Resenhas de livros

"Lectures on Algebraic Topology", de Marvin Greenberg, W. A. Benjamin, N. Y. 1967. US$ 5.95.

Êste é um livro que se propõe cobrir, em um número razoàvelmente pequeno de páginas, uma grande quantidade de material. Obviamente, então, o autor exige muito da maturidade matemática que pressupõe do leitor.

O livro divide-se em quatro partes: 1) Teoria Elementar da Homotopia; 2) Homologia Singular; 3) Orientação e Dualidade em Variedades e, finalmente, 4) Produtos e o Teorema do Ponto Fixo de Lefschetz.

A primeira parte, após as definições e teoremas preliminares, tem como ponto alto a demonstração de que se $(E, e_0) \to (X, x_0)$ é um espaço de recobrimento, com grupo de transformações de recobrimento G, E simplesmente conexo e localmente conexos por arcos, então G é isomorfo, de maneira natural, ao grupo fundamental $\pi_1(X, x_0)$. É em seguida dado o critério, em termo dos grupos fundamentais de E e de Y, para o levantamento de aplicações contínuas $f : (Y, y_0) \to (X, x_0)$. Esta primeira parte cobre 31 páginas, o que talvez faça o leitor desavisado supor que possa ser lida fàcilmente; no entanto, a extrema concisão do livro, e o fato de que algumas demonstrações estão sòmente esboçadas talvez façam com que esta parte leve algum tempo a ser bem apreendida. Os exercícios, via de regra, são bons, particularmente 5·9, 5·10 e 6·10, e servem para testar a compreensão que o leitor tem do assunto. Esta parte não é usada no restante do livro, exceto no capítulo 12, que trata do homomorfismo de Hurewicz em dimensão 1 o qual, por sua vez, não é usado posteriormente. Um leitor não iniciado no assunto talvez ache proveitoso comparar esta exposição com a encontrada no livro de Massey "Algebraic Topology, an Introduction", de leitura mais amena a agradável.

A segunda parte, que trata da Homologia Singular, cobre 73 páginas e começa com a construção da Homologia Singular de um espaço topológico. São verificados os "axiomas" de Eilenberg-Steenrod. O critério geral de concisão continua implacável, sendo que a única exceção são as notas em que o autor menciona fatos e teorias importantes não expostos no livro. O capítulo 8, no início desta parte, fala sôbre o conteúdo da mesma e, a nosso ver, é extremamente útil ao leitor. As outras partes não estão precedidas por capítulos semelhantes.

O material desta parte encontra-se, bàsicamente, no livro de E. Artin "Einfünrung in die Algebraische Topologie". Alguns exercícios, como 14.6, que manda construir a seqüência exata de homologia de um terno, exigirão certamente a consulta a outros livros (da maneira como está proposto, 14.6 é certamente difícil para um principiante no assunto, mesmo possuindo o nível de maturidade pressuposto pelo autor). Os capítulos 18, 19 e 20 são particularmente interessantes: o primeiro, bem geométrico, trata do Teorema de Separação de Jordan-Brouwer e algumas conseqüências, como o Teorema da Invariância do Domínio. O segundo discute os "complexos esféricos", dando fórmulas que permitem, pelo menos em princípio, calcular sua homologia e as aplica ao cálculo das homologias dos espaços projetivos. Os exemplos apresentados são importantes e geométricos, as demonstrações completas e os exercícios muito bons, embora alguns sejam difíceis (veja, por exemplo, 19.39 e 19.40). O capítulo 21 particulariza o que foi feito no capítulo 19 para os CW-complexos finitos.

A homologia aumentada é definida, sem ênfase, em 10.7. O capítulo 11 trata da invariância sob homotopia. O operador de prisma, necessário na demonstração, é definido para a identidade de Δ_q e extendido por funtorialidade a espaços quaisquer. O capítulo 12 trata ràpidamente do homomorfismo de Herewicz em dimensão 1. A homologia relativa, introduzida no capítulo 13, é aplicada no capítulo seguinte à demonstração da exatidão da seqüência de homologia de um par. Uma desvantagem das demonstrações ad hoc, como feito aqui, é que o principiante às vêzes não percebe que está provando um fato algébrico bem geral (o lema da serpente) e que não está empregando nenhuma propriedade intrínseca da homologia singular. O capítulo 15, que trata da excisão, calcula, como aplicação, a homologia da esfera S^n. Os operadores necessários à demonstração do teorema da excisão são também definidos para casos particulares e extendidos por funtorialidade.

Passemos, agora, à 3ª parte, que trata da orientação e dualidade em variedades. O autor escolheu colocar sua discussão da cohomologia singular nesta parte, no capítulo 23, após discutir orientação, de maneira suscinta e eficiente, no capítulo 22. Seu tratamento da cohomologia é bem conciso, como o restante do livro. Os exemplos 23.1, 23.4 e 23.5 sôbre formas diferenciáveis são bastante instrutivos e esclarecedores. O autor resolveu, no entanto, trabalhar com "Ext" sem falar em "Ext", o que conduz a uma série de construções e lemas ad hoc, sem nenhuma motivação e que tornam parte do capítulo bastante rebarbativa (veja, por exemplo, de 23.11 a 23.18). Êstes resultados sôbre E^q, $\mathrm{Ext}_R(H_{q-1}(X), R)$ disfarçado, são então usados para verificar os axiomas de Eilenberg-Steenrod para a cohomologia singular. Alguns dos exercícios exemplos e notas são bem interessantes (verifique, por exemplo, 23.20.1).

Quanto ao capítulo 24, que trata de produtos, o autor define o produto-cup de duas classes de cohomologia explicitamente, por sua ação sôbre simplexos singulares. Pode-se, talvez, dizer que esta é uma maneira mais honesta, mais terra a terra, de definir o produto mas, por outro lado, as demonstrações se tornam tediosas e sem motivação (veja, por exemplo, 24.8 que prova a anti-comutatividade do produto-cup). Talvez a moral do capítulo seja de que há algumas partes da topologia algébrica que devem preferìvelmente ser cobertas após uma introdução a um pouco de álgebra homológica (os teoremas de Kunneth, modelos acíclicos, Eilenberg-Zilber e Coeficientes Universais, demonstrados respectivamente, os três primeiros, em 29.10, 29.23. A e 29.4). A nota 24.18 faz referência ao Invariante de Hopf.

Se, até agora, cada conceito exposto era seguido de aplicações, o mesmo não acontece com o produto cup; não é apresentado, aqui, nenhum exemplo do cálculo do anel de cohomologia de um espaço (após estudar o teorema de dualidade de Poincaré veremos a estrutura de $H^*(CP^n)$).

O restante do livro, do capítulo 25, limites algébricos, até o fim, continua no mesmo ritmo. Sòmente nesta última parte são atacados os Teoremas de Eilenberg-Zilber, os modelos acíclicos e a fórmula de Kunneth. A concisão torna-se, se possível, maior.

Quanto ao assunto pròpriamente dito dêste restante do livro, que cobre 63 páginas, o autor consegue expor quatro teoremas importantes. Êstes capítulos, a nosso ver, são de leitura bem difícil para um principiante no assunto, e que sua leitura deveria ser tentada sòmente sob a orientação de alguém com mais experiência, que completará as demonstrações apenas esboçadas ou deixadas como exercícios, mostrará maneiras mais naturais de fazer algumas construções, etc.

O capítulo 26 demonstra o teorema de dualidade de Poincaré; como conseqüência, obtemos a estrutura dos aneis de cohomologia dos espaços projetivos e o teorema de Borsuk-Ulam, mas não são tratados os teoremas do tipo sanduiche. Um apêndice sôbre os ANR demonstra, entre outros, o fato de que a homologia de uma variedade compacta é finitamente gerada em cada dimensão. A dualidade de Alexander, tratada também ad hoc, é feita sem recurso à teoria dos feixes (compare com "Sheaf Theory", de R. Swan). A capacidade de o leitor preencher os resultados incompletos é sobremodo exigida neste capítulo, como nos seguintes, que tratam da dualidade de Lefschetz. O Capítulo 29 ataca alguns pontos já mencionados de álgebra homológica.

O mérito dêste livro, mérito êste não trivial, é levar o leitor ràpidamente a alguns teoremas importantes. Como muitos dos resultados de Topologia Algébrica são de demonstração bem técnica, exigindo um longo preparo (compare, por exemplo, com o livro de Spanier, "Algebraic Topology") é realmente um feito do autor ter condensado tanto material nestas páginas. Na consecução dêste objetivo, o autor sacrifica, em caminho, todos os detalhes que dariam mais profundidade ao trabalho e o tornariam mais auto-suficiente e completo.

Embora não achemos êste livro recomendável para leitura independente por um principiante, é ótimo como um roteiro nas mãos de um professor que poderá completá-lo, comentá-lo e ocasionalmente adicionar alguma coisa.

O livro tem boa apresentação; os poucos erros tipográficos são fàcilmente corrigidos pelo leitor atento, sem prejuizo da boa compreensão do texto: veja, por exemplo, 6.8.

João Bosco Pitombeira