Isoparametric families of submanifolds

Carlos Edgard Harle

Abstract

An extension of Cartan's theory of isometric families of hypersurfaces is presented. The leaves of the new families are submanifolds of higher codimension. It is proved that the leaves have mean curvature vector with constant norm.

If the distribution defined by the normal spaces of the leaves is integrable, the theory can be developed along the same lines as in the usual case (i.e. families of hypersurfaces). These families are thus obtained constructing "parallel" submanifolds. A generalization of Cartan's fundamental formula is obtained and a simple geometrical application of it is given.

Agradecimentos: Desejo aqui manifestar a minha gratidão aos colegas: Profa. Maria Elisa G. G. de Oliveira e Prof. Plínio Amarante Quirino Simões pelas valiosas sugestões feitas e pela troca de idéias que pudemos manter.

Famílias Isoparamétricas de Subvariedades

Resumo: Neste trabalho apresentamos uma generalização da teoria de famílias isoparamétricas de hipersuperfícies de uma variedade riemanniana com curvatura constante, considerando famílias de subvariedades de codimensão maior ou igual a um. Nosso ponto de partida é uma definição de família isoparamétrica de subvariedades, que, no caso de codimensão 1, se reduz à definição clássica formulada por E. Cartan [1]. Esta definição é dada na secção 1, onde também mostramos que o vetor curvatura média das subvariedades que constituem uma família isoparamétrica tem norma constante (v. prop. 1.4). Na secção 2, estudamos as famílias isoparamétricas cuja distribuição complemento ortogonal é integrável. Demonstramos (Prop. 2.3) que neste caso, cada folha da fa-

Recebido em 7/4/82.

mília isoparamétrica tem fibrado normal plano, as variedades integrais da distribuição complemento ortogonal são totalmente geodésicas e que o vetor curvatura normal é paralelo na conexão normal de cada subvariedade da família isoparamétrica. Na secção 3 estudamos as subvariedades paralelas. Obtemos assim um processo efetivo de construção de famílias isoparamétricas de subvariedades normais (i.e., cujas distribuições complemento ortogonal são integráveis) (ver Prop. 3.5), o qual, no entanto, não é explorado neste trabalho. Na secção 4 mostramos que as folhas de uma família isoparamétrica de subvariedades de uma variedade de curvatura constante têm curvaturas principais constantes.

Finalmente, na secção 5, obtemos uma relação entre essas curvaturas principais, generalizando a fórmula fundamental de Cartan para codimensões mais altas.

Preliminares: Neste artigo, todas as variedades e aplicações consideradas serão de classe C^∞. Dada uma variedade riemanniana de dimensão $n+q$, M^{n+q}, $<,>$, com $n, q \geqq 1$, utilizaremos a convenção de que índices latinos minúsculos assumem valores entre 1 e n, índices gregos minúsculos entre $n+1$ e $n+q$ e finalmente, índices latinos maiúsculos assumem valores entre 1 e $n+q$. Indicaremos respectivamente por ∇ e Δ a derivação covariante e o operador de Laplace da variedade riemanniana em questão.

Para um dado referencial ortonormal local $\{e_A\}$, temos as correspondentes formas diferenciais, $\omega_A\, \omega_{AB}$, que satisfazem às equações:

$$\nabla e_A = \sum_A \omega_{BA} \otimes e_A.$$

Em conseqüência, as equações de estrutura desse referencial serão:

$$d\omega_A + \sum_B \omega_{AB} \wedge \omega_B = 0$$

$$d\omega_{AB} + \sum_S \omega_{AS} \wedge \omega_{SB} = \Omega_{AB},$$

onde as Ω_{AB} são as formas de curvatura do referencial.

1. Famílias Isoparamétricas de subvariedades

Definição 1.1. *Sejam M^{n+q} uma variedade riemanniana de dimensão $n+q$, n, $q \geqq 1$ e U uma subvariedade aberta de M^{n+q}. Chamaremos de família isoparamétrica de subvariedades n dimensionais a toda folheação de U que é definida localmente como imagem inversa de valores regulares de uma aplicação,*

$$F : W \subset U \to R^q, \quad F = (F_1, \ldots, F_{n+q}),$$

de tal modo que as funções:

$P_{\alpha\beta} = \langle \text{grad } F_\alpha, \text{grad } F_\beta \rangle$, ΔF_α, α, $\beta \geqq n+1$, sejam localmente constantes em cada folha.

Definição 1.2. *Um referencial ortogonal $e_1, \ldots e_{n+q}$ é dito distinguido se os campos $e_{n+1}, \ldots e_{n+q}$ forem obtidos a partir dos campos grad $F_{n+1}, \ldots$ grad F_{n+q}, pelo processo usual de ortogonalização de Gram-Schmidt.*

Lema 1.3. *Sejam S uma folha de uma dada família isoparamétrica de sub-variedades e H o vetor curvatura média de S. Então, para todo referencial distinguido (e_α), as funções $\langle H, e_\alpha \rangle$ são localmente constantes em S.*

Demonstração. Da definição de referencial distinguido vem que:

$$\text{grad } F_\alpha = \sum_{n+1}^{m+q} q_{\alpha\beta} e_\beta, \quad \alpha = n+1, \ldots, n+q,$$

sendo que as funções $q_{\alpha\beta}$ são localmente constantes em S.

As equações anteriores são equivalentes às seguintes:

$$dF_\alpha = \sum_\beta q_{\alpha\beta} \omega_\beta, \quad \alpha = n+1, \ldots, n+q. \tag{1}$$

Por outro lado, do fato de as funções $q_{\alpha\beta}$ serem localmente constantes em S, obtemos:

$$dq_{\alpha\beta} = \sum_\gamma q_{\alpha\beta\gamma} dF_\gamma, \quad \alpha, \beta = n+1, \ldots, n+q. \tag{2}$$

Tomando a diferencial exterior de ambos os membros de (2) obtemos:

$$dq_{\alpha\beta\gamma} \wedge dF_\gamma = 0, \quad \alpha, \beta = n+1, \ldots, n+q.$$

Do lema de Cartan segue então que as formas $dq_{\alpha\beta\gamma}$, $\alpha = n+1, \ldots n+q$, são combinações lineares das $dF_{n+1}, \ldots, dF_{n+q}$ e consequentemente as funções $q_{\alpha\beta\gamma}$ também são localmente constantes em S.

Por outro lado, de (1) segue, por derivação exterior:

$$\sum_\beta dq_{\alpha\beta} \wedge \omega_\beta + q_{\alpha\beta} d\omega_\beta = 0, \quad \alpha = n+1, \ldots, n+q.$$

Utilizando as equações de estrutura obtemos das equações anteriores:

$$\sum_\beta (dq_{\alpha\beta} \wedge \omega_\beta - \sum_{A,B} q_{\alpha\beta}(\omega_{\beta A} \wedge \omega_A)) = 0. \tag{3}$$

Das relações acima vem, para cada par de campos vetoriais e_ν, e_μ, $\mu, \nu \geqq n+1$:

$$dq_{\alpha\mu}(e_\nu) - dq_{\alpha\nu}(e_\mu) = \sum_\beta q_{\alpha\beta}(\omega_{\beta\mu}(e_\nu) - \omega_{\beta\nu}(e_\mu)).$$

Sendo a matriz $(q_{\alpha\beta})$ inversível e as funções $q_{\alpha\beta}$ e $dq_{\alpha\nu}(e_\mu) - dq_{\alpha\nu}(e_\mu)$ localmente constantes segue que as funções $\omega_{\beta\nu}(e_\mu) - \omega_{\beta\nu}(e_\mu)$ também o são. Em particular, temos que as funções $\omega_{\nu\mu}(e_\nu)$ são localmente constantes em S.

A seguir analisaremos o laplaciano de cada função F_α, o qual é dado por:

$$\Delta F_\alpha = \sum_A e_A(e_A F_\alpha) - (\nabla_{e_A} e_A) F_\alpha. \tag{4}$$

Notando que as funções $dF(e_i)$ são nulas para $i = 1, \ldots, n$, e que, em vista de (1) e (2), vale:

$$e_\beta(e_\beta F_\alpha) = \sum_{\beta,\gamma} q_{\alpha\beta\gamma} q_{\gamma\beta},$$

a equação (4) pode ser reescrita:

$$\Delta F_\alpha = \sum_{\beta,\gamma} q_{\alpha\beta\gamma} q_{\gamma\beta} - \sum_A (\nabla_{e_A} e_A) F_\alpha. \tag{5}$$

Temos também:

$$\Sigma\, dF_\alpha(\nabla_{e_A} e_A) = \langle \nabla_{e_i} e_i, e_\beta \rangle q_{\alpha\beta} + \langle \nabla_{e_\gamma} e_\gamma, e_\beta \rangle q_{\alpha\beta}.$$

Lembrando que o vetor curvatura H é dado por:

$$H = \frac{1}{n} \sum_{i,\beta} \langle \nabla_{e_i} e_i, e_\beta \rangle e_\beta,$$

obtemos a expressão

$$\sum_A dF_\alpha(\nabla_{e_A}) = \Sigma q_{\alpha\beta} \langle nH, e_\beta \rangle + \sum_{\beta,\gamma} q_{\alpha\beta} \omega_{\beta\gamma}(e_\gamma). \tag{6}$$

Da definição de família isoparamétrica, vem que as funções F_α são localmente constantes sobre cada folha S e de (5) e (6) concluimos que as funções $\langle H, e_\beta \rangle$ também têm essa propriedade.

Uma conseqüência imediata desse lema é a seguinte proposição:

Proposição 1.4. *O vetor curvatura normal de cada folha de uma família isoparamétrica de subvariedades tem norma constante.*

2. Famílias Isoparamétricas Normais

Definição 2.1. *Uma família isoparamétrica de subvariedades de uma variedade riemanniana será denominada família isoparamétrica normal se a distribuição definida pelos espaços normais de suas folhas for integrável.*

Lema 2.2. *As formas de conexão de um referencial distinguido de uma família isoparamétrica de subvariedades satisfazem:*

$$\omega_{\alpha i}(e_\beta) = 0, \quad \omega_{\alpha\beta}(e_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \alpha, \beta \geqq n+1. \tag{1}$$

Demonstração. Partimos das relações (3):

$$\sum_\beta (dq_{\alpha\beta} \wedge \omega_\beta = \sum_{\beta, A} q_{\alpha\beta}(\omega_{\beta A} \wedge \omega_A)) = 0,$$

e aplicamos ambos os membros ao par de campos e_i, e_ν, para obter

$$\sum_\beta q_{\alpha\beta}(\omega_{\beta\nu}(e_i) - \omega_{\beta i}(e_\nu)) = 0,$$

e daí, já que a matriz $(q_{\alpha\beta})$ é inversível, vem:

$$\omega_{\beta\nu}(e_i) - \omega_{\beta i}(e_\nu) = 0. \tag{2}$$

Por outro lado, a integrabilidade da distribuição complemento ortogonal se traduz por:

$$\omega_{\alpha i}(e_\beta) = \omega_{\beta i}(e_\alpha). \tag{3}$$

Combinando as relações (2) e (3), obtemos (1).

Do lema 2.2., segue imediatamente o seguinte resultado:

Proposição 2.3. *As variedades integrais da distribuição complementar de uma família isoparamétrica são subvariedades totalmente geodésicas e a conexão normal de cada folha da família isoparamétrica tem fibrado normal "flat".*

3. Famílias Paralelas de Subvariedades

Nesta secção estudaremos a estrutura local de famílias isoparamétricas de subvariedades de uma variedade riemanniana $M^{n+q}(c)$, simplesmente conexa e com curvatura constante c.

Lema 3.1. *Seja S uma folha de uma dada família isoparamétrica de subvariedades de $M^{n+q}(c)$. Nestas condições, para todo ponto m de S existem uma vizinhança aberta simplesmente conexa de m em S, um intervalo J de R centrado em 0 e uma seqüência $\xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+q}$ de campos normais a S, unitários dois a dois paralelos na conexão normal de S, definidos em U, de tal modo que a aplicação*

$$f : J \times S^{q-1} \times U \to M^{n+q}(c),$$

onde S^{q-1} *é a esfera unitária de* R^q, *e definida por*:

$$f(t, a, x) = exp_x(t \sum_\alpha a_\alpha \xi_\alpha(x)), \quad a = (a_{n+1}, \ldots, a_{n+q}) S^{q-1},$$

seja um difeomorfismo.

A demonstração deste lema é simples e será omitida.

Definição 3.2. *Um difeomorfismo f nas condições do lema 3.1 será denominado trivialização normal da família isoparamétrica dada. Além disso, consideraremos o difeomorfismo*

$$f_t^a : U \to M^{n+q}(c), \; f_t^a(x) = f(t, a, x), \; x \in U.$$

Lema 3.3. *Para cada* $x \in U$ *e* a S^{q-1}, *o campo de subespaços* $t \to (f_t^a) * T_x S$ *é paralelo ao longo da geodésica* $t \to f_t^a(x)$.

Demonstração. Consideraremos separadamente cada um dos casos $c = 0$, $c > 0$ e $c < 0$.

No primeiro caso, o espaço ambiente é R^{n+q} e a aplicação f se escreve $f(t, a, x) = x + t \sum_\alpha a_\alpha \xi_\alpha(x)$, onde x é identificado com o seu vetor posição em R^{n+q}.

Se indicarmos por D a derivação covariante de R^{n+q}, podemos escrever

$$(f_t^a) * v = v + t \sum_\alpha a_\alpha D_v \xi_\alpha,$$

para todo vetor tangente v de S.

Como $D_v \xi_\alpha$ é ainda tangente a S, vemos que o vetor $(f_t^a) * v$ é paralelo ao espaço tangente $T_x S$ e consequentemente fica demonstrado o lema no caso euclidiano.

Nos casos restantes, podemos restringir-nos sem perda de generalidade aos casos $c = 1$ e $c = -1$.

Para o caso elíptico, temos que a aplicação f dada por

$$f(t, a, x) = (\cos t) v + (\operatorname{sen} t) \sum_\alpha a_\alpha \xi_\alpha$$

tem valores na esfera unitária S^{n+q} de R^{n+q+1}. Para todo vetor tangente v de S, vem

$$(f_t^a) * v = (\cos t) v + (\operatorname{sen} t) \sum_\alpha a_\alpha D_v \xi_\alpha,$$

onde D representa a derivação covariante de R^{n+q+1}. Como os campos são paralelos na conexão normal da folha S, vem que $D_v \xi_\alpha$ é a soma de um vetor tangente a S e do vetor $\langle D_v \xi_\alpha, x \rangle x$. Por outro lado, como vale $\langle D_v \xi_\alpha, x \rangle = 0$, vemos que $(f_t^a) * v$ é paralelo a um vetor de $T_x S$.

No caso $c = -1$, podemos considerar que o espaço ambiente seja $H^{n+q} \subset R^{n+q+1}$, definido por

$$H^{n+q} = \{x \in R^{n+q+1}, (x, x) = -1\},$$

onde $(\, ,)$ denota a métrica de Lorentz de R^{n+q+1}.

Neste caso, temos a expressão:

$$f(t, a, x) = (\operatorname{Ch} t) x + (\operatorname{Sh} t) \sum_\alpha a_\alpha \xi_\alpha,$$

e para todo vetor tangente $v \in T_x S$, vale:

$$(f_t^a) * v = (\operatorname{Ch} t) v + (\operatorname{Sh} t) \sum_\alpha a_\alpha D_v \xi_\alpha.$$

Daí concluímos facilmente que $(f_t^a) * v$ é paralelo (no sentido euclidiano) a um vetor tangente de $T_x S$. Com isto terminamos a demonstração do lema 3.3.

A seguir enunciamos o seguinte fato de caráter geral:

Lema 3.4. *Se M é uma subvariedade totalmente geodésica de uma variedade riemanniana* M^{n+q} *e* $\gamma = \gamma(t)$ *é uma curva de M, então o campo de subespaços* $t \to T_{\gamma(t)} M$ *é paralelo em* M^{n+q}.

Estamos agora em condições de provar o seguinte:

Proposição 3.5. *Seja f uma trivialização normal de uma família isoparamétrica de subvariedades de* $M^{n+q}(c)$. *Então, cada uma das subvariedades* $f_t^a(U)$ *está contida em alguma folha da família isoparamétrica dada.*

Demonstração. Seja M_p uma variedade integral maximal da distribuição complemento ortogonal da família isoparamétrica. Da proposição 2.3, segue que M_p é totalmente geodésica. Em vista dos lemas 3.3 e 3.4, temos que as famílias de subespaços $T_{\gamma(t)} M_p$ e $(f_t^a) * T_x S$ são paralelos ao longo da geodésica $t \to f_t^a(x)$. Consequentemente, estes últimos são ortogonais a M_p ao longo dessa geodésica. Pela unicidade do complemento ortogonal vemos que estes subespaços são tangentes a folhas da família isoparamétrica.

4. Subvariedades com Curvaturas Principais Constantes

Inicialmente mencionaremos dois resultados de natureza técnica sobre campos de tensores:

Lema 4.1. *Seja A um campo de tensores simétricos do tipo* (1,1) *sobre uma variedade riemanniana* M^n. *Então existem n funções contínuas* $\lambda_1 \geqq \lambda_2 \geqq \lambda_n$, *de tal maneira que para cada x de* M^n, *o conjunto* $\{\lambda_i(x)\}\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ *é o conjunto dos autovalores de* A_x.

A demonstração deste lema pode ser vista em [4].

Este resultado nos permite formular a seguinte:

Definição 4.2. *Diremos que uma subvariedade n-dimensional S de uma variedade riemanniana* M^{n+q} *tem curvaturas principais constantes se:*

i) O fibrado normal de S é "flat".

ii) Para todo campo de normais ξ, *paralelo na conexão normal de S, definido sobre uma subvariedade aberta e conexa de S, as funções* λ_i *dadas pelo lema 4.1., com respeito ao campo de tensores* A^ξ, *onde* A^ξ *denota a segunda forma fundamental definida por* ξ, *são constantes.*

O principal objetivo desta secção é o de provar que as folhas de uma família isoparamétrica de subvariedades de $M^{n+q}(c)$ têm curvaturas principais constantes.

Definição 4.3. *Seja S uma subvariedade de uma variedade riemanniana de codimensão* 1 *e cujo fibrado normal é "flat". Um ponto x de S é denominado ponto geral se existir um referencial ortonormal de M adaptado a S e tal que os n primeiros campos diagonalizam as seguidas formas fundamentais* $A^{en+1}, \ldots, a^{en+q}$.

Utilizaremos o seguinte resultado cuja demonstração omitimos:

Proposição 4.4. *O conjunto dos pontos gerais de uma subvariedade é aberto e denso.*

É claro que se tivermos demonstrado que cada componente conexa do conjunto dos pontos gerais de uma subvariedade S tem curvaturas principais constantes, então S também terá esta propriedade.

Definição 4.5. *Dada uma trivialização normal f de uma família isoparamétrica* $f : J \times S^{q-1} \times U \to M^{n+q}(c)$; *chamaremos de referencial normal adaptado a essa trivialização à seqüência de campos vetoriais definidos ao longo de f,* $e_{n+1}, \ldots, e_{n+q}$, *do seguinte modo: cada* e_α *é o campo que no ponto* $f^a_t(x)$, $x \in f^a_0(U)$, *coincide com o transladado paralelo de* $\xi_\alpha(x)$ *ao longo da geodésica* $t \to f^a_t(x)$.

Lema 4.6. *A restrição de cada campo* e_α *à subvariedade* $f^a_t(U)$ *é um campo normal e paralelo na conexão normal desta subvariedade.*

Demonstração: O fato de os campos e_α serem ortogonais à subvariedade $f^a_t(U)$ é conseqüência do lema 3.3. Para mostrar que os e_α são paralelos na conexão normal de $f^a_t(U)$, tomamos uma curva arbitrária de $U, \mu = \mu(s)$ e consideramos as funções:

$$\mu(s, t) = f^a_t \circ \mu(s); \phi_{\alpha\beta}(s, t) = \left\langle \frac{\nabla}{ds} e_\alpha, e_\beta \right\rangle.$$

Da definição dos e_α segue que $\dfrac{\nabla}{dt}\, e_\alpha$ é nulo e portanto as derivadas $\dfrac{\partial \phi}{\partial t}\, \alpha\beta$ também são nulas. Portanto, as funções $\phi_{\alpha\beta}$ não dependem de t e como estas são nulas para $t = 0$, serão sempre nulas. Fica assim, demostrada a segunda parte do lema.

Proposição 4.7. *Seja uma família isoparamétrica de subvariedades n dimensionais de* $M^{n+q}(c)$. *Nestas condições, toda folha tem curvaturas principais constantes.*

Demonstração. Sejam S uma folha e f uma trivalização normal definida em uma vizinhança de um ponto geral de S. Do lema 3.3, segue que se um referencial ortonormal $e_1, \ldots, e_n$ da folha S diagonaliza as segundas formas fundamentais então o referencial $(f^a_t)e_i$, $i = 1, \ldots, n$, diagonaliza as segundas formas fundamentais de $f^a_t(U)$.

Temos assim n campos vetoriais unitários e dois a dois ortogonais, tangentes às folhas da família isoparamétrica. Utilizaremos ainda a notação $e_1, \ldots, e_n$ para denotá-los. Finalmente, completamos estes campos a um referencial ortonormal por meio dos campos vetoriais definidos em 4.5. Denotaremos por a_i as funções diferenciáveis definidas na imagem de f por

$$a^\alpha_i = -\langle A^{e\alpha} e_i, e_i \rangle, i = 1, \ldots, n; \alpha = n + 1, \ldots, n + q.$$

Com isto resultam as equações $\omega_{\alpha i} = a_i^\alpha \omega_i$, e destas, por derivação exterior, $d\omega_{\alpha i} = da_i \wedge \omega_i + a_i d\omega_i$.

Utilizando as equações de estrutura e notando que as formas de curvatura satisfazem, $\Omega_{AB} = c\omega_A \wedge \omega_B$, podemos escrever:

$$c\omega_\alpha \wedge \omega_i - \sum_A \omega_{\alpha A} \wedge \omega_{Ai} = da_i^\alpha \wedge \omega_i - a_i^\alpha \sum_B \omega_{iB} \wedge \omega_B - a_i^\alpha \sum_\gamma \omega_{i\gamma} \wedge \omega_\gamma,$$

ou ainda:

$$c\omega_\alpha \wedge \omega_i - \sum_j \omega_{\alpha j} \wedge \omega_{ji} - \sum_j \omega_{\alpha\gamma} \wedge \omega_{\gamma i} = da_i^\alpha \wedge \omega_i - a_i^\alpha \sum_j \omega_{ij} \wedge \omega_j.$$

Se calculamos ambos os membros dessa equação no par e_μ, e_i, obtemos:

$$da_i^\alpha(e_\mu) - a_i^\alpha a_i^\mu = c\partial_\mu^\alpha - \sum_\gamma a_i^\gamma \omega_{\alpha\gamma}(e_\mu).$$

Em particular, para $\mu = \alpha$ vem:

$$da_i^\alpha(e_\alpha) - (a_i^\alpha)^2 = c - \sum_\gamma a_i^\gamma \omega_{\alpha\gamma}(e_\alpha).$$

Notando que as curvas integrais de e que partem da subvariedade U são geodésicas de $M^{n+q}(c)$, obtemos, para as restrições das a_i a estas geodésicas, as equações diferenciais:

$$\frac{da_i^\alpha}{dt} = c + (a_i^\alpha)^2, \quad a_i^\alpha = a_i^\alpha(t, x), x \in U.$$

Em vista do lema 1.3, temos a condição inicial $a_i^\alpha(0, x) =$ constante, e daí, por um resultado estabelecido em [2], concluímos que as funções a_i são localmente constantes. Com isto fica demonstrado que as folhas da família isoparamétrica têm curvaturas principais constantes.

5. A Fórmula Fundamental

Nesta secção obteremos uma relação entre as curvaturas principais a_i das folhas de uma família isoparamétrica de subvariedades de $M^{n+q}(c)$. As considerações que nos permitem chegar a esta relação estão fortemente apoiadas nas idéias de E. Cartan [1].

Em relação a um referencial $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_{n+q}$ adaptado à família isoparamétrica dada, onde os campos $e_i, \ldots, e_n$ diagonalizam a segunda forma fundamental de cada folha, temos:

(1) $$\omega_{\alpha i} = a_i^\alpha \omega_i \quad i = 1, \ldots, n; \quad = n+1, \ldots, n+q$$

onde as a_i^α são constantes. Introduzimos a seguir as funções:

(2) $$\lambda_{ijk}^\alpha = (a_i^\alpha - a_j^\alpha)\omega_{ij}(e_k).$$

Tomando a diferencial exterior de ambos os membros de (1) e avaliando as formas diferenciais assim obtidas no par de campos e_j, e_k, obtemos:

(3) $$(a_i^\alpha - a_i^\alpha \omega_{ij}(e_k) = (a_i^\alpha - q_k^\alpha)\omega_{ik}(e_j),$$

da qual resulta por sua vez, a simetria das λ_{ijk}^α em relação aos índices inferiores. Obtemos também, para dois índices distintos i, j a relação:

(4) $$c + \Sigma a_i^\gamma a_j^\gamma =$$
$$= \Sigma\, \omega_{ij}(e_k)\omega_{ki}(e_j) - \omega_{kj}(e_i) + \omega_{ik}(e_i)\omega_{kj}(e_j) - \omega_{ik}(e_j)\omega_{kj}(e_i) +$$
$$+ (d(\omega_{ij}(e_j))(e_j) - d(\omega_{ij}(e_i))(e_i)).$$

Por outro lado, vimos que para quaisquer índices i, j, k, valem

(5) $$(\lambda_{ijk}^\alpha)^2 = (a_k^\alpha - a_i^\alpha)(a_k^\alpha - a_j^\alpha)(\omega_{ij}(e_k)(\omega_{ki}(e_j) - \omega_{kj}(e_i)))$$

(6) $$-(\lambda_{ijk}^\alpha)^2 = (a_k^\alpha - a_i^\alpha)(a_k^\alpha - a_j^\alpha)\omega_{ik}(e_j)\omega_{kj}(e_i).$$

Para simplificar a notação, damos a seguinte

Definição 5.1. *Diremos que dois índices i, j são α-essencialmente distintos se $a_i^\alpha \neq a_j^\alpha$, $i, j = 1, \ldots, n$, $\alpha = n+1, \ldots, n+q$ Indicaremos por J_i^α q conjunto dos índices que são α-essencialmente distintos em i. Dois índices i, j são ditos essencialmente distintos se forem β-essencialmente distintos para algum β.*

Neste linguagem, temos que se i, j são essencialmente distintos, então:

(7) $$\omega_{ij}(e_i) = 0, \quad \omega_{ij}(e_j) = 0.$$

A seguir subdividimos a nossa exposição em uma série de pequenos lemas:

Lema 1. *Se i, j são dois índices essencialmente distintos, então, para todo índice k, vale:*

(8) $$\omega_{ik}(e_i)\omega_{kj}(e_j) = 0.$$

Demonstração. Se $a_k^\alpha = a_i^\alpha$, então $a_k^\alpha \neq a_j^\alpha$ e daí $\omega_{kj}(e_j) = 0$, $a_k^\alpha = a_j^\alpha$, então $a_k^\alpha \neq a_i^\alpha$ e daí $\omega_{ki}(e_i) = 0$, $a_k^\alpha \neq a_i^\alpha$, $a_k^\alpha \neq a_j^\alpha$ temos $\omega_{ki}(e_i) = 0$, $\omega_{kj}(e_j) = 0$.

Lema 2. *Se i, j são dois índices α-essencialmente distintos e se k é um índice tal que $a_k^\alpha = a_i^\alpha$ ou $a_k^\alpha = a_j^\alpha$ então valem:*

$$(9) \qquad \omega_{ij}(e_k) = a, \ \omega_{ik}(e_j)\omega_{kj}(e_i) = 0.$$

Demonstração. Partimos da relação (3) sob a forma:

$$(10) \qquad (a_k^\alpha - a_i^\alpha)\omega_{ki}(e_j) = (a_k^\alpha - a_j^\alpha)\omega_{kj}(e_i).$$

Se $a_k^\alpha = a_i^\alpha$, vem $a_k^\alpha \neq a_j^\alpha$ e então, da relação acima, $\omega_{kj}(e_i) = 0$. Analogamente, se $a_k^\alpha = a_i^\alpha$ vem $\omega_{ki}(e_j) = 0$, ficando assim provada a segunda relação (9).

Para provar a primeira das relações (9), partimos de

$$(11) \qquad (a_j^\alpha - a_i^\alpha)\omega_{ji}(e_k) = (a_i^\alpha - a_k^\alpha)\omega_{ik}(e_j),$$

e observamos que, se $a_k^\alpha = a_i^\alpha$, vem: $\omega_{ij}(e_k) = 0$. Finalmente, se $a_k^\alpha = a_j^\alpha$, temos: $\omega_{ji}(e_k) = 0$.

Lema 3. *Se i, j são dois índices essencialmente distintos, então vale:*

$$(12) \qquad c + \sum_\gamma a_i^\gamma \, a_j^\gamma = \sum_{k \in J_i^\alpha \cap J_j^\alpha} (\omega_{ij})(e_k)\omega_{ki}(e_j) - \omega_{kj}(e_i)) - \omega_{ik}(e_j)\omega_{kj}(e_i)$$

Demonstração. Se $k \notin J_i^\alpha$ temos $a_k^\alpha = a_i^\alpha$ e então, pelo lema 2, vem que o termo correspondente ao índice k na somatória acima é nulo, o mesmo acontecendo se $k \notin J_j^\alpha$.

Do que precede, segue imediatamente o seguinte:

Corolário 5.4. *Se i, j são índices tais que para algum β se tenha $J_i^\beta \cap J_j^\beta = \varnothing$, então:*

$$(13) \qquad c + \sum_\gamma a_i^\gamma \, a_j^\gamma = 0.$$

Lema 5.5. *Se i, j são α-essencialmente distintos com $J_i^\alpha \cap J_j^\alpha = \varnothing$ então vale:*

$$(14) \qquad c + \sum_\gamma a_i^\gamma a_j^\gamma = 2 \sum_k \left(\frac{(\lambda^\alpha ijk)^2}{(a_k^\alpha - a_i^\alpha)(a_k^\alpha - a_j^\alpha)} \right) \quad (k \in J_i^\alpha \cap J_j^\alpha).$$

Este lema decorre imediatamente de (12) e da definição dos λ_{ijk}^α.

Proposição 5.6. (Fórmula de Cartan generalizada) *Para cada índice $i = 1, \ldots, n$, e cada índice $\alpha = n + 1, \ldots, n + q$ vale:*

$$(15) \qquad \sum_j \left(\frac{c + \sum_\gamma a_i^\gamma a_j^\gamma}{(a_i^\alpha - a_j^\alpha)} \right) = 0 \quad (j \in J_i^\alpha; \ J_i^\alpha \cap J_j^\alpha = \varnothing).$$

Demonstração. Basta mostrar que:

$$(16) \qquad \sum_j \left[\sum_{(k \in J_i^\alpha \cap J_j^\alpha)} \left(\frac{(\lambda^\alpha ijk)^2}{(a_i^\alpha - a_j^\alpha)(a_k^\alpha - a_i^\alpha)(a_k^\alpha - a_j^\alpha)} \right) = 0 \right] (j \in J_k^\alpha; J_k^\alpha \cap J_j^\alpha \neq \varnothing)$$

Para isso observamos que o termo correspondente aos índices i, j, k contribui na somatória se e só se $J_i^\alpha \cap J_j^\alpha \neq \varnothing$ e $k \in J_i^\alpha \ J_j^\alpha$. A seguir, verificamos que o termo i, k, j também comparece na somatória e com sinal oposto, uma vez que $J_i^\alpha \cap J_k^\alpha \neq 0$ e $j \in J_i^\alpha \cap J_k^\alpha$.

É de esperar-se que a fórmula (15) venha a desempenhar um papel importante na teoria das famílias isoparamétricas de subvariedades.

Daremos aqui uma aplicação desta fórmula, a saber:

Proposição 5.7. *Seja M^n uma subvariedade de R^{n+q}, com curvaturas principais constantes e satisfazendo:*

i) $q \geqq n$.

ii) A dimensão do primeiro espaço normal em cada ponto é n. Então M^n tem curvatura seccional nula.

Demonstração. Seja $B_p : T_pM \times T_pM \to (T_pM)^\perp$ a segunda forma fundamental de M^n no ponto p. Supomos que $e_1, \ldots, e_n$ seja uma base de T_pM que diagonaliza B_p. Da hipótese ii) vem que os vetores $B(e_1, e_1), \ldots, B(e_n, e_n)$ são linearmente independentes. Utilizando o processo habitual de ortogonalização a partir da base acima, obtemos uma base de $(TM^n)^\perp$, de tal modo que os autovalores a_i^α, $i = 1, \ldots, n$, $\alpha = n + 1, \ldots, n + q$, formem uma matriz triangular de posto n:

$$\left| \begin{array}{cccc} a_1^{n+1} & a_2^{n+1} & \ldots & a_n^{n+1} \\ 0 & a^{n+2} & \ldots & \vdots \\ \vdots & 0 & & a^{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 0 \end{array} \right| .$$

Aqui, devemos notar que todos os elementos diagonais $a_1^{n+1}, a_2^{n+2}, \ldots, a_n^{2n}$, são distintos de zero.

Aplicamos agora a fórmula (13) para os pares de índices $(1, n), \ldots, (n-1, n)$, e para o índice $\beta = n$, para inferir que os elementos $a_n^{n+1}, \ldots, a_n^{2n-1}$ são todos nulos. Passando a seguir, por indução, às linhas de ordem $2n - 1, 2n - 2, \ldots, n + 1$, e aplicando em cada passo a fórmula (13), vemos que a matriz acima é diagonal. Disto deduzimos facilmente que M^n tem curvatura nula.

Bibliografia

[1] E. Cartan; *Familles de surfaces isoparametriques dans les espaces à courbure constantes*, Ann Mat. 17 (1938).

[2] K. Nomizu; *Elie Cartan's Work on Isoparametric Families of Hypersurfaces*, Proc. Symp. in Pure Math. 27 (1975).

[3] D. Ferus; *Notes on Isoparametric Hipersurfaces*, Esc. de G. Diferencial UNESP (1980).

[4] P. J. Ryan; *Homogeneity and Some Curvature Conditions for Hypersurfaces* (Phd Thesis), Brown University (1968).

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
Cidade Universitária "Armando Salles de Oliveira"
Caixa Postal n.° 20570 (Agência Iguatemi)
SÃO PAULO – BRASIL