

Geometrische Extremwertaufgaben in dynamischer Behandlung

Heinz Schumann, Weingarten

“Da die Einrichtungen der ganzen Welt die vorzüglichste ist, und da sie vom weisesten Schöpfer herkommt, wird nichts in der Welt angetroffen, woraus nicht irgendeine Maximum- oder Minimumeigenschaft hervorleuchtet.”

Leonhard Euler (1707–1783)

Prof. Dr. Heinz Kunle zum 70. Geburtstag

Abstract: *Dynamic treatment of geometric extreme value problems.* There are some shortcomings in the treatment of extreme value problems in current schoolbooks. Most extreme value problems are geometrical problems. The methods of dynamic geometry open up new possibilities of preformal treatment of geometrical extreme value problems. Figures made movable by direct manipulation permit an experimental investigation of their quantitative characteristics with the goal of detecting extremal properties and determining them approximatively. Illustration of quasi-empirical functions in the form of graphical representations is an important technique. Cabri Géomètre II is recommended as an appropriate tool.

Kurzreferat: Die Behandlung der Extremwertaufgaben in den aktuellen Schulbüchern weist gewisse Mängel auf. Der größte Teil der Extremwertaufgaben ist von geometrischer Art. Die Methoden der dynamischen Geometrie eröffnen neue Möglichkeiten der präformalen Behandlung geometrischer Extremwertaufgaben: Durch direkte Manipulation beweglich gemachte Figuren gestatten eine experimentelle Untersuchung quantitativer Figureneigenschaften mit dem Ziel, extremale Eigenschaften zu entdecken und approximativ zu bestimmen. Ein wesentliches Mittel ist dabei die Veranschaulichung quasi empirischer Funktionen in Form von Schaubildern. Als adäquates Werkzeug wird Cabri Géomètre II verwendet.

ZDM-Classification: G40, R60

1. Einleitung

Das Optimieren, zu dem auch das Lösen von Extremwertaufgaben gehört, ist eine der fundamentalen Ideen für den Mathematikunterricht (vgl. u.a. Schupp 1997). Der motivationale Bezug ist klar: Unsere Lebensgestaltung kann als ein permanenter Optimierungsprozess aufgefaßt werden.

Leider ist z.B. die lineare Optimierung im \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{R}^3

mit einem gewissen lebenspraktischen Bezug nicht mehr verbindlicher Unterrichtsgegenstand in der Sekundarstufe I bzw. II; sie ist, wie manch anderer Unterrichtsgegenstand, den kostenminimierenden Studentafelkürzungen zum Opfer gefallen. Auch wird die Klasse der schönen und anwendungsträchtigen isoperimetrischen Probleme im Mathematikunterricht nicht thematisiert. Für echte Anwendungsprobleme, wie sie in der Variationsrechnung oder im Operations Research behandelt werden, fehlt das mathematische Werkzeug – und die Unterrichtszeit.

Einen unterhaltsamen Überblick über die inhaltliche und methodische Vielfalt der Maxima- und Minima-Aufgaben geben die betreffenden Kapitel in den als “klassisch” geltenden didaktischen Arbeiten von Rademacher/Toeplitz (1930), Pólya (1962) und Courant/Robbins (1962); neuere didaktisch orientierte Monographien über elementare Behandlungen von Extremwertaufgaben stammen von Quaiser/Sprengel (1986), Claus (1992) und Schupp (1992). Ärmlich wirkt gegenüber dem Inhalt solcher Arbeiten das Repertoire an Extremwertaufgaben, die mittels Differentialrechnung der Funktionen einer reellen Variablen gelöst werden können, und die sich im Laufe nahezu eines Jahrhunderts, seit der zögerlichen Einführung der Infinitesimalrechnung an Gymnasien im Gefolge der “Meraner Vorschläge” (1905), angesammelt haben.

Neben den sogenannten Funktionsbestimmungsaufgaben dienen die Extremwertaufgaben der Anwendung der Kurvendiskussion im Rahmen eines “aufgabenstellenden” Mathematikunterrichts. Dabei lassen die aktuellen lehrplankonformen Schulbücher der gymnasialen Oberstufe im allgemeinen folgende Mängel bei den Aufgabenstellungen erkennen: Die Mittel zur Veranschaulichung von Aufgabenstellungen sind beschränkt; es gibt nur geschlossene Aufgaben und nur lösbare Aufgaben (keine Problematisierung der Existenz einer Lösung!); Aufgabenagglomeration (keine strukturierende Aufgabensequenzierung); fragwürdige Einkleidungen (sog. “Plantagenaufgaben”); zu wenig Aufgaben, die sich für eine (grobe) mathematische Modellierung eignen; die Minima-Aufgaben sind unterrepräsentiert; Vernachlässigung der heuristischen Dimension (Aufgaben mittels Analogisieren, Generalisieren etc. generieren!); es fehlen Aufgaben, die die Grenzen des Lösens mittels schulüblicher Differentialrechnung aufweisen.

Das Lösen der Extremwertaufgaben ist gekennzeichnet durch einen Lösungsschematismus, ohne Reflexion der Methodenangemessenheit und des Inbeziehungsetzens zu

anderen Lösungsmethoden. (Wenigstens angedeutet ist das in der "Infinitesimalrechnung" von Keil et al. 1991; als nahezu vorbildlich zu nennen ist in dieser Hinsicht das leider nicht mehr vertriebene Schulbuch von Dankwerts et al. 1991.) So wird z.B. auch auf quadratische Zielfunktionen das entsprechende Lösungsschema angewendet – ganz abgesehen von den zahlreichen Aufgaben, die elementar mittels der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel (Wo kommt diese Ungleichung in ihrer allgemeinen Form im mathematischen Grundstudium vor?) lösbar sind.

Letztlich sind die hier aufgelisteten Mängel die Folge eines tradierten Curriculums, in dem der Lehrer/die Lehrerin, unter Zeit- und Stoffdruck stehend, gute Prüfungsergebnisse mit seiner/ihrer Klasse im Abitur erzielen muß, um als "guter" Lehrer/"gute" Lehrerin anerkannt zu werden. – Die Frage nach dem mathematischen Bildungswert wird längst nicht mehr gestellt! – Diesbezügliche Vorschläge für eine Verbesserung der mathematischen Aufgabekultur beinhaltet z.B. die Methode des Open-Ended Approach (Becker/Shimada, 1997).

Ein weiteres Manko des Analysisunterrichts ist die fehlende Integration von Computeralgebrasystemen als Komponenten mathematischer Assistenzprogramme wie z.B. Derive, Mathematica (mittels dem sich auch Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen automatisch lösen lassen!). Ein erstes ansprechendes Integrationskonzept unter Verwendung von Derive, in dem die oben genannten Mängel bei der Behandlung von Extremwertaufgaben weitgehend beseitigt sind, hat Baumann (1998) in einem projektorientierten Unterrichtswerk vorgelegt. – Ob es nun bald ein Abitur gibt, bei dem Mathematikaufgaben mit Computeralgebra gelöst werden können und sollen? – Oder hat der Autor für seine perspektive Behandlung der Analysis nur einen mutigen Verlag gefunden und das Interesse von ein paar Computerfreaks in der Lehrerschaft?

2. Die dynamische Behandlungsmethode

Wir gehen nun auf die Nutzung der dynamischen Computergrafik zur Behandlung von geometrischen Extremwertaufgaben ein:

Die geometrischen Extremwertaufgaben oder die Extremwertaufgaben, die sich geometrisch modellieren lassen, bilden den größten Teil des Repertoires an Extremwertaufgaben. Sie setzen die Beherrschung der planimetrischen und stereometrischen Berechnungsaufgaben der Sekundarstufe I voraus. Im Sinne des Spiralcurriculums bilden die geometrischen Extremwertaufgaben der Sekundarstufe II eine Fortsetzung dieser Berechnungsaufgaben.

In einer traditionellen Lernumgebung sind die geometrischen Figuren bzw. ihre zeichnerische Repräsentanz, auf die sich die Berechnungsaufgaben beziehen, starr; sie können durch Bildersequenzen nur unzureichend vor dem "geistigen Auge" beweglich gemacht werden (wenn wir einmal vom flüchtigen Eindruck eines entsprechenden fremdgesteuerten Unterrichtsfilms, der meist nur einen Satz geometrischer Daten visualisieren kann, absehen).

Peter Treutlein, Direktor des damaligen Karlsruher Goethe-Realgymnasiums, hat schon in seinem 1911 erschienenen bahnbrechenden Werk über den Geometrieunterricht die Forderung nach der Figurenbeweglich-

keit folgendermaßen formuliert:

"Als einer der Hauptunterschiede altgriechischer und neuzeitlicher Geometrie gilt das, daß in jener die Figuren sämtlich als starr und fest gegeben angenommen werden, in dieser als beweglich und gewissermaßen fließend, **in stetem Übergang von einer Gestaltung zu anderen** begriffen. Sollen unsere Schüler in die heutige Form der Wissenschaft und gar gelegentlich in deren Anwendung eingeführt werden, so müssen sie beizeiten daran gewöhnt werden, die Figuren als jeden Augenblick veränderlich zu denken und dabei auf die gegenseitige Abhängigkeit ihrer Stücke zu achten, diese zu erfassen und beweisen zu können. Der Auffassung der Figuren als starrer Gebilde kann und muß in verschiedener Weise entgegen gearbeitet werden.

Das eine hierzu Erforderliche ist das **Beweglichmachen der Teile einer Figur...**"

Das Verstehen von geometrischen Extremwertaufgaben setzt u. E. individuelle mentale Erfahrungen mit beweglichen Figuren voraus. Solche Erfahrungen können heute an Bildschirmfiguren, die mittels direkter Manipulation "kontinuierlich" variierbar sind, gesammelt werden.

Die direkte Manipulation geometrischer Konfigurationen ist das wesentliche Kennzeichen der sogenannten dynamischen Geometrie oder Zug-Modus-Geometrie, vgl. u.a. Schumann (1992) – Zur Erzeugung solcher Bildschirmkonfigurationen verwenden wir Computerwerkzeuge für die planare Schulgeometrie, wie das geometrieinhaltlich und software-ergonomisch vorbildliche Cabri-Géomètre II (Laborde/Bellmain 1996).

Mit CABRI II steht eine neue Methode der Untersuchung von funktionalen Eigenschaften einer geometrischen Figur zur Verfügung: Wir können Messungen an den konstruierten geometrischen Figuren vornehmen, aus den Meßwerten mathematische Ausdrücke bilden, die funktionalen Eigenschaften (z.B. Beziehungen zwischen Längen, Flächeninhalten, Winkelbeziehungen,...) quantitativ beschreiben; für gewisse Standardterme lassen sich auch entsprechende Berechnungsmakros definieren. Durch Verziehen der Figur im Zug-Modus verändern wir den Meßwert oder den Wert des gebildeten Terms, der beim Vorgang der Figurenvariation beobachtet und untersucht werden soll. Eine funktionale Beziehung kann zusätzlich in einer Wertetabelle oder, im Falle einer nur von einer Variablen abhängigen Eigenschaft, als Schaubild einer empirischen Funktion dargestellt werden.

Aus diesen Möglichkeiten, funktionale Eigenschaften einer Figur zu untersuchen, ergibt sich folgende experimentelle Methode zur Entdeckung von extremalen Eigenschaften und zur näherungsweise Bestimmung von Extremwerten:

- (1) Konstruktion einer geometrischen Figur, die auch Nebenbedingungen erfüllt
- (2) Variation einer unabhängigen Größe der Figur bzw. Teilfigur unter Beobachtung eines funktionalen Zusammenhangs: unabhängige Größe – abhängige Größen (Datensammlung in Werte-Tabelle; grafische Darstellung im Schaubild)
- (3) Erkennen einer extremalen Eigenschaft (näherungsweise Bestimmen von Extremstelle und Extremwert)
- (4) Variation der Figurenparameter und Prüfung, ob extremale Eigenschaft invariant

- (5) Formulierung einer allgemeinen geometrischen Extremwertaufgabe als Berechnungsaufgabe.

Jetzt erst schließt sich die exakte Lösung der allgemeinen Extremwertaufgabe mittels Differentialrechnung (auch unter Einsatz von Computeralgebra) oder/und mittels "Mittelungleichung" an. – Diese Methode ist präformal, da sie im allgemeinen nicht das Aufstellen einer Zielfunktion notwendig macht, aber trotzdem gestattet, die Zielfunktion als eine quasi empirische Funktion auf extremale Eigenschaften hin zu untersuchen. Damit ist diese Methode auch geeignet für die Behandlung geometrischer Extremwertaufgaben in der Sekundarstufe I.

Da wir allenfalls davon ausgehen können, daß die Schüler und Schülerinnen Novizen in der Nutzung eines geometrischen Computerwerkzeugs sind, stellen wir die Bildschirm-Konfiguration zusammen mit den Aufgabentexten als "interaktive Arbeitsblätter" (Schumann 1998), die auch zu Demonstrationszwecken verwendet werden können, zur Verfügung. Der Einsatz solcher Arbeitsblätter bietet einen ersten Zugang zur dynamischen Behandlung von geometrischen Extremwertaufgaben.

3. Beispiele für die dynamische Behandlung

Im folgenden illustrieren wir die Methode der dynamischen Behandlung geometrischer Extremwertaufgaben an einigen repräsentativen Beispielen:

Eine Vorbemerkung: Die printmediale Wiedergabe einer dynamischen Darstellung beansprucht jene Vorstellungskraft, die gerade durch den Einsatz von dynamischer Computergrafik gefördert werden soll. Insofern sind Printmedien zur Erklärung dynamischer Bildschirmvorgänge ungeeignet; angemessen wäre ein Internet-Dokument, das dem Leser gestattet, in den Abbildungen direkt manipulativ tätig zu werden. Noch funktioneller wäre natürlich ein im Internet verfügbares "interaktives Schulbuch".

Am Beispiel 1 erläutern wir näher die wesentlichen Möglichkeiten der dynamischen Behandlung, die in den anderen Beispielen nur wahlweise angewendet werden sollen.

Beispiel 1 (Eine Zaunaufgabe)

Die Abbildung 1a zeigt die Aufgabenstellung. Durch Verziehen von Z (symbolisiert durch die greifende Hand) verändert sich die Form des "Zaunrechtecks", dessen Umfang sich nicht ändert, wohl aber die anderen Daten (Abb. 1b); auch die Grenzlage für $s_1 = 0$ cm kann realisiert wer-

Von einem Zaun, der ein rechteckiges Areal begrenzen soll, steht schon ein geradliniges Stück von 70 Metern. Der Zaun soll insgesamt 240 Meter lang werden. Verziehe Z! (Verändere auch die gegebenen Längen.)

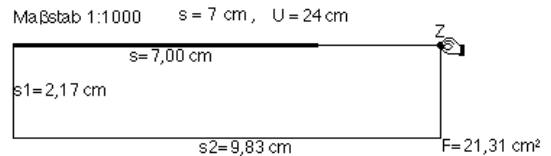


Abb. 1a

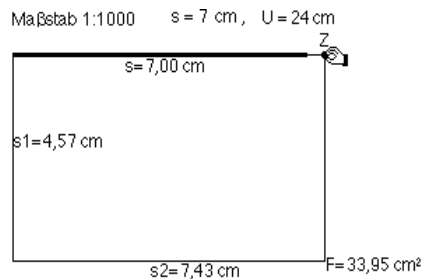
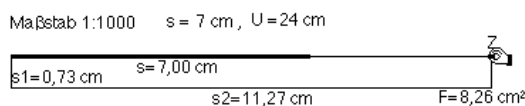


Abb. 1b

den (für die Messung des Flächeninhaltes steht ein Werkzeug zur Verfügung). Bereits hier kann der Nutzer des interaktiven Arbeitsblattes feststellen, daß der Flächeninhalt streng monoton von $s_2 = s$ nach $s_2 = U/2$ abnimmt und daß das Flächenmaximum 3500m^2 bei den Abmessungen 50m auf 70m angenommen wird. Die Flüchtigkeit der einzelnen Zustände erschwert eine überblickende Bewertung der entsprechenden Daten. Deswegen können diese in eine Tabelle eingetragen werden (Abb. 2). Hier könnten wir noch eine Spalte $s_2 - s_1$ anfügen, die zeigt, wie der Flächeninhalt bei abnehmender Differenz zunimmt.



	s1=	s2=	F=
1	5,00	7,00	35,00
2	4,70	7,30	34,31
3	4,40	7,60	33,44
4	3,87	8,13	31,45
5	3,30	8,70	28,71
6	3,07	8,93	27,40
7	2,47	9,53	23,52
8	2,20	9,80	21,56
9	1,87	10,13	18,92
10	1,60	10,40	16,64
11	1,07	10,93	11,66
12	0,80	11,20	8,96
13	0,37	11,63	4,27
14	0,17	11,83	1,97
15	0,00	12,00	0,00
16			
17			
18			

Abb. 2

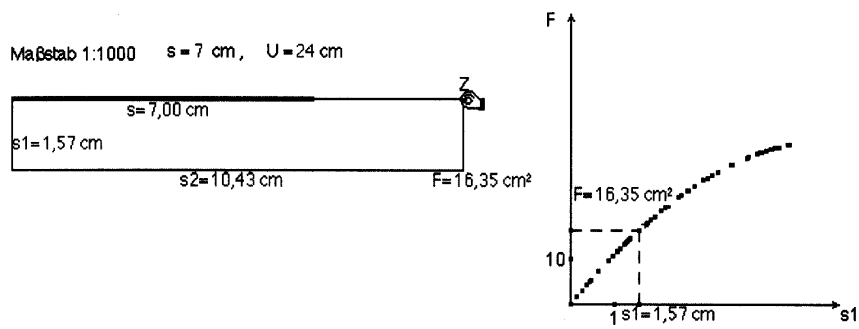


Abb. 3

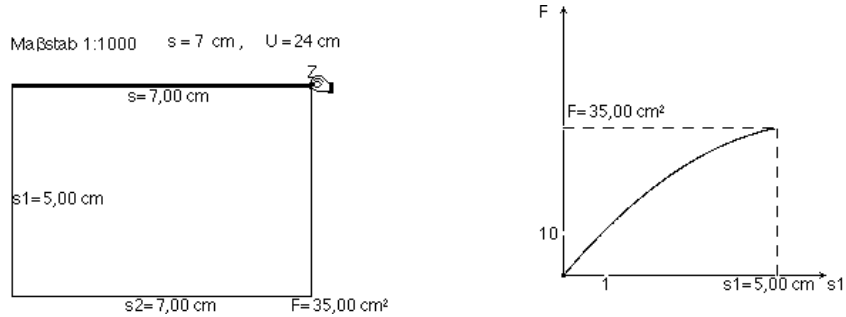


Abb. 4a

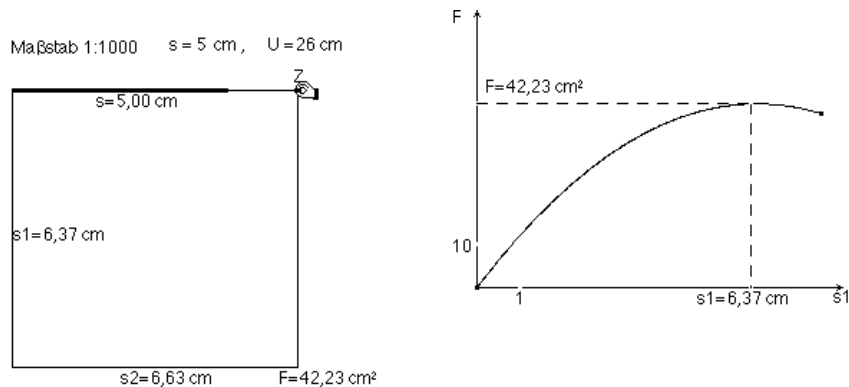


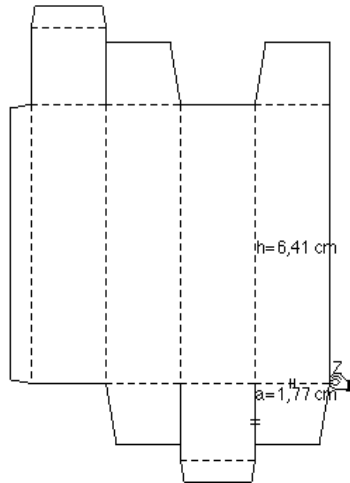
Abb. 4b

Zur grafischen Veranschaulichung der funktionalen Abhängigkeit $s_1 \rightarrow F(s_1)$ bei festem U und s werden s_1 und F auf der s_1 -Achse und F -Achse abgetragen. Der Punkt $(s_1; F)$ erzeugt das Schaubild als Spur (Abb. 3), die für Untersuchungen bei Variation der Werte der Aufgabenparameter s und U durch ein grafisches Objekt ersetzt wird (Abb. 4a). Das Randmaximum ist nicht invariant; z.B. für $s = 5$ (cm) und $U = 26$ (cm) erhalten wir ein relatives Maximum für den Flächeninhalt, das zugleich absolutes Maximum ist (Abb. 4b). Welches ist die Bedingung für diesen Wechsel?...

Beispiel 2 (Eine Verpackungsaufgabe)

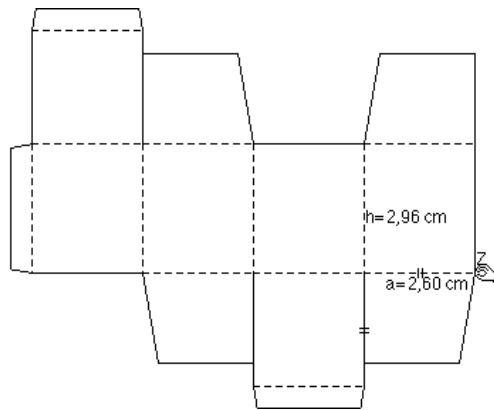
Der Flächeninhalt eines real existierenden Typs von Verpackungsnetzen ist zu untersuchen (Abb. 5a). Dabei ist das "verpackte" Volumen invariant. (Solche Netze können auch ausgedruckt, ausgeschnitten und aufgefoldet werden.) Durch Verziehen erzeugen wir unterschiedliche (nicht äquiforme) Verpackungsnetze mit unterschiedlicher Flächenbeanspruchung (Abb. 5b). Mittels des Schaubildes bestimmen wir das Flächenminimum näherungsweise (Abb. 6). Die Art des Minimums erweist sich bei Variation des Parameterwertes V_0 als invariant.

Untersuchen Sie den Flächeninhalt F der abgewickelten Verpackung, die stets das Volumen $V_0 = 20 \text{ cm}^3$ umfasst. (Z verziehen!)
Verändern Sie auch V_0 .



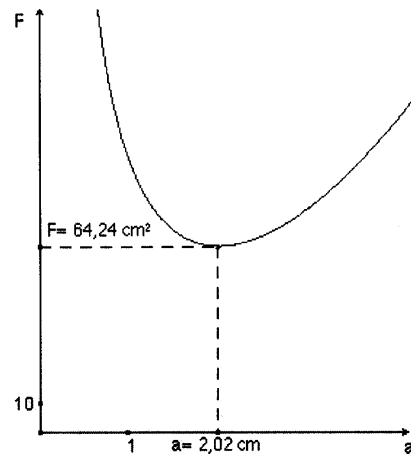
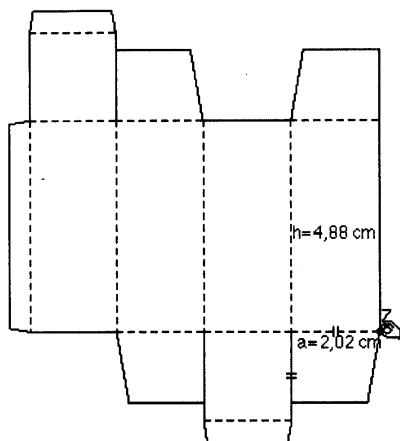
$V_0 = 20 \text{ cm}^3 \quad (h = V_0/a^2)$
 $F = 65,65 \text{ cm}^2$

Abb. 5a



$V_0 = 20 \text{ cm}^3 \quad (h = V_0/a^2)$
 $F = 68,34 \text{ cm}^2$

Abb. 5b



$V_0 = 20 \text{ cm}^3 \quad (h = V_0/a^2)$
 $F = 64,24 \text{ cm}^2$

Abb. 6

Untersuche die Volumina V_Z und die Oberflächen O_Z der Zylinder, die einem Kegel einbeschrieben sind. (Verziehe dazu Z .) Verändere auch die Form des Kegels durch Verziehen von B u. C .

$BD=r=3,00$ cm
 $CD=h=7,00$ cm
 $V_Z=29,32$ cm³
 $O_Z=54,30$ cm²

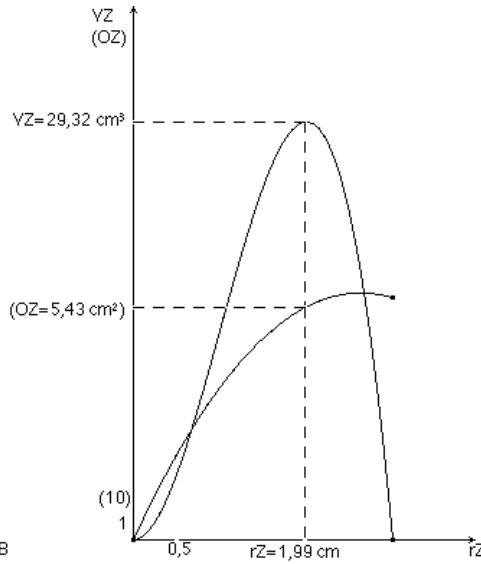
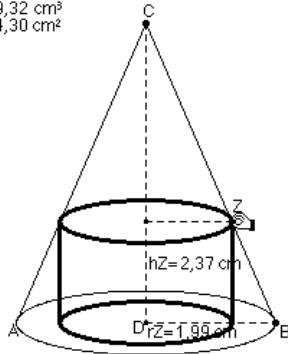


Abb. 7a

$BD=r=3,45$ cm
 $CD=h=5,90$ cm
 $V_Z=32,68$ cm³
 $O_Z=61,39$ cm²

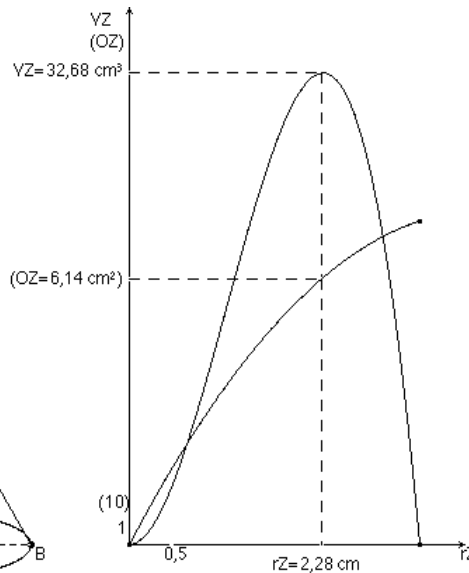
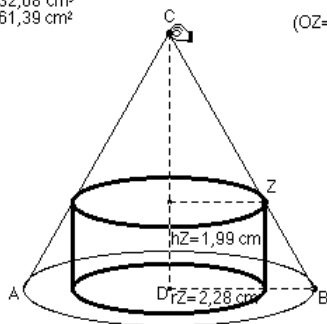


Abb. 7b

Beispiel 3 (Eine räumliche Einbeschreibung)

Unter den einbeschriebenen Zylindern hat einer maximales Volumen, ein anderer maximale Oberfläche (Abb. 7a). Ist dieses Extremalverhalten invariant bei Änderung der Kegelform? So gibt es beispielsweise für einen Kegel mit $r = 3,45$ LE und $h = 5,90$ LE keinen eingeschriebenen Zylinder mit maximaler Oberfläche mehr (Abb. 7b). Wie lautet die Bedingung für die Existenz eines Oberflächenmaximums?...

Beispiel 4 (Eine Dosenaufgabe)

Unter allen volumengleichen Zylindern gibt es nur einen, der minimale Oberfläche hat. Seine volumenabhängigen Daten können wir näherungsweise ablesen (Abb. 8). Diese Aufgabe dient einer ersten groben Modellierung des An-

wendungsproblems, unter allen Verpackungsboxen, die mit dem geringsten Materialaufwand zu bestimmen.

Beispiel 5 (Eine Touristenaufgabe)

Bei diesem sehr anschaulichen Problem (Abb. 9) ist gut zu erkennen, wie der das Standbild erfassende Blickwinkel vom Abstand des Betrachters abhängt und wie der Formtyp des Schaubildes invariant ist bei Variation der Problemparameter.

Beispiel 6 (Aus der Koordinatengeometrie)

Auch die üblichen koordinatengeometrischen Extremwertaufgaben können dynamisch behandelt werden! (Abb. 10)

Untersuche das Verhalten der Oberfläche eines Zylinders mit dem Volumen 100 cm^3 .
 Oberfläche = $119,27 \text{ cm}^2$

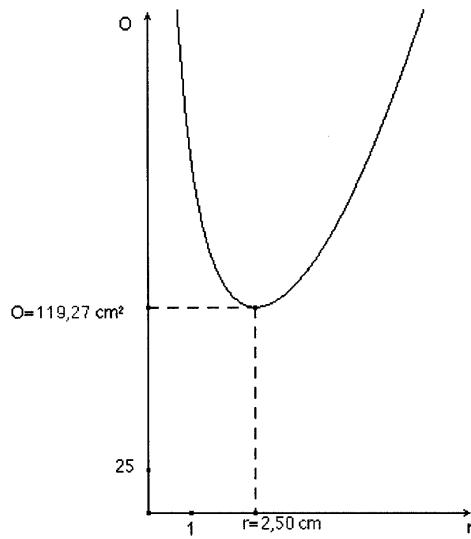
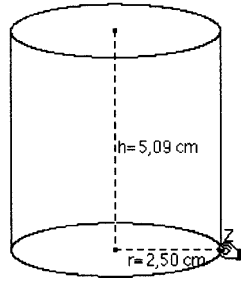


Abb. 8

Ein ungefähr 1,70 großer Tourist betrachtet ein 6,90 m hohes Standbild, das auf einen Sockel der Höhe 3,50 m steht. Untersuchen Sie, wie der Abstand, den der Tourist vom Denkmal hat, die wahrgenommene Größe des Standbildes beeinflusst.

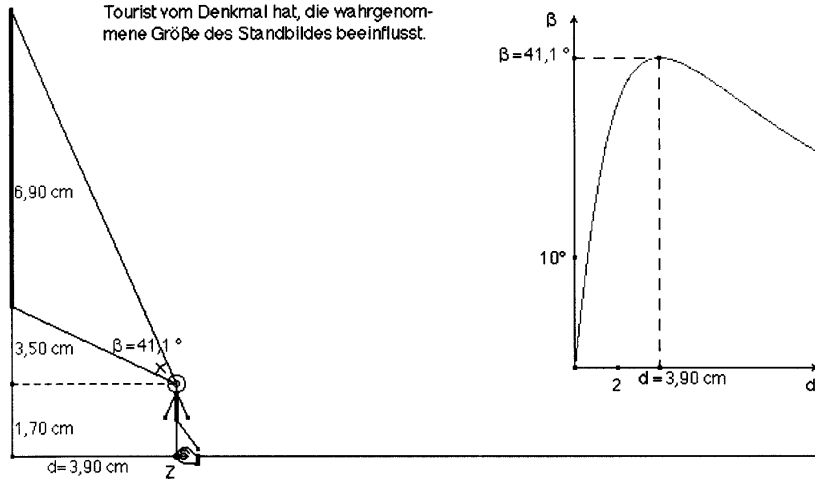
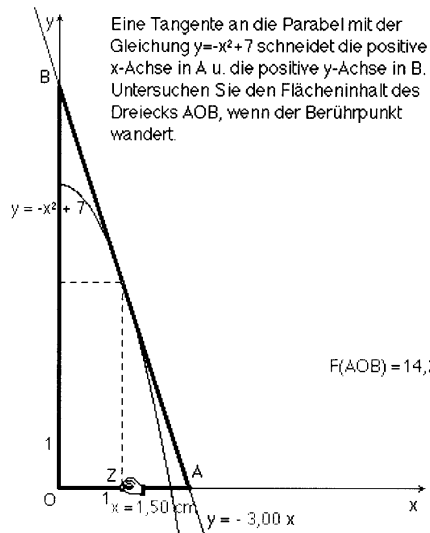


Abb. 9



Eine Tangente an die Parabel mit der Gleichung $y = -x^2 + 7$ schneidet die positive x-Achse in A u. die positive y-Achse in B. Untersuchen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks AOB, wenn der Berührungspunkt wandert.

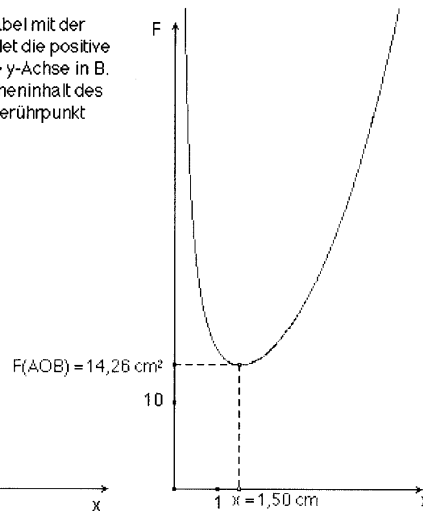


Abb. 10

Von einem Quader mit den Kanten a, b, c ist eine Ecke abgeschnitten. Lässt sich ein Quader mit den Kanten a', b', c' so einbeschreiben, dass dieser größtes Volumen hat?

$V' = 159,26 \text{ cm}^3$

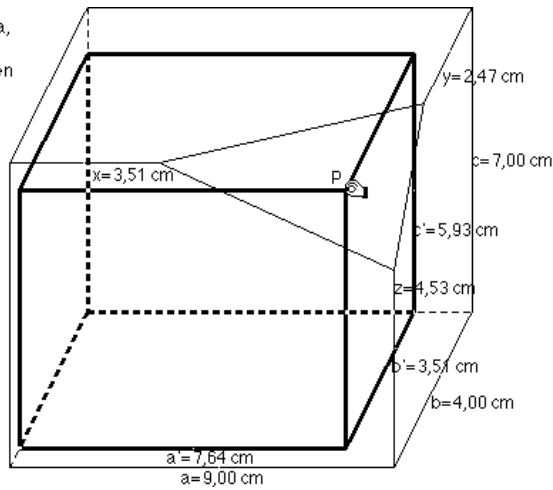


Abb. 11

Beispiel 7 (Eine Quaderaufgabe)

Dieses Aufgabenbeispiel (Abb. 11) soll die Grenzen der dynamischen Behandlungsmethode bei der Nutzung von 2-D-Werkzeugen verdeutlichen, die zielgerichtet nur auf Aufgaben anwendbar ist, denen Funktionen einer reellen Variablen zugrunde liegen. Bei dieser Aufgabe, dem räumlichen Analagon einer ebenen, unserer Behandlungsmethode leicht zugänglichen Aufgabe, ist der Eckpunkt P des einbeschriebenen Quaders so auf der dreieckigen Schnittfläche zu verziehen, daß dieser ein maximales Volumen annimmt, was durch mehr oder minder systematisches Probieren näherungsweise herausgefunden werden kann...

4. Schlußbemerkung

Im Zusammenhang mit der Computernutzung im Mathematikunterricht hat die Mathematikdidaktik u.a. die Aufgabe, Integrationskonzepte, wie z.B. das hier vorgestellte, zu entwickeln und auch systematisch in der Unterrichtspraxis zu evaluieren.

Aus lernpsychologischer Sicht induziert die Integration von Computerwerkzeugen in den Mathematikunterricht durch betreffendes instrumentelles Wissen eine Veränderung aller bei einem mathematischen Lernprozeß intervenierenden Arten des Wissens (vgl. Diagramm). – Wir wissen heute noch fast nichts über solche Veränderungen.

5. Literatur

Arbinger, R. (1997): Psychologie des Problemlösens. Eine anwendungsorientierte Einführung. – Darmstadt: Primus
 Baierlein, M. et al. (1997): Anschauliche Analysis 1. – München: Oldenburg
 Baumann, R. (1998): Analysis 1, Grenzwerte, Differenzialrechnung, Optimierungsaufgaben. Ein Arbeitsbuch mit Derive. – Stuttgart: Klett
 Becker, J. B.; Shimada, S. (1997): The Open-Ended Approach. A New Proposal for Teaching Mathematics. – Reston, VA: NCTM
 Bigalke, A.; Köhler, N. (1995): Analysis, Kursstufe. – Berlin: Cornelsen
 Blum, W.; Törner, G. (1983): Didaktik der Analysis. – Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht
 Bock, H.; Walsch, W. (1993): Mathematik entdecken, verstehen, anwenden. Analysis. – München: Oldenburg
 Bronstein, I. N.; Semendjajew, K. A. (1984): Taschenbuch der Mathematik. – Frankfurt/M.: Harri Deutsch (7. Auflage)
 Claus, H. J. (1992): Extremwertaufgaben. – Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft
 Courant, R.; Robbins, H. (1962): Was ist Mathematik? – Berlin: Springer
 Cukrowicz, J. (1992): Mathematik, 11.Schuljahr, Analysis I. – Braunschweig: Westermann
 Dankwerts, R. et al. (1991): Analysis für den Leistungskurs, Klasse 12/13. – Stuttgart: Metzler
 Griesel, H.; Postel, H. (1992): Mathematik heute, Leistungskurs Analysis, Gesamtband. – Hannover: Schroedel/Schöningh
 Jahner, H. (1978): Methodik des mathematischen Unterrichts. – Heidelberg: Quelle & Meyer (5. Auflage)
 Keil, K.-A. et al. (1991): Die Infinitesimalrechnung. – München: Bayerischer Schulbuchverlag
 Kuypers, W.; Lauter, J. (1993): Mathematik Sekundarstufe II,

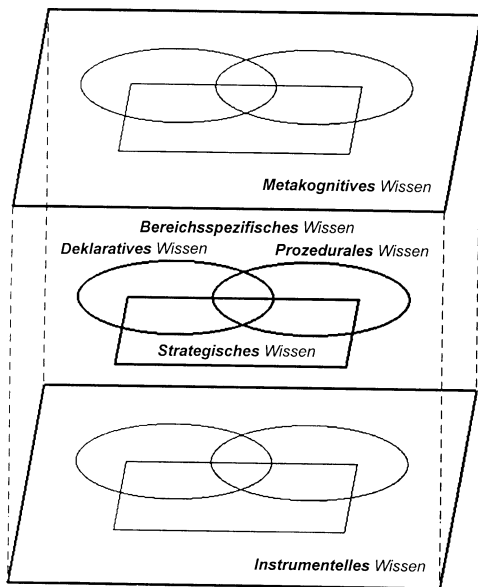


Diagramm: Arten des Wissens bei der Nutzung von Computerwerkzeugen

- Analysis Leistungskurs. – Berlin: Cornelsen
- Laborde, J.-M.; Bellman, F. (1996): Cabri Géomètre II. Version 1.0 – Dallas/USA u. Freising: Texas Instruments. (Deutsche Oberfläche und Bearbeitung des Handbuchs von H. Schumann)
- Locher-Ernst, L. (1948): Differential- und Integralrechnung im Hinblick auf ihre Anwendungen. – Basel: Birkhäuser
- Pólya, G. (1962): Mathematik und plausibles Schliessen, Band 1: Induktion und Analogie in der Mathematik. – Basel: Birkhäuser
- Quaisser, E., Sprengel, H.-J. (1986): Extrema. – Berlin: Deutscher Verlag der Wissenschaften
- Rademacher, H.; Toeplitz, O. (1930): Von Zahlen und Figuren. – Berlin: Springer (Nachdruck 1968)
- Rudio, F. et. al. (Hrsg.) (seit 1942): Leonhard Euler: Opera omnia. Ser. I. Opera mathematica. – Lausanne: Societas scientiarum naturalium Helvetica
- Schmid, A.; Schweizer, W. (1990): Analysis Leistungskurs, Gesamtausgabe. – Stuttgart: Klett
- Schmidt, W. (1984): Mathematikaufgaben, Anwendungen aus der modernen Technik und Arbeitswelt. – Stuttgart: Klett
- Schumann, H. (1984): Inhalts- und umfangsextremale Eigenschaften achsensymmetrischer Vierecke. – In: MU. Der Mathematikunterricht (30), Heft 6, S. 38–44
- Schumann, H. (1985): Eine Folge von Verpackungsproblemen. – In: MNU. Der naturwissenschaftliche und mathematische Unterricht (36), Heft 1, S. 7–14
- Schumann, H. (1991): Experimentelles Lösen einfacher isoperimetrischer Probleme in einer interaktiven computergrafischen Lernumgebung. – In: Didaktik der Mathematik (19), Heft 3, S. 227–241
- Schumann, H. (1992): Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. – Stuttgart: Metzler u. Teubner
- Schumann, H. (1997): Neue Standards für das Lösen geometrischer Berechnungsaufgaben durch Computernutzung. – In: MNU. Der naturwissenschaftliche und mathematische Unterricht (50), Heft 3, S. 172–175
- Schumann, H. (1998): Dynamische Behandlung elementarer Funktionen – In: Mathematik in der Schule (36), Heft 3, S. 172–188
- Schumann, H. (1998): Interaktive Arbeitsblätter für das Geometrielernen. – In: Mathematik in der Schule (36), Heft 10, S. 562–569
- Schumann, H.; Green, D. (1994): Discovering Geometry with a Computer. – Bromley/Kent: Chartwell-Bratt
- Schupp, H. (1992): Optimieren – Extremwertbestimmung im Mathematikunterricht. – Mannheim: B.I. Wissenschaftsverlag
- Schupp, H. (1997): Optimieren ist fundamental. – In: mathematik lehren 81 (April 1997), S. 4–10
- Tietze, U.-P.; Klika, M.; Wolpers, H. (1997): Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II, Band 1: Fachdidaktische Grundfragen – Didaktik der Analysis. – Braunschweig: Vieweg
- Treutlein, P. (1911): Der geometrische Anschauungsunterricht. – Leipzig: B. G. Teubner
- Winter, H. (1989): Entdeckendes Lernen im Mathematikunterricht. – Braunschweig: Vieweg
- Wittmann, E. (1981): Grundfragen des Mathematikunterrichts. – Braunschweig: Vieweg (6. Auflage)
- Wolff, G. (1962): Die Elemente der Mathematik, Band 3 Arithmetik, Algebra und Analysis. – Paderborn: Schöningh, Hannover: Schroedel (7. Auflage)
- Wolfram, S. (1991): Mathematica. A System for Doing Mathematics by Computer. – Redwood City, CA: Addison-Wesley (2nd Edition)

Autor

Schumann, Heinz, Prof. Dr. habil., Fak. III, Mathematik/Informatik, PH Weingarten, Kirchplatz 2, D-88250 Weingarten. E-mail: schumann@ph-weingarten.de