x) = |P(x)|$ для $x \in E_+$.*

$\lhd$ В силу определений 2.3, 2.4 и 3.1 $P \to \check{P}$ устанавливает изоморфизм упорядоченных векторных пространств $\mathscr{P}_o^{\sim}({}^sE, F)$ и $L^{\sim}({}^sE, F)$. Поэтому первая часть требуемого вытекает непосредственно из теоремы 2.12. Кроме того, для любого $x \in E_+$ имеем $P^+(x) = \check{P}^+(x, \dots, x_s) = \check{P}(x, \dots, x_s)^+ = P(x)^+$. Аналогично для P^- и $|P|$. $\rhd$

Замечание 3.3. Дж. Лоан в своей диссертации [23] определил полиморфизм соотношением $|P(x)| = P(|x|)$ $(x \in E)$. При этом он привел пример полиморфного полинома P, для которого порождающий полилинейный оператор $\check{P}$ не является решеточным полиморфизмом в смысле определения 3.1 (см. [23, предложение 4.22, примеры 4.23 и 4.24]). Дж. Лоан [23, предложение 4.27]) нашел также необходимые и достаточные условия на P, при которых $\check{P}$ является решеточным полиморфизмом: для любого натурального $n \leqslant s$ выполняется $|\hat{d}^n P(x)(y)| = \hat{d}^n P(x)(|y|)$ $(x \in E_+, y \in E)$, где $\hat{d}^n P(x)y$ —

n-я однородная производная P в точке x по направлению y определяется формулой $\hat{d}^n P(x)(y) = \binom{s}{n}\varphi(x^{s-n}, y^n)$.

Лемма 3.4. *Для порядково ограниченного ортогонально аддитивного однородного полинома $P : E \to F$ равносильны условия:*

(1) *P — решеточный полиморфизм;*

(2) *$P(x \vee y) = P(x) \vee P(y)$ для всех $x, y \in E_+$;*

(3) *$P(x \wedge y) = P(x) \wedge P(y)$ для всех $x, y \in E_+$;*

(4) *$x \wedge y = 0$ влечет $P(x) \wedge P(y) = 0$ для всех $x, y \in E_+$.*

$\lhd$ Пусть P — решеточный полиморфизм, т. е. по определению 3.1 решеточным полиморфизмом является $\check{P}$. Решеточный полиморфизм $\check{P}$ будет ортосимметричным, так как он симметричен, см. следствие 2.10. В то же время, порядково ограниченный однородный полином — ортогонально аддитивен, если только порождающий его полилинейный оператор ортосимметричен, см. [6, лемма 4]. Следовательно, P ортогонально аддитивен. В силу условия (3) определения 2.5 существует единственный решеточный гомоморфизм $T : E^{s\odot} \to F$ такой, что $\check{P} = T \circ \odot_s$. Отсюда выводим

$$P(x \wedge y) = T((x \wedge y)^{s\odot}) = T(x^{s\odot} \wedge y^{s\odot}) = T(x^{s\odot}) \wedge T(y^{s\odot}) = P(x) \wedge P(y),$$

и тем самым (1) $\Rightarrow$ (2). Заменив в этих рассуждениях $\wedge$ на $\vee$, получим (1) $\Rightarrow$ (3). Кроме того, очевидна импликация (3) $\Rightarrow$ (4). Остается доказать, что (2) $\Rightarrow$ (1) и (4) $\Rightarrow$ (1).

Предположим, что выполнено (2). Без ограничения общности можно считать, что F равномерно полна. (В противном случае в наших рассуждениях заменим F на F^{ru}). Согласно теореме 2.7 имеет место представление $P = T \circ \odot \circ \Delta_s$ для единственного порядково ограниченного линейного оператора T из $E^{s\odot}$ в F. Возьмем произвольные $u, v \in E_+^{s\odot}$ и докажем, что $T(u \vee v) = Tu \vee Tv = 0$. Пусть E^{ru} — равномерное пополнение E в смысле [24]. Ввиду полноты F существует единственное продолжение P до порядково ограниченного ортогонально аддитивного s-однородного полинома $\widehat{P} : E^{ru} \to F$, см. [6, лемма 3]. При этом $\widehat{P}(x \vee y) = \widehat{P}(x) \vee \widehat{P}(y)$ для всех $x, y \in E_+^{ru}$. Вновь по теореме 2.7 $\widehat{P} = \widehat{T} \circ \odot \circ \Delta_s$ для единственного порядково ограниченного линейного оператора $\widehat{T}$ из $(E^{ru})^{s\odot}$ в F. В силу единственности степени векторной решетки с точностью до решеточного изоморфизма можем считать $E^{s\odot}$ подрешеткой $(E^{ru})^{s\odot}$, а канонический s-морфизм решетки E — совпадающим с ограничением на E^s канонического s-морфизма решетки E^{ru}. Теперь видно, что $T(u \vee v) = \widehat{P}(x \vee y) = \widehat{P}(x) \vee \widehat{P}(y) = T(x) \vee T(y)$. Итак, установлена импликация (2) $\Rightarrow$ (1); (4) $\Rightarrow$ (1) обосновывается аналогичными рассуждениями. $\rhd$

Лемма 3.5. *Полилинейный оператор $\varphi : E_1 \times \dots \times E_s \to F$ сохраняет дизъюнктность в том и только том случае, когда $|\varphi(x_1, \dots, x_s)| = |\varphi(|x_1|, \dots, |x_s|)|$ ($\forall\, x_i \in E_i$, $i = 1, \dots, s$).*

$\lhd$ Доказательство аналогично билинейному случаю (см. [4, предложение 3.2]). $\rhd$

Лемма 3.6. *Пусть φ — s-линейный порядково ограниченный оператор. Тогда эквивалентны следующие условия:*

(1) *φ сохраняет дизъюнктность;*

(2) *$\varphi(x_1, \dots, x_s) \perp \varphi(y_1, \dots, y_s)$, если существует $j \in [1, s]$ такой, что $x_j \perp y_j$.*

$\lhd$ Пусть оператор φ сохраняет дизънктность. Возьмем $x_j \perp y_j$ для некоторого $j \in [1, s]$ и положим $u_i := |x_i| + |y_i|$ $(i \neq j)$. Тогда, используя лемму 3.5 и предложение 3.3, выводим:

$$\begin{aligned} &|\varphi(x_1, \dots, x_s)| \wedge |\varphi(y_1, \dots, y_s)| = |\varphi(|x_1|, \dots, |x_s|)| \wedge |\varphi(|y_1|, \dots, |y_s|)| \\ &\leqslant |\varphi|(u_1, \dots, u_{j-1}, |x_j|, u_{j+1}, \dots, u_s) \wedge |\varphi|(u_1, \dots, u_{j-1}, |y_j|, u_{j+1}, \dots, u_s) = 0. \end{aligned}$$

Тем самым, (1) $\Rightarrow$ (2), а справедливость импликации (2) $\Rightarrow$ (1) очевидна. $\rhd$

Лемма 3.7. *Пусть E и F — векторные решетки. Если $T : E^{s\odot} \to F$ — порядково ограниченный линейный оператор, то для однородного ортогонально аддитивного полинома $P = T \circ \odot_s \circ \Delta_s : E \to F$ эквиваленты следующие утверждения:*

(1) *T сохраняет дизъюнктность;*

(2) *P сохраняет дизъюнктность;*

(2) *$x \perp y \Rightarrow Px \perp Py$ для всех $x, y \in E$.*

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (2) очевидна, а (2) $\Rightarrow$ (3) следует из леммы 3.6. Импликация (3) $\Rightarrow$ (1) выводится так же, как и в лемме 3.4. $\rhd$

Лемма 3.8. *Однородный полином $P : E \to F$ степени s между векторными решетками ортогонально аддитивен тогда и только тогда, когда $\hat{d}^n P(x)(y) = 0$ для любых дизъюнктных $x, y \in E$ и всех $1 \leqslant n < s$.*

$\lhd$ Напомним, что $\hat{d}^n P(x)(y) = \binom{s}{n}\varphi(x^{s-n}, y^n)$, где $\varphi := \check{P}$. Пусть P ортогонально аддитивен, а $x, y \in E$ дизъюнктны. Тогда для любого $t \in \mathbb{R}$ элементы x и ty также дизъюнктны, поэтому $P(x + ty) = P(x) + t^s P(y)$. В то же время,

$$P(x + ty) = P(x) + t^s P(y) + \sum_{n=1}^{s-1} \tbinom{s}{n}\varphi(x^{s-nj}, y^n)t^n.$$

Отсюда видно, что для любого $t \in \mathbb{R}$ выполняется равенство

$$s\varphi(x^{s-1}, y)t + \tbinom{s}{2}\varphi(x^{s-2}, y^2)t^2 + \ldots + \tbinom{s}{s-1}\varphi(x, y^{s-1})t^{s-1} = 0.$$

Разделив на $st \neq 0$ и обозначив $a := |\varphi(x^{s-2}, y^2)|\binom{s}{2}/s + \ldots + |\varphi(x, y^{s-1})|\binom{s}{s-1}/s$, приходим к оценке $|\varphi(x^{s-1}, y)| \leqslant ta$, справедливой для всех ненулевых $t \in [-1, 1]$. В частности, $n|\varphi(x^{s-1}, y)| \leqslant a$ для всех $n \in \mathbb{N}$, и ввиду архимедовости F получаем $\varphi(x^{s-1}, y) = 0$. Повторяя эти рассуждения, шаг за шагом выводим $\varphi(x^{s-2}, y^2) = 0, \ldots, \varphi(x, y^{s-1}) = 0$. Обратное утверждение очевидно. $\rhd$

Теорема 3.9. *Пусть E и F — векторные решетки, $P : E \to F$ — порядково ограниченный однородный полином степени s. Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *P сохраняет дизъюнктность;*

(2) *$x \perp y$ влечет $\hat{d}^n P(x)(y) = 0$ и $Px \perp Py$ для всех $x, y \in E$ и $1 \leqslant n < s$;*

(3) *P ортогонально аддитивен и $x \perp y$ влечет $Px \perp Py$ для всех $x, y \in E$;*

(4) *существуют векторная решетка G и решеточные гомоморфизмы $S_1, S_2 : E \to G$ такие, что $G^{s\odot} \subset F$, $S_1(E) \perp S_2(E)$ и $Px = (S_1 x)^{s\odot} - (S_2 x)^{s\odot}$ для всех $x \in E$;*

(5) *существует сохраняющий дизъюнктность порядково ограниченный линейный оператор $T : E^{s\odot} \to F$ такой, что $Px = T(x^{s\odot})$ для всех $x \in E$.*

$\lhd$ (1) $\Rightarrow$ (5). В силу теоремы Мейера для полиномов P имеет положительную P^+ и отрицательную часть P^- и модуль $|P|$, являющиеся полиморфизмами. В силу условия (3) из определения 2.5 существуют решеточные гомоморфизмы $T_1, T_2 : E^{s\odot} \to F$ такие, что $P^+(x) = T_1(x^{s\odot})$ и $P^-(x) = T_2(x^{s\odot})$ для всех $x \in E$. Определим линейный регулярный оператор $T : E^{s\odot} \to F$ равенством $T := T_1 - T_2$ и заметим, что T сохраняет дизъюнктноть и имеет место представление $P(x) = T(x^{s\odot})$ $(x \in E)$.

(5) $\Rightarrow$ (4). Положим $T_1 := T^+$, $T_2 := T^-$ и $T_0 := |T|$. Отображение $x \mapsto T_k(x_1 \odot \cdots \odot x_s)$ является симметричным решеточным полиморфизмом из E^s в F. В силу следствия 2.8 существуют векторная решетка G_k и решеточный гомоморфизм $S_k : E \to G$ такие, что $G_k^{s\odot} \subset F$ и имеет место представление $T_k(x_1 \odot \cdots \odot x_s) = S_k(x_1) \odot \cdots \odot S(x_n)$ для всех $x_1, \ldots, x_n \in E$ и $k = 0, 1, 2$. Более того, $G_1 \cup G_2 \subset G_0$ и $G_1 \perp G_2$. Оператор $S := S_1 - S_2$

действует из E в $G := G_0$, сохраняет дизъюнктность, и для любого $x \in E$ выполняется $T(x^{s\odot}) = T_1(x^{s\odot}) - T_2(x^{s\odot}) = S_1(x)^{s\odot} - S_2(x)^{s\odot}$.

(4) $\Rightarrow$ (3). Если выполнено (4), то P ортогонально аддитивен, так как ортогонально аддитивен полином $x \mapsto x^{s\odot}$ из E в $E^{s\odot}$. Кроме того, для дизъюнктных x и y элементы $x^{s\odot}$ и $y^{s\odot}$ также дизъюнктны, следовательно, $|x^{s\odot} - y^{s\odot}| = |x^{s\odot} + y^{s\odot}|$. Отсюда выводим

$$\begin{aligned} |P(x) - P(y)| &= |T(x^{s\odot}) - T(y^{s\odot})| = |T(x^{s\odot} - y^{s\odot})| = |T(|x^{s\odot} - y^{s\odot}|)| \\ &= |T(|x^{s\odot} + y^{s\odot}|)| = |T(x^{s\odot} + y^{s\odot})| = |P(x) + P(y)|, \end{aligned}$$

что и означает дизъюнктность $P(x)$ и $P(y)$.

(1) $\Leftrightarrow$ (2) $\Leftrightarrow$ (3). Эти эквивалентности следуют из лемм 3.7 и 3.8. $\rhd$

Следствие 3.10. *Пусть E и F — векторные решетки, $P : E \to F$ — однородный полином степени s. Эквивалентны следующие утверждения:*

(1) *P — полиморфизм;*

(2) *P ортогонально аддитивен и $P(x \vee y) = P(x) \vee P(y)$ для всех $x, y \in E_+$;*

(3) *P ортогонально аддитивен и $P(x \wedge y) = P(x) \wedge P(y)$ для всех $x, y \in E_+$;*

(4) *P ортогонально аддитивен и $x \wedge y = 0$ влечет $P(x) \wedge P(y) = 0$ для всех $x, y \in E$;*

(5) *существует решеточный гомоморфизм $T : E^{s\odot} \to F$ такой, что справедливо представление $Px = T(x^{s\odot})$ для всех $x \in E$;*

(6) *существуют векторная решетка G и решеточный гомоморфизм $S : E \to G$ такие, что $G^{s\odot} \subset F$ и имеет место представление $Px = (Sx)^{s\odot}$ для всех $x \in E$.*

$\lhd$ Следует непосредственно из теоремы 3.9, предложения 3.2 и леммы 3.4 $\rhd$

4. Мультипликативное представление

Всюду в этом параграфе E и F — фундаменты расширенных K-пространств $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$. В пространствах $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ зафиксируем порядковые единицы $\mathbb{1}_{\mathscr{E}}$ и $\mathbb{1}_{\mathscr{F}}$, а также мультипликативные структуры, превращающие эти пространства в f-алгебры с единицами $\mathbb{1}_{\mathscr{E}}$ и $\mathbb{1}_{\mathscr{F}}$ соответственно. Напомним, что в данной ситуации ортоморфизмы представляют собой операторы умножения и поэтому будут отождествляться с соответствующими мультипликаторами.

Для произвольного $f \in \mathscr{E}$ существует единственный элемент $g \in \mathscr{E}$, для которого $fg = [f]\mathbb{1}_{\mathscr{E}}$ и $[f]^{\perp}g = 0$, где $[f]$ — проектор на полосу $\{f\}^{\perp\perp}$. Этот элемент g будем обозначить символом $1/f := \mathbb{1}_{\mathscr{E}}/f$. Произведение $e(1/f)$ короче обозначается символом e/f. Идеал в K-пространстве $\mathscr{E}$, порожденный элементом $1 := \mathbb{1}_{\mathscr{E}}$, обозначается через $\mathscr{E}(\mathbb{1})$.

Будем обозначать через $\mathfrak{P}(\mathscr{E})$ булеву алгебру порядковых проекторов в векторной решетке E. Пусть $h : \mathfrak{P}(\mathscr{E}) \to \mathfrak{P}(\mathscr{F})$ — булев гомоморфизм и обозначим символом $\mathscr{E}(1, h)$ h-замыкание идеала $\mathscr{E}_{\mathbb{1}}$, порожденного в $\mathscr{E}$ единицей $\mathbb{1}$, т. е. множество всех элементов $x \in \mathscr{E}$, представимых в виде $x = o\text{-}\sum_{n=1}^{\infty} \pi_n x_n$, где (x_n) — произвольная последовательность в $\mathscr{E}_{\mathbb{1}}$ и π_n — счетное разбиение единицы в $\mathfrak{P}(\mathscr{E})$ такое, что $(h(\pi_n))$ — разбиение единицы в $\mathfrak{P}(\mathscr{F})$, см. предложения 5.6.3 и 5.6.4 в [18]. Очевидно, что $\mathscr{E}(\mathbb{1}, h)$ — идеал в $\mathscr{E}$.

Определение 4.1. *Тенью* оператора $P : E \to F$ называем отображение $\mathrm{sh}(P) : \mathfrak{P}(\mathscr{E}) \to \mathfrak{P}(\mathscr{F})$, определенное формулой $\mathrm{sh}(\pi) = [P(\pi(E))]$. Тем самым, $\mathrm{sh}(\pi)$ — порядковый проектор на полосу $(P\pi(E))^{\perp\perp}$.

Лемма 4.2. *Пусть E и F — векторные решетки с проекциями. Ортогонально аддитивный полином $P : E \to F$ сохраняет дизъюнктность в том и только том случае, когда $\mathrm{sh}(P)$ — булев гомоморфизм.*

$\lhd$ Остаются в силе те же рассуждения, что и в [18, п. 5.4.2] (или [3, п. 5.2.2 (1)]) для случая линейного оператора. При этом вместо линейности работает ортогональная аддитивность. $\rhd$

Лемма 4.3. *Для произвольного кольцевого гомоморфизма $h : \mathfrak{P}(\mathscr{E}) \to \mathfrak{P}(\mathscr{F})$ существует единственный регулярный оператор $S_h : \mathscr{E}(1, h) \to \mathscr{F}$ такой, что тень S_h совпадает с h и $S_h(\mathbb{1}_{\mathscr{E}}) = h(\mathbb{1})\mathbb{1}_{\mathscr{F}}$. Более того, $\mathscr{E}(1, h)$ является f-подалгеброй $\mathscr{E}$, а оператор S_h мультипликативен, т. е. $S_h(xy) = S_h(x)S_h(y)$ для всех $x, y \in \mathscr{E}(1, h)$.*

$\lhd$ См. [18, предложения 5.6.4 и 5.6.7, теорема 5.6.10]. $\rhd$

Определение 4.4. Оператор S, существование которого утверждается в лемме 4.3, называют *сдвигом посредством* h и обозначают символом S_h. Пусть E — фундамент $\mathscr{E}$ и F — фундамент $\mathscr{F}$. Оператор $S : E \to F$ назовем *оператором сдвига*, если существует кольцевой гомоморфизм $h : \mathfrak{P}(\mathscr{E}) \to \mathfrak{P}(\mathscr{F})$ такой, что $E \subset \mathscr{E}(1, h)$ и $S = S_h$ на E. Если h — тень полинома P, то оператор сдвига S будем называть *сдвигом полинома* P. Заметим, что понятие сдвига посредством гомоморфизма и оператора сдвига зависят от выбора единиц $\mathbb{1}_{\mathscr{E}}$ и $\mathbb{1}_{\mathscr{F}}$ в K-пространствах $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$, см. [18, п. 5.6.8].

Теорема 4.5 (А. Е. Гутман [2])**.** *Пусть E — векторная решетка, F — K-пространство, $T : E \to F$ — порядково ограниченный линейный оператор, сохраняющий дизъюнктность. Тогда существует разбиение единицы $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в булевой алгебре $\mathfrak{P}(F)$ и семейство положительных элементов $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в E такие, что имеет место представление*

$$Tx = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} W \circ \rho_\xi S \circ (x/e_\xi) \quad (x \in E), \tag{4.1}$$

где оператор S — сдвиг оператора T, а ортоморфизм $W : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ представляет собой оператор умножения на $o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \rho_\xi T(e_\xi)$.

$\lhd$ См. [18, теорема 5.7.5] и [3, теорема 5.3.7]. $\rhd$

Лемма 4.6. *Если полином P сохраняет дизъюнктность, то P и $|P|$ имеют один и тот же сдвиг. Если $Px = (Tx)^{s\odot}$ $(x \in E)$ для некоторого решеточного гомоморфизма $T : E \to G \subset \mathscr{F}$, то сдвиги P и T совпадают.*

$\lhd$ Доказательство следует непосредственно из определения 4.1 и конструкции сдвига (см. [18, предложение 5.6.7]), учитывая предложение 3.2 и тот факт, что множества $B \subset G$ и $\{g^{s\odot} : g \in G\}$ порождают одну и ту же полосу в $\mathscr{F}$. $\rhd$

Теперь все готово для доказательства основной теоремы данного параграфа.

Теорема 4.7 (о представлении ортогонально аддитивных полиномов, сохраняющих дизъюнктность)**.** *Пусть E — векторная решетка, F — K-пространство, $P : E \to F$ — s-однородный порядково ограниченный полином, сохраняющий дизъюнктность. Тогда существуют разбиение единицы $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в булевой алгебре $\mathfrak{P}(F)$ и семейство положительных элементов $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ в E такие, что имеет место представление*

$$P(x) = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} W \circ \rho_\xi S(x/e_\xi)^{s\odot} \quad (x \in E), \tag{4.2}$$

где оператор S — сдвиг полинома P, а ортоморфизм $W : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ представляет собой оператор умножения на $o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \rho_\xi P(e_\xi)$.

$\lhd$ Предположим сначала, что полином P положителен. В силу следствия 3.10 (6) существуют векторная решетка G и решеточный гомоморфизм $T: E \to G$ такие, что $G^{s\odot} \subset F$ и имеет место представление

$$P(x) = (Tx)^{s\odot} \quad (x \in E). \tag{4.3}$$

Так же, как и в теореме 2.8 и следствии 2.9, умножение в $\mathscr{F}$ обозначим символом $\bullet$. Тогда $G^{s\odot}$ можно отождествить с подрешеткой $E_{(s)} := \{u_1 \bullet \ldots \bullet u_s : u_1, \ldots, u_s \in T(E)\}$ f-алгебры $\mathscr{F}$, а также считать $u^{s\odot} = u^{s\bullet} = u \bullet \ldots \bullet u$ для $u \in E_{(s)}$, см. [13, теорема 4.1].

Для решеточного гомоморфизма по теорема Гутмана 4.5 имеет место представление (4.1), в котором S — сдвиг T. Пусть $v := o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \rho_\xi T(e_\xi)$ и $\mathbb{1}_\xi$ обозначает осколок $\mathbb{1}_{\mathscr{F}}$, соответствующий проектору ρ_ξ. Подставив (4.1) в (4.3), получим

$$P(x) = \Bigg(o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} v \bullet \mathbb{1}_\xi \bullet S(x/e_\xi)\Bigg)^{s\bullet} = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} v^{s\bullet} \bullet \mathbb{1}_\xi \bullet S(x/e_\xi)^{s\bullet}.$$

Обозначив буквой W оператор умножения в $\mathscr{F}$ на элемент $v^{s\bullet}$, получим требуемое представление. Если полином P произволен, то в силу доказанного имеем представление

$$|P|(x) = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} W_0\big(\rho_\xi S(x/e_\xi)^{s\odot}\big) \quad (x \in E),$$

где S — сдвиг $|P|$ и $W_0 \geqslant 0$. Так как $P = \pi|P| - \pi^\perp|P|$ для некоторого проектора π, то остается положить $W := \pi W_0 - \pi^\perp W_0$ и сослаться на лемму 4.6. $\rhd$

Пусть теперь K и Q — экстремально несвязные компакты, а E и F — фундаменты в расширенных K-пространствах $\mathscr{E} := C_\infty(K)$ и $\mathscr{F} := C_\infty(Q)$ соответственно. Пусть $C_0(Q, K)$ обозначает множество всех непрерывных функций $\sigma : Q_0 \to K$, определенных на открыто-замкнутых подмножествах $\mathrm{dom}(\sigma) := Q_0 \subset Q$.

Определение 4.8. Для произвольного $\sigma \in C_0(Q, K)$ и $x \in C_\infty(K)$ определим функцию $x \bullet \sigma : Q \to \overline{\mathbb{R}}$ формулой

$$(x \bullet \sigma)(q) := \begin{cases} x(\sigma(q)), & \text{если } q \in \mathrm{dom}(\sigma), \\ 0, & \text{если } q \in Q \setminus \mathrm{dom}(\sigma). \end{cases}$$

Замечание 4.9. Функция $x \bullet \sigma$, как очевидно, непрерывна, но не принадлежит, вообще говоря, пространству $C_\infty(Q)$, поскольку она может принимать бесконечные значения на некотором подмножестве $U \in Q$ с непустой внутренностью. Однако, если $x \bullet \sigma \in C_\infty(Q)$ для всех $x \in E$, то нетрудно видеть, что отображение $x \mapsto x \bullet \sigma$ $(x \in E)$ является оператором сдвига. Несмотря на это, произведение $W(x \bullet \sigma)$ корректно определяет функцию из $C_\infty(Q)$, если W обращается в ноль на внутренности U. Иначе говоря, рассматривая произведение fg двух функций $f, g \in C_\infty(Q, \overline{\mathbb{R}})$, считаем $(fg)(q) = 0$, если либо f, либо g равняется нулю тождественно в окрестности $q \in Q$, подробности см. [18, 5.8.5]. Именно в этом смысле понимается произведение $W_\xi((w_\xi x)^s \bullet \sigma)$ в следующей теореме.

Теорема 4.9 (о мультипликативном представлении ортогонально аддитивных полиномов, сохраняющих дизъюнктность). *Пусть E и F — фундаменты в пространствах $C_\infty(K)$ и $C_\infty(Q)$ соответственно, а $P : E \to F$ — порядково ограниченный ортогонально аддитивный s-однородный полином, сохраняющий дизъюнктность. Тогда существуют* *отображение $\sigma \in C_0(Q, K)$, семейство $(w_\xi)_{\xi\in\Xi}$ положительных функций в $C_\infty(K)$ и семейство $(W_\xi)_{\xi\in\Xi}$ попарно дизъюнктных функций из $C_\infty(Q)$ такие, что $1/w_\xi \in E$ для всех $\xi \in \Xi$, и справедливо представление:*

$$P(x) = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} W_\xi((w_\xi x) \bullet \sigma)^s \quad (x \in E). \tag{4.4}$$

$\lhd$ Этот факт следует непосредственно из теоремы 4.6. Нужно лишь заметить, что если $S : E \to F$ — оператор сдвига, то существует функция $\sigma \in C_0(Q, K)$ такая, что $Sx = x \bullet \sigma$ для всех $x \in E$, см. [18, предложение 5.8.7]. $\rhd$

Замечание 4.10. Внутренний вес, фигурирующий в представлениях (4.2) и (4.4), впервые ввел А. Е. Гутман, см. [2, 18]. Без привлечения внутренних весов указанные представления возможны лишь на части области определения, ср., например, [1, 9].

Литература

1. *Абрамович Ю. А., Векслер А. И., Колдунов А. В.* Об операторах, сохраняющих дизъюнктность // Докл. АН СССР.—1979.—Т. 248, № 5.—С. 1033–1036.
2. *Гутман А. Е.* Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // Линейные операторы, согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН.—1995.—С. 63–211.
3. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
4. *Кусраев А. Г., Табуев С. Н.* О билинейных операторах, сохраняющих дизъюнктность // Владикавк. мат. журн.—2004.—Т. 6, вып. 1.—С. 58–70.
5. *Кусраев А. Г., Табуев С. Н.* О мультипликативном представлении билинейных операторов // Сиб. мат. журн.—2008.—Т. 49, № 2.—С. 357–366.
6. *Кусраева З. А.* О представлении ортогонально аддитивных полиномов // Сиб. мат. журн.—2011.—Т. 52, № 2.—С. 315–325.
7. *Кусраева З. А.* О продолжении ортогонально аддитивных регулярных полиномов // Владикавк. мат. журн.—2011.—Т. 13, вып. 4.—С. 28–34.
8. *Кусраева З. А.* Однородные ортогонально аддитивные полиномы в векторных решетках // Мат. заметки.—2012.—Т. 91, № 5.—С. 704–710.
9. *Abramovich Yu. A.* Multiplicative representation of disjointness preserving operators // Indag. Math. N.S.—1983.—Vol. 45, № 3.—P. 265–279.
10. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.—N. Y.: Acad. Press, 1985.—xvi+367 p.
11. *Benyamini Y., Lassalle S., and Llavona J. G.* Homogeneous orthogonally additive polynomials on Banach lattices // Bull. London Math. Soc.—2006.—Vol. 38, № 3.—P. 459–469.
12. *Boulabiar K.* Products in almost f-algebras // Comment. Math. Univ. Carolin.—2000.—Vol. 41, № 4.—P. 747–759.
13. *Boulabiar K., Buskes G.* Vector lattice powers: f-algebras and functional calculus // Comm. Algebra.—2006.—Vol. 34, № 4.—P. 1435–1442.
14. *Bu Q., Buskes G.* Polynomials on Banach lattices and positive tensor products // J. Math. Anal. Appl.—2011.—Vol. 388.—P. 845–862.
15. *Buskes G., Kusraev A.* Extension and representation of orthoregular maps // Vladikavkaz Math. J.—2007.—Vol. 9, № 1.—P. 16–29.
16. *Buskes G., van Rooij A.* Almost f-algebras: commutativity and the Cauchy–Schwarz inequality // Positivity.—2000.—Vol. 4, № 3.—P. 227–231.
17. *Dineen S.* Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces.—Berlin: Springer, 1999.—xv+543 p.
18. *Gutman A. E.* Disjointness preserving operators // Vector Lattices and Integral Operators / Ed. S. S. Kutateladze.—Dordrecht etc.: Kluwer, 1996.—P. 361–454.
19. *Ibort A., Linares P., and Llavona J. G.* A representation theorem for orthogonally additive polynomials on Riesz spaces.—2012.—arXiv: 1203.2379vl [math.Fa].

20. *Kusraev A. G.* A Radon–Nikodým type theorem for orthosymmetric bilinear operators // Positivity.—2010.—Vol. 14, № 2.—P. 225–238.
21. *Kusraev A.G., Kutateladze S. S.* Boolean Valued Analysis: Selected Topics.—Vladikavkaz: SMI VSC RAS, 2014.—iv+400 p.—(Trends in Science: The South of Russia. Math. Monogr. Issue 6).
22. *Linares P.* Orthogonally Additive Polynomials and Applications. PhD Thesis.—Universidad Complutense de Madrid, 2009.
23. *Loane J.* Polynomials on Riesz Spaces. PhD Thesis.—Galway: National Univ. of Ireland, 2008.
24. *Quinn J.* Intermediate Riesz spaces // Pacific J. of Math.—1975.—Vol. 56, № 1.—P. 225–263.
25. *Schep A. R.* Factorization of positive multilinear maps // Illinois J. Math.—1984.—Vol. 28, № 4.—P. 579–591.
26. *Toumi M. A.* Orthogonally additive polynomials on Dedekind σ-complete vector lattices // Proc. Irish Royal Academy.—2011.—Vol. 110.—P. 83–94.

Статья поступила 13 января 2016 г.

Кусраева Залина Анатольевна
Южный математический институт ВНЦ РАН,
научный сотрудник отдела функционального анализа
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: zali13@smath.ru

CHARACTERIZATION AND MULTIPLICATIVE REPRESENTATION OF HOMOGENEOUS DISJOINTNESS PRESERVING POLYNOMIALS

Kusraeva Z. A.

Let E and F be vector lattices and $P : E \to F$ an order bounded orthogonally additive (i. e. $|x| \wedge |y| = 0$ implies $P(x+y) = P(x) + P(y)$ for all $x, y \in E$) s-homogeneous polynomial. P is said to be disjointness preserving if its corresponding symmetric s-linear operator from E^s to F is disjointness preserving in each variable. The main results of the paper read as follows:

Theorem 3.9. The following are equivalent: (1) P is disjointness preserving; (2) $\hat{d}^n P(x)(y) = 0$ and $Px \perp Py$ for all $x, y \in E$, $x \perp y$, and $1 \leqslant n < s$; (3) P is orthogonally additive and $x \perp y$ implies $Px \perp Py$ for all $x, y \in E$; (4) there exist a vector lattice G and lattice homomorphisms $S_1, S_2 : E \to G$ such that $G^{s\odot} \subset F$, $S_1(E) \perp S_2(E)$, and $Px = (S_1x)^{s\odot} - (S_2x)^{s\odot}$ for all $x \in E$; (5) there exists an order bounded disjointness preserving linear operator $T : E^{s\odot} \to F$ such that $Px = T(x^{s\odot})$ for all $x \in E$.

Theorem 4.7. Let E and F be Dedekind complete vector lattices. There exists a partition of unity $(\rho_\xi)_{\xi\in\Xi}$ in the Boolean algebra of band projections $\mathfrak{P}(F)$ and a family $(e_\xi)_{\xi\in\Xi}$ in E_+ such that $P(x) = o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} W \circ \rho_\xi S(x/e_\xi)^{s\odot}$ $(x \in E)$, where S is the shift of P and $W : \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ is the orthomorphism multiplication by $o\text{-}\sum_{\xi\in\Xi} \rho_\xi P(e_\xi)$.

Key words: power of a vector lattice, homogeneous polynomial, disjointness preserving polynomial, orthogonal additivity, lattice polymorphism, multiplicative representation.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 1, С. 63–70

УДК **517.977**

О ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ С ПЕРЕМЕННОЙ СТРУКТУРОЙ[1]

Р. О. Масталиев

В задаче оптимального управления с переменной линейной структурой, описываемой линейным разностным и интегро-дифференциальным уравнениями типа Вольтерра, получено необходимое и достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина. В случае выпуклости функционала критерия качества получено достаточное условие оптимальности.

Ключевые слова: задача оптимального управления, линейная система с переменной структурой, разностное уравнение типа Вольтерра, интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра.

1. Введение

Процессы с переменной структурой встречаются в задачах управления химико-технологическими процессами [1, 2], динамике шагающего аппарата [3–5] и др.

В работах [6–11] изучены задачи оптимального управления, описываемые соответственно нелинейными интегральными и разностными уравнениями, доказаны необходимые условия оптимальности, найдены условия управляемости и др.

Предлагаемая работа посвящена исследованию задач оптимального управления линейными системами с переменной структурой, описываемыми разностными и интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра. В одном случае доказано необходимое и достаточное условие оптимальности в форме принципа максимума Понтрягина [12–14], а в другом случае получено достаточное условие оптимальности.

2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу о нахождении минимума функционала

$$I(u,v) = c_1' x(t_1) + c_2'\, y(T) \tag{1}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x(t+1) = \sum\limits_{\tau=t_0}^{t} A(t,\tau)\, x(\tau) + B(t)\, u(t),\ t \in T_1 = \{t_0, t_0+1, \ldots, t_1-1\}, \\ x(t_0) = x_0, \\ \dot{y}(t) = \int\limits_{t_1}^{t} C(t,\tau)\, y(\tau)\, d\tau + D(t)\, v(t),\ t \in T_2 = [t_1, T], \\ y(t_1) = c_3' x(t_1). \end{cases} \tag{2}$$

© 2016 Масталиев Р. О.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда развития науки при президенте Азербайджанской республики, грант № EIF/GAM-2-2013-2(8)-25/06/1.

Здесь t_0, t_1, T, x_0 заданы, причем разность $t_1 - t_0$ — натуральное число, c_1, c_2, c_3 — заданные постоянные векторы, $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $y(t) \in \mathbb{R}^m$ — векторы состояния системы, $A(t,\tau) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B(t) \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $C(t,\tau) \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $D(t) \in \mathbb{R}^{m\times q}$ — соответственно дискретные и непрерывные известные матрицы-функции, $u(t)$ — r-мерный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества U, $v(t)$ — q-мерный кусочно-непрерывный вектор управляющих воздействий со значениями из заданного непустого и ограниченного множества V, т. е.

$$\begin{cases} u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r, \quad t \in T_1, \\ v(t) \in V \subset \mathbb{R}^q, \quad t \in T_2. \end{cases} \tag{3}$$

Штрих означает знак транспонирования.

Пару $(u(t), v(t))$ с вышеприведенными свойствами назовем *допустимым управлением*, а соответствующий процесс $(u(t), v(t), x(t), y(t))$ — *допустимым процессом.*

3. Формула приращения критерия качества и необходимое и достаточное условие оптимальности

Пусть $(u(t), v(t), x(t), y(t))$ — оптимальный процесс. Обозначим произвольный допустимый процесс $(\bar{u}(t), \bar{v}(t), \bar{x}(t), \bar{y}(t))$, где $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$, $\bar{v}(t) = v(t) + \Delta v(t)$, $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$, $\bar{y}(t) = y(t) + \Delta y(t)$, и запишем формулу для приращения функционала

$$\Delta I(u,v) = c_1' \Delta x(t_1) + c_2' \Delta y(T). \tag{4}$$

С другой стороны ясно, что приращение $(\Delta x(t), \Delta y(t))$ траектории $(x(t), y(t))$ будет удовлетворять уравнениям (5) и (6)

$$\begin{cases} \Delta x(t+1) = \sum\limits_{\tau=t_0}^{t} A(t,\tau)\, \Delta x(\tau) + B(t)\, \Delta u(t), \quad t \in T_1, \\ \Delta x(t_0) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{y}(t) = \int\limits_{t_1}^{t} C(t,\tau)\, \Delta y(\tau)\, d\tau + D(t)\, \Delta v(t), \quad t \in T_2, \\ \Delta y(t_1) = c_3'\, \Delta x(t_1). \end{cases} \tag{6}$$

Поскольку (5) и (6) являются соответственно линейным неоднородным разностным и интегро-дифференциальным уравнениями типа Вольтерра относительно $\Delta x(t)$, $\Delta y(t)$, то их решения можно представить [15–18] в виде

$$\Delta x(t) = \sum_{s=t_0}^{t-1} R(t-1,s)\, B(s)\, \Delta u(s), \tag{7}$$

$$\Delta y(t) = \int_{t_1}^{t} Q(t,\xi)\, D(\xi)\, \Delta v(\xi)\, d\xi + c_3'\, Q(t,t_1)\, \Delta x(t_1), \tag{8}$$

где $R(t,\tau)$ и $Q(t,\xi)$ — матричные функции соответствующих размерностей, являющиеся решениями задач

$$\begin{cases} R(t,s-1) = \sum\limits_{\tau=s}^{t} R(t,\tau)\, A(\tau,s), \\ R(t,t) = E_1, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \dot{Q}_\xi(t,\xi) = \int\limits_\xi^t Q(t,\alpha)\, C(\alpha,\xi)\, d\alpha, \\ Q(t,t) = E_2, \end{cases} \tag{10}$$

где E_1 и E_2 — единичные матрицы соответствующих размерностей.

Далее, представление (8) с учетом представления (7) записывается в виде

$$\Delta y(t) = \int\limits_{t_1}^{t} Q(t,\xi)\, D(\xi)\, \Delta v(\xi)\, d\xi + \sum_{s=t_0}^{t_1-1} F(t,s)\, B(s)\, \Delta u(s), \tag{11}$$

где $F(t,s) = R(t_1-1,s)\, c_3' Q(t,t_1)$.

Из (7) и (11) ясно, что

$$\Delta x(t_1) = \sum_{s=t_0}^{t_1-1} R(t_1-1,s)\, B(s)\, \Delta u(s), \tag{12}$$

$$\Delta y(T) = \int\limits_{t_1}^{T} Q(T,\xi)\, D(\xi)\, \Delta v(\xi)\, d\xi + \sum_{s=t_0}^{t_1-1} F(T,s)\, B(s)\, \Delta u(s). \tag{13}$$

Поэтому из (4) получаем, что

$$\begin{gathered} \Delta I(u,v) = c_1'\, \Delta x(t_1) + c_2'\, \Delta y(T) = \sum_{s=t_0}^{t_1-1} c_1' R(t_1-1,s)\, B(s)\, \Delta u(s) \\ + \int\limits_{t_1}^{T} c_2'\, Q(T,\xi)\, D(\xi)\, \Delta v(\xi)\, d\xi + \sum_{s=t_0}^{t_1-1} c_2'\, F(T,s)\, B(s)\, \Delta u(s) \\ = \sum_{s=t_0}^{T} \left[c_1' R(t_1-1,s) + c_2' F(T,s) \right] B(s)\, \Delta u(s) + \int\limits_{t_1}^{T} c_2'\, Q(T,\xi)\, D(\xi)\, \Delta v(\xi)\, d\xi. \end{gathered} \tag{14}$$

Полагая

$$\psi(s) = -\left[c_1' R(t_1-1,s) + c_2' F(T,s) \right], \tag{15}$$

$$p(\xi) = -c_2'\, Q(T,\xi), \tag{16}$$

введем обозначения:

$$H(s,u(s),\psi(s)) = \psi'(s)\, B(s)\, u(s),$$

$$M(\xi,v(\xi),p(\xi)) = p'(\xi)\, D(\xi)\, v(\xi),$$

где функции $H(\cdot)$ и $M(\cdot)$ — аналоги функции Гамильтона — Понтрягина.

Тогда формула приращения (14) записывается в виде

$$\begin{gathered} \Delta I(u,v) = -\sum_{s=t_0}^{t_1-1} \left[H(s,\bar{u}(s),\psi(s)) - H(s,u(s),\psi(s)) \right] \\ - \int\limits_{t_1}^{T} \left[M(\xi,\bar{v}(\xi),p(\xi)) - M(\xi,v(\xi),p(\xi)) \right] d\xi. \end{gathered} \tag{17}$$

Используя выражения $\psi(t)$ и $p(t)$, найдем уравнение, которому удовлетворяют эти функции. По определению функции $\psi(t)$

$$\psi(t-1) = -\left[c_1' R(t_1-1, t-1) + c_2' F(T, t-1)\right].$$

Отсюда с учетом уравнения (9) будем иметь

$$\psi(t-1) = -\left[c_1' R(t_1-1, t-1) + c_2'\, Q(T, t_1)\, c_3'\, R(t_1-1, t-1)\right]$$
$$= -\left[R(t_1-1, t-1)\left[c_1 + c_2'\, c_3'\, Q(T, t_1)\right]\right]$$
$$= -\left[\sum_{\tau=t}^{t_1-1} A(\tau, t)\left[c_1' R(t_1-1, \tau) + c_2' R(t_1-1, \tau)\, c_3'\, Q(T, t_1)\right]\right] = \sum_{\tau=t}^{t_1-1} A'(\tau, t)\, \psi(\tau).$$

Найдем начальное условие для этой функции. По определению

$$\psi(t_1-1) = -\left[c_1' R(t_1-1, t_1-1) + c_2' F(T, t_1-1)\right]$$
$$= \left[c_1 + c_2' Q(T, t_1)\, c_3'\, R(t_1-1, t_1-1)\right] = -\left[c_1 - c_3'\, p(t_1)\right].$$

Согласно определению функции $p(t)$ имеем

$$\dot p(t) = -c_2' \dot Q_t(T, t).$$

Отсюда с учетом уравнения (10) будем иметь

$$\dot p(t) = -\int_t^T c_2'\, Q(T, \xi)\, C(\xi, t)\, d\xi = \int_t^T C'(\xi, t)\, p(\xi)\, d\xi,$$

$$p(T) = -c_2'\, Q(T, T) = -c_2.$$

Следовательно, вектор-функция $(\psi(t), p(t))$ является решением задачи

$$\psi(t-1) = \sum_{\tau=t}^{t_1-1} A'(\tau, t)\, \psi(\tau), \quad \psi(t_1-1) = -\left[c_1 - c_3'\, p(t_1)\right],$$

$$\dot p(t) = \int_t^T C'(\xi, t)\, p(\xi)\, d\xi, \quad p(T) = -c_2.$$

Используя формулу приращения (17), докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Для оптимальности допустимого управления* $(u(t), v(t))$ *в задаче* (1)–(3) *необходимо и достаточно, чтобы для всех* $\lambda(t) \in U$, $t \in T_1$, $\mu(t) \in V$, $t \in T_2$ *выполнялись соответственно соотношения*

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} \left[H(t, \lambda(t), \psi(t)) - H(t, u(t), \psi(t))\right] \leqslant 0, \tag{18}$$

$$\int_{t_1}^T \left[M(t, \mu(t), p(t)) - M(t, v(t), p(t))\right] dt \leqslant 0. \tag{19}$$

$\lhd$ *Необходимость.* Допустим, что уравнение $(u(t), v(t))$ оптимально. Докажем, что выполняются соотношения (18) и (19). В силу оптимальности управления $(u(t), v(t))$ из формулы приращения (17) следует, что для любых $(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$ выполняется следующее соотношение:

$$-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}[H(t,\bar{u}(t),\psi(t)) - H(t,u(t),\psi(t))] - \int_{t_1}^{T}[M(t,\bar{v}(t),p(t)) - M(t,v(t),p(t))]\,dt \geqslant 0. \quad (20)$$

Используя произвольность $(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$, определим его следующим образом:

$$\begin{cases} \bar{u}(t) = \lambda(t), \\ \bar{v}(t) = v(t). \end{cases} \quad (21)$$

С учетом (21) из формулы (20) следует, что

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1}[H(t,\lambda(t),\psi(t)) - H(t,u(t),\psi(t))] \leqslant 0.$$

Если же положить

$$\begin{cases} \bar{u}(t) = u(t), \\ \bar{v}(t) = \mu(t), \end{cases}$$

из формулы (20) следует, что

$$\int_{t_1}^{T}[M(t,\mu(t),p(t)) - M(t,v(t),p(t))]\,dt \leqslant 0.$$

Необходимость доказана.

Достаточность. Предположим, что выполняются условия (18) и (19), и докажем, что в этом случае управление $(u(t), v(t))$ является оптимальным для рассматриваемой задачи.

Ясно, что

$$\Delta I(u,v) = I(\bar{u},\bar{v}) - I(u,v) = -\Bigg[\sum_{s=t_0}^{t_1-1}[H(s,\bar{u}(s),\psi(s)) - H(s,u(s),\psi(s))]$$
$$+\int_{t_1}^{T}[M(\xi,\bar{v}(\xi),p(\xi)) - M(\xi,v(\xi),p(\xi))]d\xi\Bigg] \geqslant 0,$$

т. е. $I(\bar{u},\bar{v}) \geqslant I(u,v)$ для всех $(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$. Следовательно, что управление $(u(t), v(t))$ является оптимальным. Теорема полностью доказана. $\rhd$

4. Достаточное условие оптимальности

В этом пункте рассматривается случай нелинейного функционала. Пусть требуется найти минимум функционала

$$I(u,v) = \varphi(x(t_1)) + \phi(y(T)) \quad (22)$$

при ограничениях (2), (3). Здесь $\varphi(x)$, $\phi(y)$ — заданные непрерывно дифференцируемые выпуклые скалярные функции.

Тогда, используя формулу Тейлора, приращение функционала (22), соответствующее управлениям $(u(t), v(t))$ и $(\bar{u}(t), \bar{v}(t))$, записывается в виде

$$\Delta I(u,v) = \varphi_x(x(t_1))\Delta x(t_1) + \phi_y(y(T))\Delta y(T) + o_1(\|\Delta x(t_1)\|) + o_2(\|\Delta y(T)\|).$$

Отсюда, используя представления (12) и (13), будем иметь

$$\Delta I(u,v) = \sum_{s=t_0}^{t_1-1} \left[\varphi_x(x(t_1))R(t_1-1,s) + \phi_y(y(T))F(T,s)\right] B(s)\,\Delta u(s) + \int_{t_1}^{T} \phi_y(y(T))\,Q(T,s)\,D(s)\,\Delta v(s)\,ds.$$

Полагая

$$\psi(s) = -\left[\varphi_x(x(t_1))R(t_1-1,s) + \phi_y(y(T))F(T,s)\right],$$

$$p(s) = -\phi_y(y(T))\,Q(T,s),$$

$$H(t,u(t),\psi(t)) = \psi'(t)\,B(t)\,u(t),$$

$$M(t,v(t),p(t)) = p'(t)\,D(t)\,v(t),$$

формулу приращения функционала (22) запишем в виде

$$\begin{aligned} \Delta I(u,v) = &-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\left[H(t,\bar{u}(t),\psi(t)) - H(t,u(t),\psi(t))\right] \\ &-\int_{t_1}^{T}\left[M(t,\bar{v}(t),p(t)) - M(t,v(t),p(t))\right]dt + o_1\left(\|\Delta x(t_1)\| + o_2\left(\|\Delta y(T)\|\right)\right). \end{aligned} \tag{23}$$

Аналогично можно показать, что вектор-функция $(\psi(t), p(t))$ является решением задачи

$$\psi(t-1) = \sum_{\tau=t}^{t_1-1} A'(\tau,t)\,\psi(\tau),$$

$$\psi(t_1-1) = -\varphi_x(x(t_1)) + c_3'\,p(t_1),$$

$$\dot{p}(t) = \int_t^T C'(\tau,t)\,p(\tau)\,d\tau, \quad p(T) = -\phi_y(y(T)).$$

По предположению $\varphi(x)$, $\phi(y)$ — выпуклые дифференцируемые функции. Это означает, что

$$\begin{cases} o_1(\|\Delta x(t_1)\| \geqslant 0, \\ o_1(\|\Delta y(T)\|) \geqslant 0. \end{cases}$$

Поэтому из (23) следует неравенство

$$\Delta I(u,v) = I(\bar{u},\bar{v}) - I(u,v) \geqslant -\sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H(t,\bar{u}(t),\psi(t)) - H(t,u(t),\psi(t))] - \int_{t_1}^{T} [M(t,\bar{v}(t),p(t)) - M(t,v(t),p(t))]\,dt.$$

Из последнего неравенства следует

Теорема 2. *Если функции $\varphi(x)$, $\phi(y)$ выпуклы, то для оптимальности допустимого управления $(u(t), v(t))$ в задаче (22), (2), (3) достаточно, чтобы для всех $\lambda(t) \in U$, $t \in T_1$, $\mu(t) \in V$, $t \in T_2$ выполнялись соответственно соотношения*

$$\sum_{t=t_0}^{t_1-1} [H(t,\lambda(t),\psi(t)) - H(t,u(t),\psi(t))] \leqslant 0, \tag{24}$$

$$\int_{t_1}^{T} [M(t,\mu(t),p(t)) - M(t,v(t),p(t))]\,dt \leqslant 0. \tag{25}$$

Замечание. Полученные условия оптимальности являются аналогами результатов, полученных для задач управления, описываемых линейными дифференциальными и разностными уравнениями типа Вольтерра. Они могут найти приложения в различных областях современной теории оптимального управления, для задач управлений уравнениями Вольтерра.

Литература

1. *Островский Г. М., Волин Ю. М.* Моделирование сложных химико-технологических схем.—М.: Химия, 1975.—311 с.
2. *Агафонова И. А., Гулин Л. Л., Расина И. В.* Математическое моделирование и оптимизация процесса метилирования динатриевой соли сульфаминоантиприна.—М., 1978.—19 с. Деп. в ВИНИТИ АН СССР, № 3457.
3. *Белецкий В. В.* Динамика двуногой ходьбы // Изв. АН СССР. Механика твердого тела.—№ 3.—С. 3–14.
4. *Гурман В. И., Орлов А. Г.* Достаточные условия оптимальности сложных процессов // Автоматика и телемеханика.—1978.—Вып 4.—С. 127–134.
5. *Гурман В. И., Орлов А. Г.* Сложные процессы двуногой ходьбы // Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша.—1979.—№ 95.—39 с.
6. *Арсенашвили А. И., Тадумадзе Т. А.* Необходимые условия оптимальности для управляемых систем с переменной структурой и непрерывными условиями преемственности // Тр. ИПМ им. И. Н. Векуа Тбилисского гос. ун-та.—Тбилиси, 1998.—Т. 27.—С. 35–48.
7. *Исмайлов Р. Р., Мансимов К. Б.* Об условиях оптимальности в одной ступенчатой задаче управления // Журн. выч. мататематики и мат. физики.—2006.—Том. 46, № 10.—С. 1758–1770.
8. *Абдуллаев А. А., Мансимов К. Б.* Необходимые условия оптимальности в процессах, описываемых системой интегральных уравнений типа Вольтерра.—Баку: Изд-во Элм, 2013.—224 с.
9. *Гурман В. И.* К теории оптимальных дискретных процессов // Автоматика и телемеханика.—1973.—Вып. 6.—С. 53–58.
10. *Мансимов К. Б.* Дискретные системы.—Баку: Изд.-во БГУ, 2002.—114 с.
11. *Масталиев Р. О.* Об одной ступенчатой задаче оптимального управления дискретными системами // Вестн. Бакинского ун-та. Сер. физ.-мат. наук.—2010.—№ 1.—С. 33–39.
12. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов.—М.: Наука, 1969.—384 с.

13. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Оптимизация линейных систем.—Минск: Изд-во БГУ, 1973.—185 с.
14. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Принцип максимума в теории оптимального управления.—Минск: Наука и техника, 1974.—274 с.
15. *Колмановский В. Б.* Об асимптотических свойствах решений некоторых нелинейных систем Вольтерра // Автоматика и телемеханика.—2000.—Вып. 4.—С. 42–50.
16. *Колмановский В. Б.* Об асимптотической эквивалентности решений некоторых разностных уравнений // Автоматика и телемеханика.—2001.—Вып. 4.—С. 47–55.
17. *Васильева А. Б., Тихонов А. Н.* Интегральные уравнения.—М.: Изд-во МГУ, 1989.—550 с.
18. *Цалюк З. Б.* Интегральные уравнения Вольтерра // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ.—1977.—Т. 15.—С. 131–198.

Статья поступила 24 февраля 2015 г.

Масталиев Рашад Огтайович
Институт систем управления НАН Азербайджана,
научный сотрудник лаб. управления
сложными динамическими системами
АЗЕРБАЙДЖАН, AZ 1141, Баку, Б. Вахабзаде, 9
E-mail: mastaliyevrashad@gmail.com

ON AN OPTIMAL CONTROL PROBLEM FOR A LINEAR SYSTEM WITH VARIABLE STRUCTURE

Mastaliyev R. O.

The necessary and sufficient condition for optimality in the form of the Pontryagin maximum principle in optimal control problem with variable linear structure, described by linear difference and integral-differential equations of Volterra type, is obtained. Under some additional assumptions sufficient optimality conditions are also derived.

Key words: optimal control problem, linear system with variable structure, differential Volterra type equation, integro-differential Volterra type equation.

Владикавказский математический журнал
2016, Том 18, Выпуск 1, С. 71–75

УДК **519.17**

REMARKS ON FIRST ZAGREB INDICES[1]

I. Ž. Milovanović, E. I. Milovanović

Let G be an undirected connected graph with $n \geqslant 2$ vertices and m edges. In this paper we are concerned with inequalities that reveal connections between graph invariants called first Zagreb index and reformulated first Zagreb index. Some of the obtained results represent generalization of the known inequalities.

Key words: vertex degree, edge degree, first Zagreb index.

1. Introduction

Let $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, be undirected connected graph, where $V = \{1, 2, \ldots, n\}$ is set of vertices and $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ set of edges. Further, denote with $d_1 \geqslant d_2 \geqslant \ldots \geqslant d_n$, $d_i = d(i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, a sequence of vertex degrees of G. If $e = \{i, j\} \in E$, then $d(e) = d_i + d_j - 2$. The first Zagreb index M_1 and reformulated Zagreb index EM_1 are, respectively, defined by [8, 9]

$$M_1 = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \quad \text{and} \quad EM_1 = \sum_{i=1}^{m} d(e_i)^2.$$

If G is a graph and $L(G)$ is a corresponding line graph, then the following equality is valid $EM_1(G) = M_1(L(G))$. Invariants M_1 and EM_1 play an important role in algebraic graph theory, as well as in other sciences especially in molecular chemistry (see [2, 5, 6, 8, 9, 12]). Since these invariants can be calculated for a few classes of graphs in a closed form, it is of interest to find out inequalities that determine upper and lower bounds of these invariants in terms of some graph parameters or their mutual relationship. This is the topic of this paper.

We first give two inequalities that establish a connection between M_1 and EM_1 proved in [5].

Theorem 1.1. *Let $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, be undirected connected graph with n vertices and m edges. Then*

$$EM_1 \geqslant \frac{(M_1 - 2m)^2}{m}, \tag{1}$$

with equality if and only if G is a regular graph.

Theorem 1.2. *Let $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, be undirected connected graph with n vertices and m edges. Then*

$$EM_1 \leqslant \frac{(M_1 - 2m)^2 (d_1 + d_n - 2)^2}{4m(d_1 - 1)(d_n - 1)}, \tag{2}$$

© 2016 Milovanović I. Ž., Milovanović E. I.

[1] This work was supported by the Serbian Ministry of Education and Science, project № TR32012.

where $d_n \geqslant 2$, *with equality if and only if* G *is a regular graph or there are exactly* $\frac{m(d_n-1)}{d_1+d_n-2}$ *edges of degree* $2(d_1-1)$ *and* $\frac{m(d_1-1)}{d_1+d_n-2}$ *edges of degree* $2(d_n-1)$ *such that* (d_1+d_n-2) *divides* $m(d_n-1)$.

2. Main Result

The following theorem establishes a connection between invariants EM_1 and M_1 in terms of parameters m, d_1 and d_n.

Theorem 2.1. *Let* $G=(V,E)$, $V=\{1,2,\ldots,n\}$, $E=\{e_1,e_2,\ldots,e_m\}$, *be an undirected connected graph. Then*

$$\frac{(M_1-2m)^2}{m}+2(d_1-d_n)^2 \leqslant EM_1 \leqslant \frac{(M_1-2m)^2}{m}+4m(d_1-d_n)^2\alpha(m), \tag{3}$$

where

$$\alpha(m)=\frac{1}{m}\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\left(1-\frac{1}{m}\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\right)=\frac{1}{4}\left(1-\frac{(-1)^{m+1}+1}{2m^2}\right).$$

Equality holds if and only if $L(G)$ *is a regular graph.*

$\lhd$ The following inequality was proved in [1] for positive real numbers $p_1,p_2,\ldots,p_n$, $a_1,a_2,\ldots,a_n$ and $b_1,b_2,\ldots,b_n$ with the properties $0<r_1\leqslant a_i\leqslant R_1<+\infty$ and $0<r_2\leqslant b_i\leqslant R_2<+\infty$

$$\left|\sum_{i=1}^n p_i\sum_{i=1}^n p_ia_ib_i-\sum_{i=1}^n p_ia_i\sum_{i=1}^n p_ib_i\right|\leqslant (R_1-r_1)(R_2-r_2)\sum_{i\in S}p_i\left(\sum_{i=1}^n p_i-\sum_{i\in S}p_i\right), \tag{4}$$

where S is a subset of $I_n=\{1,2,\ldots,n\}$ for which the expression

$$\left|\sum_{i\in S}p_i-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n p_i\right| \tag{5}$$

reaches a minimal value.

For $n=m$ and $S=\{1,2,\ldots,k\}\subset I_m=\{1,2,\ldots m\}$ from (5) we obtain that $k=\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$. Now, for $n=m$, $p_i=1$, $S=\{1,2,\ldots,\lfloor\frac{m}{2}\rfloor\}$, $a_i=b_i=d(e_i)$, $i=1,2,\ldots,m$, $R_1=R_2=2(d_1-1)$, $r_1=r_2=2(d_n-1)$ the inequality (4) becomes

$$m\sum_{i=1}^m d(e_i)^2-\left(\sum_{i=1}^m d(e_i)\right)^2\leqslant 4(d_1-d_n)^2\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\left(m-\left\lfloor\frac{m}{2}\right\rfloor\right). \tag{6}$$

Since $\sum_{i=1}^m d(e_i)=\sum_{i=1}^n d_i^2-2m=M_1-2m$, from (6) immediately follows right side of inequality (3).

Since the equality in (6) holds if and only if $d(e_1)=d(e_2)=\ldots=d(e_m)$, therefore equality on the right side of (3) holds if and only if $L(G)$ is a regular graph.

For the real numbers $a_1,a_2,\ldots,a_m$ with the property $r\leqslant a_i\leqslant R$, $i=1,2,\ldots,m$, the following inequality was proved in [10] (see also [11])

$$\sum_{i=1}^m\left(a_i-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^m a_i\right)^2\geqslant\frac{(R-r)^2}{2}.$$

For $a_i = d(e_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $r = 2(d_n - 1)$ and $R = 2(d_1 - 1)$ the above inequality transforms into

$$\sum_{i=1}^{m} \left(d(e_i) - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} d(e_i) \right)^2 \geqslant 2(d_1 - d_n)^2, \tag{7}$$

i. e.

$$\sum_{i=1}^{m} d(e_i)^2 - \frac{1}{m} \left(\sum_{i=1}^{m} d(e_i) \right)^2 \geqslant 2(d_1 - d_n)^2,$$

where from the left side of inequality (3) is obtained.

Equality in (7) holds if and only if $d(e_1) = d(e_2) = \ldots = d(e_m)$, so the equality in the left part of (3) holds if and only if $L(G)$ is a regular graph. $\triangleright$

Remark 2.1. Since $(d_1 - d_n)^2 \geqslant 0$, left inequality in (3) is stronger than inequality (1).

Corollary 2.1. *Let $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ be an undirected connected graph. Then*

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{m}}(M_1 - 2m)(d_1 - d_n) \leqslant EM_1 \leqslant \frac{(M_1 - 2m)^2}{m} + m(d_1 - d_n)^2. \tag{8}$$

Equality on the right side holds if and only if $L(G)$ is a regular graph. Equality on the left side holds if and only if $G = K_2$.

$\triangleleft$ Inequality on the left side in (8) is obtained from the left side of inequality (3) and inequality between arithmetic and geometric mean for real numbers. The right side of inequality (8) is obtained from the right part of inequality (3) and inequality $\alpha(m) \leqslant \frac{1}{4}$. $\triangleright$

Corollary 2.2. *Let $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$ be an undirected connected graph. Then*

$$4m(d_n - 1)^2 + 2(d_1 - d_n)^2 \leqslant EM_1 \leqslant 4m(d_1 - 1)^2 + 4m(d_1 - d_n)^2\alpha(m). \tag{9}$$

Equalities hold if and only if G is a regular graph.

$\triangleleft$ Inequalities (9) are obtained according to the inequality (3) and inequality

$$2m(d_n - 1) \leqslant M_1 - 2m \leqslant 2m(d_1 - 1). \quad \triangleright$$

Corollary 2.3. *Let $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, be an undirected connected graph. Then*

$$4m\left(\frac{2m}{n} - 1\right)^2 + 2(d_1 - d_n)^2 \leqslant EM_1 \leqslant \frac{m}{(n-1)^2}\big(2m + (n-1)(n-4)\big)^2 + 4m(d_1 - d_n)\alpha(m).$$

Equality on the left side holds if and only if G is a regular graph. Equality on the right side holds if and only if G is a complete graph, i. e. $G = K_n$.

$\triangleleft$ The result immediately follows from inequality (3) and inequalities $M_1 \geqslant \frac{4m^2}{n}$, proved in [7], and $M_1 \leqslant m\big(\frac{2m}{n-1} + (n-2)\big)$, proved in [4]. $\triangleright$

Theorem 2.2. *Let $G = (V, E)$, $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$, be an undirected connected graph. Then*

$$EM_1 \leqslant (M_1 - 2m)(d_1 + d_n - 2) - 4m(d_1 - 1)(d_n - 1). \tag{10}$$

Equality holds if and only if G is a regular graph or a graph with the property that for some k, $1 \leqslant k \leqslant n$, sequence of vertex degrees is of the form $d_1 = d_2 = \ldots = d_k > d_{k+1} = d_{k+2} = \ldots = d_n$.

$\lhd$ For the real numbers $a_1, a_2, \ldots, a_m$ with the property $r \leqslant a_i \leqslant R$, $i = 1, 2, \ldots, m$, the following inequality was proved in [3] (see also [11])

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(a_i - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i\right)^2 \leqslant \left(R - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} a_i - r\right).$$

For $a_i = d(e_i)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $r = 2(d_n - 1)$ and $R = 2(d_1 - 1)$ the above inequality becomes

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(d(e_i) - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} d(e_i)\right)^2 \leqslant \left(2(d_1 - 1) - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} d(e_i)\right)\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} d(e_i) - 2(d_n - 1)\right),$$

i. e.

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} d(e_i)^2 \leqslant 2(d_1 + d_n - 2)\sum_{i=1}^{m} d(e_i) - 4(d_1 - 1)(d_n - 1),$$

where from the assertion of the theorem is obtained. $\rhd$

Remark 2.2. According to (10) the following inequality is valid

$$EM_1 + 4m(d_1 - 1)(d_n - 1) \leqslant 2(M_1 - 2m)(d_1 + d_n - 2). \tag{11}$$

Based on the inequality between arithmetic and geometric means for real numbers and applying it on the left part of inequality (11), the inequality

$$2\sqrt{4m(d_1 - 1)(d_n - 1)EM_1} \leqslant 2(M_1 - 2m)(d_1 + d_n - 2), \quad d_n > 1,$$

is obtained, i. e.

$$EM_1 \leqslant \frac{(M_1 - 2m)^2(d_1 + d_n - 2)^2}{4m(d_1 - 1)(d_n - 1)}.$$

This means that inequality (10) is stronger than inequality (2).

References

1. *Andrica D., Badea C.* Grüs inequality for positive linear functionals // Period. Math. Hungar.—1988.—Vol. 19, № 2.—P. 155–167.
2. *Balaban A. T., Motoc I., Bonchev D., Mekenyan D.* Topological indices for structure activity correlations // Topics Curr. Chem.—1983.—№ 111.—P. 21–55.
3. *Bhatia R., Davis C.* A better bound on the variance // Amer. Math. Monthly.—2000.—№ 107.—P. 353–357.
4. *Caen D.* An upper bound on the sum of squares of degrees in a graph // Discrete Math.—1998.—Vol. 185, № 1–3.—P. 245–248.
5. *De N.* Some bounds of reformulated Zagreb indices // Appl. Math. Sci.—2012.—Vol. 6, № 101.—P. 505–512.
6. *De N.* Reformulated Zagreb indices of dendrimers // Math. Aeterna.—2013.—Vol. 3, № 2.—P. 133–138.
7. *Edwards C. S.* The largest vertex degree sum for a triangle in a graph // Bul. London Math. Soc.—1977.—№ 9.—P. 203–208.
8. *Gutman I., Trinajstić N.* Graph theory and molecular orbitas. Total π-electron energy of alternant hydrocarbons // Chem. Phys. Letters.—1972.—Vol. 17.—P. 535–538.
9. *Milićević A., Nikolić S., Trinajstić N.* On reformulated Zagreb indices // Mol. Divers.—2004.—№ 8.—P. 393–399.

10. *Nagy J. V. S.* Über algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln // Jahresbericht der deutschen mathematiker-Vereingung.—1918.—Vol. 27.—P. 37–43.
11. Sharma R., Gupta M., Kapoor G. Some better bounds on the variance with applications // J. Math. Ineq.—2010.—Vol. 4, № 3.—P. 355–363.
12. Todeschini R., Consonni V. Handbook of Molecular Descriptors.—Weinheim: Wiley-VCH, 2000.

Received March 18, 2015

Igor Ž. Milovanović
Faculty of Electronic Engineering,
Department of Mathematics, University of Niš, *Prof.*
Aleksandra Medvedeva 14, Niš 18000, Serbia
E-mail: `igor.milovanovic@elfak.ni.ac.rs`

Emina I. Milovanović
Faculty of Electronic Engineering,
Department of Mathematics, University of Niš, *Prof.*
Aleksandra Medvedeva 14, Niš 18000, Serbia
E-mail: `emina.milovanovic@elfak.ni.ac.rs`

ЗАМЕТКА О ПЕРВЫХ ЗАГРЕБСКИХ ИНДЕКСАХ

Милованиович И. Ж., Милованович Е. И.

Доказаны неравенства, связывающие первый и модифицированный первый загребские индексы графа. Для этих инвариантов графа доказаны неравенства, которые определяют их нижние и верхние границы. Эти неравенства улучшают некоторые известные результаты.

Ключевые слова: степень вершин, степень грани, первый загребский индекс.

Вниманию авторов

Владикавказский математический журнал (ВМЖ) — научное периодическое издание, выходящее четыре раза в год. Журнал издается Южным математическим институтом Владикавказского научного центра РАН.

К публикации в ВМЖ принимаются статьи, содержащие новые результаты в области математики и статьи обзорного характера. Статьи, ранее опубликованные, а также принятые к опубликованию в других журналах, редколлегией не рассматриваются. Поступившие в редакцию ВМЖ статьи проходят обязательное научное рецензирование.

Текст статьи должен быть написан на русском или английском языке и тщательно выверен. В начале статьи указывается индекс УДК, Ф.И.О. автора(ов), аннотация (не содержащая формул) и ключевые слова. Название статьи, Ф.И.О. автора(ов), аннотацию и ключевые слова необходимо дать на английском и русском языках.

Список литературы печатается в конце текста статьи. В нем должны быть указаны: для статьей — автор, полное название статьи, журнал, год издания, том, номер (выпуск), страницы начала и конца статьи; для книг — автор, полное название, город, издательство, год издания, общее количество страниц. Ссылки на литературу в тексте даются в квадратных скобках.

Статья подписывается автором (коллективом авторов) с указанием фамилии, имени и отчества, полного почтового адреса, места работы, должности, полного служебного адреса, адреса электронной почты и номера телефона.

Объем материала должен быть не более 1,4 усл. печ. листов (≈ 12 стр. формата A4). Статьи большего объема могут быть приняты к публикации по решению редколлегии в исключительных случаях.

Статью необходимо подготовить с использованием макропакета LaTeX и оформить согласно стандартным требованиям, предъявляемым к авторским оригиналам. При подготовке файла особое внимание следует обратить на нежелательность использования новых (вводимых автором при наборе) командных последовательностей, особенно с параметрами. Следует использовать в основном стандартные средства макропакета. Также крайне нежелательно использовать без необходимости знаки пробела. В редакцию статьи направлять по электронной почте в виде ps- или pdf-файла и tex-файла, либо по почте с приложением электронной версии.

Статьи, содержащие рисунки, рассматриваются только после согласования с редакцией технических вопросов подготовки рисунков.

Принятые к публикации в ВМЖ статьи проходят редакционную подготовку, после чего текст статьи направляется автору на корректуру. Плата за публикацию не взымается.

Авторские права на журнал в целом принадлежат Южному математическому институту ВНЦ РАН и Редколлегии журнала, которые обладают исключительным правом получать и распределять любые платежи, связанные с переуступкой авторских прав на журнал.

Адрес редакции: 362027, Владикавказ, Маркуса, 22
Телефон: (8672) 53-84-62;
E-mail: `rio@smath.ru`
Зав. редакцией: Кибизова В. В.

ВЛАДИКАВКАЗСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 18

Выпуск 1

Зав. редакцией В. В. Кибизова

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации ПИ № 77-50223 от 15 июня 2012 г.

Подписано в печать 15.03.2016. Дата выхода в свет 25.03.2016.
Формат бумаги $60\times84^{1}/_{8}$. Гарн. шрифта Computer modern.
Усл. п. л. 8,72. Тираж 100 экз. Цена свободная.

Учредитель и издатель:
Южный математический институт
Владикавказского научного центра РАН
362027, г. Владикавказ, ул. Маркуса, 22.

Отпечатано ИП Цопановой А. Ю.
362000, г. Владикавказ, пер. Павловский, 3.