BOL. SOC. BRAS. MAT., VOL. 14 N.º 2 (1983), 133-136

Note sur les algebres de Malcev

Akry Koulibaly

Il a été établi par A.I. Malcev (cf. [3]) que si l'on muni une algèbre alternative A de la multiplication définie par $[x, y] = xy - yx$ pour x, y parcourant A, cette nouvelle algèbre est de Malcev. Dans cette note nous montrons que toute algèbre de Malcev peut être plongée dans une algèbre Malcev-admissible et flexible (cf. [4]).

1. **Préliminaires.**

Soient K un corps commutatif et A une K-algèbre. On dira que A est une *algèbre de Malcev* si $x^2 = 0$ pour tout x dans A et si $J(x, y, xz) = J(x, y, z)x$, quels que soient x, y, z dans A, où $J : A \times A \times A \to A$ est le *jacobien* de A, i.e., l'application K-trilinéaire définie par

$$J(x, y, z) = (xy)z + (yz)x + (zx)y$$

quels que soient x, y, z dans A.

Toute algèbre de Lie est, trivialement, une algèbre de Malcev et toute algèbre de Malcev de dimension $\leqq 3$ est de Lie. Mais déjá en dimension 4, il existe des examples d'algèbres de Malcev qui ne sont pas de Lie (cf. [2], [5]).

Soit A une K-algèbre et notons A^- la K-algèbre obtenue à partir de A en définissant la multiplication par $[x, y] = xy - yx$ pour x, y parcourant A^- (qui coincide avec A en tant que K-espace vectoriel). On sait que si A est associative, A^- est une algèbre de Lie et que si A est alternative, A^- est de Malcev. On dira que A est une *K-algèbre Malcev-admissible* si A^- est une algèbre de Malcev. Ainsi, toute algèbre alternative est Malcev-admissible.

On dirá qu'une K-algèbre A est *flexible* si quels que soient x, y dans A, on $(xy)x = x(yx)$. Tout algèbre alternative est flexible mais il est évident qu'il existe des algèbres flexibles non alternatives. Par exemple, toute algèbre commutative ou de Malcev est flexible sans qu'elle ne soit nécessairement alternative.

La littérature sur le sujet est vaste (cf. [5]) et nous arrêtons ici ces quelques considérations préliminaires.

Recebido em 26/09/83.

2. Deux théorèmes.

Dans tout ce paragraphe, K désignera un corps commutatif de caractéristique $\neq 2$.

Théorème 2.1. *Toute K-algèbre de Malcev peut être plongée, en tant qu'idéal bilatère dans une K-algèbre flexible et Malcev-admissible.*

Preuve. En effet, soient A une K-algèbre de Malcev, B une K-algèbre Malcev-admissible et $f : B \to K$ une forme linéaire sur B.

Sur le K-espace vectoriel $C = A \oplus B$ on définit la multiplication

$$(x+b)(y+c) = xy + f(b)y + f(c)x + bc,$$

quels que soient x, y dans A et b, c dans B. Il est clair que C est une K-algèbre et la multiplication de C^- est donnée par

$$[x+b, y+c] = 2xy + [b, c]$$

pour x, y dans A et b, c dans B. Si J est le jacobien de C^-, on a

$$J(x+b, y+c, z+d) = 4((xy)z + (yz)x + (zx)y) + [[b, c], d] + \\ + [[c, d], b] + [[d, b], c]$$

quels que soient x, y, z dans A et b, c, d dans B, d'où

$$J(x+b, y+c, z+d) = 4J(x, y, z) + J(b, c, d),$$

où $J(x, y, z)$ désigne le jacobien calculé dans A et $J(b, c, d)$ celui calculé dans B^-. Comme A et B^- sont des algèbres de Malcev, on déduit que

$$J(x+b, y+c, [x+b, z+d]) = 8J(x, y, z)x + [J(b, c, d), b]$$

quels que soient x, y, z dans A et b, c, d dans B. Finalement,

$$J(x+b, y+c, [x+b, z+d]) = 2(4J(x, y, z)x) + [J(b, c, d), b] = \\ = [4J(x, y, z) + J(b, c, d), x+b] = [J(x+b, y+c, z+d), x+b]$$

avec x, y, z dans A et b, c, d dans B, ce qui nous montre que C^- est une algèbre de Malcev donc C est Malcev-admissible.

Si, de plus, B est une K-algèbre flexible et si $f([b, c]) = 0$, quels que soient b, c dans B, alors l'algèbre C est elle-même flexible. En effet,

$$((x+b)(y+c))(x+b) = (xy)x + f(bc)x + f(b)^2y + f(b)f(c)x + (bc)b$$

et

$$(x+b)((y+c)(x+b)) = x(yx) + f(cb)x + f(b)^2y + f(b)f(c)x + b(cb),$$

quels que soient x, y dans A et b, c dans B, d'où le résultat voulu.

Finalement, quels que soient x, y dans A et b dans B, on a $(x+b)y = = xy + f(b)y$ et $y(x+b) = yx + f(b)y$, donc A se plonge dans C en tant qu'idéal bilatère.

Le théorème 2.1. admet une certaine réciproque que nous résumons dans le résultat suivant:

Théorème 2.2. *Soient B une K-algèbre Lie-admissible, $f : B \to K$ une forme linéaire sur B telle que $f([b, c]) = 0$, quels que soient b, c dans B et A une K-algèbre telle que $x^2 = 0$ pour tout x dans A. Considérons, sur le K-espace vectoriel $C = A \oplus B$ la structure d'algèbre définie par*

$$(x+b)(y+c) = xy + f(b)y + f(c)x + bc,$$

quels que soient x, y dans A et b, c dans B. Si C est une K-algèbre Malcev--admissible, alors A est un K-algèbre de Malcev. L'algèbre A se plonge dans C en tant qu'idéal bilatère et C est flexible si et seulement si B l'est aussi.

Preuve. En effet, on remarque, tout d'abord, que $xy = -yx$, quels que soient x, y dans A, donc $[x+b, y+c] = 2xy + [b, c]$ quels que soient x, y dans A et b, c dans B. Or, B^- est une algèbre de Lie, d'où $J(x+b, y+c, z+d) = = 4J(x, y, z)$, soit

$$J(x+b, y+c, [x+b, z+d]) = [J(x+b, y+c, z+d), x+b],$$

ou encore,

$$J(x+b, y+c, [x+b, z+d]) = 8J(x, y, z)x,$$

quels que soient x, y, z dans A et b, c, d dans B. Par ailleurs,

$$J(x+b, y+c, [x+b, z+d]) = 8J(x, y, xz) + J(b, c, [b, c]) = 8J(x, y, xz),$$

soit finalement $J(x, y, xz) = J(x, y, z)x$, quels que soient x, y, z dans A. Donc, A est une algèbre de Malcev.

3. Etude d'un exemple.

On donnera ici un exemple d'une forme linéaire non nulle qui s'annule sur les commutateurs et nous procédons à la construction donnée au théorème 2.1.

En effet, soit B la K-algèbre dont la table de multiplication sur une base $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ est donnée par

$$b_1b_2 = b_1,\ b_1b_3 = {}^1/_2\, b_4,\ b_2^2 = b_2,\ b_2b_4 = b_4,\ b_3b_1 = -{}^1/_2\, b_4 \text{ et } b_3b_2 = b_3,$$

tous les autres produits étant nuls, où K est un corps commutatif de caractéristique zéro. On sait (cf. [1]) que B est une K-algèbre flexible et Malcev--admissible et il est évident que B n'est pas une algèbre de Malcev. Soit $f : B \to K$ la forme linéaire sur B définie par $f(b_1) = 0, f(b_2) = 1, f(b_3) = 0$ et $f(b_4) = 0$. On vérifie aisément que quels que soient b, c dans B, on a $f([b, c]) = 0$.

Par ailleurs, considérons la K-algèbre de Malcev A dont la table de multiplication sur une base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est donnée par $e_1e_2 = -e_2e_1 = e_1, e_1e_3 = -e_3e_1 = e_4, e_2e_3 = -e_3e_2 = -e_3, e_2e_4 = -e_4e_2 = e_4$, tous les autres produits étant nuls. Si l'on définit sur le K-espace vectoriel $C = A \oplus B$ la structure d'algèbre donnée par $(x + b)(y + c) = xy + f(b)y + f(c)x + bc$, quels que soient x, y dans A et b, c dans B, la table de multiplication de C relativement à la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, b_1, b_2, b_3, b_4\}$ s'obtient en réunissant celle de A relativement à la base $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ celle de B par rapport à $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ ainsi que les relations

$$e_ib_2 = b_2e_i = e_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

et

$$e_ib_j = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3, 4;\ j \neq 2).$$

L'algèbre C est, d'après le théorème 2.1., flexible et Malcev-admissible et A se plonge dans C en tant qu'idéal bilatère. Il est évident, par ailleurs, que C n'est pas une algèbre de Malcev.

Bibliographie

[1] A. Abd El Malek; *Sur les algèbres de Malcev-admissibles*, Rend. Acc. Nazionale dei Lincei, Serie VIII, Vol. 68 (1980), 390-396.

[2] A. Koulibaly; *Algèbres de Malcev en basses dimensions*, Thèse de spécialité en Mathématiques, Université de Montpellier II, Montpellier, Juin 1976.

[3] A. I. Malcev; *Analytic loops*, Mat. Sb. (N. S.), 36 (78) (1955), 569-576 (en russe).

[4] H. C. Myung; *Embedding of Lie algebra into Lie-admissible algebra*, Proc. Amer. Math. Soc. 73 (1979), 303-307.

[5] K. Yamaguti; *On the theory of Malcev algebras*, Kumamoto J. Sc., Ser. A, 6, n.º 1 (1963), 9-45.

A. Koulibaly
Institut de Mathématiques et de Sciences Physiques
Université de Ouagadougou
B. P. 7021
Ouagadougou
HAUTE-VOLTA