

SUR LA COURBURE TOTALE DES FEUILLETAGES DES SURFACES A BORD

RÉMI LANGEVIN ET GILBERT LEVITT

I. Introduction

Soit M une surface munie d'une métrique riemannienne, et F un feuilletage de M à singularités isolées. La courbure totale $k(F) \in [0, +\infty]$ de F est définie comme l'intégrale sur $M - \text{Sing } F$ de $k(x)$, où $k(x) \geq 0$ est la courbure géodésique en x de la feuille passant par x .

Nous avons vu dans [LL] que, si M est une surface compacte sans bord de courbure constante non nulle, les feuilletages tracés dessus ont une courbure totale importante. Nous voulons montrer ici que, si M a un bord, la courbure de ∂M impose de la courbure aux feuilletages de M .

Les surfaces M que nous considérons seront un disque de rayon R dans le plan euclidien R^2 ou le plan hyperbolique H^2 (de courbure constante -1), ou bien un anneau bordé par deux cercles concentriques de rayons R_e et R_i dans R^2 ou H^2 . Nous reviendrons également sur le cas de la sphère unité $S^2 \subset R^3$, déjà étudié dans [LL].

Dans le cas où M a un bord, nous supposons toujours que F est tangent au bord, en ce sens que ∂M se compose de singularités et de feuilles de F .

Notre premier résultat concerne la somme des courbures totales de F et de son orthogonal $F^\perp$.

Théorème A.

- 1) Si $D \subset R^2$ est un disque de rayon R et si F est tangent

$\bar{a} \partial D$, alors $k(F) + k(F^\perp) \geq 2\pi R$. Si D est un disque dans H^2 , alors $k(F) + k(F^\perp) \geq 2\pi \operatorname{sh} R$.

2) Si $A \subset R^2$ est un anneau de rayons R_e et R_i et si F est tangent $\bar{a} \partial A$, alors $k(F) + k(F^\perp) \geq 2\pi(R_e - R_i)$. Si A est un anneau dans H^2 , alors $k(F) + k(F^\perp) \geq 2\pi(\operatorname{sh} R_e - \operatorname{sh} R_i)$.

3) Si F est un feuilletage de la sphère unité S^2 , alors $k(F) + k(F^\perp) \geq 8\pi/3$.

Remarques: Rappelons que, si F est un feuilletage orientable de S^2 , alors $k(F) + k(F^\perp) \geq 4\pi$ ([LL]).

- Dans les cas 1 et 2 les bornes inférieures sont atteintes, par exemple par un feuilletage par cercles concentriques; par contre nous ignorons si la borne $8\pi/3$ est la meilleure possible.

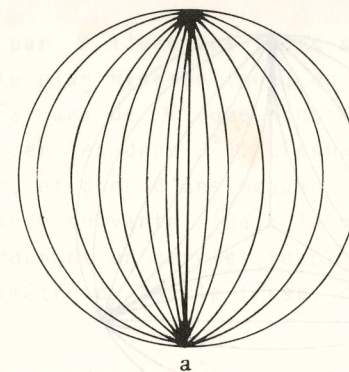
- Pour un disque D , considérons le quotient de la borne inférieure $2\pi R$ ou $2\pi \operatorname{sh} R$ par l'aire de D (égale à πR^2 ou à $2\pi \operatorname{ch} R - 2\pi$). Lorsque R tend vers l'infini, ce quotient tend vers 0 dans le cas euclidien et vers 1 dans le cas hyperbolique, tout comme la courbure géodésique d'un cercle de rayon R .

Considérons maintenant le cas d'un seul feuilletage. Notre principal résultat est le suivant:

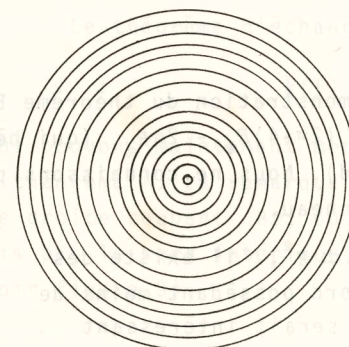
Théorème B: Soit $D \subset R^2$ un disque euclidien de rayon R . Si F est orientable et tangent $\bar{a} \partial D$, alors $k(F) \geq (2\pi - 4)R$.

Remarques: - La valeur minimale est la courbure totale du feuilletage représenté sur la figure 1a. Nous représentons sur les figures 1b et 1c deux autres feuilletages orientables tangents $\bar{a} \partial D$, avec l'indication de leur courbure totale (pour $R = 1$); ces courbures sont calculées grâce au "théorème de la divergence" [BLR].

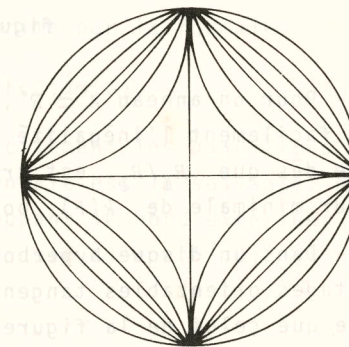
FEUILLETAGES DES SURFACES A BORD



$$k(F) = 2\pi - 4 \sim 2,28$$



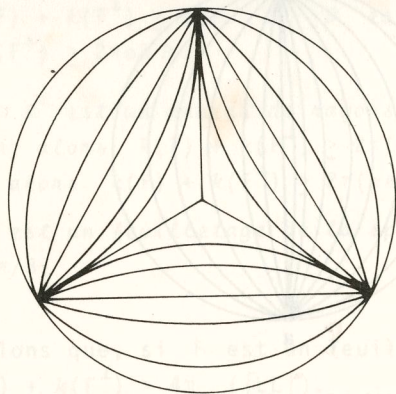
$$k(F) = 2\pi \sim 6,28$$



$$k(F) = 2\pi + 8 - 8\sqrt{2} \sim 2,97$$

figure 1

- Pour un feuilletage tangent $\bar{a} \partial D$ mais non orientable, il nous semble probable que la valeur minimale de $k(F)$ soit la courbure totale du feuilletage représenté sur la figure 2.



$$k(F) = 2\pi + 6 - 6\sqrt{3} \sim 1,89$$

figure 2

- Pour un anneau $A \subset R^2$, la démonstration du théorème B fournit facilement l'inégalité $k(F) \geq (2\pi - 4)R_e - 2\pi R_i$ (qui hélas est vide dès que R_i/R_e est trop grand). Nous ne connaissons pas la valeur minimale de $k(F)$ pour un anneau.

- Dans un disque hyperbolique $D \subset H^2$, il existe des feuilletages orientables tangents au bord possédant moins de courbure que celui de la figure 1a. Il serait intéressant de connaître en fonction de R la borne inférieure de $k(F)$, ou au moins un équivalent quand $R \rightarrow +\infty$ (πe^R ? $(\pi/2)e^R$?).

- Pour un disque bordé par une courbe fermée simple quelconque dans le plan euclidien, on peut calculer la borne inférieure de la courbure totale d'un feuilletage tangent au bord et ne possédant aucune singularité d'indice négatif (Langevin - Possani, en préparation).

II. Démonstration du théorème A

Le théorème A, comme d'ailleurs le théorème B, repose sur le théorème d'échange ($[L]$, $[LL]$) que nous rappelons maintenant.

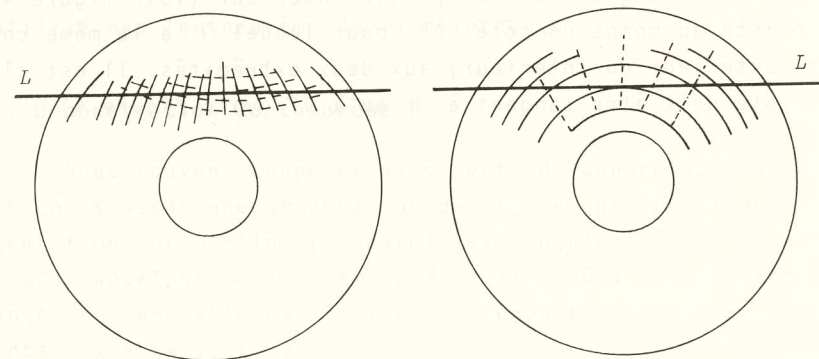
Désignons par H l'une des trois surfaces suivantes: le plan euclidien, le plan hyperbolique, ou la sphère unité. Soit G l'espace des géodésiques de H (que nous appelons droites dans R^2 ou H^2 , grands cercles dans S^2). L'espace G est muni d'une densité canonique, et donc d'une mesure canonique m , qui possède la propriété suivante [Sa]: la m -mesure de l'ensemble des géodésiques coupant un cercle (resp. un segment de géodésique) est égale au périmètre du cercle (resp. deux fois la longueur du segment).

Soit L une géodésique de H , et F un feuilletage de H (ou d'une partie de H telle qu'un disque ou un anneau). On définit $\mu(F, L) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ comme le nombre de points de L qui sont des points de tangence de L avec F ou des singularités de F .

Le théorème d'échange s'exprime par la formule

$$k(F) = \int_G \mu(F, L) dm(L).$$

Nous pouvons maintenant montrer facilement les assertions 1 et 2 du théorème A. La remarque fondamentale est la suivante: si L est une droite coupant ∂D , ou bien coupant le bord extérieur de A mais pas le bord intérieur, alors $\mu(F, L) + \mu(F^\perp, L) \geq 1$ (voir figure 3).



$$\mu(F^\perp, L) = 1$$

$$\mu(F, L) = 1$$

figure 3

On en déduit que $k(F) + k(F^\perp)$ est au moins égal au périmètre de D , ou à la différence des périmètres des composantes de ∂A , C.Q.F.D.

Considérons maintenant l'assertion 3. Soit P le groupe des isométries de S^2 , et dg sa mesure de Haar de masse 1. Soit L un grand cercle, et F un feuilletage. On déduit du théorème d'échange la formule suivante:

$$k(F) = 2\pi \int_P \mu(F, gL) dg = 2\pi \int_P \mu(gF, L) dg.$$

Soit $C_0 = (L_1, L_2, L_3)$ un ensemble de trois grands cercles deux à deux orthogonaux. Notons $\mu(F, C_0) = \mu(F, L_1) + \mu(F, L_2) + \mu(F, L_3)$. On a alors:

$$k(F) + k(F^\perp) = (2\pi/3) \int_P [\mu(gF, C_0) + \mu(gF^\perp, C_0)] dg.$$

Il nous suffit donc de vérifier que, pour tout feuilletage H de S^2 , on a $\mu(H, C_0) + \mu(H^\perp, C_0) \geq 4$. Nous nous limiterons au cas général où les sommets de C_0 ne sont pas des points de contact de C_0 avec H (ou des singularités de H).

Nous affirmons que le bord de chacun des 8 triangles à angles droits découpés par C_0 contient au moins un point x où C_0 est tangent à H ou à $H^\perp$. Considérons en effet le morceau de feuille de H passant par un sommet du triangle; il est soit extérieur au triangle, soit en partie intérieur (voir figure 4), et il existe au moins un côté AB pour lequel H a le même comportement (extérieur ou intérieur) aux deux extrémités. Il est clair que ce côté doit être tangent à H ou à $H^\perp$ (voir figure 4).

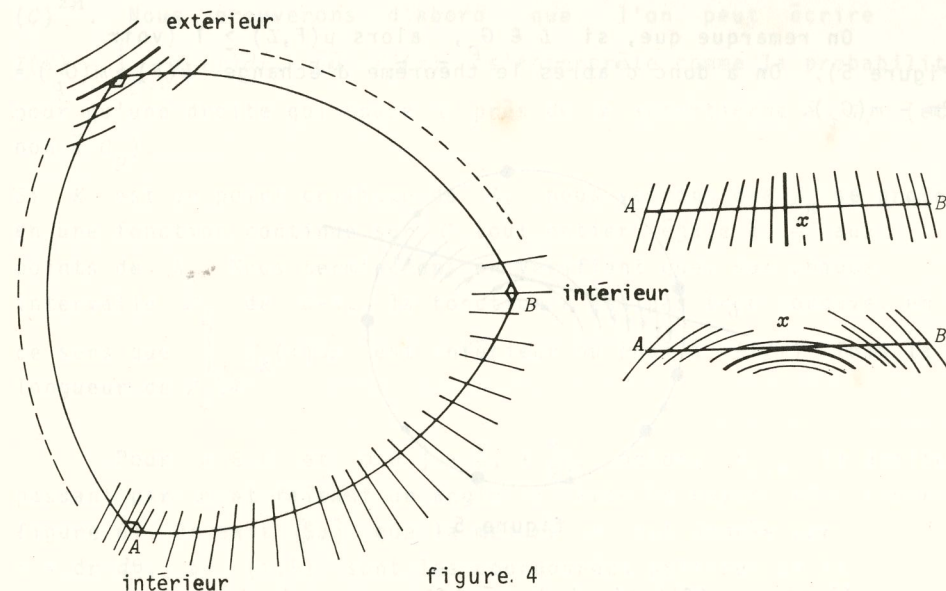


figure. 4

Puisqu'il y a 8 triangles et qu'un point de contact n'appartient qu'à deux triangles, on a bien $\mu(H, C_0) + \mu(H^\perp, C_0) \geq 4$.

Remarque: Si H est orientable, on vérifie facilement que $\mu(H, C_0) + \mu(H^\perp, C_0) \geq 6$, d'où on déduit $k(F) + k(F^\perp) \geq 4\pi$. On obtient ainsi une démonstration du premier théorème de [LL] qui n'utilise pas le théorème de la divergence.

III. Démonstration du théorème B

Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $R = 1$. Nous choisissons une orientation de F , ce qui induit une orientation sur ∂D -Sing F . Parmi les singularités de F situées sur ∂D , appelons K l'ensemble de celles où l'orientation de ∂D change. Cet ensemble est fini et se compose d'un nombre pair de points, $K = \{k_1 \dots k_{2n}\}$.

Soit G_i (resp. G_p) l'ensemble des droites qui rencontrent D , ne rencontrent pas K , et séparent K en deux sous-ensembles formés d'un nombre impair (resp. pair) de points. La somme $m(G_i) + m(G_p)$ vaut 2π (le périmètre de D).

On remarque que, si $L \in G_p$, alors $\mu(F, L) \geq 1$ (voir figure 5). On a donc d'après le théorème d'échange $k(F) \geq m(G_p) = 2\pi - m(G_i)$.

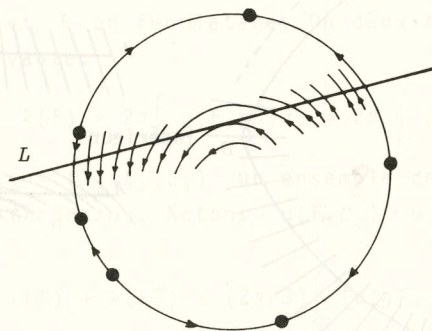


figure 5

Il nous suffit ainsi de vérifier que $m(G_i)$, que nous noterons désormais $I(K)$, est inférieur ou égal à 4. En d'autres termes, nous pouvons oublier F et nous concentrer sur l'énoncé suivant:

Proposition: Soit K un ensemble de $2n$ points du cercle unité C . On a toujours $I(K) \leq 4$ (où $I(K)$ est la mesure de l'ensemble des droites séparant K en deux sous-ensembles impairs).

Remarque: On a $I(K) = 4$ si (et en fait seulement si) K se compose de deux points diamétralement opposés. Si $K = \emptyset$, on a $I(K) = 0$. Si d'autre part K est l'ensemble des sommets d'un $2n$ -gone régulier, alors $I(K)$ tend vers π quand n tend vers l'infini.

Démonstration de la proposition

Commençons par donner les grandes lignes. Il est facile de vérifier qu'il suffit de montrer $I(K) \leq 4$ lorsque K est un point critique (ou même un maximum local) de I , considérée comme fonction C^∞ définie sur un voisinage du point K dans le tore

$(C)^{2n}$. Nous prouverons d'abord que l'on peut écrire $I(K) = \int_{C-K} f_K(x) dx$, où $f_K(x)$ s'interprète comme la probabilité pour qu'une droite qui coupe C près de x appartienne à G_i (et non à G_p).

Si K est un point critique de I , nous verrons que f_K se prolonge en une fonction continue sur C tout entier, égale à $\frac{1}{2}$ aux points de K . Nous terminerons en vérifiant que, sur chaque intervalle J_j de $C-K$, la fonction n'est pas trop concave, en ce sens que $\int_{J_j} f_K(x) dx$ est inférieur ou égal à $(2/\pi)$ fois la longueur de J_j .

Pour $x \in C$ et $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$, notons $D_{x,\alpha}$ la droite passant par x et faisant un angle α avec le rayon $x0$ (voir figure 6). On sait [Sa] que la mesure m est donnée par $m = dr d\theta$, où (r, θ) sont les coordonnées polaires de la projection orthogonale de 0 sur la droite.

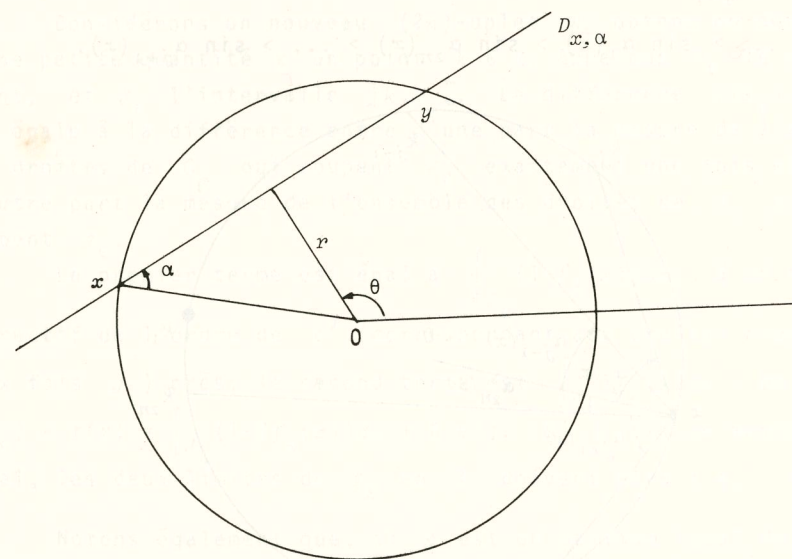


figure 6

Des formules donnant r et θ en fonction de x et α , on déduit alors facilement l'égalité $I(K) = (\frac{1}{2}) \iint \cos \alpha \, d\alpha \, dx$, l'intégrale étant prise sur l'ensemble des (x, α) tels que $D_{x, \alpha} \in G_i$; le facteur $\frac{1}{2}$ correspond au fait que chaque droite est comptée deux fois ($D_{x, \alpha} = D_{y, -\alpha}$).

Le théorème de Lebesgue-Fubini nous permet maintenant d'écrire $I(K) = \int_{C-K} f(x) \, dx$, avec $f(x) = f_K(x) = (\frac{1}{2}) \int \cos \alpha \, d\alpha$ (intégrale prise sur l'ensemble des α tels que $D_{x, \alpha} \in G_i$).

En intégrant, on obtient pour x entre k_j et k_{j+1} (voir figure 7) la formule

$$\begin{aligned} f(x) &= (\frac{1}{2}) [\sin \alpha_j(x) - \sin \alpha_{j-1}(x) + \dots + (-1)^{j-1} \sin \alpha_1(x) + \\ &\quad + (-1)^j \sin \alpha_{2n}(x) + \dots - \sin \alpha_{j+1}(x)] \\ &= (\frac{1}{2}) \sum_{q=1}^{2n} (-1)^{q-j} \sin \alpha_q(x); \text{ on notera que } \sin \alpha_j(x) > \sin \alpha_{j-1}(x) > \dots \\ &\quad \dots > \sin \alpha_1(x) > \sin \alpha_{2n}(x) > \dots > \sin \alpha_{j+1}(x). \end{aligned}$$

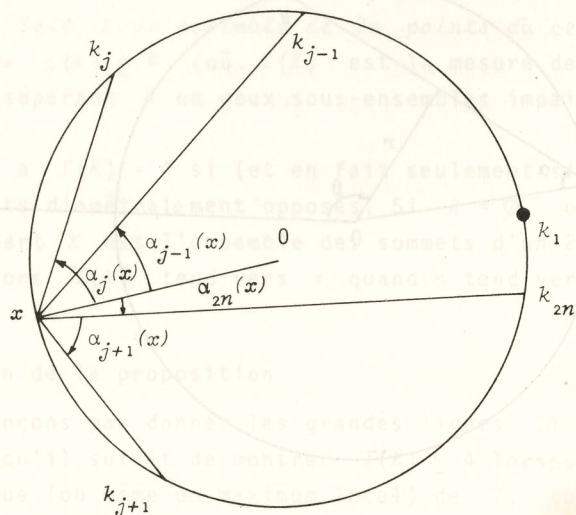


figure 7

On vérifie facilement sur cette formule que la fonction f est comprise entre 0 et 1, continue sur $C-K$, et admet en tout point de K une limite à droite et une limite à gauche dont la somme vaut 1.

Nous allons voir que, si K est un maximum local de I , alors en tout point de K ces limites sont égales; en d'autres termes, f se prolonge par continuité à C , avec $f(k_j) = \frac{1}{2}$ pour tout j .

Remarque: La démonstration reviendra en fait à interpréter les sauts de f comme les dérivées partielles de I . La fonction f se prolonge donc si et seulement si K est un point critique de I . Cette caractérisation des points critiques peut aussi être obtenue en passant par la formule suivante (qui montre que I est C^∞): $I(K) = 2 \sum_{1 \leq r < s \leq 2n} (-1)^{r+s-1} d(k_r, k_s)$, où d est la distance euclidienne du plan.

Considérons un nouveau $(2n)$ -uplet K_ϵ obtenu en déplaçant d'une petite quantité ϵ un point $k \in K$. Appelons k_ϵ le nouveau point, et J_ϵ l'intervalle $]k, k_\epsilon[$. La différence $I(K_\epsilon) - I(K)$ est égale à la différence entre d'une part la mesure de l'ensemble des droites de G_p qui coupent J_ϵ exactement une fois et d'autre part la mesure de l'ensemble des droites de G_i qui coupent J_ϵ .

Le premier terme est égal à $\int_{J_\epsilon} (1 - f_K(x)) \, dx$, à un terme correctif de l'ordre de ϵ^2 (correspondant aux droites coupant deux fois J_ϵ) près; le second terme est $\int_{J_\epsilon} f_K(x) \, dx$. On a ainsi $I(K_\epsilon) - I(K) = \int_{J_\epsilon} (1 - 2f_K(x)) \, dx + O(\epsilon^2)$. Si K est un maximum local, les deux limites de f_K en k doivent être $\geq \frac{1}{2}$, C.Q.F.D.

Notons également que, si K est un maximum local de I , chaque intervalle de $C-K$ est de longueur $\leq \pi$: sinon, la formule donnant f en fonction des α_q entraînerait que la limite à gauche de f en k serait inférieure ou égale à $(\frac{1}{2})(1 - \sin \beta) < \frac{1}{2}$ (voir figure 8).

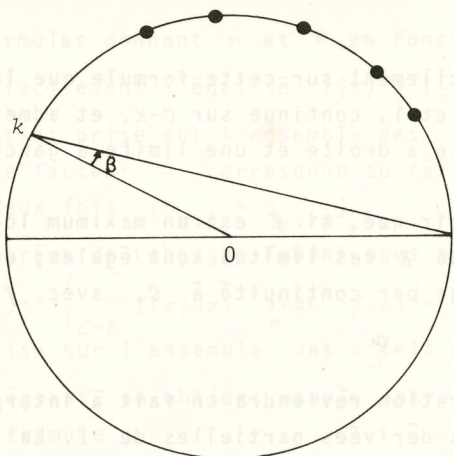


figure 8

Nous terminons maintenant la démonstration. Si la proposition était fausse, on aurait $I(K) > 4$ pour un K qui est un maximum local de I . Considérons un intervalle J_j de $C-K$. Sur cet intervalle, chaque fonction $\alpha_q(x)$ s'écrit $-x/2 + \alpha_q$, avec α_q indépendant de x (théorème de l'angle inscrit !); on peut donc écrire $f(x)$ sous la forme $A_j \cos(x/2 + \beta_j)$.

Notons m_j le milieu de J_j , et ℓ_j sa longueur. Puisque f vaut $\frac{1}{2}$ aux bornes de J_j , on a nécessairement $f(x) = \cos(x/2 - m_j/2) / 2\cos(\ell_j/4)$ pour $x \in J_j$. On en déduit $\int_{J_j} f(x)dx = 2\text{tg}(\ell_j/4) \leq 2(4/\pi) \cdot (\ell_j/4) = (2/\pi)\ell_j$, car on a $\ell_j \leq \pi$, et $\text{tg } \theta \leq (4/\pi) \cdot \theta$ pour $0 \leq \theta \leq \pi/4$. Finalement $I(K) = \int_{C-K} f(x)dx \leq (2/\pi) \sum_j \ell_j = 4$, contradiction.

Bibliographie

- [BLR] F. Brito, R. Langevin, H. Rosenberg: *Intégrales de courbure sur des variétés feuilletées*, Jour. Diff. Geom. 16 (1981), 19-50.
- [L] R. Langevin: *Feuilletages tendus*, Bull. SMF 107 (1979), 271-281.

- [LL] R. Langevin, G. Levitt: *Courbure totale des feuilletages des surfaces*, Comm. Math. Helv. 57 (1982), 175-195.
- [Sa] L.A. Santalo: *Integral geometry and geometric probability*, Encyclopedia of mathematics and its applications, Addison-Wesley.

Laboratoire de Topologie
Université de Dijon
B.P. 138
21004 Dijon Cedex
France

Uer de Mathématiques
Université Paris 7
2 Place Jussieu
75251 Paris Cedex 05
France