Algebres de Lie regulieres

E. Ferreira et A. Petitjean

Introduction.

La notion de prolongement normal d'un pseudo-groupe de Lie, a été introduite par E. Cartan qui s'est aperçu que si on prolonge un pseudo-groupe de Lie, à un ordre assez élevé, le pseudo-groupe obtenu est caractérisé par le fait de laisser invariante chaque feuille d'un feuilletage. Ce résultat lui a permis de faire la classification des pseudogroupes de Lie simples ([2]).

Plus tard M. M. Orellana, dans sa thèse de 3e cycle ([6]) a donné une version algébrique du théorème de Cartan évoqué plus haut; mais d'une part, il s'est limité au cas d'algèbres de Lie associés à un pseudo-groupe de Lie transitif sur une variété réelle, d'autre part le manque de souplesse de ses méthodes trop géométriques, les rend inutilisables dès que l'on essaie de se placer dans un contexte plus général.

Partant des travaux d'E. Cartan et de M. Orellana, nous nous sommes proposés de reprendre la version algébrique du théorème d'E. Cartan. Les résultats de Rim ([8]) et Hayashi ([3]) nous ont permis d'introduire la notion de prolongement d'un champ de vecteurs formel (§2). Cette notion de prolongement correspond à la notion géometrique qui pourrait être appelé "prolongement ponctuel". A partir de là, nous avons démontré le théorème de Cartan pour les algèbres de Lie filtrées homogènes (§3) et avons introduit la notion d'algèbre de Lie régulière en nous inspirant, d'une part, des résultats antérieurs, d'autre part de la remarque évidente que toute algèbre de Lie "associée" à un pseudo-groupe de Lie est régulière, au sens de notre définition.

A ce propos, nous devons mentionner le travail de M. Morimoto ([5]) qui, pour des raisons différentes a été amené à considérer des prolongements et a défini les algèbres de Lie régulières de façon presqu' identique à la notre.

(*) Ce travail a été mené à bien grâce à l'aide de la F.A.P.E.S.P.
(Fundação de Amparo e Pesquisa do Estado de São Paulo, Brésil).
Recebido em 13/10/80.

1. Preliminaires.

Dans tout ce travail, Δ représentera un corps commutatif de caractéristique nulle et V un Δ-espace vectoriel de dimension finie n.

Soit $\widehat{S}(V^*) = \prod_{k=0}^{\infty} S^k(V^*)$ la Δ-algèbre locale des fonctions formelles sur V dont l'idéal maximal $\prod_{k=1}^{\infty} S^k(V^*)$ sera noté $\mathcal{M}$. On notera encore $D(V)$ la Δ-algèbre de Lie et $\widehat{S}(V^*)$-module des Δ-dérivations de $\widehat{S}(V^*)$.

Pour $x \in V$ soit $\partial/\partial x$ l'élément de $D(V)$ qui est défini sur V^* par

$$\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \alpha(x), \ \alpha \in V^*.$$

L'homomorphisme

$$x \in V \mapsto \partial/\partial x \in D(V)$$

est injectif et permet d'identifier V à la sous-algèbre de Lie abélienne de $D(V)$ formée des éléments de la forme $\partial/\partial x$.

On munit $D(V)$ de la filtration $\{D^k(V), k \geq -1\}$ donnée par $D^k(V) = \mathcal{M}^{k+1} D(V)$ qui en fait une algèbre de Lie filtrée transitive, séparée et complète.

Posons $V_k = D(V)/D^k(V)$. On identifiera V_0 à V au moyen de l'isomorphisme

$$x \in V \mapsto \partial/\partial x \mod D^0(V).$$

On posera encore $A_k = \widehat{S}(V_k^*)$ et l'on notera $\mathcal{M}_k$ l'idéal maximal de A_k.

Les projections canoniques

$$\rho_\ell^k : V_k \to V_\ell, \ \ell \leq k$$

définissent par passage au dual, des homomorphismes injectifs d'algèbres locales:

$$j_k^\ell : A_\ell \to A_k, \ \ell \leq k.$$

On a bien sûr $j_\ell^\ell = id_{A_\ell}$ pour tout ℓ et $j_k^\ell \circ j_\ell^m = j_k^m$ pour $m \leq \ell \leq k$. De plus, $j_k^\ell(\mathcal{M}_\ell) = j_k^\ell(A_\ell) \cap \mathcal{M}_k$ pour $\ell \leq k$. On peut ainsi identifier A_ℓ à une sous-algèbre locale de A_k pour $\ell \leq k$. On obtient donc une suite croissante d'algèbre locales:

$$A_0 = \widehat{S}(V^*) \subset A_1 \subset \ldots \subset A_k \subset A_{k+1} \subset \ldots.$$

Définissons maintenant $D(V_k, V_\ell)$ pour $\ell \leq k$ comme étant l'ensemble des $X \in D(V_k)$ tels que $X(A_s) \subset A_s$ pour $\ell \leq s \leq k$. Il est clair que $D(V_k, V_\ell)$

est une sous-algèbre de Lie de $D(V_k)$ et un sous-A_ℓ-module si l'on munit $D(V_k)$ de la structure de A_ℓ-module sousjacente à sa structure de A_k-module.

Notons $\pi_\ell^k : D(V_k, V_\ell) \to D(V_\ell)$ l'application définie par

$$\pi_\ell^k(X)(f) = Xf, \ X \in D(V_k, V_\ell), \ f \in A_\ell.$$

Il est immédiat que π_ℓ^k est um homomorphisme d'algèbres de Lie filtrées.

On peut interpréter ce qui précède en termes de bases. Pour cela soit $e_1, \ldots, e_n$ une base de V dont $e^1, \ldots, e^n$ désignera la base duale. Posons

$$p_i^\alpha = e_i \otimes e^{\alpha_1} \ldots e^{\alpha_\ell} \quad \text{et} \quad p_i^0 = e_i, \ i = 1, \ldots, n$$

où $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell) \in \mathbb{N}^\ell$ est tel que $\leq \alpha_1 \leq \ldots \leq \alpha_\ell \leq n$. L'isomorphisme bien connu:

$$x \otimes f \in V \otimes_\Delta \widehat{S}(V^*) \mapsto f \, \partial/\partial x \in D(V)$$

induit un isomorphisme:

$$\sum_{\ell=0}^{k} V \otimes_\Delta S^\ell(V^*) \to V_k.$$

En identifiant ainsi $\sum_{\ell=0}^{k} V \otimes_\Delta S^\ell(V^*)$ à V^k les p_i^α, $i = 1, \ldots, n$ et $0 \leq |\alpha| \leq k$ (où $|\alpha| = \ell$ si $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_\ell)$ et $|\alpha| = 0$ si $\alpha = 0$) forment une base de V_k. Tout élément $X \in D(V_k)$ s'écrit alors de façon unique:

$$X = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=0}^{k} \sum_{|\alpha|=s} f_\alpha^i \, \partial/\partial p_i^\alpha, \ f_\alpha^i \in A_k.$$

Dire que $X \in D(V_k, V_\ell)$ équivaut à dire que $f_\alpha^i \in A_\ell$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $0 \leq |\alpha| \leq \ell$ et $f_\alpha^i \in A_s$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $|\alpha| = s$ si $\ell < s \leq k$.

Il s'ensuit que

$$\pi_\ell^k(X) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=0}^{\ell} \sum_{|\alpha|=s} f_\alpha^i \, \partial/\partial p_i^\alpha$$

donc $\pi_\ell^k : D(V_k, V_\ell) \to D(V_\ell)$ est surjective. En particulier, $D(V_k, V_\ell)$ est une sousalgèbre de $D(V_k)$ projetable sur $D(V_\ell)$ et π_ℓ^k est une projection ([7]). Il existe donc une sous-algèbre de Lie de $D(V_k)$ projetable maximale sur $D(V_\ell)$, et une seule, contenant $D(V_k, V_\ell)$ et sur laquelle on peut prolonger, nécessairement de façon unique, π_ℓ^k ([7] corollaire 4.4). Soit $\overline{D}(V_k, V_\ell)$ cette algèbre et soit $\bar{\pi}_\ell^k$ l'extension de π_ℓ^k à $\overline{D}(V_k, V_\ell)$. Il est clair que

$$\overline{D}(V_k, V_\ell) = \{X \in D(V_k) : X(A_\ell) \subset A_\ell\}$$

l'expression de $\bar{\pi}_\ell^k$ étant évident.

Désignons par G^k_ℓ le noyau de la projection $\rho^k_\ell : V_k \to V_\ell$. Il résulte des résultats antérieurs que

$$gr_0 D(V_k, V_\ell) = \{X \in V_k \otimes V_k^* : [X, G^k_s] \subset G^k_s \text{ pour } s = \ell, \dots, k\}$$

et que

$$gr_0\overline{D}(V_k, V_\ell) = \{X \in V_k\otimes V_k^* : [X, G^k_\ell] \subset G^k_\ell\}.$$

De plus $gr_{-1}\pi^k_\ell : V_k \to V_\ell$ coincide avec projection canonique $\rho^k_\ell : V_k \to V_\ell$.

Un calcul montre que la base $\{p_i^\alpha, i = 1,\dots,n;\ 0 \le |\alpha| \le k\}$ de V_k, construite plus haut, est quasi-régulière par rapport aux sous-espaces $gr_0D(V_k,V_\ell)$ et $gr_0\overline{D}(V_k,V_\ell)$ de $V_k\otimes V_k^*$ donc ces deux sous-espaces sont involutifs (cf. [4] et [9]). De plus si $s\ge 1$, $gr_sD(V_k,V_\ell)$ (resp. $gr_s\overline{D}(V_k,V_\ell)$) este le prolongement d'ordre s de $gr_0D(V_k,V_\ell)$ (resp. de $gr_0\overline{D}(V_k,V_\ell)$); par conséquent, $D(V_k,V_\ell)$ et $\overline{D}(V_k,V_\ell)$ sont des sous-algèbres de Lie acycliques de $D(V_k)$.

Si L est un Δ-espace vectoriel muni d'une filtration décroissante $\{L^s\}_{s\ge -1}$, on note $L_{[k]}$, pour $k\ge 0$, l'espace vectoriel L muni de la filtration définie par

$$(L_{[k]})^s = \begin{cases} L & \text{si } s=-1\\ L^{k+s} & \text{si } s\ge 0\end{cases}$$

On a ainsi

$$gr_{-1}L_{[k]} = L/L^k \quad\text{et}\quad gr_sL_{[k]} = gr_{k+s}L \ \text{ si } s\ge 0.$$

Si L est une algèbre de Lie filtrée transitive, il en est de même de $L_{[k]}$ pour tout $k\ge0$.

On a un homomorphisme injectif d'algèbres de Lie graduées:

$$j = (j_{-1}, j_0, \dots) : grD(V)_{[k]} \to grD(V_k)$$

défini par:

j_{-1} est l'application identique de $V_k = gr_{-1}D(V)_{[k]} = gr_{-1}D(V_k)$ et si $\ell\ge0$

$$j_\ell : V\otimes S^{k+\ell+1}(V^*) \to V_k \otimes S^{\ell+1}(V_k^*)$$

est donné par la formule:

$$j_\ell(x\otimes\alpha^1\dots\alpha^{k+\ell+1}) = \sum_{1\le j_1\le\dots\le j_k\le k+\ell+1} (x\otimes\alpha^{j_1}\dots\alpha^{j_k})\otimes\alpha^1\dots\widehat{\alpha^{j_1}}\dots\widehat{\alpha^{j_k}}\dots\alpha^{k+\ell+1}$$

En particulier, un élément $X\in j_\ell(gr_\ell D(V)_{[k]})$ vérifie

(1) $[x_1,[x_2,[\dots[x_{\ell+1},X]\dots]\in V\otimes S^k(V^*) = ker(V_k\to V_{k-1})$

pour tous $x_1\dots x_{\ell+1}\in V_k$;

(2) $[x,X]=0$ si $x\in G_0^k = ker(V_k\to V)$.

Ces conditions impliquent

(3) $j(grD(V)_{[k]}) \subset grD(V_k,V_\ell)$.

On identifiera désormais, au moyen de j, $grD(V)_{[k]}$ à une sous-algèbre de Lie graduée de $grD(V_k,V)$.

2. Prolongements.

2.1. **Theoreme.** *Pour tout $k\ge0$ il existe un homomorphisme d'algèbres de Lie:*

$$p_k : D(V)\to D(V_k)$$

vérifiant:

1) *$p_kD(V)$ est une sous-algèbre de Lie transitive de $D(V_k)$ contenue dans $D(V_k,V)$;*

2) *pour $\ell=0,\dots,k$*

$$\pi^k_\ell\circ p_k : D(V)_{[\ell]}\to D(V_\ell)$$

est un homomorphisme d'algèbres de Lie filtrées;

3) *$\pi^k_0\circ p_k$ est l'application identique de $D(V)$.*

Démonstration. Puisque $grD(V)_{[k]}$ s'identifie à une sous-algèbre de Lie graduée transitive de $grD(V_k,V)$ et que $D(V_k,V)$ est acyclique, le théorème 3 de [3] affirme l'existence d'un homomorphisme injectif d'algèbres de Lie filtrées $\psi_k : D(V)_{[k]}\to D(V_k,V)$ tel que $gr\,\psi_k$ soit l'inclusion canonique $j: grD(V)_{[k]}\to grD(V_k,V)$. En particulier, $\psi_k(D(V))$ est une sous-algèbre de Lie transitive de $D(V_k)$. De plus, il est immédiat que pour $\ell=0,\dots,k$, $\pi^k_\ell\circ\psi_k$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie filtrées de $D(V)_{[\ell]}$ dans $D(V_\ell)$ et que $\pi^k_0\circ\psi_k$ est un automorphisme de $D(V)$. Posons $L=\psi_k(D(V))$ et $h=\psi_k^{-1}: L\to D(V)$. Alors h est une projection de L sur $D(V)$ ([7] §3). D'après le corollaire 4.4 de [7], il existe un unique couple $(P,\tilde h)$ où P est une sous-algèbre de Lie de $D(V_k)$ projetable maximale sur $D(V)$ et $\tilde h : P\to D(V)$ une projection qui prolonge h. Puisque P et $\overline{D}(V_k,V)$ contiennent L, leur intersection $P\cap\overline{D}(V_k,V)$ est une sous-algèbre de Lie transitive de $D(V_k)$. De plus, $ker\ gr_0\tilde h = ker\ gr_0 h = ker\ \rho^k_0 = G^k_0$; donc gr_0P est la sous-algèbre de Lie de $V_k\otimes V_k^* = gr_0D(V_k)$ formé des endomorphismes laissant G_0^k stable. Il s'ensuit que $gr\overline{D}(V_k,V) = grP$. En vertu de l'acyclicité de P et de $\overline{D}(V_k,V)$ le lemme 3.11 de [7] implique $\overline{D}(V_k,V)=P$. On utilise maintenant la proposition 4.3 de [7] qui assure l'existence d'un automorphisme μ de l'algèbre de Lie filtrée $D(V)$ tel que $\tilde h = \mu\circ\pi^k_0$.

L'homomorphisme $p_k = \psi_k \circ \mu : D(V) \to D(V_k)$ satisfait à toutes les conditions du théorème.

2.2. **Definition.** Un prolongement d'ordre k de $D(V)$ est un homomorphisme d'algèbres de Lie $p_k : D(V) \to D(V_k)$ satisfaisant aux conditions du théorème précédent.

Remarquons qu'un prolongement p_k de $D(V)$ est toujours une application injective. Un prolongement d'ordre zéro est simplement l'application identique de $D(V)$.

2.3. **Proposition.** *Si p_k est un prolongement d'ordre k de $D(V)$ alors pour $\ell = 0, 1, \ldots, k-1$ l'application*

$$p_\ell = \pi^k_\ell \circ p_k : D(V) \to D(V_\ell)$$

est un prolongement d'ordre ℓ.

Démonstration. Il suffit de vérifier que $p_\ell D(V)$ est une sous-algèbre de Lie transitive de $D(V_\ell)$ ce qui est immédiat puisque $p_\ell D(V)$ est l'image de $p_k D(V)$ par la projection π^k_ℓ.

2.4. **Definition.** Avec les notations de 2.3 on dira que p_ℓ est le prolongement d'ordre ℓ de $D(V)$ induit par p_k.

2.5. **Theoreme.** *Si p_k et q_k sont des prolongements d'ordre k de $D(V)$ alors pour $\ell = 0, 1, \ldots, k$ il existe un automorphisme ϕ_ℓ de $D(V_\ell)$ et un seul tel que:*

$$q_\ell = \phi_\ell \circ p_\ell.$$

De plus, $\phi_\ell(D(V_\ell, V_{\ell-1})) = D(V_\ell, V_{\ell-1})$ et $\phi_{\ell-1}\,\pi^\ell_{\ell-1} = \pi^\ell_{\ell-1} \circ \phi_\ell$ sur $D(V_\ell, V_{\ell-1})$ pour $\ell = 1, \ldots, k$ et ϕ_0 est l'application identique de $D(V)$.

Démonstration. L'existence et unicité de $\phi_\ell (\ell = 0, \ldots, k)$ automorphisme de $D(V_\ell)$ satisfaisant $q_\ell = \phi_\ell \circ p_\ell$ est une conséquence du théorème 3 de [3]. Il est clair que ϕ_0 est l'application identique de $D(V)$. Pour $\ell = 1, \ldots, k$ considerons les sous-algèbres projetables maximales $D(V_\ell, V_{\ell-1})$ et $\phi_\ell(D(V_\ell, V_{\ell-1}))$ de $D(V_\ell)$ sur $D(V_{\ell-1})$ munies des projections $(\phi_{\ell-1})^{-1} \circ \pi^\ell_{\ell-1}$ et $\pi^\ell_{\ell-1} \circ (\phi_\ell)^{-1}$ respectivement. Ces deux sous-algèbres de Lie de $D(V_\ell)$ contiennent la sous-algèbre transitive $q_\ell D(V)$; de plus, les projections $(\phi_{\ell-1})^{-1} \circ \pi^\ell_{\ell-1}$ et $\pi^\ell_{\ell-1} \circ (\phi_\ell)^{-1}$ coincident sur $q_\ell D(V)$. Du corollaire 4.4 de [7] résulte alors que $\phi_\ell(D(V_\ell, V_{\ell-1})) = D(V_\ell, V_{\ell-1})$ et que $\pi^\ell_{\ell-1} \circ \phi_\ell = \phi_{\ell-1} \circ \pi^\ell_{\ell-1}$.

Remarque: Le théorème 2.5 admet une réciproque triviale c'est-à-dire si p_k est un prolongement d'ordre k de $D(V)$ et si ϕ_k est un automorphisme de $D(V_k)$ induisant, dans un sens évident, un automorphisme de $D(V_\ell)$ pour $\ell = 1, \ldots, k-1$ et l'identité sur $D(V)$, alors $q_k = \phi_k \circ p_k$ est un prolongement d'ordre k de $D(V)$.

Rappelons maintenant que si W est un Δ-espace vectoriel de dimension finie alors pour tout $H \in Aut\, \widehat{S}(W^*)$ l'application

$$H_* : X \in D(W) \to H \circ X \circ H^{-1} \in D(W)$$

est un automorphisme de l'algèbre de Lie filtrée $D(W)$. De plus, l'application

$$H \in Aut\ \widehat{S}(W^*) \to H_* \in Aut\, D(W)$$

est un isomorphisme de groupes ([7] théorème 2.5).

A l'aide de la remarque précédente, on peut donner une autre version du théorème 2.5. Soit G_k le groupe des automorphismes de A_k qui induisent, par restriction, un automorphisme de A_ℓ, pour $\ell = 1, \ldots, k-1$, et l'identité sur A_0. On a ainsi:

2.6. **Theoreme.** *Soit p_k un prolongement d'ordre k de $D(V)$. Alors por tout $H_k \in G_k$, l'application*

$$H_{k*}p_k : X \in D(V) \to H_k \circ p_k X \circ H_k^{-1} \in D(V_k)$$

est un prolongement d'ordre k de $D(V)$. De plus, l'application $H_k \in G_k \to H_{k*}p_k$ est une bijection de G_k sur l'ensemble des prolongements d'ordre k de $D(V)$.

Démonstration. La première partie du théorème est immédiate ainsi que l'injectivité de $H_k \to H_{k*}p_k$. Soit q_k un prolongement d'ordre k et soit ϕ_ℓ, pour $\ell \in \{0, 1, \ldots, k\}$, l'automorphisme de $D(V_\ell)$ vérifiant $q_\ell = \phi_\ell \circ p_\ell$. On note H_ℓ l'automorphisme de A_ℓ associé à ϕ_ℓ. On a ainsi $q_\ell = H_{\ell*}p_\ell$. Montrons que $H_k \in G_k$ ou, ce qui revient au même, que $H_k(f) = H_\ell(f)$ pour $f \in A_\ell$. On a pour tout $X \in D(V_k)$ et tout $f \in A_k$, $\phi_k(fX) = H_k(f)\phi_k(X)$. Si $X \in D(V_k, V_{k-1})$ et $f \in A_{k-1}$ alors $fX \in D(V_k, V_{k-1})$ donc $\phi_k(X), \phi_k(fX) \in D(V_k, V_{k-1})$. Il s'ensuit que $H_k(f) \cdot D(V_k, V_{k-1}) \subset D(V_k, V_{k-1})$ et par suite $H_k(f) \in A_{k-1}$. De l'égalité $\phi_k(fX) = H_k(f)\phi_k(X)$ et du fait que $\pi^k_{k-1} \circ \phi_k = \phi_{k-1} \circ \pi^k_{k-1}$ on déduit alors

$$\phi_{k-1}(f\pi^k_{k-1}(X)) = H_k(f)\phi_{k-1}(\pi^k_{k-1}(X)).$$

Or

$$\phi_{k-1}(f\pi^k_{k-1}(X)) = H_{k-1}(f)\phi_{k-1}(\pi^k_{k-1}(X))$$

donc

$$H_k(f)\phi_{k-1}(\pi^k_{k-1}(X)) = H_{k-1}(f)\phi_{k-1}(\pi^k_{k-1}(X))$$

pour tout $X \in D(V_k, V_{k-1})$ d'où $H_k(f) = H_{k-1}(f)$. A partir de ce résultat, une récurrence simple sur k permet d'achever la démonstration.

3. Prolongements de sous-algebres de Lie homogenes de D(V)

On considère un prolongement p_k d'ordre k de $D(V)$ et l'on note $p_\ell(\ell \leq k)$ le prolongement d'ordre ℓ induit par p_k.

Si L est un sous-Δ-espace vectoriel de $D(V)$ muni de la filtration induite de celle de $D(V)$, on posera

$$V_k^L = gr_{-1} p_k L = p_k L/(p_k L) \cap D^0(V_k)$$

et l'on notera $p_k^{A_\ell} L$ ou $p_k^\ell L$ pour $\ell = 0, 1, \ldots, k$ le sous-A_ℓ-module de $D(V_k)$ engendré par $p_k L$.

Fixons-nous maintenant un sous-espace vectoriel L de $D(V)$.

3.1. **Lemme.** *Pour $\ell = 0, 1, \ldots, k-1$, on a $p_k^\ell L \subset D(V_k, V_\ell)$ et la projection de $p_k^\ell L$ à $D(V_{k-1})$ est égale à $p_{k-1}^\ell L$.*

La démonstration de ce lemme est immédiate. On a encore:

3.2. **Lemme.** *Soit $X \in (p_k^\ell L)^0 = p_k L \cap D^0(V_k)$. On peut écrire*

$$X = \sum_{i=1}^{r} f^i p_k X_i$$

avec, pour tout i, $f^i \in \mathcal{M}_\ell$ ou $X_i \in L^k$.

Démonstration. On peut écrire $X = \Sigma f^i p_k Y_i$ où $f^i \in A_\ell$ et $Y_i \in L$. On note y_i la projection de $p_k Y_i$ sur V_k. Si $y_i = 0$ pour tout i, il n'y a rien à démontrer. Sinon, soit s le rang du système de vecteurs $y_1, \ldots, y_r$. On peut par exemple supposer que $y_1, \ldots, y_s$ sont Δ-indépendants et écrire $y_j = \sum_{i=1}^{s} \lambda_j^i y_i$ pour $j = s+1, \ldots, r$, où $\lambda_j^i \in \Delta$. Posons maintenant $X_i = Y_i$ pour $i = 1, \ldots, s$ et $X_j = Y_j - \sum_{i=1}^{s} \lambda_j^i Y_i$ pour $j = s+1, \ldots, r$. On a ainsi $X = \sum_{i=1}^{r} f^i p X_i$ où $f^i = g^i + \sum_{j=s+1}^{r} \lambda_j^i g^j$ si $i \leq s$ et $f^i = g^i$ si $i > s$. Il est clair que cette décomposition de X répond à la question.

3.3. **Corollaire.** *On a*

$$[gr_s p_k^\ell D(V), G_\ell^k] = 0$$

pour $\ell = 0, 1, \ldots, k$ et tout $s \geq -1$.

Démonstration. Puisque $p_k D(V)$ et par suite $p_k^\ell D(V)$, est une sous-algèbre transitive de $D(V_k)$, il suffit de démontrer que $[gr_0 p_k^\ell D(V), G_\ell^k] = 0$ pour $\ell = 0, \ldots, k$. Soit alors $X \in (p_k^\ell D(V))^0$. D'après 3.2, on peut écrire $X = \sum_{i=1}^{r} f^i p_k X_i$ où $f^i \in A_\ell$ et où pour tout i ou bien $f^i \in \mathcal{M}_\ell$ ou bien $X_i \in D^k(V)$. Si $\omega \in G_\ell^k$ on peut choisir $Y \in D^\ell(V)$ tel que $gr_{-1} p_k Y = \omega$. On a:

$$[X, p_k Y] = \Sigma f^i p_k [X_i, Y] - \Sigma (p_\ell Y)(f^i) p_k X_i.$$

Si $f^i \in \mathcal{M}_\ell$ alors $(p_\ell Y)(f^i) \in \mathcal{M}_\ell$ puisque $p_\ell Y \in D^0(V_\ell)$ donc $f^i p_k [X_i, Y]$ et $(p_\ell Y)(f^i) p_k X_i$ appartiennent à $D^0(V_k)$. Si $X_i \in D^k(V)$ alors $[X_i, Y] \in$ $\in D^{k+\ell}(V) \subset D^k(V)$ donc $f^i p_k [X_i, Y]$ et $(p_\ell Y)(f^i) p_k X_i$ appartiennent encore à $D^0(V_k)$. Il s'ensuit que $[(p_k^\ell D(V))^0, p_k D^\ell(V)] \subset D^0(V_k)$ donc $[gr_0 p_k^\ell D(V), G_\ell^k] = 0$.

On en déduit immédiatement:

3.4. **Corollaire.** *On a l'égalité*:

$$gr p_k^\ell D(V) = V_k \otimes_\Delta S(V_\ell^*).$$

3.5. **Corollaire.** *Si L est un sous-Δ-espace vectoriel de $D(V)$ les conditions suivantes sont équivalentes*:

1) $[gr_k L, V] \subset gr_{k-1} L$;
2) $gr_0 p_k^\ell L = V_k^L \otimes V_\ell^*$ *pour* $\ell = 0, 1, \ldots, k$;
3) *il existe* $\ell \in \{0, 1, \ldots, k\}$ *tel que* $gr_0 p_k^\ell L = V_k^L \otimes V_\ell^*$.

Démonstration. La condition 1) est équivalente à

$$[L^k, D(V)] \subset L^{k-1} + D^k(V)$$

d'où l'on déduit

$$[p_k L^k, p_k D(V)] \subset p_k L^{k-1} + p_k D^k(V),$$

inclusion de laquelle résulte la suivante

$$[p_k^\ell L^k, p_k D(V)] \subset p_k^\ell L^{k-1} + A_\ell p_k D^k(V)$$

et par suite

$$[gr_0 p_k^\ell L^k, V_k] \subset gr_{-1} p_k^\ell L^{k-1} \subset V_k^L.$$

En tenant compte de 3.4, cette inclusion donne

$$gr_0 p_k^\ell L^k \subset V_k^L \otimes V_\ell^*.$$

Or, d'après 3.2, on a $(p_k^\ell L)^0 = \mathcal{M}_\ell p_k L + p_k^\ell L^k$ et par conséquent $gr_0 p_k^\ell L \subset$ $\subset V_L^k \otimes V_\ell^*$. L'inclusion dans l'autre sens est immédiate, donc on a 2). Il est clair que 2) implique 3). Par ailleurs, la condition 3), compte tenu de 3.3 implique $[(p_k^\ell L)^0, p_k D(V)] \subset p_k L + D^0(V_k)$ et par suite $[(p_k L)^0, p_k D(V)] \subset$ $\subset p_k L + (p_k D(V))^0$ d'où $[L^k, D(V)] \subset L + D^k(V)$ et par conséquent on a 1).

3.6. **Lemme.** *Sont équivalentes les conditions suivantes*:

1) *gr* $p_k^\ell L = V_k^L \otimes_\Delta S(V_\ell^*)$;

2) *le* A_ℓ-*module* $p_k^\ell L$ *est libre de rang égal à* $\dim_\Delta V_k^L$.

Démonstration: Soient $X_1, \ldots, X_q \in L$ dont les classes modulo L^k forment une base de L/L^k. Considérons le sous-A_ℓ-module M de $D(V_k)$ engendré par $p_k X_1, \ldots, p_k X_q$. Il est clair que $M \subset p_k^\ell L$ et que $p_k X_1, \ldots, p_k X_q$ est une A_ℓ-base de M. Montrons que, sous l'hypothèse 1), on a $p_k^\ell L = M + (p_k^\ell L)^s$ pour tout $s \geq -1$. Cette égalité est immédiate pour $s = -1$ puisque $M \subset (p_k^\ell L)^{-1} = p_k^\ell L$ et pour $s = 0$ par construction de M. Admettons-la pour s i.e. admettons que si $X \in p_k^\ell L$, il existe $Y \in M$ tel que $X - Y \in (p_k^\ell L)^s$. Il s'ensuit que la classe de $X - Y$ modulo $(p_k^\ell L)^{s+1}$ appartient à $V_k^L \otimes S^{s+1}(V_\ell^*)$ i.e. elle est de la forme $\sum_{i=1}^{q} x_i \otimes f^i$, où x_i est la classe de $p_k X_i$ modulo $(p_k^\ell L)^0$ et $f^i \in V_\ell^*$. En posant $Y' = Y + \sum_{i=1}^{q} f^i p_k X_i$ on a $Y' \in M$ et $X - Y' \in (p_\ell^k L)^{s+1}$. Par conséquent, $p_k^\ell L \subset M + (p_k^\ell L)^{s+1}$; l'inclusion dans l'autre sens étant évidente, on a ainsi démontré par récurrence que $p_k^\ell L = M + (p_k^\ell L)^s$ pour tout $s \geq -1$. Puisque A_ℓ est un anneau local complet et que M est un A_ℓ-module de type fini, M est complet pour la $\mathscr{M}_\ell$-topologie. Or puisque M est libre de rang égal à $\dim_\Delta V_k^L$-$\dim_\Delta M/M^0$ la $\mathscr{M}_\ell$-topologie de M est identique à la topologie induite par celle de $D(V_k^\ell)$ (car on a en effet $\mathscr{M}_\ell^{s+1} M = M \cap D^s(V_k)$ pour tout s): par conséquent M est fermé dans $D(V_k)$ et l'on a $M = \bigcap_{s \geq -1} (M + D^s(V_k)) \supset \bigcap_{s \geq -1} (M + (p_k^\ell L)^s) = p_k^\ell L$ i.e. $M = p_k^\ell L$ ce qui démontre 2). Le fait que 2) implique 1) est immédiat.

3.7. **Lemme.** *Les conditions suivantes sont équivalentes*:

1) *pour tout* $\ell \in \{0, 1, \ldots, k\}$, $p_k^\ell L$ *est un* A_ℓ-*module libre de rang égal à* $\dim_\Delta V_k^L$;

2) *il existe* $\ell \in \{0, 1, \ldots, k\}$ *tel que* $p_k^\ell L$ *soit un* A_ℓ-*module libre de rang égal à* $\dim_\Delta V_k^L$.

Démonstration. La condition 1) implique naturellement 2). Supposons donc que $p_k^\ell L$ est libre de rang égal à $\dim_\Delta V_k^L$ pour un certain $\ell \in \{0, 1, \ldots, k\}$. Soient $X_1, \ldots, X_q \in L$ dont les projections $x_1, \ldots, x_q$ dans V_k forment une base de V_k^L. Alors $p_k X_1, \ldots, p_k X_q$ sont $A_{\ell'}$-indépendants pour tout $\ell' \in \{0, 1, \ldots, k\}$ et forment une A_ℓ-base de $p_k^\ell L$. Si $\ell' > \ell$ alors on a $p_k^{\ell'} L = A_{\ell'} p_k^\ell L$ donc $p_k X_1, \ldots, p_k X_q$ engendrent $p_k^{\ell'} L$ et par suite en constituent une $A_{\ell'}$-base. Si $\ell' < \ell$, on a $p_k^{\ell'} L \subset p_k^\ell L$ donc $gr p_k^{\ell'} L \subset gr p_k^\ell L$. De 3.6 et 3.4, on déduit $gr p_k^{\ell'} L \subset V_k^L \otimes_\Delta S(V_\ell^*) \cap V_k \otimes_\Delta S(V_{\ell'}^*) = V_k^L \otimes_\Delta S(V_{\ell'}^*)$. Come par ailleurs $gr p_k^{\ell'} L \supset V_k^L \otimes_\Delta S(V_{\ell'}^*)$ on a $gr p_k^{\ell'} L = V_k^L \otimes_\Delta S(V_{\ell'}^*)$ ce qui, d'après 3.6, implique que $p_k^{\ell'} L$ est libre de rang égal à $\dim_\Delta V_k^L$.

Rappelons qu'une sous-algèbre de Lie L de $D(V)$ est dite *homogène* si son normalisateur $N(L)$ dans $D(V)$ est une sous-algèbre de Lie transitive de $D(V)$.

3.8. **Proposition.** *Si* L *est une sous-algèbre de Lie homogène de* $D(V)$ *alors* $p_k^\ell L$ *est un* A_ℓ-*module libre de rang égal à* $\dim_\Delta V_k^L$ *pour tout* $\ell \in \{0, 1, \ldots, k\}$.

Démonstration. D'après 3.7 et 3.6, il suffit de démontrer que $gr p_k^0 L = V_k^L \otimes_\Delta S(V^*)$. On a toujours $gr_{-1} p_k^0 L = V_k^L$ et $gr p_k^0 L \supset V_k^L \otimes_\Delta S(V^*)$. D'autre part, puisque L est homogène, on a $[grL, V] \subset grL$ donc, d'après 3.5 on a $gr_0 p_k^0 L = V_k^L \otimes V^*$. De nouveau, la transitivité de $N(L)$ et 3.3 impliquent

$$[gr_s p_k^0 L, V_k] = [gr_s p_k^0 L, V_k^{N(L)}] \subset gr_{s-1} p_k^0 L$$

pour tout $s \geq 0$. Comme $gr_0 p_k^0 L = V_k^L \otimes V^*$ on en déduit que $gr_s p_k^0 L \subset V_k^L \otimes S^{s+1}(V^*)$ pour tout $s \geq 0$ ce qui achève la démonstration.

4. Familles de Prolongements

Dans ce paragraphe, on se propose de montrer que tout prolongement p_k d'ordre k de $D(V)$ est induit par un prolongement p_{k+1} d'ordre $k+1$ et introduire ainsi les familles de prolongements (ou prolongements d'ordre infini) de $D(V)$. On peut remarquer que l'existence de p_{k+1} induisant p_k peut être obtenue comme conséquence des théorèmes 2.1 et 2.6. Pour des raisons qui deviendront claires par la suite, on a préféré donner ici une démonstration basée sur la théorie des invariants de sous-algèbres de Lie de $D(V)$.

Soit L une sous-algèbre de Lie de $D(V)$. On note $\widehat{L}$ le sous-A_0-module ($A_0 = \widehat{S}(V^*)$) de $D(V)$ engendré par L. Rappelons qu'un invariant de L est un élément $f \in A_0$ tel que $X(f) = 0$ por tout $X \in L$. Il est clair que l'ensemble A_L des invariants de L est une sous-algèbre de A_0 contenant les constantes (i.e. $A_L \supset \Delta$). On a de plus $A_{\widehat{L}} = A_L$ et A_L est fermé dans A_0 pour la topologie définie par l'idéal maximal $\mathscr{M}_0$ de A_0. Il n'est, d'ailleurs, par difficile de démontrer que A_L est un anneau local, d'idéal maximal $\mathscr{M}_0 \cap A_L$ et de même corps résiduel que A_0.

On rappelle qu'un sous-A_0-module M de $D(V)$ est une distribution (involutive) de rang p si M est libre de rang égal à $p = \dim_\Delta M/M^0$ et si M est une sous-algèbre de Lie de $D(V)$. On a la version algébrique suivante du théorème de Frobénius (cf. [1], théo. 3.3).

4.1. **Theoreme.** *Pour un sous-A_0-module M de $D(V)$ les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) M est une distribution involutive de rang p;

2) si $x_1, \ldots, x_n$ est une base de V il existe un automorphisme ϕ de l'algèbre de Lie filtrée $D(V)$ tel que le A_0-module $\phi(M)$ soit engendré par $\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_p$.

4.2. **Definition.** On dit que $f_1, \ldots, f_p \in \mathscr{M}_0$ sont indépendants si leurs classes modulo $\mathscr{M}_0^2$ forment une partie livre du Δ-espace vectoriel $\mathscr{M}_0/\mathscr{M}_0^2 = V^*$.

Du théorème 4.1, on déduit facilement:

4.3. **Lemme.** *Si $\hat{L}$ est une distribution de rang p, alors il existe $n-p$ éléments indépendants $f_{p+1}, \ldots, f_n \in \mathscr{M}_0$ tels que la sous-algèbre de A_0 engendrée par $f_{p+1}, \ldots, f_n$ soit dense dans A_L, c.à.d. $A_L = \Delta[[f_{p+1}, \ldots, f_n]]$. Réciproquement, si $f_{p+1}, \ldots, f_n$ sont des éléments indépendants de $\mathscr{M}_0$ il existe une distribution M et une seule de $D(V)$ telle que $A_M = \Delta[[f_{p+1}, \ldots, f_n]]$.*

Appelons I_L l'idéal de A_0 engendré par $\mathscr{M}_0 \cap A_L$. On a bien sur $I_L = I_{\hat{L}}$. Du lemme 4.3 on déduit:

4.4. **Lemme.** *Si $\hat{L}$ est une distribution de rang p alors I_L est engendré par $n-p$ éléments indépendants de $\mathscr{M}_0$ qui sont des invariants de L.*

A l'aide de 4.1 on en déduit encore:

4.5. **Lemme.** *L'idéal I_L de A_0 est stable par L. De plus, si $\hat{L}$ est une distribution, I_L est maximal dans l'ensemble des idéaux de A_0 stables par L.*

On applique maintenant ces résultats aux prolongements.

Si k et s sont deux entiers positifs, on pose

$$V_{k,s} = D(V_k)/D^s(V^k) \quad \text{et} \quad A_{k,s} = \hat{S}(V_{k,s}^*)$$

et l'on note $\mathscr{M}_{k,s}$ l'idéal maximal de $A_{k,s}$. On a bien sûr $V_{k,0} = V_k$.

Considérons maintenant un prolongement d'ordre $k > 0$ de $D(V)$:

$$p_k : D(V) \to D(V_k)$$

et un prolongement d'ordre $\ell > 0$ de $D(V_k)$:

$$q_\ell : D(V_k) \to D(V_{k,\ell}).$$

Pour $s = 0, \ldots, \ell$ l'application composée $q_s \circ p_k$ est un homomorphisme injectif d'algèbres de Lie filtrées de $D(V)_{[k+s]}$ dans $D(V_{k,s})$ et induit un homomorphisme injectif d'espaces vectoriels:

$$j_{k,s} : V_{k+s} \to V_{k,s}.$$

On a le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc} V_{k+s} & \xrightarrow{j_{k,s}} & V_{k,s} = gr_{-1}q_sD(V_k) \\ \downarrow & & \downarrow \\ V_{k+s+1} & \xrightarrow{j_{k,s-1}} & V_{k,s-1} = gr_{-1}q_{s-1}D(V_k) \end{array}$$

les flèches verticales étant les projections canoniques.

En passant au dual, on obtient un homomorphisme surjectif:

$$j_{k,s}^* : V_{k,s}^* \to V_{k+s}^*$$

donc un homomorphisme surjectif d'algèbres locales

$$A_{k,s} \to A_{k+s}$$

dont le noyau sera noté $I_{k,s}$. Il est clair que $I_{k,s}$ est engendré par le noyau de $j_{k,s}^*$. On a de plus

$$I_{k,0} = 0 \quad \text{et} \quad I_{k,s-1} = A_{k,s-1} \cap I_{k,s} \ (s = 1, \ldots, \ell)$$

comme résulte du diagramme commutatif précédent.

Appelons $\mathscr{J}_{k,s}$ l'idéal de $A_{k,s}$ engendré par les invariants non inversibles de $q_s p_k D(V)$ $(0 \leq s \leq \ell)$.

4.6. **Lemme.** *L'idéal $\mathscr{J}_{k,s}$ est indépendant des prolongements p_k et q_s choisis.*

Démonstration. Soient $\bar{p}_k$ et $\bar{q}_s$ des prolongements d'ordre k et s et $D(V)$ et $D(V_k)$ respectivement. D'après 2.5, on peut écrire $\bar{q}_s = \psi_s \circ q_s$ et $\bar{p}_k = \phi_k \circ p_k$ où ψ_s (resp. ϕ_k) est un automorphisme de l'algèbre de Lie filtrée $D(V_{k,s})$ (resp. $D(V_k)$). Puisque $\bar{q}_s D(V_k)$ est une sous-algèbre de Lie transitive de $D(V_{k,s})$, le théorème 4 de [3] affirme l'existence et unicité d'un automorphisme $\phi_{k,s}$ de $D(V_{k,s})$ vérifiant

$$\phi_{k,s} \circ \bar{q}_s = \bar{q}_s \circ \phi_k.$$

On a ainsi

$$\bar{q}_s \circ \bar{p}_k = \phi_{k,s} \circ \psi_s \circ q_s \circ p_k.$$

Il en résulte que $q_s(p_k D(V))$ et $\bar{q}_s(\bar{p}_k D(V))$ ont les mêmes invariants, donc le même idéal engendré par les invariants non inversibles.

Puisque $p_k D(V)$ est une sous-algèbre transitive de $D(V_k)$, la proposition 3.8 implique que le $A_{k,s}$-sous-module de $D(V_{k,s})$ engendré par $q_s(p_k D(V))$ est une distribution de rang égal à $dim_\Delta gr_{-1} q_s(p_k D(V)) = $ $= dim_\Delta V_{k+s}$. De lemme 4.4 on déduit alors que $\mathscr{J}_{k,s}$ est engendré par $dim\ V_{k,s} - dim\ V_{k+s}$ éléments indépendants de $\mathscr{M}_{k,s}$. Il en résulte en particulier

$$(\mathscr{M}_{k,s})^r \cdot \mathscr{J}_{k,s} = (\mathscr{M}_{k,s})^{r+1} \cap \mathscr{J}_{k;s}. \tag{4.7}$$

Des définitions de $\mathcal{J}_{k,s}$ et de $I_{k,s}$ ainsi que de 4.7 on déduit aussi

$$gr\mathcal{J}_{k,s} = grI_{k,s} \tag{4.8}$$

i.e.

$$(\mathcal{M}_{k,s})^r \mathcal{J}_{k,s}/(\mathcal{M}_{k,s})^{r+1}\mathcal{J}_{k,s} = (\mathcal{M}_{k,s})^r I_{k,s}/(\mathcal{M}_{k,s})^{r+1} I_{k,s}, \quad r \geq 0.$$

4.9. **Lemme.** *On a* $\mathcal{J}_{k,s-1} = \mathcal{J}_{k,s} \cap A_{k,s-1}$.

Démonstration. On a bien sûr $\mathcal{J}_{k,s-1} \subset \mathcal{J}_{k,s} \cap A_{k,s-1}$. D'autre part, $\mathcal{J}_{k,s} \cap A_{k,s-1}$ est un idéal de $A_{k,s-1}$, stable par $q_{s-1}(p_k D(V))$ donc, d'après 4.5, il est contenu dans $\mathcal{J}_{k,s-1}$.

4.10. **Proposition.** *Il existe un automorphisme H_ℓ de l'algèbre locale $A_{k,\ell}$ vérifiant*:

1) $H_\ell(A_{k,s}) = A_{k,s}$ *et* $H_\ell(\mathcal{J}_{k,s}) = I_{k,s}$ *pour* $s = 0, 1, \dots, \ell$;
2) $H_\ell(f) = f$ *si* $f \in A_k$.

Démonstration. On a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{M}_k/\mathcal{M}_k^2 \to \mathcal{M}_{k,1}/(\mathcal{M}_{k,1})^2 & \to & \dots & \to & \mathcal{M}_{k,\ell}/(\mathcal{M}_{k,\ell})^2 \\ & & & & \uparrow \\ \mathcal{J}_{k,1}/\mathcal{M}_{k,1}\mathcal{J}_{k,1} & \to & \dots & \to & \mathcal{J}_{k,\ell}/\mathcal{M}_{k,\ell}\mathcal{J}_{k,\ell} \end{array}$$

toutes les flèches étant les injections canoniques. Posons $u_s = dim_\Delta V_{k+s}$ et $v_s = dim_\Delta V_{k,s} - dim_\Delta V_{k+s} = dim_\Delta \mathcal{J}_{k,s}/\mathcal{M}_{k,s}\mathcal{J}_{k,s}$. Choisissons une base $\alpha_1, \dots, \alpha_{u_\ell}, \beta_1, \dots, \beta_{v_\ell}$ de $\mathcal{M}_{k,\ell}/(\mathcal{M}_{k,\ell})^2$ telle que

1) $\alpha_1, \dots, \alpha_{u_0}$ est une base de $\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_k^2$;
2) $\beta_1, \dots, \beta_{v_s}$ est une base de $\mathcal{J}_{k,s}/\mathcal{M}_{k,s}\mathcal{J}_{k,s}$, $s = 1, \dots, \ell$;
3) $\alpha_1, \dots, \alpha_{u_s}, \beta_1, \dots, \beta_{v_s}$ est une base de $\mathcal{M}_{k,s}/(\mathcal{M}_{k,s})^2$, $s = 1, \dots, \ell$.

On considère maintenant des éléments $f_1, \dots, f_{u_\ell}, g_1, \dots, g_{v_\ell}, h_1, \dots, h_{v_\ell}$ de $\mathcal{M}_{k,\ell}$ vérifiant

1) $f_1, \dots, f_{u_0} \in \mathcal{M}_k$;
2) $g_1, \dots, g_{v_s} \in \mathcal{J}_{k,s}$ et $h_1, \dots, h_{v_s} \in I_{k,s}$, $s = 1, \dots, \ell$;
3) $f_1, \dots, f_{u_s} \in \mathcal{M}_{k,s}$, $s = 1, \dots, \ell$.
4) la classe de f_i, $i = 1, \dots, u_\ell$ (resp. de g_j et de h_j, $j = 1, \dots, v_\ell$) modulo $(\mathcal{M}_{k,\ell})^2$ est égale à α_i (resp. à β_j).

Il résulte alors de [10] (ch. VIII, théorème 7) que

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k &= (f_1, \dots, f_{u_0}) \\ \mathcal{J}_{k,s} &= (g_1, \dots, g_{v_s}), \ 1 \leq s \leq \ell \\ I_{k,s} &= (h_1, \dots, h_{v_s}), \ 1 \leq s \leq \ell \\ \mathcal{M}_{k,s} &= (f_1, \dots, f_{u_s}, g_1, \dots, g_{v_s}), \ 1 \leq s \leq \ell. \end{aligned}$$

Il est maintenant immédiat, qu'en posant

$$\begin{aligned} H_\ell(f_i) &= f_i, \ i = 1, \dots, u_\ell \\ H_\ell(g_j) &= h_j, \ j = 1, \dots, v_\ell \end{aligned}$$

on définit un automorphisme H_ℓ de $A_{k,\ell}$ vérifiant toutes les conditions du théorème.

4.11. **Corollaire.** *Pour tout $s \in \{1, \dots, \ell\}$ on peut trouver un homomorphisme surjectif d'algèbres locales*

$$\alpha_{k,s} : A_{k,s} \to A_{k+s}$$

dont le noyau est $\mathcal{J}_{k,s}$ et de sorte que le diagramme suivant soit commutatif:

$$\begin{array}{ccccccc} A_k & \to & A_{k,1} & \to & \dots & \to & A_{k,\ell} \\ \| & & \downarrow \alpha_{k,1} & & & & \downarrow \alpha_{k,\ell} \\ A_k & \to & A_{k+1} & \to & \dots & \to & A_{k+\ell} \end{array}$$

les flèches horizontales étant les injections canoniques.

Avec les notations de 4.11 on peut maintenant définir

$$p_{k+\ell} : D(V) \to D(V_{k+\ell})$$

par la formule

$$p_{k+\ell}X \circ \alpha_{k,\ell} = \alpha_{k,\ell} \circ q_\ell(p_k X). \tag{4.12}$$

Une vérification simple montre que $p_{k+\ell}$ est un prolongement d'ordre $k+\ell$ induisant p_k. On a ainsi démontré:

4.13. **Theoreme.** *Etant donné un prolongement p_k d'ordre k de $D(V)$ alors pour tout $\ell > 0$, il existe un prolongement $p_{k+\ell}$ d'ordre $k+\ell$ induisant p_k. Un tel prolongement peut être obtenu, à l'aide d'un prolongement q_ℓ d'ordre ℓ de $D(V_k)$, à partir de la formule 4.12.*

Ce théorème justifie la définition suivante:

4.14. **Definition.** Une famille de prolongements de $D(V)$ est une suite $\{p_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ où, pour tout $k \in \mathbb{N}$, p_k est un prolongement d'ordre k de $D(V)$ chaque p_k étant induit par p_{k+1}.

On a pour les familles de prolongements des théorèmes analogues à 2.5 et 2.6 dont on ommettra ici les énoncés. Signalons toutefois que l'ensemble des familles de prolongements est en bijection avec le groupe $lim\,(G_k, R_k)$ où $R_k : G_{k+1} \to G_k$ est l'application restriction (cf. 2.6).

Avec les notations de ce paragraphe, posons

$$P = \{X \in D(V_{k,\ell}) / X(\mathcal{I}_{k,\ell}) \subset \mathcal{I}_{k,\ell}\}.$$

Il n'est pas difficile de voir que P est en fait le sous-$A_{k,\ell}$-module de $D(V_{k,\ell})$ engendré par $q_\ell(p_k D(V))$, mais ce fait ne sera pas utilisé ici.

Rappelons (cf. p. 10) que $q^k_\ell(p_k D(V))$ (resp. $p^k_{k+\ell}D(V)$) désigne le sous-A_k-module de $D(V_{k,\ell})$ (resp. de $D(V_{k+\ell})$) engendré par $q_\ell(p_k D(V))$ (resp. par $p_{k+\ell}D(V)$).

L'application $\alpha_{k,\ell} : A_{k,\ell} \to A_{k+\ell}$ induit un homomorphisme h d'algèbres de Lie filtrées de P dans $D(V_{k+\ell})$ et il est clair que $h(q^k_\ell(p_k D(V))) = p^k_{k+\ell}D(V)$. On a, plus précisément:

4.15. **Proposition.** *L'application $h : q^k_\ell(p_k D(V)) \to p^k_{k+\ell}D(V)$ est un isomorphisme de A_k-modules filtrés et de Δ-algèbres de Lie filtrées.*

La démonstration de 4.15 ne présente pas de difficultés. Il suffit, en effet, de remarquer que si $X_1, \dots, X_{u_{k+\ell}}$ sont des éléments de $D(V)$ dont les classes modulo $D^{k+\ell}(V)$ forment une base de $V_{k+\ell}$ alors $q_\ell(p_k X_1), \dots, q_\ell(p_k X_{u_{k+\ell}})$ (resp. $p_{k+\ell}X_1, \dots, p_{k+\ell}X_{u_{k+\ell}}$) forment une base du A_k-module $q^k_\ell(p_k D(V))$ (resp. de $p^k_{k+\ell}D(V)$), et d'utiliser le fait que $h(q_\ell(p_k X)) = p_{k+\ell}X$ $(X \in D(V))$.

5. Algebres de Lie regulieres

On conserve dans ce paragraphe les notations des paragraphes précédents. On se donne en plus une famille de prolongements $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $D(V)$.

5.1. **Lemme.** *Soit L une distribution (pas nécessairement involutive) de $D(V)$ et soient $X_1, \dots, X_q \in D(V)$ dont les projections $x_1, \dots, x_q$ sur V forment une base d'un sous-espace W de V tel que $W \cap gr_{-1}L = 0$. Alors si $f^1, \dots, f^q \in \hat{S}(V^*)$ sont tels que $\sum_{i=1}^{q} f^i X_i \in L$, on a $f^1 = \dots = f^q = 0$.*

Démonstration. Ecrivons $f^i = \alpha^i_0 + \alpha^i_1 + \dots + \alpha^i_t + \dots$ où $\alpha^i_t \in S^t(V^*)$. On a, en posant $X = \sum_{i=1}^{q} f^i X_i$, $gr_{-1}X = \sum_{i=1}^{q} \alpha^i_0 x_i \in W \cap gr_{-1}L = 0$ donc $\alpha^i_0 = 0$ pour tout i ou encore $X \in L^0$. Continuons par récurrence en supposant que $X \in L^t$; on a donc $f^i \in \mathcal{M}_0^{t+1}$ pour tout i et par suite $gr_t X = \sum_{i=1}^{q} x_i \otimes \alpha^i_{t+1} \in gr_t L \cap W \otimes S^{t+1}(V^*)$. Or, L étant une distribution, on a $gr_t L = gr_{-1} L \otimes S^{t+1}(V^*)$ ([7 bis] proposition 1.5) donc

$$gr_t L \cap W \otimes S^{t+1}(V^*)$$

et par conséquent $gr_t X = 0$ i.e. $X \in L^{t+1}$ ou encore $f^i \in \mathcal{M}_0^{t+2}$.

5.2. **Lemme.** *Soient L et M deux sous-Δ-espaces vectoriels de $D(V)$ tels que*

1) *$\hat{L}$ et $\hat{M}$ sont des distributions;*
2) *$gr_{-1}(L \cap M) = gr_{-1}L \cap gr_{-1}M$.*

Alors $\widehat{L \cap M}$ est une distribution et $\widehat{L \cap M} = \hat{L} \cap \hat{M}$.

Démonstration. Si $gr_{-1}L \cap gr_{-1}M = 0$ on a $\hat{L} \cap \hat{M} = 0$ d'après 5.1, donc $L \cap M = 0$ et le lemme est vérifié dans ce cas. Supposons $gr_{-1}L \cap gr_{-1}M \neq 0$ et soit W un sous-espace vectoriel de V tel que $gr_{-1}M = gr_{-1}(L \cap M) \oplus W$. On a bien sûr $gr_{-1}L \cap W = 0$. Soient $X_1, \dots, X_{p+q} \in M$ tels que $X_1, \dots, X_p \in L \cap M$ et dont les projections $x_1, \dots, x_{p+q}$ sur V sont telles que $x_1, \dots, x_p$ soit une base de $gr_{-1}(L \cap M)$ et $x_{p+1}, \dots, x_{p+q}$ une base de W. Puisque $\hat{M}$ est une distribution, $X_1, \dots, X_{p+q}$ est une base de $\hat{M}$ comme $\hat{S}(V^*)$-module. Soit $X \in \widehat{L \cap M}$; en particulier, $X \in \hat{M}$ donc on peut écrire $X = \sum_{i=1}^{p+q} f^i X_i$. Or $X, X_1, \dots, X_p \in L$ donc $\sum_{i=p+1}^{p+q} f^i X_i = X - \sum_{i=1}^{p} f^i X_i \in \hat{L}$. Le lemme 5.1 implique alors $f^{p+1} = \dots = f^{p+q} = 0$ d'où $X = \sum_{i=1}^{p} f^i X_i$. Par conséquent, $X_1, \dots, X_p$ engendrent $\widehat{L \cap M}$ sur $\hat{S}(V^*)$ et par suite, $\widehat{L \cap M}$ est une distribution de rang p. Le même raisonnement montre que $\hat{L} \cap \hat{M}$ est aussi une distribution de rang p; comme par ailleurs on a $\widehat{L \cap M} \subset \hat{L} \cap \hat{M}$, il s'ensuit que $\widehat{L \cap M} = \hat{L} \cap \hat{M}$.

5.3. **Definition.** Un sous-Δ-espace vectorial L de $D(V)$ est dit régulier à l'ordre $k_0 \in \mathbb{N}$, si pour tout entier $k \geq k_0$ le sous-$\hat{S}(V_k^*)$-module $p_k L$ engendré par $p_k L$ est une distribution. Une sous-algèbre de Lie de $D(V)$ est dite régulière si l'espace vectoriel sous-jacent est régulier.

D'après 2.5, cette définition est indépendante de la famille de prolongements (p_k) choisie.

Il résulte de 3.8 que toute sous-algèbre homogène, en particulier donc transitive, de $D(V)$ est régulière à l'ordre 0.

5.4. **Lemme.** *Si L est un sous-espace de $D(V)$ régulier à l'ordre k_0 alors pour tout entier $k \geq k_0$ on a $[gr_k L, V] \subset gr_{k-1} L$.*

Démonstration. Soit k un entier $\geq k_0$. Puisque $\widehat{p_k L}$ est une distribution on a $gr_0 \widehat{p_k L} = V_k^L \otimes V_k^*$ donc $gr_0 p_k L \subset V_k^L \otimes V_k^*$ ou, d'une façon équivalente, $[gr_0 p_k L, V_k] \subset V_k^L$. Or, puisque $p_k D(V)$ est une sous-algèbre transitive de $D(V_k)$ et que $(p_k L)^0 = p_k L^k$, cette dernière inclusion este encore équivalente à

$$[p_k L^k, p_k D(V)] \subset p_k L + p_k D^k(V)$$

d'où, en projetant sur $D(V)$:

$$[L^k, D(V)] \subset L + D^k(V)$$

d'où encore $[gr_k L, V] \subset L/L^k$. Comme d'autre part, $[gr_k L, V] \subset gr_{k-1} D(V)$, on a finalement $[gr_k L, V] \subset gr_{k-1} L$.

5.5. **Lemme.** *Si L et M sont deux sous-espaces vectoriels de $D(V)$ et k_0 un entier positif ou nul, les conditions suivantes sont équivalentes:*

1) $L/L^{k_0} \cap M/M^{k_0} = (L \cap M)/(L \cap M)^{k_0}$ *et* $gr_k L \cap gr_k M = gr_k(L \cap M)$ *pour tout* $k \geq k_0$, *i.e.* $grL_{[k_0]} \cap grM_{[k_0]}\, gr(L \cap M)_{[k_0]}$.
2) $L/L^k \cap M/M^k = (L \cap M)/(L \cap M)^k$ *pour tout* $k \geq k_0$.
3) $V_k^L \cap V_k^M = V_k^{L \cap M}$ *pour tout* $k \geq k_0$.

Démonstration. Soit $i : V_k \to V_k$ l'isomorphisme induit par p_k. On a $V_k^L = i(L/L^k)$, $V_k^M = i(M/M^k)$, $V_k^{L \cap M} = i((L \cap M)/(L \cap M)^k)$ et $V_L^k \cap V_k^M = i(L/L^k \cap M/M^k)$. L'équivalence de 2) et 3) en résulte. Remarquons maintenant que les inclusions $L/L^k \cap M/M^k \supset (L \cap M)/(L \cap M)^k$ et $gr_{k-1} L \cap gr_{k-1} M \supset gr_{k-1}(L \cap M)$ sont vérifiées pour tout entier $k \geq 0$. On a donc le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & gr_{k-1}(L \cap M) & \to & (L \cap M)/(L \cap M)^k & \to & (L \cap M)/(L \cap M)^{k-1} & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & gr_{k-1} L \cap gr_{k-1} M & \to & L/L^k \cap M/M^k & \to & L/L^{k-1} \cap M/M^{k-1} & &
\end{array}$$

dont les lignes et colonnes sont exactes. A partir de ce diagramme l'équivalence de 1) et 2) se déduit par récurrence sur k.

On utilise ce lemme pour démontrer:

5.6. **Proposition.** *Si L et M sont deux sous-espaces de $D(V)$ régulier à l'ordre k_0 et si $grL_{[k_0]} \cap grM_{[k_0]} = gr(L \cap M)_{[k_0]}$ alors $L \cap M$ est aussi régulier à l'ordre k_0.*

Démonstration. Puisque p_k est injectif pour tout k, on a $p_k L \cap p_k M = p_k(L \cap M)$. D'autre part, on a, d'après 5.5, $gr_{-1} p_k L \cap gr_{-1} p_k M = gr_{-1} p_k(L \cap M)$ pour tout $k \geq k_0$. D'après 5.2, pour tout $k \geq k_0$, $\widehat{p_k(L \cap M)}$ est une distribution. La proposition est ainsi démontrée.

En appliquant successivement 4.15 et 3.7 on montre facilement:

5.7. **Proposition.** *Si L est un sous-espace vectoriel de $D(V)$ et k un entier positif ou nul, alors L est régulier à l'ordre k_0 si et seulement si $p_k L$ est régulier à l'ordre $Max(k - k_0, 0)$.*

On se propose maintenant de donner une autre caracterisation des sous-algèbres de Lie régulières de $D(V)$. Rappelons d'abord.

5.8. **Definition.** Si E est un sous-espace vectoriel de $V \otimes S^\ell(V^*)$ $(\ell \geq 0)$ et si k est un entier positif, le k^e prolongement de E est le sous-espace vectoriel de $V \otimes S^{k+\ell}(V^*)$ donné par $p_k E = E \otimes S^k(V^*) \cap V \otimes S^{k+\ell}(V^*)$;

On dit qu'un sous-espace vectoriel L de $D(V)$ est 1-acyclique à l'ordre ℓ si

$$gr_{k+\ell} L = p_k(gr_\ell L) \text{ pour tout } k \geq 1.$$

Il est clair que si L est 1-acyclique à l'ordre ℓ on a $[V, gr_{k+1} L] \subset gr_k L$ pour tout $k \geq \ell$. Inversement, on a le résultat bien connu suivant, que l'on admettra ici. (cf. [8], propositions 2.1 et 2.5, [9] §4.6).

5.9. **Proposition.** *Soit L un sous-espace vectoriel de $D(V)$. Supposons qu'il existe $\ell_0 \geq 0$ tel que $[V, gr_{k+1} L] \subset gr_k L$ pour tout $k \geq \ell_0$. Alors il existe $\ell_1 \geq \ell_0$ tel que L soit 1-acyclique à l'ordre ℓ_1.*

On peut maintenant énoncer:

5.10. **Theoreme.** *Soit L une sous-algèbre de Lie de $D(V)$, fermée pour la topologie de la filtration de $D(V)$. Si L est régulière alors il existe un entier $k_0 \geq 0$ tel que L soit 1-acyclique à l'ordre k_0. Inversement, s'il existe un entier $k_0 \geq 0$ tel que les conditions:*

1) *L est 1-acyclique à l'ordre k_0;*
2) *$\widehat{p_{k_0+1} L}$ est une distribution;*

soient satisfaites, alors L est régulière à l'ordre $k_0 + 1$. De plus on a:

$$p_k L = \widehat{p_k L} \cap p_k D(V) \text{ et } gr p_k L = gr \widehat{p_k L} \cap gr p_k D(V)$$

pour tout $k \geq k_0 + 1$.

Démonstration. La première partie du théorème est une consequence de 5.4 et 5.9. Réciproquement, supposons qu'il existe $k_0 \geq 0$ satisfaisant 1) et 2) et posons $M = \widehat{p_{k_0+1} L} \cap p_{k_0+1} D(V)$. Déterminons d'abord $gr_\ell \widehat{p_{k_0+1} L} \cap p_{k_0+1} D(V)$, pour $\ell \geq -1$. Si $\ell = -1$ cette intersection est égale à $V_{k_0+1}^L \cap V_{k_0+1} = V_{k_0+1}^L$ Supposons donc $\ell \geq 0$. Puisque $p_{k_0+1} L$ est une distribution, on a $gr_\ell p_{k_0+1} L = V_{k_0+1}^L \otimes S^{\ell+1}(V_{k_0+1}^*)$. Si $i : V_{k_0+1} \to \to V_{k_0+1}$ est l'isomorphisme induit par $p_{k_0+1} : D(V)_{[k_0+1]} \to p_{k_0+1} D(V)$ et si l'on note encore i son extension à $gr_\ell D(V_{k_0+1}) = V_{k_0+1} \otimes S^\ell(V_{k_0+1}^*)$, on a:

$$\begin{aligned} gr_\ell p_{k_0+1}L \cap p_{k_0+1}D(V) &= i((L/L^{k_0+1}) \otimes S^{\ell+1}(V^*_{k_0+1}) \cap V \otimes S^{k_0+\ell+1}(V^*)) \\ &= i(gr_{k_0}L \otimes S^{\ell+1}(V^*) \cap V \otimes S^{k_0+\ell+1}(V^*)) \\ &= i(p_{\ell+1}(gr_{k_0}L)). \end{aligned}$$

On a donc les inclusions suivantes:

$$gr_\ell p_{k_0+1}L \subset gr_\ell M \subset gr_\ell p_{k_0+1}L \cap p_{k_0+1}D(V) = i(p_{\ell+1}(gr_{k_0}L)).$$

Or, par hypothèse L est 1-acyclique à l'ordre k_0 donc $p_{\ell+1}(gr_{k_0}L) = gr_{k_0+\ell+1}$ et par conséquent $i(p_{\ell+1}(gr_{k_0}L)) = gr_\ell p_{k_0+1}L$. Il en résulte que

$$grp_{k_0+1}L = grp_{\widehat{k_0+1}}L \cap grp_{k_0+1}D(V). \tag{5.11}$$

Puisque L est fermé dans $D(V)$, alors $p_{k_0+1}L$ est aussi fermé dans $D(V_{k_0+1})$; d'autre part, on a $p_{k_0+1}L \subset \widehat{p_{k_0+1}L} \cap p_{k_0+1}D(V)$; compte tenu de 5.11 cette inclusion implique:

$$p_{k_0+1}L = \widehat{p_{k_0+1}L} \cap p_{k_0+1}D(V). \tag{5.12}$$

Or $\widehat{p_{k_0+1}L}$ est une distribution (nécessairement involutive) de $D(V_{k_0+1})$; c'est donc une sous-algèbre homogène de $D(V_{k_0+1})$. D'après 3.8, $\widehat{p_{k_0+1}L}$ est une sous-algèbre régulière à l'ordre 0 de $D(V_{k_0+1})$. De même, $p_{k_0+1}D(V)$ étant une sous-algèbre transitive de $D(V_{k_0+1})$ elle est régulière à l'ordre 0 d'après 3.8. Compte tenu de 5.11 et 5.12, la proposition 5.6 implique que $p_{k_0+1}L$ est une sous-algèbre régulière à l'ordre 0 de $D(V_{k_0+1})$ et par conséquent L est, d'après 5.9, une sous-algèbre de $D(V)$ régulière à l'ordre k_0+1. Il est clair maintenant que, L étant 1-acyclique à l'ordre k_0 elle l'est aussi à l'ordre k pour tout $k \geq k_0$. D'autre part, la régularité de L à l'ordre k_0+1 implique que $\widehat{p_{k+1}L}$ est une distribution pour tout $k \geq k_0$. On a donc, compte tenu de ce qui précède,

$$gr\, p_{k+1}L = gr\, \widehat{p_{k+1}L} \cap gr\, p_{k+1}D(V) \text{ et } \widehat{p_{k+1}L} = p_{k+1}L \cap p_{k+1}D(V)$$

quel que soit $k \geq k_0$. Le théorème est ainsi démontré.

Compte tenu du théorème de Frobénius formel (théorème 4.1) se déduit de 5.10 le résultat suivant:

5.13. **Corollaire.** *Si L est une sous-algèbre de Lie régulière de $D(V)$ alors il existe un entier k_0 tel que pour tout entier $k > k_0$ on puisse écrire*

$$p_kL = \phi_k(V_k^L \otimes S(V_k^*)) \cap p_kD(V)$$

où ϕ_k est un automorphisme de l'algèbre de Lie filtrée $D(V_{k+1})$ vérifiant $gr\,\phi_k = id_{gr\,D(V_k)}$.

Un calcul élémentaire montre d'ailleurs qu'on peut choisir les automorphismes ϕ_k de sorte que ϕ_{k+1} induise ϕ_k pour tout $k \geq k_0$.

Bibliographie

[1] J. B. Botelho, *Le théorème de Frobénius formel*, J. of Diff. Geom. (à paraitre, juillet 1978).

[2] E. Cartan, *Sur la structure des groupes infinis de transformations*, Ann. Ec. Norm. 3, XXI (1904).

[3] I. Hayashi, *Embedding and Existence theorems of infinite Lie algebras*, J. Math. Soc. Japan, vol. 22 n.° 1 (1970), pp. 1-14.

[4] M. Kuranishi, *Lectures on involutive systems of partial differential equations*, Publicações da Sociedade Matemática de São Paulo, 1967.

[5] T. Morimoto, *On the intransitive Lie algebras whose transitive parts are infinite and primitive*, J. Math. Soc. Japan, vol. 29 n.° 1, (1977) pp. 35-65.

[6] M. Orellana-Chacin, *Thèse de 3e cycle*, Université de Grenoble (1969).

[7] A. Petitjean, *Prolongements d'homomorphismes d'algèbres de Lie filtrèes transitives*, J. of Diff. Geom. pp. 451-564.

[7 bis] A. Petitjean, *Prolongements d'homomorphismes de distributions*, J. of Diff. Geom. (à paraître).

[8] D. S. Rim, *Deformations of transitive Lie algebras*, Ann. of Math. pp. 339-357.

[9] I. M. Singer, S. Sternberg, *The infinite groups of Lie and Cartan*, J. d'Analyse Math. pp. 1-114.

[10] O. Zariski – P. Samuel, *Commutative algebra*, vol. II. Springer Verlag (1975).

A. Petitjean
Laboratoire de Mathématiques Pures – Institut Fourier dépendant de l'Université Scientifique et Médicale de Grenoble associé au C.N.R.S.
B.P. 116
38402 ST MARTIN D'HERES (France)

E. Ferreira
Universidade Estadual de Campinas
IMECC
UNICAMP
13100 Campinas (Brésil)