Une condition pour qu'une submersion soit la projection d'un produit

Renato Valladares

1. Introduction.

Soit $V = V^n$ une variété riemannienne de dimension $n \geq 2$; si $p \in V$, on notera T_pV l'espace tangent à V en p; si X, $Y \in T_pV$ definissent un plan σ, on notera la courbure sectionelle de V selon σ par K_σ ou K_{XY} et la courbure de Ricci selon X par $Ric(X)$. La métrique sera notée $\langle\ ,\ \rangle$; $\mathbb{R}$ sera la droite reélle et $\mathbb{R}^n$ sera le n-espace euclideen.

(1.1) Soit $U \subset V$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ une submersion où le champ gradient est unitaire. On dira dans ce cas que f est une *submersion riemannienne* (voyez [4]). Soit Λ la famille suivant:

$$\Lambda = \{f^{-1}(a);\ a \in f(U) \subset \mathbb{R}\};$$

Λ peut être interpretée comme une famille d'hypersurfaces equidistantes dans V (voyez 2.5).

On a le théorème suivant, où I est un intervalle réel.

1.2. Théorème. *Soient $M \in \Lambda$ et $X = grad\, f$; si pour tout champ de vecteurs Y en V, $K_{XY} = 0$, alors pour que V soit localement un produit riemanien $M \times I$ et f soit la projection, il suffit (et il faut aussi, bien sûr!) que toutes les Hipersurfaces de Λ soient minimales.*

1.3. Corollaire. *Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction telle que la norme $|grad f|$ du champ gradient de f et le laplacien Δf de f verifient*

$$|grad f| = constant \quad et \quad \Delta f = 0$$

alors, f est la restriction a U d'une application affine.

1.4. Théorème. *Soit Λ comme en 1.1. Si toutes les hypersurfaces de Λ sont minimales, alors*

$$Ric(X) = 0.$$

Recebido em 19/1/82. Versão definitiva em 17/7/82.

1.5. Corollaire. *Soit Λ comme en 1.1; alors une des affirmations suivants est vraie*:

a) *V est localement un produit riemanniene $M \times I$.*
b) *Il existe $p \in V$ et des plans $\sigma_1, \sigma_2 \subset T_pV$ avec $K_{\sigma_1} > 0$ et $K_{\sigma_2} < 0$.*

Je remercie les professeurs Manfredo P. do Carmo, Pedro Nowosad, Claudio C. Dias et Celso J. Costa.

2. Preliminaires.

(2.1) Dans cet article, Λ et f seront toujours comme en 1.1, et $X = grad f$.

2.2. Lemme. *Si $f: U \subset V \to \mathbb{R}$ est une submersion riemanniene et ∇ est la connexion riemanniene en V, on a que*

$$\nabla_X X = 0.$$

Alors les courbes integrales de X sont des géodésiques ($X = grad\ f$).

Preuve. Soit $p \in U$; il est possible de prende des coordonneés locales $(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)$ en p, de telle façon que si

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}, \text{ alors } X_n = grad f = X \text{ et}$$

$$\langle X_i, X \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = n \text{ (voyez 1.1)} \\ 0 & \text{si } i \neq n \end{cases} \quad ; \tag{2.3}$$

il résulte que pour tout $i = 1, 2, \dots, n$, on a que

$$0 = X_i \langle X, X \rangle = 2 \langle \nabla_{X_i} X, X \rangle; \tag{2.4}$$

comme

$$\nabla_{X_i} X = \nabla_X X_i$$

2.3 et 2.4 montrent que pour tout $i = 1, 2 \dots n$,

$$0 = X \langle X, X_i \rangle = \langle \nabla_X X, X_i \rangle.$$

2.5. Remarque. Il résulte du lemme 2.2 que si $f: U \subset V \to \mathbb{R}$ est une submersion riemannienne, alors les fibres $f^{-1}(a)$ avec $a \in f(U)$, forment une famille differentiable d'hypersurfaces qui peuvent être interpretées comme equidistantes dans V.

2.6. Lemme. *Si $f: U \subset V \to \mathbb{R}$ est une submersion riemanniene et $H(p)$ est le vecteur courbure moyenne de la fibre $f^{-1}(a)$ en p, alors*

$$H(p) = -\Delta f(p) X(p).$$

Preuve. Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ comme dans la preuve de 1.2. Soient $E_1, E_2, \dots, E_n$ des champs orthonormalisés de $X_1, X_2, \dots, X_n$ de telle façon que $E_n = X_n = X$ (voyez 2.1). Dans ce cas, on a que

$$H = \sum_{i=1}^{n-1} < \nabla_{E_i} E_i, X > X$$

et que

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle.$$

Comme $\langle E_i, X \rangle =$ constant (voyez 2.3), on a que

$$\langle \nabla_{E_i} E_i, X \rangle = -\langle \nabla_{E_i} X, E_i \rangle.$$

3. Variation Associée à la Submersion f.

Soit $f: U \subset V \to \mathbb{R}$ une submersion riemanniene et soit F le flot associé à *gradf*. Si $p_0 \in U$, il est possible d'associer à F une variation locale de $M = f^{-1}(a)$, (où $a = f(p_0)$), qu'on notera aussi F, par la loi

$$F^t(p) = F(p, t).$$

Il est facile de voir que le champ variationnel de F est *gradf* et que cette variation est normale. On a encore un diffeomorphisme locale en p_0,

$$F^t: M \to M^t = F^t(M),$$

pour $|t|$ assez petit. Il est facile de voir que

(3.1) *$M^t \subset f^{-1}(a+t)$ et la variation $F^t_{t_0} = F^{t_0 + t}$ de M^{t_0} est normale pour tout t_0 assez petit.*

(3.2) Il resulte de 3.1 que si toutes les fibres de f sont minimales, alors toutes les M^t sont minimales. Dans ce cas par le théorème 3.3.1 de [5] on a que le champ variationnel *gradf* de F verifie les equations de Jacobi le long de M. Dans la suite, on donnera les préliminaires pour faire usage de ces equations.

Prendons l'application linéaire $S: T_{p_0} M \to T_{p_0} M$ définie par

$$\langle S(Y), Z \rangle = \langle \nabla_Y Z, X \rangle;$$

il est bien counnu que S est auto-adjointe; alors il existe des nombres reéls $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1}$ et des vecteurs orthonormaux $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ dans $T_{p_0}M$ tels que

$$S(v_i) = k_i v_i. \tag{3.3}$$

Avec l'aide des vecteurs $v_1, \ldots, v_{n-1}$ on peut associer a un champ de vecturs J en U, deux vecteurs ΔJ et $\tilde{R}J$ dans $T_{p_0}\tilde{V}$ definies par

$$\begin{cases} \Delta J = \sum_{i=1}^{n-1} \nabla_{v_i}\nabla_{v_i} J \\ \tilde{R}J = \sum_{i=1}^{n-1} R(v_1, J)v_i, \end{cases} \tag{3.4}$$

où R est le tenseur de courbure de V.

Il est possible montrer que ΔJ et $\tilde{R}J$ ne dependent pas des $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}$ (voyez [1] et [5]).

Quand (voyez 3.2) X vérifie les equations de Jacobi le long de M, il résulte des equations 3.2 de [1] que

$$-\langle \Delta X, X\rangle = \langle \tilde{R}X, X\rangle + \sum_i k_i^2,$$

où les k_i sont comme en 3.3. Alors, de 3.4 on a que

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{v_i}\nabla_{v_i} X, X\rangle = (n-1)\ Ric(X) + \sum_{i=1}^{n-1} k_i^2. \tag{3.5}$$

4. Preuves des Resultats.

Prendrons une carte locale φ pour M en p_0 telle que il existe des courbes coordonées $b_i(s)$ avec $b_i(o) = p_0$ et $b_i'(o) = v_i$, où les v_i sont comme en 3.3. Pour $|t|$ assez petit, on peut étendre la carte φ a une carte $\tilde{\varphi}(x, t) = F^t(\varphi(x))$ pour V. Soient $X_1, \ldots, X_{n-1}, X_n$ les champs associés a $\tilde{\varphi}$; on a que $X_n = X$. Le lemme suivant est immédiat, où $\gamma(t)$ est la geódésique $\gamma(t) = F^t_{(p_0)}$.

4.1. Lemme. *Soit* $X_i(t) = X_i(\gamma(t))$; *alors*

a) $dF^t_{p_0}(v_i) = X_i(t) \in T_{\gamma(t)}M^t$,

b) $\nabla_X X_i = \nabla_{X_i} X \in T_{\gamma(t)}M^t$.

De la même façon qu'on a definie S dans la section 3, ou peut definir

$$S_t : T_{\gamma(t)}M^t \to T_{\gamma(t)}M^t$$

comme l'application lineaire que vérifie

$$\langle S_t(X),\ Y\rangle = \langle \nabla_X^Y, X\rangle_{\gamma(t)}.$$

Si on prend pour courbes coordonneés $b_i(s)$, les applications

$$\beta_i(s, t) = F^t(b_i(s)),$$

on a que les β_i definissent des variations de la geódésique $\gamma(t)$, de telle façon que toutes les courbes $t \mapsto \beta_i(s_0, t)$ sont des geódésiques. Comme le champ variationnel de β_i est $X_i(t)$, il résulte de [3] (equation (1), pag. 93 et lemme 4.1, pag. 181) et de 4.1 (a) que

$$\nabla_X X_i(t) + S_t(X_i(t)) \in (T_{\gamma(t)}M^t)^\perp \tag{4.2}$$

$$\nabla_X \nabla_X X_i = -R(X, X_i)\, X, \tag{4.3}$$

où $\perp$ signifie "complément orthogonal" et R est le tenseur de courbure de V.

De la definition de S_t, on a que $S_t(X_i) \in T_{\gamma(t)}M^t$; alors de 4.1 (b) et 4.2, on a que

$$S_t(X_i) = -\nabla_X X_i. \tag{4.4}$$

Soit $D \subset M$ un domaine d'aire finie; soit $D^t = F^t(D)$, on peut alors définir la fonction d'aire A_D par

$$A_D(t) = aire\ de\ D^t.$$

Si toutes les M^t sont minimales, comme toutes les variations $F^t_{t_0} = F^{t+t_0}$ sont normales (voyez 3.1), il resulte que pour tout t, $A_D'(t) = 0$. Alors, si $v_1, v_2, \ldots, v_{n-1} \in T_{p_0}M$ sont comme en 3.3, l'aire $A(v_1, \ldots, v_{n-1})$ du parallèlogramme de arêtes parallèles a $v_1, \ldots v_{n-1}$, verifie pour tout t (voyez 4.1. (a))

$$\begin{aligned} 1 = A(v_1, \ldots, v_{n-1}) &= A(dF^t_{p_0}(v_1) \ldots dF^t_{p_0}(v_{n-1})) = \\ &= A(X_1(t) \ldots X_{n-1}(t)). \end{aligned} \tag{4.5}$$

4.6. Lemme. *Soit* $g(t) = \prod_{i=1}^{m} |1 - th_i|$ *une fonction* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *où les* h_i *sont des nombres reéls. Si* $g' \equiv 0$, *alors* $h_1 = h_2 = \ldots = h_m = 0$.

Preuve. Il est facile de voir par induction que

$$g'(t) = -\sum_{i=1}^{m} h_i \prod_{j \neq i} |1 - th_j|;$$

en utilisant l'induction une autre fois, on a le lemme.

4.7. Preuve de 1.2. De l'hypothése du théorème 1.2, on a pour tous les champs Y, Z que

$$\langle R(X, Y+Z)X, Y+Z\rangle = 0; \tag{4.8}$$

du développement de 4.8 et de 4.3 on a que pour tout i,

$$\nabla_X \nabla_X X_i = -R(X, X_i)X = 0;$$

alors, il existe des champs Y_i et Z_i parallèles le long de $\gamma(t) = F^t(p_0)$ tels que

$$X_i(t) = tY_i(t) + Z_i(t); \tag{4.9}$$

comme $X_i(0) = v_i$, on a que si $E_i(t)$ est le transport parallel de v_i le long de $\gamma(t)$, alors $Z_i = E_i$; comme de 4.9 on a que

$$\nabla_X X_i = Y_i$$

et comme si $t=0$ (voyez 3.3 et 4.4) on a que

$$\nabla_X X_i = -S(v_i) = -k_i v_i,$$

il résulte que pour tout $i = 1, 2, \ldots, n-1$

$$X_i(t) = (1 - tk_i)E_i(t);$$

comme les X_i sont orthogonaux, on a de 4.5 que

$$1 = A(X_1(t) \ldots X_{n-1}(t)) = \prod_{i=1}^{n-1} |1 - tk_i|$$

et le théorème suit du lemme 4.6 et des resultats bien connus.

4.11. Preuve de 1.3. Si $gradf = 0$, le corollaire est immédiat. Supposons que $|gradf| = c > 0$; soit $\Psi = f/c : U \to \mathbb{R}$. Pour 1.1 et 2.6, Ψ est une submersion riemannienne qui a toutes ses fibres minimales; alors, du théorème 1.2 il est facile de voir que Ψ est la restriction a U d'une application affine. Comme $f = c\Psi$, on a le corollaire.

4.12. Preuve de 1.4. Compte tenu de 3.5 et du fait que $X_i(0) = v_i$, il suffit de montrer que pour $t = 0$,

$$-\sum_{i=1}^{n-1} \langle \nabla_{X_i} \nabla_{X_i} X, X\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} k_i^2. \tag{4.13}$$

Comme $|X| = 1$, on a pour tout i que

$$\langle \nabla_{X_i} X, X\rangle = 0,$$

alors, de 4.1 (b), pour tout i,

$$-\langle \nabla_{X_i} \nabla_{X_i} X, X\rangle = \langle \nabla_X X_i, \nabla_X X_i\rangle; \tag{4.14}$$

alors, si $t = 0$, 4.13 résulte de 4.4 et 4.14.

4.15. Preuve de 1.5. Si l'affirmation 1.5 (b) n'est pas vraie, il résulte de 1.4 que pour tout champ Y en V, $K_{XY} = 0$ et le corollaire résulte de 1.2.

Bibliographie

[1] Barbosa, J.L. and do Carmo, M.P.; *Stability of minimal surfaces in spaces of constant curvature*, Bol. Soc. Bras. Mat., 11(1980), 1-10.

[2] do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana – Projeto Euclides*, IMPA – 1979.

[3] Lawson Jr, H. B.; *Lectures on Minimal Submanifolds*, Monografias de Matemática n.° 14 – IMPA – Rio de Janeiro.

[4] O'Neil, B.; *The Fundamental Equations of a Submersion*, Michigan Math. J., 13(1966), 459-469.

[5] Simons, J.; *Minimal Varieties in Riemannian Manifolds*, Ann. Math., 88(1968), 62-105.

Universidade Federal Fluminense
Niterói – RS.