BOL. SOC. BRAS. MAT., VOL. 15 Nºs 1 e 2 (1984), 97-100

INTEGRABILIDADE DAS DISTRIBUIÇÕES DADAS POR SUBALGEBRAS DE LIE DE CODIMENSÃO FINITA NO gh(n,C)

REINALDO SALVITTI

Nesta nota nós provamos o seguinte resultado.

Teorema. *Toda distribuição no* $Gh(n,C)$ *dada por* $J(z)H$, *onde* $z \in Gh(n,C)$, H *é uma subálgebra de Lie de* $gh(n,C)$ *de codimensão finita e* J *é o jacobiano do germe* z, *é integrável.*

1. Notações [1]

$gh(n,C)$ - espaço vetorial dos germes das transformações holomorfas de C^n que preservam a origem.

Com o colchete $[h,k] = J(k)h - J(h)k$ esse espaço é uma álgebra de Lie.

$Gh(n,C) = \{z \in gh(n,C); z$ é inversível$\}$. Esse aberto de $gh(n,C)$ com a operação de composição é um grupo de Lie cuja álgebra é $gh(n,C)$.

2. Distribuições no $Gh(n,C)$ dadas por subálgebras de Lie de codimensão finita de $gh(n,C)$

Seja por hipótese H uma subálgebra de Lie qualquer de $gh(n,C)$ de codimensão finita. Tomemos no grupo $Gh(n,C)$ a distribuição dada pela transformação infinitesimal de $Gh(n,C)$ e por H, isto é,

$$\{(z, J(z)H);\quad z \in Gh(n,C)\}$$

Recebido em 08/06/84. Versão definitiva em 24/09/84.

onde o jacobiano $J(z)$ é a transformação infinitesimal em z. Seja F um suplementar topológico qualquer de H. Como F e H são fechados, temos que F e H são espaços de Silva [4] e portanto [3] escalas de espaço de Banach, já que $gh(n,C)$ é a escala de Banach

$$gh(n,C) = \bigcup_{0<s<1} Y_s.$$

Y_s é o subespaço vetorial dos germes z de $gh(n,C)$ tais que $\sup_{|t|<s} |J(z)(t)| < \infty$, onde $|J(z)(t)| = |(a_{ij}(t))| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{p} |a_{ij}(t)|$.

Com a norma $|z|_s = \sup_{|t|<s} |J(z)(t)|$, é um espaço de Banach complexo.

Então $F = \varinjlim_{0<s\leq 1} (F \cap Y_s)$ $\quad H = \varinjlim_{0<s\leq 1} (H \cap X_s)$

onde os limites acima indicam limites indutivos de espaços localmente convexos.

Por [2] existe uma projeção q sobre F e um número $k > 0$ tal que

$$|q(z)|_s \leq k|z|_s$$

para todo $z \in gh(n,C)$ e todo s, $0 < s \leq 1$.

Seja p a projeção sobre H dada por

$$p = I - q,$$

onde I é a identidade. Portanto

$$p(z) = z - q(z),$$

$$|p(z)|_s \leq |z|_s + |q(z)|_s \leq |z|_s + k|z|_s, \quad |p(z)|_s \leq (k+1)|z|_s.$$

Usando [3] e a condição acima podemos aplicar o teorema de Saravia [2] que garante a integrabilidade da distribuição $\{(z, J(z)) : z \in Gh(n,C)\}$. Além disso, por [3], a variedade integral maximal *que passa pela identidade de* $Gh(n,C)$ *é um subgrupo de Lie de dimensão infinita.*

Com esse resultado e [2] fica resolvida a correspondência entre subgrupos de Lie conexos de $Gh(n,C)$ e $gh(n,C)$ no caso das álgebras de Lie serem de dimensão finita ou de codimensão finita.

3. Exemplos

3.1. Consideremos as subálgebras H_k do $gh(n,C)$ tal que $z \in H_k$ se $z'(0) = z''(0) = \dots = z^{(k)}(0) = 0$ para $k \geq 1$. É fácil ver que H_k é uma subálgebra de Lie de $gh(n,C)$ de codimensão finita. Nos casos em que $k \geq 2$ os subespaços suplementares contêm propriamente o espaço vetorial dos germes das transformações lineares.

3.2. Seja H uma subálgebra de Lie qualquer das matrizes complexas de ordem n, $gl(n,C)$. Seja S um suplementar de H em $gl(n,C)$. Então podemos escrever $gh(n,C) = S \oplus H \oplus H_1$, onde H_1 é o espaço descrito em 3.1. Desta forma o espaço vetorial $H \oplus H_1$ tem codimensão finita. Por outro lado é fácil ver que $H \oplus H_1$ é uma subálgebra de Lie de $gh(n,C)$. Logo a toda subálgebra de Lie de $gl(n,C)$ podemos associar uma subálgebra de Lie de $gh(n,C)$ de codimensão finita.

Bibliografia

[1] Pisanelli, D.; *An example of an infinitive Lie group*, - Proc. Am. Math. Soc. 62, nº 1 (1977) 156-160.

[2] Saravia, E.V.; *Uma demonstração do Terceiro Teorema de Lie em* $gh(n,C)$ *usando o Teorema de Frobenius em Escalas de Banach*, 14º Seminário Brasileiro de Análise, Nov. 1981, IMPA, Brasil.

[3] Salvitti, R.; *Abstract Frobenius Theorem, global formulation, applications to Lie groups*, Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory II, edited by G. Zapata (North Holland, 1984, pp 359-381).

[4] Mujica, J.; *Gérmenes Holomorfos y Funciones holomorfas en espacios de Frechet* (Publicationes del Departamento de Teoria de Funciones - Universidade de Santiago de Compostela, 1978).

Reinaldo Salvitti
Instituto de Matemática e Estatística
Universidade de São Paulo
Cidade Universitária "Armando Salles de Oliveira"
Caixa Postal nº 20570 (Agência Iguatemi)
São Paulo - Brasil