

Resenhas de livros

The Elements of Integration. Robert G. Bartle
John Wiley & Sons, Inc., 1966, 140 pgs. US\$ 8.95

Este livro é destinado a um primeiro curso em Integração para alunos ao nível de Mestrado ou para alunos de últimos anos de curso de graduação.

O livro compõe-se de dez capítulos com material relativamente bem distribuído. Há cerca de vinte e dois exercícios ao fim de cada capítulo, com exceção do primeiro que é introdutório. Este material pode ser coberto facilmente em um semestre com duas classes semanais de hora e meia de duração. A gama de exercícios permite uma boa escolha de material para treino do estudante. Os exercícios contêm muitos exemplos; de fato o autor transferiu a maior parte dos exemplos e contra exemplos para os exercícios, daí a necessidade de consultá-los para um bom entendimento. Mais ainda, o autor incluiu muito material às vezes nem citado no capítulo, como tópico de exercício. Esta escolha permitiu que o livro se tornasse mais compacto; isto também faz com que o estudante fique com a tarefa de se encarregar da complementação, forçando-o a uma participação ativa.

Entre as muitas possibilidades existentes o autor declaradamente decidiu-se por uma introdução direta aos espaços de medida abstratos, passando daí em seguida à Integração e aos fatos fundamentais. Somente no penúltimo capítulo são introduzidas a medida e a integral de Lebesgue (e a de Lebesgue-Stieltjes) na reta real, como exemplo de aplicação do processo de extensão de medidas em álgebras. As propriedades desta integral ficam relegadas aos exercícios no final do

capítulo. No capítulo final, os teoremas de Fubini e de Tonelli permitem a extensão da integral de Lebesgue ao R^n , mas o autor nem sequer menciona explicitamente este fato, apesar de parecer ter isto em mente (veja-se Ex. 10-F).

Esta escolha tem suas vantagens e suas desvantagens. As vantagens residem no fato de que o leitor vai direto aos fatos fundamentais sem a perda de visão causada por elementos acessórios que acompanham os casos particulares. A desvantagem é a perda de motivação, ao contrário do que sucede quando se estuda primeiro a integral de Lebesgue no R^n , digamos, e depois o caso geral abstrato. Não se pode preferir um ao outro, exclusivamente com base em méritos absolutos. A escolha depende dos objetivos que se queiram atingir.

O que é importante, porém, é que o autor seja coerente com seus propósitos. Neste ponto o autor deste livro foi bem sucedido, o que nem sempre costuma acontecer. De fato, até exagerou, principalmente, no que diz respeito à Integral de Lebesgue que merecia mais atenção, mesmo dentro do espírito do livro.

Quanto às omissões mais importantes destacam-se a ausência total de um estudo de funções absolutamente contínuas e de suas propriedades (teorema fundamental do Cálculo) e de qualquer referência à integração em espaços localmente compactos, que poderia ser facilmente citada mesmo apenas como exemplo ao processo de extensão de medidas. O autor justificou-se na introdução alertando para a existência de muitas falhas, mas também é óbvio que exagerou nas suas omissões. O livro teria sua utilidade muito aumentada se contivesse os assuntos acima citados, e se, em particular, um pouco mais de atenção tivesse sido dada à integral de Lebesgue. Compete ao Instrutor suprir estas falhas.

É preciso chamar atenção para o fato de que, atendo-se demais aos ε e δ a que se refere na Introdução, o autor deixou de motivar algumas provas, que se tornaram muito mecânicas. Por exemplo, séries telescópicas, como instrumento básico de prova em conjunção com seqüências de Cauchy, são usadas mais de uma vez, sem que o leitor seja alertado para o instrumento básico comum (once you have seen one, you have seen them all!). Não há menção de onde é que falha a construção usada na prova do Teorema da Representação de Riesz quando se tenta aplicá-la ao caso $p = \infty$, o que seria instrutivo para o leitor. Este mesmo

teorema para o caso $C(K)$ se torna obscuro na sua prova porque o autor deixa de mencionar que várias de suas construções consistem simplesmente em substituir o uso de função salto pelo de uma função contínua suficientemente próxima.

Finalmente há alguns erros a apontar. A prova do Lema 9.3, pág. 97, está errada pois o autor enumera um conjunto infinito de números contidos num intervalo (a, b) assumindo que pode ordená-los começando por um menor de todos (basta considerar o caso $\{a + 1/n\}$ $n = 1, 2, \dots$). A prova deste Lema, na parte final, é feita por argumento completamente diferente. Por infelicidade este Lema é básico para a construção da medida de Lebesgue, o que mais ainda prejudica este tópico.

A página 92, na sentença à linha doze a afirmativa: "There exists a σ -finite set ..." é falsa. O que se pode fazer, na verdade, é substituir a seqüência (f_n) em L_p com $\|f_n\| = 1$ por outra de elementos $(\tilde{f}_n)$ suficientemente próximos dos correspondentes elementos na seqüência original, com $\|\tilde{f}_n\| = 1$ e tal que $\tilde{f}_n = 0$ fora de um certo X_n . Daí tomando-se $X_o = \bigcup_n X_n$ tem-se a propriedade desejada.

O exercício 4.E, à página 37, contém erro na afirmativa de que $\theta_2 \leq g$. Basta tomar $f(x) = g(x) = 1$ para todo x , $\varphi = 0$ e $\omega = 3/2g$. Daí

$$\theta_2 = \omega \quad \text{e} \quad \theta_2 > g.$$

O exercício 8.U, à página 95, só é válido com a hipótese adicional de que o suporte da medida μ não contenha subconjuntos de medida infinita. Por exemplo, se $X = \{x\}$ e $\mu(x) = +\infty$ então $f \in L_p$ se e só se $f(x) = 0$. Daí para g tal que $g(x) = 1$, temos $\int fg d\mu = 0$ para todo $f \in L_p$, mas $g \notin L_q$.

No exercício 9.J à página 109 a primeira afirmativa é desnecessariamente forte, pois basta que se obtenha desigualdade; além disto parece ser falsa em geral.

Corrigidos os erros complementadas as falhas apontadas, o texto em linhas gerais é muito bom como material básico para uma introdução dentro do espírito proposto pelo autor. Ademais ele pode ser recomendado a estudantes de Física, Estatística, Engenharia e Economia interessados em medida e integração abstratas, pois o autor procura manter o nível elementar, dentro das possibilidades do assunto.