

Schupp, H.; Dabrock, H.:

## Höhere Kurven Situative, mathematische, historische und didaktische Aspekte

Mannheim: BI Wissenschaftsverlag, 1995. – 428 S.  
(Lehrbücher und Monographien zur Didaktik der Mathematik; 28)  
ISBN 3-411-17221-5

Hans-Joachim Vollrath, Würzburg

Das Buch von Hans Schupp über *Kegelschnitte* (1988) hat mit dem Werk über *Höhere Kurven*, das zusammen mit Heinz Dabrock verfaßt wurde, eine Fortsetzung gefunden. Der Aufbau ist ähnlich: Es werden nacheinander unter verschiedenen Gesichtspunkten ausgewählte *ebene* Kurven gründlich *mathematisch* behandelt und *historisch* und *didaktisch* kommentiert; am Schluß wird dann ausführlicher auf die Didaktik der Thematik eingegangen. Hier finden sich historische Betrachtungen, didaktisch analysierende Überlegungen und Unterrichtsvorschläge. Daneben sollte man jedoch nicht übersehen, daß auch die mathematischen Inhalte unter didaktischen Gesichtspunkten ausgewählt, angeordnet und dargestellt sind. In diesen Teilen finden sich viele hübsche didaktische Ideen, Anregungen und Muster. Vor allem diese didaktischen Betrachtungen geben dem Buch gegenüber den Klassikern H. Schmidt (1949), *Ausgewählte höhere Kurven* und K. Fladt (1962), *Analytische Geometrie spezieller ebener Kurven* und der Monographie von E. Brieskorn und H. Knörrer (1981), *Ebene algebraische Kurven*, ein eigenes Profil.

Im 1. Kapitel lassen die Autoren die Endpunkte einer Strecke auf den Koordinatenachsen "gleiten", zeichnen bestimmte Punkte aus und betrachten deren *Bahnkurven*; dabei erhalten sie Kreise, Ellipsen und Rosetten. Die Astroide ergibt sich als *Hüllkurve*. Bereits an diesen ersten Beispielen machen die Verfasser deutlich, worin sie den didaktischen Reiz dieser Thematik sehen:

- im Auftreten neuartiger geometrischer Gebilde mit neuartigen Merkmalen,
- in der einheitlichen Entstehung der geometrischen Analyseobjekte,
- im Zusammenwirken elementargeometrischer, analytisch-geometrischer, infinitesimaler und computergraphischer Hilfen,
- in der Attraktivität und ästhetischen Form der untersuchten geometrischen Phänomene.

Im 2. Kapitel werden Kurven als *Bilder von Kegelschnitten bei Inversionen* gewonnen und analysiert. Es ergeben sich die Kissoide, die Strophoide, die Trisektrix, die Pascalsche Schnecke, die Kardioide und Lemniskaten. Die Kurven werden mit Hilfe der Abbildungsgleichungen analytisch beschrieben. Die Betrachtungen folgen dem traditionellen Muster der analytischen Abbildungsgeometrie.

Das 3. Kapitel befaßt sich mit *Radlinien*. Die Verfasser steigen mit dem *Spirographen* ein und erläutern die wichtigsten Begriffe. Die Betrachtungen liefern als neue

Kurven Zykloiden, die Kreisevolvente und Trochoiden. Im Vordergrund steht dabei jeweils die Parameterdarstellung der Kurve. An Problemen wird vor allem die Bestimmung der Tangenten, die Quadratur und die Rektifikation der Kurven behandelt. Damit kommt hier erstmals die Analysis ins Spiel. In den didaktischen Bemerkungen wird auf die Modellbildung, das Studium der Parameter – vor allem in Verbindung mit Computergraphik – und auf Fallunterscheidungen als Problemlösestrategie hingewiesen.

Nach diesen einführenden Kapiteln gehen im 4. und 5. Kapitel die Verfasser eingehender auf den Begriff der Kurve ein. Nach einem kurzen historischen Überblick von der Antike mit ihren klassischen Kurven zu den Kurven der fraktalen Geometrie in der Neuzeit zeigen sie das Wechselspiel zwischen Vorstellung, Definition und Kritik. Den weiteren Betrachtungen legen sie folgenden Begriff zugrunde:

Eine *Kurve* ist eine Punktmenge der Form  $\{(x; y) | F(x; y) = 0\}$  in *kartesischer Darstellung* oder eine Punktmenge der Form  $\{(x; y) | x = f_1(t), y = f_2(t)\}$  in *Parameterdarstellung* mit gewissen Voraussetzungen über die beteiligten Funktionen.

Man sollte sich also bewußt sein, daß die Verfasser hiermit den Kurvenbegriff auf den *Funktionsbegriff* gründen. Die Verfasser gehen dann näher auf den Satz von der impliziten Funktion ein. In diesem Zusammenhang weisen sie auch auf die Bedeutung von *Konturskizzen* impliziter Kurven mit dem Computer hin.

Ausführlich wird dann das Problem *Kurve und Gerade* behandelt. Hervorgehoben werden Tangenten, Normalen, Subtangenten, Subnormalen, Asymptoten und krummlinige Asymptoten. Die Betrachtungen sind hier nicht mehr als elementar zu bezeichnen. Das gilt auch für die Inhalte krummlinig berandeter ebener Flächen. Die Betrachtung besonderer Kurvenpunkte leitet dann über zu Fußpunktkurven und Hüllkurven als *begleitenden Kurven*. Die didaktischen Hinweise betonen die Möglichkeit, mit derartigen Fragestellungen die Routine der üblichen Diskussion der Funktionsgraphen aufzubrechen. Indem die Verfasser darauf hinweisen, "daß der Lehrer bei der gegebenen Vielfalt sowohl der Methoden und Begriffe als auch der Beispielkurven sorgfältig auswählen muß, um sowohl einen zeitlichen Rahmen einzuhalten als auch den Schülern den Überblick nicht zu verbauen" (S. 146), reduzieren sie die didaktische Problematik dieser Thematik weitgehend auf das *Auswahlproblem*.

Singuläre Punkte bei unterschiedlichen Kurventypen in verschiedenen Darstellungen, Bogenlänge und Krümmung werden als *natürliche Eigenschaften höherer Kurven* betrachtet. Als neue Kurventypen treten vor allem Evoluten und Evolventen auf. In den didaktischen Anmerkungen wird die Frage diskutiert, ob man im Unterricht auf die *natürlichen Gleichungen* eingehen sollte. Einerseits könnte man damit die "Igelbefehle" von LOGO analysieren. Andererseits verkennen die Verfasser nicht die Schwierigkeiten, die mit einer Behandlung von Bogenlänge und Krümmung verbunden sind.

Im 6. Kapitel werden *Spiralen*, im 7. Kapitel werden *Kurven in Natur und Technik* behandelt. Hier geht

es vor allem um Rollkurven, Kurven im homogenen Gravitationsfeld, Lissajous-Kurven, Kaustiken und Kurven beim Wankelmotor. In den didaktischen Kommentaren zum 7. Kapitel wird vor allem auf die Probleme der Behandlung außermathematischer Situationen im Mathematikunterricht eingegangen. Hier wird auf den sinnstiftenden und motivierenden Charakter realitätsnaher Situationen hingewiesen, die eine genetische Einführung mathematischer Methoden gestatten, Möglichkeiten zu einer außermathematischen Kontrolle der Ergebnisse liefern und schließlich Anregungen zu weiterem Tun bieten. Die verschiedenen Themenbereiche werden dann näher diskutiert. In diesem Zusammenhang wird auf die Möglichkeit verwiesen, mit den Schülern auf die Entwicklung des Weltbildes und dabei auf die Bedeutung der Epizyklen für das geozentrische Weltbild einzugehen.

Im 8. Kapitel geht es um die Didaktik und Methodik der höheren Kurven. Zunächst wird dazu die historische Entwicklung des Kurvenbegriffs skizziert, um damit Aussagen über die Bedeutung dieses Gegenstandes für die Entwicklung der Mathematik zu gewinnen. Als zweiter Aspekt wird die Bedeutung der Kurven für die Beschreibung und Beherrschung der Wirklichkeit herausgearbeitet. Dann wird noch einmal das Thema als Ganzes betrachtet und auf seine Reichhaltigkeit im Hinblick auf die Vielfalt der Fragestellungen, der Darstellungsweisen, der Entstehungsweisen, der Beziehungen und der Methoden verwiesen. Auch die Ästhetik dieses Gegenstandsbereiches wird noch einmal deutlich gemacht.

Ein historischer Überblick über die Behandlung von Kurven im Mathematikunterricht zeigt eine Wiederbelebung der didaktischen Diskussion über dieses Thema, die vor allem durch den Computer neue Impulse gewonnen hat. Die Verfasser halten eine Innovation zu diesem Thema für notwendig. Sie sehen damit einerseits die Möglichkeit, den *schulischen Niedergang der analytischen Geometrie*, der Ende der sechziger Jahre mit der Linearen Algebra begann, durch die *Behandlung nichttrivialer geometrischer Phänomene* bei Kurven zu überwinden. Andererseits soll die *Reduktion der Analysis* auf schematisch behandelte "Kurvendiskussionen" und "Extremwertaufgaben" durch *tatsächliche Kurvendiskussionen* überwunden werden.

Ein besonderes Augenmerk richten die Autoren auf den Mathematikunterricht der Oberstufe. Sie halten die Oberstufenreform der siebziger Jahre für weitgehend gescheitert und geben Hinweise, in welche Richtung eine *tatsächliche Reform des Mathematikunterrichts auf der Oberstufe* gehen müßte. Besondere Bedeutung messen sie dem *paradigmatischen Explorieren herausfordernder und ergiebiger Situationen* bei. Die höheren Kurven mit ihrem Erscheinungs- und Beziehungsreichtum können da eine bedeutsame Rolle spielen.

Es folgen schließlich Hinweise zur unterrichtlichen Realisierung ihrer Vorstellungen. Dabei zeigen sie, wie höhere Kurven in das Kapitel "Kurvendiskussion" eingebettet werden können, und geben Hinweise auf mögliche Unterrichtseinheiten. Im 9. Kapitel werden einige Diskussionen höherer Kurven vorgeführt.

Die im Buch behandelten Kurven sind mit *Computerzeichnungen* veranschaulicht. Die Verfasser bieten dazu

ein Programmpaket in der Programmiersprache TURBO-PASCAL an. In der Praxis wird man heute wohl eher mit einem modernen leistungsfähigen Mathematik-Programm arbeiten. Im Text selbst werden Programme nur selten angegeben.

Zu den ersten acht Kapiteln gibt es mathematische und auch didaktische *Aufgaben* (ohne Lösungen). Ein ausführliches Literaturverzeichnis weist auf die klassischen Übersichtswerke und auf viele Einzeldarstellungen hin, von denen etliche Ideen in das Buch eingeflossen sind.

Das Buch ist eine Fundgrube für Lehrer, aber es kann auch Schülern z.B. für eine Facharbeit wichtige Informationen und Anregungen geben. Die mathematischen Überlegungen gehen nur selten über die Anforderungen eines Leistungskurses hinaus. Sie sind bewußt elementar gehalten: Die Autoren verzichten auf Vektoren, auf projektive und auf funktionentheoretische Betrachtungen.

Die ausgezeichnete didaktische Aufbereitung des Themas ist sicher geeignet, etwas von der Faszination, die die höheren Kurven auf die Verfasser ausüben, dem Leser zu vermitteln. Auch viele der didaktischen Überlegungen überzeugen und regen zum Nachdenken an. Man wird den Verfassern zustimmen können, daß höhere Kurven den Mathematikunterricht bereichern können, indem sie in der *Analysis* die derzeitigen Verengungen des Begriffs auf Graphen von Funktionen überwinden helfen, aus der *Linearen Algebra* durch eine Regeometrisierung vielleicht doch eine moderne *analytische Geometrie* werden lassen und schließlich vor allem über die Parameterdarstellung auch wieder eine Verbindung zwischen Analysis und analytischer Geometrie schaffen. Hier erschien es mir allerdings doch günstiger, mit Vektoren zu arbeiten, zumal das ja auch von Computerprogrammen unterstützt wird.

Mit höheren Kurven käme eine von den Verfassern gewünschte Vielfalt in den Unterricht, die aber andererseits durch ordnende Gesichtspunkte für die Schüler übersichtlich gemacht werden müßte. Die Verfasser bieten hier in ihrem eigenen Aufbau einen Ansatz, der jedoch in den didaktischen Überlegungen nicht hinterfragt wird.

Am Ende von Kapitel 8 hatte sich mir eine Perspektive für Kurven in einem neu gestalteten Mathematikunterricht der Oberstufe eröffnet. In den *Kurvendiskussionen* von Kapitel 9 wurden meine Erwartungen enttäuscht. Der Reiz dieser zum Teil recht technischen und komplizierten Betrachtungen blieb mir leider weitgehend verschlossen. Ich fragte mich unwillkürlich: Wird *damit* der Mathematikunterricht am Gymnasium für Schüler *bedeutungshaltiger, attraktiver und effektiver*? Aber vielleicht zeigten sich nach 359 anregenden Seiten bei den Verfassern wie bei mir Ermüdungserscheinungen. Das Buch will wohl auch nicht in einem Stück gelesen werden, sondern lädt ein zum Quereinsteigen, zum Nachschlagen, zum Knobeln und vielleicht auch nur zum Schmökern. Wird Schupps nächstes Buch Kurven und Flächen im Raum behandeln? Zu wünschen wäre es.

---

#### Autor

Vollrath, Hans-Joachim, Prof. Dr., Universität Würzburg, Mathematisches Institut, Am Hubland, D-97074 Würzburg.  
vollrath@mathematik.uni-wuerzburg.de