BOL. SOC. BRAS. MAT., VOL. 16 Nº 1 (1985), 31-44

SUR LA FORMULE DE GONZALEZ-VERDIER

MARCOS SEBASTIANI

L'objet de cet article est de donner une démonstration simplifiée de la formule de Gonzalez-Vedier sur l'invariant d'Euler local (voir [1]) et quelques applications.

La demonstration suit la même ligne que celle de [1] mais, en adoptant un point de vue plus topologique, nous obtenons une démonstration sensiblement plus courte.

Les applications pourraient s'obtenir aussi à partir de [2] mais la présentation donnée ici est plus élementaire.

Je remercie J.P. Brasselet et G. Gonzalez-Springberg, dont les entretiens et les exposés m'ont été très profitables.

1. Classe fondamentale d'un diviseur. Soit M un espace analytique réduit de dimension n et soit D un diviseur de Cartier dans M. On suppose D *effectif et à support compact.*

Soit E le fibré vectoriel de dimension 1 associé à D. Comme D est effectif, E est canoniquement muni d'une section non-triviale s (correspondente à la fonction constante 1, dont le diviseur est $0 \geq -D$). L'ensemble des zéros de s est le suport $|D|$ de D. Alors, on peut considérer.

$$s\colon (M, M-|D|) \to (E,E^*) \qquad (E^* = E \text{ moins section nulle})$$

Soit ω la classe de Thom de E, $\omega \in H^2(E,E^*;\mathbb{Z})$.

Définition 1. $[D] = s^*(\omega) \cap [M] \in H_{2n-2}(|D|,\mathbb{Z})$

Recebido em 08/05/85.

est appelee *classe fondamentale* du diviseur D ($[M]$ dénote la classe fondamentale de M).

Soient $D_1, \ldots, D_r$ les composantes irréductibles de $|D|$. Alors, on peut écrire de façon unique: $[D] = \sum n_j [D_j]$.

Définition 2. $\sum n_j D_j$ est appelé *cycle associé* à D.

Si M est normal, le cycle associé est le diviseur de Weil associé au diviseur de Cartier.

Lemme 1. Si M est compact, $[D] = c_1(E) \cap [M]$ dans $H_{2n-2}(M;\mathbb{Z})$.

(Par abus de notation, on note avec la même lettre une classe d'homologie et son image par l'application induite par une inclusion).

Démonstration. En effet, $s^*(\omega) = c_1(E) \in H^2(M;\mathbb{Z})$.

Lemme 2. Supposons que M est un sous-ensemble analytique (fermé) d'une variété non-singulaère V. Soit D' un diviseur effectif et à support compact dans V. Soit $D = D'$. M le diviseur d'intersection (restriction de D' à M). Alors, $[D] = [D']\cdot[M]$ (intersection de classes d'homologie dans la variéte V).

Démonstration. En effect, $[D']\cdot[M] = [D']^* \cap [M]$, où $*$ indique dualité de Poincaré dans V. Mais, par la définition 1, $[D']^* = s'^*(\omega')$ où ω' est la classe de Thom du fibré associé à D' et s' est sa section canonique. Donc, $[D'].[M] = s'^*(\omega') \cap [M]$.

Pour conclure, il suffit d'observer que le fibré associé à D est la restriction de celui associé à D' et appliquer la définition 1.

On va utiliser, dans ce qui suit, le résultant suivant de Topologie:

Lemme 3. Soient: $E \to X$ un fibré réel orienté de dimension n,

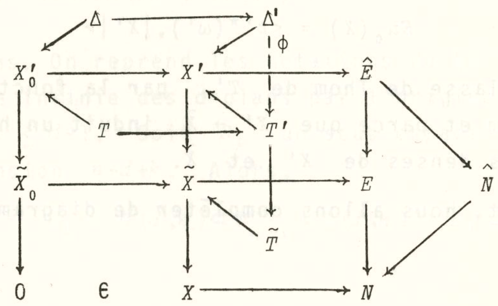
X un complexe fini, $Y \subset X$ un sous-complexe. Soit $s: X \to E$ une section telle que $s(y) \neq 0$ pour tout $y \in Y$. Soit $\omega \in H^n(E,E^*;\mathbb{Z})$ la classe de Thom. Alors, $s: (X,Y) \to (E,E^*)$ et $s^*(\omega) \in H^n(X,Y;\mathbb{Z})$ est l'obstruction à l'extension de $s|Y$ à une section de E^* au-dessus de X.

2. Ennoncé de la formule. Soit N un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{C}^n$. Soit X un sous-ensemble analytique fermé de dimension pure d de N. Soit $E = N \times G(d,n)$ le fibré en grassmanniennes de d-plans (par l'origine) associé au fibré tangent à N et soit $E_0 = \{0\} \times G(d,n)$ la fibre en $0 \in N$.

Soit $\tilde{X} \subset E$ le transformé de Nash de X. Soit $\tilde{X}_0 = E_0 \cap \tilde{X}$. Soit X' l'éclaté de $\tilde{X}_0$ dans $\tilde{X}$. Pour construire X', on prend l'éclaté $\hat{N}$ de 0 dans N et on considère $\hat{E} = \hat{N} \times G(d,n)$ (éclaté de E_0 dans E). L'application naturelle $\hat{E} \to E$ induit un homéomorphisme $\hat{E}-\hat{E}_0 \to E-E_0$, où $\hat{E}_0 = \hat{N}_0 \times G(d,n)$, $\hat{N}_0 \cong P_{n-1}$ étant le diviseur exceptionnel dans $\hat{N}$. Alors, X' est l'adhérence dans $\hat{E}$ de l'image réciproque de $\tilde{X}-\tilde{X}_0 \subset E-E_0$ par cet homéomorphisme là. L'application $\hat{E} \to E$ induit une application $X' \to \tilde{X}$.

Dans X' on considère le diviseur d'intersection $D = \hat{E}_0 \cdot X'$. C'est un diviseur effectif dont le support est le compact $X'_0 = \hat{E}_0 \cap X'$. Soit Δ' le fibré en droites complexes associé à D et soit $\Delta = \Delta'|X'_0$.

Sur $\tilde{X}$ on a le fibré tangent généralisé $\tilde{T}$, restriction à $\tilde{X}$ du fibré canonique sur E. Soit T' l'image réciproque de $\tilde{T}$ par $X' \to \tilde{X}$ et soit $T = T'|X'_0$. On résume la situation dans le diagramme commutatif:



Obsérvons que les flèches horizontales sont des inclusions et que $\tilde{X}_0$ et X'_0 sont compacts.

Théorème. (G. Gonzalez-Sprinberg et J.L. Verdier)

(1) $$Eu_0(X) = \int_{[D]} c_{d-1}(T-\Delta)$$

où $c(T-\Delta) = c(T)/c(\Delta) \in H^*(X'_0;\mathbb{Z})$ et $Eu_0(X)$ est le nombre d'Euler de X en 0.

3. Démonstration de la formule. Par définition de D, on voit que Δ' est la restriction à X' de l'image réciproque par la projection $\hat{E} \to \hat{N}$, du fibré associé au diviseur $\hat{N}_0$ dans $\hat{N}$. Donc, si $p \in X'$ et si x est l'image de p dans X, alors $\Delta'_p \subset \mathbb{C}^n$ est la droite $0x$ si $x \neq 0$; si $x = 0$, alors $\Delta'_p \subset \mathbb{C}^n$ est une droite limite (c'est à dire, il existe une suite $x_k \in X - \{0\}$ telle que $x_k \to 0$ et $0x_k \to \Delta'_p$). La section canonique s de Δ' est donnée par $s(p) = \overrightarrow{0x} \in \Delta'_p$. L'ensemble de ses zéros est, naturellement, X'_0.

D'autre part, on définit une section t de $\tilde{T}$ de la façon suivante: pour chaque $q \in \tilde{X}$ on définit $t(q)$ comme étant la projection orthogonale de $0x$ dans $\tilde{T}_q \subset \mathbb{C}^n$, où x est l'image de q dans X. Si N est assez petit, on sait que $t(q) \neq 0$ pour tout $q \in \tilde{X}-\tilde{X}_0$ (voir [1]). Par définition et par le lemme 3,

$$Eu_0(X) = \langle t^*(\tilde{\omega}), [\tilde{X}]\rangle$$

où $\tilde{\omega}$ est la classe de Thom de $\tilde{T}$.

Soit $t': X' \to T'$ la section image réciproque de t. Alors,

(2) $$Eu_0(X) = \langle t'^*(\omega'), |X'|\rangle$$

où ω' est la classe de Thom de T', par la fonctorialité de la classe de Thom et parce que $X' \to \tilde{X}$ induit un homéomorphisme entre des ouverts denses de X' et $\tilde{X}$.

Maintenant, nous allons compléter de diagramme de plus haut en définisssant un morphisme topologique $\phi: \Delta' \to T'$. Soit $p \in X'_0$ et soit q son image dans $\tilde{X}_0 \subset \tilde{X}$. Alors, il existe une suit $\{x_k\}$ de points non-singuliers de X telle que $x_k \to 0$, $0x_k \to \Delta'_p$ et $T_{x_k}(X) \to \tilde{T}_q$, où $T_{x_k}(X)$ est l'espace tangente à X dans le point non-singulier x_k. Par les propriétés de Whitney, $\Delta'_p \subset \tilde{T}_q$. Donc, $\Delta'_p \subset T'_p = \tilde{T}_q$. Il en résulte que, si N est assez petit, Δ'_p n'est pas orthogonal à T'_p, pour tout $p \in X'$. Allors, on définit $\phi_p: \Delta'_p \to T'_p$ par projection orthogonale dans T'_p.

D'après la définition de ϕ, $\phi^0 s = t'$.

D'autre part, $T' \cong \Delta' \oplus (T'/\Delta')$ topologiquement. Soit u la section nulle de T'/Δ'. Comme $\phi^0 s = t'$, on voit que t' correspond à $s \oplus u$ dans cette décomposition. Donc,

$$t'^*(\omega') = s^*(\omega_1) \cup u^*(\omega_2)$$

où ω_1, ω_2 sont les classes de Thom de Δ', T'/Δ' respectivement. Alors,

(3) $$\begin{aligned} \langle t'^*(\omega'), [X']\rangle &= \langle s^*(\omega_1) \cup u^*(\omega_2), [X']\rangle = \\ &= \langle u^*(\omega_2), s^*(\omega_1) \cap [X']\rangle = \langle u^*(\omega_2), [D]\rangle \end{aligned}$$

par la définition de $[D]$. Mais $u^*(\omega_2) = c_{d-1}(T'/\Delta')$, puisque $\dim T'/\Delta' = d-1$ et, donc, $c_{d-1}(T'/\Delta')$ est la classe d'Euler de T'/Δ'. Alors,

(4) $$\langle u^*(\omega_2), [D]\rangle = \langle c_{d-1}(T'/\Delta'), [D]\rangle = \langle c_{d-1}(T'-\Delta'), [D]\rangle.$$

La formule (1) résulte de (2), (3) et (4).

4. Applications. On reprend les notations du §2. Soit $G(d)$ la grassmannienne infinie des d-plans par l'origine. Soit k un entier, $0 \leq k \leq d-1$. Soit S_k un sous-espace linéaire de P_{n-1} de dimension $n-d+k$. Alors,

$$S_k \times G(d,n) \subset P_{n-1} \times G(d,n) = \hat{E}_0 \subset \hat{E}.$$

Définition 3. $\sigma_k(X) \in H_{2k}(G(d);\mathbb{Z})$ est l'image par la projection $\hat{E} \to G(d,n) \hookrightarrow G(d)$ de $[X']\cdot[S_k \times G(d,n)]$ (intersection de classes d'homologie dans $\hat{E}$)

Les $\sigma_k(X)$ ne dépendent ni du choix de S_k ni de n.

Proposition 1. Soient $c_0, c_1, \ldots, c_d$ les classes de Chern du fibré canonique sur $G(d)$. Alors,

$$Eu_0(X) = \sum_{k=0}^{d-1} \langle c_k, \sigma_k(X)\rangle . \tag{5}$$

Démonstration. On appelle aussi $c_0, c_1, \ldots, c_d$ les classes de Chern du fibré canonique sur $G(d,n)$. Soit $-x$ la première classe de Chern du fibré canonique sur P_{n-1} (cela veut dire que x est duale de la classe fondamentale d'un hyperplan).

Dans $H^*(\hat{E}_0) = H^*(P_{n-1}) \otimes H^*(G(d,n))$ on a:

$$\left(\sum_{i=0}^{d} 1\otimes c_i\right)(1\otimes 1 - x\otimes 1)^{-1} = \sum_{i,j} x^j \otimes c_i .$$

D'après la formule (1) et les descriptions de T' et Δ' on a:

$$Eu_0(X) = \sum_{j=0}^{d-1} \langle x^{d-j-1}\otimes c_j, [\hat{E}_0]\cdot[X']\rangle$$

puisque, d'après le lemme 2, $[D] = [\hat{E}_0]\cdot[X']$. Si $*$ dénote la dualité de Poincaré dans $\hat{E}$, on a:

$$\langle x^{d-j-1}\otimes c_j, [\hat{E}_0]\cdot[X']\rangle = \langle (x^{d-j-1}\otimes 1) \cup (1\otimes c_j), [X']^* \cap [\hat{E}_0] =$$

$$= \langle (1\otimes c_j) \cup [X']^*, (x^{d-j-1}\otimes 1) \cap [\hat{E}_0]\rangle =$$

$$= \langle (1\otimes c_j) \cup [X']^*, [S_j \times G(d,n)]\rangle$$

puisque le dual de $[S_j]$ dans P_{n-1} est x^{d-j-1}. Alors,

$$\langle x^{d-j-1}\otimes c_j, [\hat{E}_0].[X']\rangle = \langle 1\otimes c_j, [X']^* \cap [S_j \times G(d,n)]\rangle =$$

$$= \langle 1\otimes c_j, [\hat{X}']\cdot[S_j \times G(d,n)]\rangle = \langle c_j, \sigma_j(X)\rangle ;$$

d'où la formula (5).

Observation. La classe $\sigma_j(X)$ peut se représenter par un cycle dont le support est contenu dans le sous-ensemble de $G(d)$ formé par les d-plans limites des d-plans tangents aux points non-singuliers x de X, quand $x \to 0$ et $0x$ tend vers une directions appartenant à S_j.

Cas d'une hypersurface conique. Soit X le cône sur une hypersurface non-singulière V de P_{n-1}, où $n \geq 3$. Alors $d=n-1$ et 0 est une singularité isolée dans X.

Soit V^* l'hypersurface duale de V (les points de V^* sont les hyperplans tangents à V). Alors,

$$Eu_0(X) = Eu_0(Y) + (-1)^{d+1}\deg V^*, \tag{6}$$

où Y est une section hyperplane générique par 0 de X.

Pour le voir, soit H un hyperplan "générique" par 0 dans $\mathbb{C}^n$ et prenons, pour calculer les $\sigma_k(X)$, S_{d-2} égal à l'hyperplan de P_{n-1} défini par H et prenons $S_k \subset S_{d-2}$ pour $0 \leq k < d-2$.

Soit $Y = H \cap X$, qui est aussi un cône sur une hypersurface régulière. H coupe transversalement tous les plans tangents à X. Les élements de $X' \cap (S_k \times G(d,n))$ pour $0 \leq k \leq d-2$ sont les couples (L,T) où L est une droite du cône Y qui représente un point de P_{n-1} contenu dans S_k et T est un space tangent limite de d-plans tangents à X dans $x \in Y$ quand $x \to 0$, du moins si les S_k sont suffisament génériques.

De là on déduit que si l'on fixe une droite K par 0 dans $\mathbb{C}^n$ transverse à H, alors l'inclusion $G(d-1,n-1) \to G(d,n)$ qui envoie un $(d-1)$-plan $S \subset H = \mathbb{C}^{n-1}$ dans $S \oplus K$, applique chaque classe $\sigma_k(Y)$ dans $\sigma_k(X)$ pour $k = 0,1,\ldots,d-2$. Il résulte de cela et de (5) que:

$$Eu_0(X) = \sum_{k=0}^{d-1} \langle c_k, \sigma_k(X)\rangle = \sum_{k=0}^{d-2} \langle c_k, \sigma_k(Y)\rangle +$$

$$+ \langle c_{d-1}, \sigma_{d-1}(X)\rangle = Eu_0(Y) + \langle c_{d-1}, \sigma_{d-1}(X)\rangle .$$

D'autre part, $\sigma_{d-1}(X)$ vient d'une classe de homologie de

$$G(d,n) = G(n-1,n) = P_{n-1}$$

qui, par cette identification, correspond à la classe fondamentale de V^*. Dans cette identification, la classe totale de Chern du fibré canonique sur $G(d,n)$ correspond à $(1+\alpha)^{-1}$, où α est la classe duale de la classe fondamentale d'un hyperplan. Donc,

$$<c_{d-1}, \sigma_{d-1}(X)> = <(-1)^{d-1}\alpha^{d-1}, [V^*]> = (-1)^{d-1} \deg V^*$$

d'où la formule (6).

D'autre part, on sait que:

$$\deg_{V^*} = m(m-1)^{d-1} \quad \text{où} \quad m = \deg V .$$

Donc,

$$Eu_0(X) = Eu_0(Y) + (-1)^n m(m-1)^{n-2}.$$

Mais Y est le cône sur une hypersurface non-singulière de degré m dans P_{n-2}. Si $n = 3$, Y est formé par m droites différentes. Donc, $Eu_0(Y) = m$. Alors,

(7') $$Eu_0(X) = m-(m-1)m = 2m-m^2 \quad \text{si} \quad n = 3.$$

Si $n > 3$ on arrive, par récurrence sur n, à la formule

(7) $$Eu_0(X) = 1 - (1-m)^{n-1} \quad (n \geq 3).$$

Par example, si V est une quadrique non-singulière,

$$Eu_0(X) = 1 + (-1)^n.$$

Cas d'une surface de $P_3(\mathbb{C})$. Nous allons introduire d'abord une notation.

Définition 4. Soit C une courbe projective. On définit l'entier $\tilde{\chi}(C)$ par la formule:

$$\tilde{\chi}(C) = \chi(C) + \sum_{i=1}^{r} (k_i - 1)$$

où χ dénote la caractéristique d'Euler-Poincaré topologique de l'espace C, $p_1, \ldots, p_r$ sont les points singuliers de C et $k_1, \ldots, k_r$ leurs respectives multiplicités.

Considérons maintenant une surface algébrique X dans $\mathbb{P}_3$. Soit $0 \in X$ un point singulier. Soient H, H_0 des plans tels que $0 \notin H$ et $0 \in H_0$ (plan = 2-plan). Soient $S = H \cap X$ et $S_0 = H_0 \cap X$. Dans ces conditions on a la:

Proposition 2. Si H et H_0 sont génériques, alors

(8) $$Eu_0(X) = \tilde{\chi}(S) - \tilde{\chi}(S_0) + \text{mult}_0(X).$$

Précisons le sens de "générique":

a) $\dim[(\text{Sing } X) \cap H] \leq 0$ et $\dim[(\text{Sing } X) \cap H_0] \leq 0$;

b) H et H_0 sont différents de tous les plans tangents à X aux points de X-Sing X et de tous les plans limites de ces plans tangents;

c) H_0 n'est pas contenu dans le cône tangent à X dans 0;

d) la fibre du transformé de Nash de X au-dessus de tout point $p \in H \cap X$ ou $p \in H_0 \cap X$, $p \neq 0$, est finie.

Il existe des ouverts de Zariski non-vides dans la variété des plans de P_3 et des plans par 0 de P_3 vérifiant ces conditions. Pour H c'est immédiat, puisque le transformé de Nash de X est de dimension 2 et le dual P_3^* de P_3 est de dimension 3.

Si il n'était pas vrai pour H_0 on aurait, dans le cas irréductible, que tous les plans tangents à X aux points réguliers passent par 0. En coordonnées affines, on obtient une équation irréductible $\phi = 0$ telle que $\phi | x\phi_x + y\phi_y + z\phi_z$. Cela implique que X est un cône de sommet 0; dans ce cas, c'est trivial.

Exemple. Si X est un cône de sommet 0 sur une plane C de degré m, on a $S=C$ et S_0 est formée de m droites différentes par 0. Alor

$$\chi(S_0) = 1+m \quad \text{et} \quad \tilde{\chi}(S_0) = 1+m+m-1 = 2m.$$

Donc,

$$Eu_0(X) = \tilde{\chi}(C) - 2m+m = \tilde{\chi}(C) - m.$$

(C'est la formule (6.3.2) de [2] dans le cas $d = 2$ (attention: dans la formule (6.3.2) de [2], D_i est de codimension $i-1$)). Si C est non-singulière, $\tilde{\chi}(C) = \chi(C) = 3m-m^2$ et on retrouve (7').

Lemme 4. Soit C une courbe projective. Soient $\tilde{C}$ son transformé de Nash et $\tilde{T} \to \tilde{C}$ le fibré tangent de Nash. Alors,

(9) $$\langle c_1(\tilde{T}), [\tilde{C}]\rangle = \tilde{\chi}(C).$$

Démonstration. Soit $c_M(C)$ la classe de Chern-Mather de C. Alors,

(10) $$\langle c_1(\tilde{T}), [\tilde{C}]\rangle = \deg_0 c_M(C)$$

(où $\deg_0$ denote le degré de la composante en dimension 0).

Soit $f:A \to C$ la désingularisation de C. Alors,

$$f_*(c_*(\mathbb{1}_A)) = c_*(f_*(\mathbb{1}_A))$$

où c_* est la classe de Chern en holomogie et $\mathbb{1}_A$ est la fonction constante 1 sur A. Soient $p_1,\ldots,p_r$ les points singuliers de C, de multiplicités $k_1,\ldots,k_r$ respectivement. Soit m_i le cardinal de $f^{-1}(p_i)$ $(1 \leq i \leq r)$. Alors,

$$f_*(c_*(\mathbb{1}_A)) = c_*(f_*(\mathbb{1}_A)) = c_M(C) + \sum_{i=1}^{r} (m_i - Eu_{p_i}(C))\cdot 1$$

où 1 est le génerateur de $H_0(C,\mathbb{Z})$ (on peut supposer C connexe).
Alors,

(11) $$\deg_0 c_M(C) + \sum_{i=1}^{r} (m_i - k_i) = \deg_0 c_*(\mathbb{1}_A) = \chi(A),$$

puisque, pour une courbe, $Eu_{p_i}(C) = k_i$. D'autre part,

(12) $$\chi(C) = \chi(A) - \sum_{i=1}^{r} m_i + r.$$

Le lemme résulte de (10), (11), (12) et le définition de $\tilde{\chi}(C)$.

Démonstration de la proposition 2. Soit $p_1:E \to P_3$ le fibré en grassmanniennes de plans par l'origine associé au fibré tangent à P_3. Soit $p_2:\hat{P}_3 \to P_3$ l'éclatement de 0 dans P_3. Soit $\pi_1:\hat{E} \to E$ l'éclatement de $E_0 = p_1^{-1}(0)$ dans E. On a une application évidente $\pi_2:\hat{E} \to \hat{P}_3$ et un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} & \hat{E} \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] \arrow[d, "\Pi"] & \\ E \arrow[r, "p_1"'] & P_3 & \hat{P}_3 \arrow[l, "p_2"] \end{tikzcd} \qquad (\Pi = p_1 \circ \pi_1 = p_2 \circ \pi_2).$$

Soit $\tilde{X} \subset E$ le transformé de Nash de X. Soit ζ le fibré canonique au-dessus de E et soit $\tilde{T} = \zeta|\tilde{X}$ le fibré tangent de Nash de X. Soit $\zeta' = \pi_1^*(\zeta)$ et soit $X' \subset \hat{E}$ le transformé strict de $\tilde{X}$. Soit $\hat{E}_0 = \pi_1^{-1}(E_0)$. Soit $H_1 \subset P_3$ un plan auxiliaire passant par 0. Les éléments de $\hat{E}_0$ sont representés par des couples (L,P) où L est une droite et P un plan de P_3 et $0 \in L \cap P$. Soit $M \subset \hat{E}_0$ l'ensemble des couples (L,P) tels que $L \subset H_1$. Alors, d'après (5),

(13) $$Eu_0(X) = \langle c_1(\zeta'), [X'] . [E_0]\rangle + \langle c_0(\zeta'), [X'] . [M]\rangle$$

(le point indique intersection de classes d'homologie dans $\hat{E}$).

Calculons, d'abord, le premier terme de cette somme. Soit D le diviseur exceptionnel dans $\hat{P}_3$ et soient $\hat{H}_0, \hat{H} \subset \hat{P}_3$ les transformés stricts de H_0, H. On sait que $D + \hat{H}_0$ et $\hat{H}$ sont des diviseurs équivalents dans $\hat{P}_3$. On en déduit:

(14) $$[\hat{E}_0] + [H'_0] = [H']$$

où $H_0' = \pi_2^{-1}(\hat{H}_0)$ et $H' = \pi_2^{-1}(\hat{H})$ (rappelons que π_2 est une fibration). Alors,

$$(15) \qquad [X']\cdot[\hat{E}_0] = [X']\cdot[H'] - [X']\cdot[H_0'] .$$

Soient $S' = X' \cap H'$ et $S_0' = X' \cap H_0'$. D'après la généricité de H et H_0, les fibres de $\Pi|S'$ et $\Pi|S_0'$ sont des ensembles finis (conditions (c) et (d)). On en déduit que toutes les composantes irréductibles de S' et S_0' sont de dimension 1 et, par (a), qu'aucune composante irréductible ne peut être contenue dans $\Pi^{-1}(\mathrm{Sing}\, X)$. Alors, comme

$$\Pi : X' - \Pi^{-1}(\mathrm{Sing}\, X) \to X - \mathrm{Sing}\, X$$

est un isomorphisme et

$$\Pi : H' \to H \quad \text{et} \quad \Pi : H' - \hat{E}_0 \to H_0 - \{0\}$$

sont des fibrations on a, par (b), que

$$[X']\cdot[H'] = [S'] \quad \text{et} \quad [X']\cdot[H_0'] = [S_0'] .$$

Donc, d'après (13) et (15):

$$(16) \qquad \langle c_1(\zeta'),[X']\cdot[\hat{E}_0]\rangle = \langle c_1(\zeta'),[S']\rangle - \langle c_1(\zeta'),[S_0']\rangle .$$

Par la condition (b) nous avons une suite exacte de fibrés:

$$0 \to \xi \to \zeta'|S' \to \Pi^*(\nu_H)|S' \to 0$$

où ξ est le fibré sur S' dont les fibres sont les intersections

$$T_{\Pi(x)}(H) \cap \tilde{T}_{\pi_1(x)} \qquad (x \in S')$$

et ν_H est le fibré normal à H dans P_3 (T est le fibré tangent à H). De la définition de ξ il résulte qu'il existe un morphisme de ξ dans le fibré tangent de Nash de S qui, dans les bases de ces fibrés, est un isomorphisme entre des ouverts non-vides de Zariski. Donc, d'après le lemme 4:

$$\langle c_1(\xi),[S']\rangle = \tilde{\chi}(S) .$$

Alors,

$$(17) \qquad \langle c_1(\zeta'),[S']\rangle = \langle c_1(\Pi^*(\nu_H)),[S']\rangle + \tilde{\chi}(S) =$$

$$= \langle c_1(\nu_H),[S]\rangle + \tilde{\chi}(S),$$

puisque $S' \to S$ est un isomorphisme entre des ouverts non-vides de Zariski.

Analoguement,

$$(18) \qquad \langle c_1(\zeta'),[S_0']\rangle = \langle c_1(\nu_{H_0}),[S_0]\rangle + \tilde{\chi}(S_0) .$$

Maintenant, observons que $S \subset H$ et $S_0 \subset H_0$ sont des courbes du même degré, égal au degré de X. Donc,

$$\langle c_1(\nu_H),[S]\rangle = \langle c_1(\nu_{H_0}),[S_0]\rangle .$$

De ceci et de (16), (17), (18) on déduit

$$(19) \qquad \langle c_1(\zeta'),[X']\cdot[\hat{E}_0]\rangle = \tilde{\chi}(S) - \tilde{\chi}(S_0) .$$

Il reste à calculer le dernier terme de (13). Soient $R_0 = H_0 \cap H_1$ et $R = H \cap H_1$. On considère, comme pour H, H_0, les transformés stricts $\hat{R}_0, \hat{R}, \hat{H}_1$ dans $\hat{P}_3$ et

$$R_0' = \pi_2^{-1}(\hat{R}_0), \quad R' = \pi_2^{-1}(\hat{R}), \quad H_1' = \pi_2^{-1}(\hat{H}_1) .$$

Par intersection avec H_1' on déduit de (14) que

$$[M] + [R_0'] = [R'] .$$

Alors,

$$(20) \qquad \langle c_0(\zeta'),[X']\cdot[M]\rangle = \langle 1,[X']\cdot[R']\rangle - \langle 1,[X']\cdot[R_0']\rangle .$$

En choisissant H_1 suffisament générique, on a que R ne contient pas de point singulier de X et intersecte transversalement X-Sing X (condition (b)). Alors,

$$(21) \qquad \langle 1,[X']\cdot[R']\rangle = \mathrm{card}(X \cap R) = \deg X .$$

De même, on aura que R_0 ne contient pas de point singulier de X en dehors de 0 et R_0 n'appartient pas au cône tangent à X dans 0 et intersecte transversalement X-Sing X (conditions (b) et (c)). Alors,

(22) $\quad <1,[X'].[R'_0]> = \operatorname{card}((X-\{0\}) \cap R_0) = \deg X - \operatorname{mult}_0 X.$

La formule (8) résulte de (13), (19), (20), (21), (22).

Bibliographie

[1] G. Gonzalez-Sprinberg. "*L'obstruction locale d'Euler et le théorème de MacPherson*", Séminaire Éc. Norm. Sup. 78/79, Exposé 1.

[2] Lê Dũng Trãng et B. Teissier. "*Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières*", Ann. of Math 114 (1981), 457-491.

Marcos Sebastiani
Instituto de Matemática da UFRGS
Rua Sarmento Leite, 425 - 3º andar
90.000 Porto Alegre-RS

De même, on aura que R_0 ne contient pas de point singulier de X en dehors de 0 et R_0 n'appartient pas au cône tangent à X dans 0 et intersecte transversalement X-Sing X (conditions (b) et (c)). Alors,

(22) $\quad <1,[X'].[R'_0]> = \mathrm{card}((X-\{0\}) \cap R_0) = \deg X - \mathrm{mult}_0 X.$

La formule (8) résulte de (13), (19), (20), (21), (22).

Bibliographie

[1] G. Gonzalez-Sprinberg. "*L'obstruction locale d'Euler et le théorème de MacPherson*", Séminaire Éc. Norm. Sup. 78/79, Exposé 1.

[2] Lê Dũng Trãng et B. Teissier. "*Variétés polaires locales et classes de Chern des variétés singulières*", Ann. of Math 114 (1981), 457-491.

Marcos Sebastiani
Instituto de Matemática da UFRGS
Rua Sarmento Leite, 425 - 3º andar
90.000 Porto Alegre-RS