Programa de Apoio a Publicações Científicas
SCT/PR CNPq FINEP

Nova Série
BOLETIM
DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 24, N. 2, 137-178
© 1993, Sociedade Brasileira de Matemática

Sur les Groupes Engendrés par des Difféomorphismes Proches de l'Identité

Etienne Ghys

Abstract. We consider groups generated by real analytic diffeomorphisms of a compact manifold close to the identity. We show that the dynamics of such a group is recurrent unless the group satisfies a very particular property, similar to solvability. We study in detail the case of diffeomorphisms of the circle and the disc.

1. Introduction

Soit $R\colon \Gamma \to \mathrm{Diff}(V)$ un homomorphisme d'un groupe (discret) Γ à valeurs dans le groupe des difféomorphismes d'une variété compacte V. Nous dirons que R est *récurrent* si pour tout point x de V, il existe une suite $(\gamma_i)_{i\geq 1}$ d'éléments *distincts* de Γ telle que $R(\gamma_i)(x)$ converge vers x.

Théorème A. *Soit Γ un groupe contenant un sous-groupe libre non abélien et soit S une partie génératrice de Γ. Soit V une variété compacte analytique réelle et $\mathrm{Diff}^\omega(V)$ le groupe de ses difféomorphismes analytiques, muni de sa topologie naturelle (voir §2). Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de l'identité dans $\mathrm{Diff}^\omega(V)$ tel que tout homomorphisme $R\colon \Gamma \to \mathrm{Diff}^\omega(V)$ qui envoie S dans $\mathcal{U}$ est récurrent.*

Pour motiver ce théorème, décrivons d'abord une famille d'exemples qui sont à l'origine de ce travail.

Soit G un groupe de Lie et $\rho\colon G \to \mathrm{Diff}^\omega(V)$ un homomorphisme continu et injectif, i.e. une action analytique fidèle de G sur V. Pour tout homomorphisme $r\colon \Gamma \to G$, on obtient par composition un homomorphisme $R = \rho \circ r$.

Par exemple, considérons l'action projective de $G = PSL(2,\mathbb{R})$ sur

Received 1 July 1993.

la droite projective réelle $V = P^1$ (difféomorphe au cercle). Si Γ est le groupe libre sur deux générateurs a, b, un homomorphisme $r: \Gamma \to G$ est décrit par les deux éléments $A = r(a)$ et $B = r(b)$ de G. La théorie bien connue des groupes fuchsiens montre qu'il est possible de choisir A et B de telle sorte que:

i) A et B ne satisfont aucune relation non triviale, i.e. r est injectif,

ii) il existe un ensemble de Cantor K dans P^1 invariant par $R(\Gamma)$ et tel que l'orbite de tout point de K est dense dans K,

iii) il existe un intervalle I semi ouvert dans $P^1 - K$ tel que les images de I par les éléments de $R(\Gamma)$ sont disjointes deux à deux et recouvrent $P^1 - K$: l'intervalle I est "errant". En particulier, l'action R de Γ sur P^1 n'est pas récurrente.

Cependant, un tel phénomène ne peut pas se produire si A et B sont proches de l'identité de $PSL(2, \mathbb{R})$. Ceci résulte du lemme classique de Zassenhauss que nous rappelons car il est au cœur de cet article (voir [**Ra**], par exemple). Pour tout groupe de Lie G, il existe un voisinage de l'identité U tel que tout sous-groupe discret engendré par des éléments de U est nilpotent. Par conséquent, si l'homomorphisme $r: \Gamma \to G$ envoie la partie génératrice S dans U, deux cas sont possibles:

i) $r(\Gamma)$ n'est pas discret dans G et son adhérence contient donc un sous-groupe à un paramètre de G. L'adhérence de $R(\Gamma)$ dans $\mathrm{Diff}^\omega(V)$ contient alors un flot non trivial et, en particulier, R est *récurrent*.

ii) $r(\Gamma)$ est discret et nilpotent. Si on suppose que Γ contient un sous-groupe libre non abélien, c'est que le noyau de r (et donc de R) est infini. En particulier, R est *récurrent*.

On objectera que la définition de récurrence que nous avons choisie n'est peut-être pas adaptée et qu'on aurait pu exiger l'existence d'une suite γ_i telle que les $R(\gamma_i)$ soient distincts et $R(\gamma_i)(x)$ converge vers x. Nous reviendrons plus loin sur cette question.

Ainsi, le Théorème A apparaît comme une version de lemme de Zassenhauss pour le groupe de dimension infinie $\mathrm{Diff}^\omega(V)$. L'objet de ce travail est en effet d'examiner dans quelle mesure ce lemme se généralise aux groupes de difféomorphismes. Ceci nous amènera naturellement à

discuter de quelques propriétés algébriques des sous-groupes de type fini de $\mathrm{Diff}^\omega(V)$. La possibilité d'une telle discussion est suggérée dans [**AG**] qui contient l'exemple suivant, dû à M. Herman, montrant que, dans $\mathrm{Diff}(V)$, certaines relations entre difféomorphismes peuvent en entraîner d'autres. Le groupe de toutes les bijections de $\mathbb{Z}$ à supports finis contient tous les groupes finis et ne peut donc se plonger dans $\mathrm{Diff}(V)$ pour aucune variété compacte V (par un argument facile). D'autre part, ce groupe se plonge dans certains groupes de présentation finie. Ainsi, certains groupes de présentation finie ne se plongent dans aucun $\mathrm{Diff}(V)$. Il est même possible de construire des groupes *simples* de présentation finie contenant tous les groupes finis (exemples de Thompson). Pour un tel groupe, tout homomorphisme à valeurs dans $\mathrm{Diff}(V)$ est trivial.

Les groupes nilpotents de difféomorphismes du cercle ont été décrits dans [**P-T**]. Nous étudions ici le cas des groupes résolubles de difféomorphismes du cercle puis des groupes nilpotents de difféomorphismes de la sphère de dimension 2.

Théorème B. *Un sous-groupe nilpotent de $\mathrm{Diff}^\omega(S^1)$ est abélien. Un sous-groupe résoluble de $\mathrm{Diff}^\omega(S^1)$ est métabélien, i.e. son premier groupe dérivé est abélien. Un sous-groupe nilpotent de $\mathrm{Diff}^\omega(S^2)$ est métabélien.*

Voici un exemple d'application. Soit Γ un sous-groupe d'indice fini dans $SL(k, \mathbb{Z})$ avec $k \geq 3$. Comme pour tout réseau dans un groupe de Lie simple de $\mathbb{R}$-rang supérieur ou égal à 2, le groupe Γ a la propriété que tout sous-groupe normal est fini ou d'indice fini [**Ma**]. D'autre part, Γ contient évidemment un sous-groupe nilpotent dont tous les sous-groupes d'indice fini sont de longueur de nilpotence $k-1$ et ne sont pas métabéliens dès que $k \geq 4$. On obtient ainsi le résultat suivant, dans le même esprit que [**Zi**].

Corollaire. *Soit Γ un sous-groupe d'indice fini dans $SL(k, \mathbb{Z})$ avec $k \geq 4$. Alors toute action analytique réelle de Γ sur la sphère S^2 transite à travers un quotient fini de Γ.*

On a bien sûr un corollaire analogue pour le cercle, mais on trouvera dans [**Wi**] un résultat plus fort dans cette direction.

Le théorème suivant de G. Duminy, malheureusement non publié, est lui aussi à l'origine de ce travail:

Théorème. (G. Duminy.) *Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de l'identité dans le groupe des difféomorphismes de cercle de classe C^2 (muni de la topologie C^2) ayant la propriété suivante. Le groupe engendré par une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{U}$ a ou bien toutes ses orbites denses ou bien possède une orbite finie.*

La démonstration de ce théorème, à la Denjoy, est typique de la dimension 1 et ne peut s'étendre en dimension supérieure. Nous développons une méthode générale qui, en dimension 1, donne le résultat suivant:

Théorème C. *Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de l'identité dans $Diff^\omega(S^1)$ ayant la propriété suivante. Si Γ est le groupe engendré par une partie finie de $\mathcal{U}$, on a l' une des quatre possibilités:*

i) *toutes les orbites de Γ sont denses,*

ii) *Γ possède un nombre fini d'orbites finies et toutes les orbites infinies sont localement denses,*

iii) *Γ possède un nombre fini d'orbites finies et toutes les orbites infinies sont propres et s'accumulent sur les orbites finies. Dans ce cas Γ est une extension finie de $\mathbb{Z}$,*

iv) *Γ est un groupe fini (cyclique).*

On remarquera en particulier que si Γ est infini et n'est pas une extension finie de $\mathbb{Z}$, le groupe Γ agit sur le cercle de manière récurrente (i.e. le plongement $\Gamma \hookrightarrow Diff^\omega(S^1)$ est récurrent).

On notera aussi une analogie entre le Théorème C et le résultat de Nakai qui décrit la dynamique locale d'un groupe de germes de difféomorphismes holomorphes de $\mathbb{C}$ au voisinage d'un point fixe. Si le groupe n'est pas résoluble, les orbites locales sont localement denses en dehors d'un nombre fini de "séparatrices", germes d'ensembles analytiques réels [**Na1**]. Dans cette direction nous obtenons le Théorème suivant.

Théorème C'. *Considérons le cercle S^1 comme le cercle unité dans $\mathbb{C}$. Pour tout réel τ avec $0 < \tau < 1/2$, il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de*

l'identité dans $Diff^\omega(S^1)$ tel que si Γ est le groupe engendré par une famille quelconque d'éléments de $\mathcal{U}$, alors on a l'une des deux possibilités suivantes:

i) *Γ est résoluble,*

ii) *il existe une suite γ_i d'éléments distincts de Γ qui ont une extension holomorphe à l'anneau $\{z \in \mathbb{C},\ 1-\tau < |z| < 1+\tau\}$ et qui tendent uniformément vers l'identité sur cet anneau.*

Voici deux exemples qui illustrent les difficultés rencontrées pour généraliser ces théorèmes en dimension supérieure.

Soit X un champ de vecteurs analytique réel sur V et ϕ^t le flot engendré. Soit $u: V \to \mathbb{R}$ une fonction analytique et ψ^t le flot engendré par uX. Il est possible de choisir X, u et une suite ε_i de réels tendant vers 0 de telle sorte que le groupe Γ_i engendré par ϕ^{ε_i} et ψ^{ε_i} soit libre et que les adhérences des orbites de Γ_i soient les adhérences des orbites du champ X. Ainsi, la dynamique d'un groupe libre engendré par des difféomorphismes proches de l'identité peut être aussi complexe que celle d'un champ de vecteurs et on ne peut espérer une conclusion aussi forte que dans le Théorème C.

D'autre part, en dimension supérieure, d'autres groupes que les extensions finies de $\mathbb{Z}$ (ou de groupes abéliens) admettent des actions non récurrentes arbitrairement proches de l'identité. Soit V la variété des drapeaux de $\mathbb{R}^3$ (i.e. l'espace des couples formés d'une droite vectorielle et d'un plan la contenant) et $\rho: PGL(3,\mathbb{R}) \to Diff^\omega(V)$ l'action linéaire naturelle. Soit Γ le "groupe de Heisenberg entier", i.e. le groupe de présentation finie formé des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec α, β, γ entiers. Pour tout entier i, considérons le plongement r_i de Γ dans $PGL(3,\mathbb{R})$ défini par:

$$r_i \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \gamma \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\alpha}{i} & \frac{\gamma}{i^2} \\ 0 & 1 & \frac{\beta}{i} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il est clair que les injections $R_i = \rho \circ r_i$ convergent vers l'identité sur

une partie génératrice finie de Γ. On vérifie d'autre part qu'il existe un ouvert dense de V, invariant par $R_i(\Gamma)$, sur lequel $R_i(\Gamma)$ opère librement et proprement. Ainsi R_i n'est pas récurrent.

Dans une généralisation du Théorème C, il convient donc de prendre en compte les groupes nilpotents. Les théorèmes suivants vont dans cette direction.

Théorème D. *Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de l'identité dans le groupe $Diff^\omega(D^2)$ des difféomorphismes analytiques réels du disque fermé D^2 tel que si Γ est un groupe engendré par une partie de $\mathcal{U}$ et si le groupe induit par Γ sur le bord de D^2 n'est pas résoluble, alors l'action de Γ sur le disque est récurrente.*

Théorème D'. *Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de l'identité dans $Diff^\omega(S^2)$ tel que si $S \subset \mathcal{U}$ contient deux éléments fixant un même point x_0 de S^2 et dont les différentielles en x_0 engendrent un sous-groupe non résoluble de $GL(2,\mathbb{R})$, alors le groupe Γ engendré par S agit de manière récurrente sur la sphère.*

Insistons sur le fait que ces deux derniers théorèmes traitent de la dynamique du groupe engendré par un certain nombre de difféomorphismes et non plus de celle d'un homomorphisme d'un groupe abstrait à valeurs dans un groupe de difféomorphismes, de sorte que la récurrence ne peut plus être attribuée au noyau de R. On remarquera aussi, pour comparer les théorèmes A et $D - D'$, que le voisinage $\mathcal{U}$ dont il est question dans le théorème A dépend a priori du groupe Γ.

Il paraît clair que les résultats présentés dans cet article ne sont pas optimaux. En toute généralité, la dynamique d'un groupe engendré par des difféomorphismes proches de l'identité est probablement analogue à celle d'un flot. Ayant par exemple à l'esprit le théorème de Poincaré-Bendixson, on peut se demander si les ensembles minimaux d'un groupe non nilpotent de difféomorphismes de la sphère, engendré par des difféomorphismes proches de l'identité, ne seraient pas triviaux, i.e. des ensembles finis, des réunions de courbes ou la sphère toute entière.

Ce travail est organisé de la façon suivante. Le paragraphe 2 contient une discussion du lemme de Zassenhauss et une version affaiblie de

ce lemme valable pour les groupes de difféomorphismes; ceci mène au théorème A. Dans le paragraphe 3, on étudie les groupes résolubles de difféomorphismes du cercle et on démontre le Théorème C. Les groupes nilpotents agissant sur la sphère sont étudiés au paragraphe 4. Enfin, on dégage au paragraphe 5 une notion de "pseudo-résolubilité" qui mène à la preuve des théorèmes C',D-D'.

Cet article a été rédigé lors d'un séjour à l'IMPA de Rio de Janeiro, que je voudrais remercier pour son hospitalité.

2. Le lemme de Zassenhauss

Nous commençons par rappeler un lemme algébrique extrêmement simple mais important pour la suite. Soit Γ un groupe engendré par une partie $S = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_i, \ldots\}$ (finie ou infinie). On définit par récurrence une suite de parties S_k de Γ:

$S_0 = S$

S_{k+1} est *l'ensemble* des commutateurs $[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$ avec $a \in S$ et $b \in S_k$.

Nous affirmons que si S_k se réduit à l'élément neutre de Γ pour un certain entier k, alors Γ est nilpotent de longueur k.

La preuve est par récurrence sur k. Si $k = 1$, c'est le fait élémentaire qu'un groupe engendré par des éléments qui commutent est commutatif. Supposons l'assertion démontrée jusqu'à l'ordre $k-1$ et considérons un groupe Γ engendré par S et tel que S_k est réduit à l'élément neutre. Le sous-groupe Z de Γ engendré par les éléments de S_{k-1} est central dans Γ. Le quotient Γ/Z engendré par les classes de S modulo Z, vérifie la condition à l'ordre $k-1$; il est donc nilpotent de longueur $k-1$. Le groupe Γ est donc nilpotent de longueur k.

Considérons maintenant un groupe de Lie G. Equipons G d'une métrique riemannienne (par exemple invariante à gauche) et, pour $g \in G$, notons $\|g - id\|$ la distance entre g et l'élément neutre id de G. L'application "commutateurs":

$$(g_1, g_2) \in G \times G \mapsto [g_1, g_2] = g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1} \in G$$

est de classe C^∞ et sa différentielle en (id, id) est triviale car elle est

constante sur les "axes" $\{id\}\times G$ et $G\times\{id\}$. Il existe donc une constante $C>0$ et un voisinage U_1 de l'identité dans G tels que si g_1 et g_2 sont dans U_1, on a:

$$\|[g_1,g_2]-id\| \leq C\,\|g_1-id\|\,\|g_2-id\|\,. \qquad (*)$$

Supposons maintenant que G contienne un sous-groupe *discret* Γ engendré par une partie S contenue dans l'intersection U de U_1 et de la boule de centre id et de rayon $\frac{1}{2C}$. L'inégalité (*) montre que tous les éléments de S_k sont à distance inférieure à 2^{-k} de id. Puisque Γ est discret, S_k se réduit à l'identité pour k assez grand et le lemme algébrique que nous avons rappelé montre que Γ est nilpotent. *C'est le lemme de Zassenhauss.*

La difficulté essentielle pour généraliser ce lemme aux groupes de difféomorphismes tient au fait qu'une inégalité du type (*) n'est pas satisfaite. Une estimation de la norme de la dérivée $r^{\text{ème}}$ d'un commutateur de deux difféomorphismes met en jeu la norme de la dérivée $(r+1)^{\text{ème}}$ de ceux-ci. Ceci est particulièrement clair pour le problème analogue du crochet de deux champs de vecteurs sur la droite:

$$\left[f(x)\frac{\partial}{\partial x}, g(x)\frac{\partial}{\partial x}\right] = \left(f\frac{dg}{dx} - g\frac{df}{dx}\right)\frac{\partial}{\partial x}.$$

Voici d'ailleurs un exemple illustrant que le Théorème A n'est pas valide dans la topologie C^0. Soient A et B deux éléments hyperboliques de $PSL(2,\mathbb{R})$ qui engendrent un sous-groupe libre dont l'action sur le cercle $P^1 \simeq S^1 \simeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ préserve un ensemble fermé minimal qui est un ensemble de Cantor. Soient $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ des difféomorphismes de $\mathbb{R}$ relevant A et B. Pour chaque entier $i>0$, on définit des difféomorphismes $\tilde{A}_i$ et $\tilde{B}_i$ de $\mathbb{R}$ par $\tilde{A}_i(x) = \frac{1}{i}\,A(ix)$ et $\tilde{B}_i(x) = \frac{1}{i}\,B(ix)$, passant au quotient en des difféomorphismes A_i et B_i du cercle. Il est clair que A_i, B_i convergent vers l'identité dans le groupe des difféomorphismes du cercle muni de la topologie C^0. Il n'est pas difficile de s'assurer par ailleurs que le groupe Γ_i engendré par A_i, B_i n'agit pas sur le cercle de manière récurrente et que c'est un sous-groupe discret et libre du groupe des difféomorphismes du cercle.

C'est l'usage de la topologie analytique réelle (et des inégalités de

Cauchy) qui va nous permettre d'établir une forme faible de (*) pour les difféomorphismes.

Fixons d'abord quelques notations.

Soit V une variété analytique réelle compacte de dimension n, éventuellement à bord. Nous fixerons une fois pour toutes un plongement analytique réel de V dans un espace euclidien $\mathbb{R}^N$ (qui existe d'après un résultat de Grauert [**Nar**]). Une complexification de V est une sous-variété analytique complexe $\tilde{V}$ de $\mathbb{C}^N$, non compacte, de dimension complexe n, contenant $V\subset\mathbb{R}^N\subset\mathbb{C}^N$ telle que toute fonction analytique réelle $u\colon V\to\mathbb{R}$ se prolonge en un unique germe de fonction holomorphe $\tilde{u}$ defini au voisinage de V dans $\tilde{V}$. Deux complexifications de V coïncident au voisinage de V et nous fixerons l'une d'entre elles $\tilde{V}\subset\mathbb{C}^N$.

Si $\tau>0$, nous noterons $\tilde{V}_\tau$ l'ensemble des points de $\tilde{V}$ situés à distance strictement inférieure à τ de $V\subset\mathbb{R}^N\subset\mathbb{C}^N$, pour la distance euclidienne de $\mathbb{C}^N$. Soit $u\colon V\to\mathbb{R}^\ell$ une fonction analytique réelle à valeurs dans un espace euclidien. Si u admet un prolongement holomorphe $u\colon\tilde{V}_\tau\to\mathbb{C}^\ell$, nous notons $\|u\|_\tau$ la borne supérieure de la norme $\|u(x)\|$ lorsque x décrit $\tilde{V}_\tau$. S'il n'existe pas de telle extension, nous poserons $\|u\|_\tau=\infty$.

Si $\tau>0$ et $\varepsilon>0$, on considère l'ensemble $U_{\tau,\varepsilon}$ des difféomorphismes analytiques réels $f\colon V\to V\subset\mathbb{R}^N$ tels que $\|f-id\|_\tau<\varepsilon$. Il existe une unique structure de groupe topologique sur le groupe $\mathrm{Diff}^\omega(V)$ des difféomorphismes analytiques réels de V telle que les $U_{\tau,\varepsilon}$ forment une base de voisinages de l'identité (voir plus loin et [**BT**], [**Le**]). C'est la *topologie analytique* sur $\mathrm{Diff}^\omega(V)$. On vérifie qu'elle ne dépend pas du plongement analytique réel de V dans $\mathbb{R}^N$.

Nous allons établir la proposition suivante.

Proposition 2.1. *Avec les notations précédentes, il existe des constantes $c>0, C>0, \tau_0>0$ telles que, si $0<\tau<\tau_0$ et $0<\delta<\frac{1}{100}\tau$ et si f_1 et f_2 sont deux difféomorphismes analytiques réels de V avec $\|f_1-id\|_\tau\leq c\delta$ et $\|f_2-id\|_\tau\leq c\delta$, alors:*

$$\|[f_1,f_2]-id\|_{\tau-\delta} \leq \frac{C}{\delta}\sup\left(\|f_1-id\|_\tau, \|f_2-id\|_\tau\right)^2$$

Avant de démontrer cette proposition, quelques commentaires seront utiles. La présence du facteur $\frac{C}{\delta}$ est bien sûr essentielle de sorte que cette inégalité n'est pas suffisante pour obtenir le lemme de Zassenhauss. Soit en effet S un ensemble de difféomorphismes tels $\|f - id\|_\tau \leq \varepsilon$ pour $f \in S$ et définissons comme précédemment la suite de parties S_k. Les éléments de S_k étant des commutateurs d'éléments de S et de S_{k-1}, l'inégalité donne au mieux $\|f - id\|_{\tau-\delta} \leq \frac{C}{\delta}\,\varepsilon^2$ pour $f \in S_k$ et on ne peut donc conclure que les éléments de S_k convergent vers l'identité lorsque k tend vers l'infini.

Ceci suggère alors d'établir qu'un groupe discret engendré des difféomorphismes proches de l'identité est résoluble. Rappelons qu'un groupe Γ est résoluble si, pour un certain entier k, le $k^{\text{ème}}$ groupe dérivé $D^k\Gamma$ est trivial où $D^k\Gamma$ est défini par récurrence par:

$$D^0\Gamma = \Gamma$$
$$D^{k+1}\Gamma = [D^k\Gamma, D^k\Gamma]$$

est le groupe *engendré* par les commutateurs d'éléments de $D^k\Gamma$.

Le lemme algébrique décrit au début de ce paragraphe ne se généralise cependant pas aux groupes résolubles. Si Γ est engendré par S et si l'on définit une suite S^k de parties par: $S^0 = S$; S^{k+1} est l'*ensemble* des commutateurs [**a**,**b**] avec a et b dans S^k, il est faux que si S^k se réduit à l'identité alors Γ est nécessairement résoluble. *On ne peut décider de la résolubilité d'un groupe en montrant la trivialité d'un nombre fini de commutateurs itérés formés à partir d'une partie génératrice.* Ceci résulte du fait que le groupe métabélien libre à deux générateurs (par exemple) i.e. le quotient du groupe libre à deux générateurs par son second groupe dérivé, n'est pas de présentation finie (voir [**Ne**]). C'est la *difficulté algébrique essentielle* de cet article.

Nous montrons maintenant la proposition. Pour cela, nous établissons quelques lemmes qui montrent aussi l'affirmation précédente que $\mathrm{Diff}^\omega(V)$ est un groupe topologique.

Lemme 2.2. *Il existe $\tau_0 > 0$ et $C_1 > 0$ ayant la propriété suivante. Soit $u: V \to \mathbb{R}$ une fonction analytique réelle ayant une extension holomorphe*

$u: \tilde{V}_\tau \to \mathbb{C}$ et x, y deux points de $\tilde{V}_{\tau-\delta}$ avec $0 < \delta < \tau < \tau_0$. Alors:

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{C_1}{\delta}\,\|u\|_\tau\,\|x - y\|\,.$$

Preuve. C'est bien sûr une conséquence des inégalités de Cauchy. Soit $B \subset \mathbb{R}^N \subset \mathbb{C}^N$ la boule unité fermée et $\tilde{B}_\tau$ l'ensemble des points de $\mathbb{C}^N$ à distance inférieure à τ de B. Si $u: \tilde{B}_\tau \to \mathbb{C}$ est holomorphe, la formule de Cauchy montre que la dérivée directionnelle de u dans la direction d'un vecteur de norme 1 est majorée en module, sur $\tilde{B}_{\tau-\delta}$, par $\frac{1}{2\pi\delta}\,\|u\|_\tau$. Ainsi, si x et y sont deux points de $\tilde{B}_{\tau-\delta}$ on a:

$$|u(x) - u(y)| \leq \frac{1}{2\pi\delta}\,\|u\|_\tau\,\|x - y\|\,.$$

On montre le lemme à partir de ce cas particulier en recouvrant V par un nombre fini de cartes. La constante C_1 dépend des constantes de Lipschitz des cartes. □

Dorénavant, les réels τ qui interviendront seront toujours supposés inférieurs à τ_0.

Lemme 2.3. *Il existe une constante $c_1 > 0$ ayant la propriété suivante. Soit $f: V \to V \subset \mathbb{R}^N \subset \mathbb{C}^N$ un difféomorphisme analytique réel ayant une extension holomorphe $f: \tilde{V}_\tau \to \mathbb{C}^N$ telle que $\|f - id\|_\tau \leq c_1\delta$ avec $\delta \leq \frac{\tau}{4}$. Alors f envoie difféomorphiquement $\tilde{V}_{\tau-\delta}$ sur son image, contenue dans $\tilde{V}_\tau$ et contenant $\tilde{V}_{\tau-2\delta}$.*

Preuve. Si $\|f - id\|_\tau \leq c_1\delta$, le lemme précédent montre que sur $\tilde{V}_{\tau-\delta}$, les dérivées partielles de $f - id$ sont bornées par $\frac{C_1}{\delta} \cdot c_1\delta = C_1 \cdot c_1$. Ainsi, si c_1 est choisi assez petit, la restriction de f à $\tilde{V}_{\tau-\delta}$ est proche de l'identité dans la topologie C^1. Si c_1 est assez petit, f est un difféomorphisme sur son image, contenue dans $\tilde{V}_\tau$ et contenant $\tilde{V}_{\tau-2\delta}$. □

Lemme 2.4. *Soient f_1 et f_2 deux difféomorphismes analytiques réels de V ayant des prolongements holomorphes f_1 et f_2 définis sur $\tilde{V}_\tau$ avec $\|f_1 - id\|_\tau < c_1\delta$ et $\|f_2 - id\|_\tau < c_1\delta$ et $\delta < \frac{\tau}{4}$. Alors $f_1 \circ f_2$ est défini sur $\tilde{V}_{\tau-\delta}$ et on a:*

$$\|(f_1 \circ f_2 - id) - (f_1 - id) - (f_2 - id)\|_{\tau-2\delta} \leq \frac{NC_1}{\delta}\,\|f_1 - id\|_\tau\,\|f_2 - id\|_\tau\,.$$

Preuve. La première assertion résulte immédiatement du lemme précédent. Soit $u_1 = f_1 - id : \tilde{V}_\tau \to \mathbb{C}^N$. On a:

$$(f_1 \circ f_2(x) - x) - (f_1(x) - x) - (f_2(x) - x) = u_1(f_2(x)) - u_1(x).$$

Si x est dans $\tilde{V}_{\tau-2\delta}$, nous savons que $f_2(x)$ appartient à $\tilde{V}_{\tau-\delta}$ de sorte qu'en appliquant le lemme 2.2 à chacune des coordonnées de u_1 on obtient:

$$\|u_1(f_2(x)) - u_1(x)\| \leq \frac{NC_1}{\delta} \|u_1\|_\tau \|f_2(x) - x\|.$$

Ainsi, on a bien:

$$\|(f_1 \circ f_2 - id) - (f_1 - id) - (f_2 - id)\|_{\tau-2\delta} \leq \frac{NC_1}{\delta} \|f_1 - id\|_\tau \|f_2 - id\|_\tau \quad \square$$

Plus généralement:

Lemme 2.5. *Soient $f_1, f_2, \ldots, f_\ell$ ℓ difféomorphismes analytiques réels de V tels que $\|f_i - id\|_\tau \leq \varepsilon$ pour $i = 1, \ldots \ell$ avec $\varepsilon \leq \min(c_1, \frac{1}{NC_1}) \cdot \frac{\delta}{2\ell}$ et $\delta \leq \frac{\tau}{10\ell}$. Alors, pour $j = 1, \ldots, \ell$, $f_1 \circ \cdots \circ f_j$ est défini sur $\tilde{V}_{\tau-(j-1)\delta}$ et on a:*

$$\|f_1 \circ \cdots \circ f_j - id\|_{\tau-j\delta} \leq 2j \cdot \varepsilon \tag{1j}$$

$$\left\| (f_1 \circ \cdots \circ f_j - id) - \sum_{i=1}^{j} (f_i - id) \right\|_{\tau-j\delta} \leq \frac{NC_1}{\delta} j^2 \cdot \varepsilon^2 \tag{2j}$$

Preuve. Par récurrence sur j. Pour $j = 2$, on a bien, par le lemme précédent:

$$\|(f_1 \circ f_2 - id) - (f_1 - id) - (f_2 - id)\|_{\tau-2\delta} \leq \frac{NC_1}{\delta}\varepsilon^2 \leq \frac{NC_1}{\delta} j^2\varepsilon^2,$$

c'est-à-dire $(2)_2$. Il en résulte que:

$$\|(f_1 \circ f_2 - id)\|_{\tau-2\delta} \leq 2\varepsilon + \frac{NC_1}{\delta} \cdot 4\varepsilon^2 \leq 2j\varepsilon = 4\varepsilon.$$

car $\varepsilon \leq \frac{\delta}{2\ell NC_1} \leq \frac{2\delta}{NC_1}$ et ceci établit $(1)_2$.

Si ces inégalités sont satisfaites jusqu'à j, on a, par le lemme 2.4 et $(1)_j$:

$$\|(f_1 \circ \cdots \circ f_{j+1} - id) - (f_1 \circ \cdots \circ f_j - id) - (f_{j+1} - id)\|_{\tau-(j+1)\delta} \leq \frac{NC_1}{\delta} 2j \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon.$$

Par conséquent:

$$\|(f_1 \circ \cdots \circ f_{j+1} - id)\|_{\tau-(j+1)\delta} \leq \frac{NC_1}{\delta} 2j\varepsilon^2 + \varepsilon + 2j\varepsilon \leq 2(j+1)\varepsilon$$

car

$$\varepsilon \leq \frac{\delta}{2\ell NC_1} \leq \frac{\delta}{2jNC_1}.$$

Ceci établit $(1)_{j+1}$. On a alors, par $(2)_j$:

$$\left\| (f_1 \circ \cdots \circ f_{j+1} - id) - \sum_{i=1}^{j+1} (f_i - id) \right\|_{\tau-(j+1)\delta} \leq \frac{NC_1}{\delta} 2j\varepsilon^2 + \frac{NC_1}{\delta} j^2\varepsilon^2 \leq \frac{NC_1}{\delta}(j+1)^2\varepsilon^2,$$

c'est-à-dire $(2)_{j+1}$. $\square$

Lemme 2.6. *Soit f un difféomorphisme analytique réel de V tel que $\|f - id\|_\tau \leq c_1\delta$ avec $\delta \leq \frac{\tau}{10}$. Alors, f^{-1} (qui se prolonge holomorphiquement sur $\tilde{V}_{\tau-2\delta}$) vérifie:*

$$\left\| (f - id) + (f^{-1} - id) \right\|_{\tau-3\delta} \leq \frac{NC_1}{\delta} \|f - id\|_\tau^2$$

Preuve. On a bien sûr

$$\left\| f^{-1} - id \right\|_{\tau-2\delta} \leq \|f - id\|_\tau \leq c_1\delta \quad \text{et} \quad \delta < \frac{\tau - 2\delta}{4},$$

de sorte qu'on peut appliquer 2.4 à f et f^{-1} sur $\tilde{V}_{\tau-2\delta}$. On obtient le lemme. $\square$

La preuve de la proposition 2.1 est maintenant facile. Soient f_1 et f_2 deux difféomorphismes analytiques réels de V tels que $\|f_1 - id\|_\tau \leq \varepsilon$ et $\|f_2 - id\|_\tau \leq \varepsilon$. Les quatre difféomorphismes $f_1, f_1^{-1}, f_2, f_2^{-1}$ sont définis sur $\tilde{V}_{\tau-2\delta}$ si $\varepsilon \leq c_1\delta$ et $\delta \leq \frac{\tau}{4}$. Le lemme 2.5 s'applique pour $\ell = 4$ en remplaçant τ par $\tau - 2\delta$ si

$$\varepsilon \leq \frac{\delta}{8} \min(c_1, \frac{1}{NC_1}) \quad \text{et} \quad \delta \leq \frac{\tau - 2\delta}{80}$$

et donne:

$$\left\| ([f_1, f_2] - id) - (f_1 - id) - (f_2 - id) - (f_1^{-1} - id) - (f_2^{-1} - id) \right\|_{\tau-6\delta} \leq \frac{16NC_1}{\delta} \cdot \varepsilon^2.$$

D'autre part, le lemme 2.6 montre que si $\delta \leq \frac{\tau}{10}$, alors:

$$\left\|(f_i - id) + (f_i^{-1} - id)\right\|_{\tau-6\delta} \leq \frac{NC_1}{\delta} \cdot \varepsilon^2 \quad (i = 1, 2)$$

Finalement, si $\delta \leq \frac{\tau}{100}$, on a:

$$\|[f_1, f_2] - id\|_{\tau-6\delta} \leq \frac{18NC_1}{\delta} \sup(\|f_1 - id\|_\tau, \|f_2 - id\|_\tau)^2.$$

En rebaptisant les constantes, on obtient la proposition 2.1. □

Considérons un ensemble Σ de difféomorphismes analytiques réels de V tel que $\|f - id\|_\tau \leq \varepsilon$ pour $f \in \Sigma$. Définissons une suite de parties $\Sigma(k)$ par: $\Sigma(0) = \Sigma$; $\Sigma(1)$ est l'ensemble des commutateurs d'éléments de Σ et, pour $k \geq 2$, $\Sigma(k)$ est l'ensemble des commutateurs $[a^{\pm 1}, b^{\pm 1}]$ avec $a \in \Sigma(k-1)$ et $b \in \Sigma(k-1) \cup \Sigma(k-2)$. Cette suite est plus "grande" que ce dont nous avons besoin pour démontrer le Théorème A mais nous en ferons usage ultérieurement.

Proposition 2.7. *Si $\varepsilon \leq \frac{\tau}{100C}$, tous les éléments de $\Sigma(k)$ ont une extension holomorphe à $\tilde{V}_{\tau(1-2^{-(k+10)})}$ et on a, pour f dans $\Sigma(k)$:*

$$\|f - \mathrm{id}\|_{\tau(1-2^{-(k+10)})} \leq 2^{-k}\ \varepsilon.$$

Preuve. Pour $k = 0$, c'est clair. Supposons l'inégalité démontrée jusqu'à $k-1$ et soit f un élément de $\Sigma(k)$ écrit sous la forme $[f_1^{\pm 1}, f_2^{\pm 1}]$ avec f_1 et f_2 dans $\Sigma(k-1) \cup \Sigma(k-2)$. Par hypothèse de récurrence, on a, pour $i = 1, 2$:

$$\left\|f_i^{\pm 1} - id\right\|_{\tau(1-2^{-(k+9)})} \leq 2^{-(k-2)}\varepsilon.$$

On peut appliquer la proposition 2.1 à $f_1^{\pm 1}$ et $f_2^{\pm 1}$ en remplaçant τ par $\tau(1 - 2^{-(k+9)})$ et pour la valeur $\delta = 2^{-(k+10)}\tau$ car $\delta \leq \frac{\tau}{100}$. On obtient:

$$\|f - id\|_{\tau(1-2^{-(k+10)})} \leq C(2^{-(k+10)}\tau)^{-1}\ (2^{-(k-2)}\varepsilon)^2$$

$$= \left(\frac{2^6 C\varepsilon}{\tau}\right) 2^{-k}\varepsilon \leq 2^{-k}\varepsilon$$

si ε est choisi inférieur à $\frac{\tau}{100C} \leq \frac{\tau}{2^6 C}$. Ceci établit la proposition. □

Lemme 2.8. *Soit L le groupe libre sur quatre générateurs a_1, a_2, a_3, a_4 et soit $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Définissons la suite Σ^k par $\Sigma^0 = \Sigma$ et $\Sigma^k = \{[a, b], a, b \in \Sigma^{k-1}\} \subset L$. Alors la réunion des Σ^k est infinie.*

Preuve. Nous allons montrer par récurrence sur k que pour tout k et tout couple (α, β) d'éléments distincts de Σ il existe un élément de Σ^k dont l'écriture réduite est de longueur exactement 4^k, commence par la lettre $\alpha^{\pm 1}$ et termine par $\beta^{\pm 1}$. C'est clair pour $k = 1$ et supposons le montré jusqu'à $k-1$. Soient (α', β') les deux éléments de Σ différents de α et β. Soit X (resp. Y) un élément de Σ^{k-1} dont le mot réduit est de longueur 4^{k-1}, commence par $\alpha^{\pm 1}$ (resp. $\beta^{\pm 1}$) et termine par $\alpha'^{\pm 1}$ (resp. $\beta'^{\pm 1}$). Il est clair que l'élément $XYX^{-1}Y^{-1}$ de Σ^k a une écriture réduite de longueur 4^k, commençant par $\alpha^{\pm 1}$ et terminant par $\beta^{\pm 1}$. Ceci montre le lemme.□

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème A. Soit Γ un groupe engendré par une partie S et contenant un groupe non abélien libre. On peut alors trouver un sous-groupe L de Γ librement engendré par $\Sigma = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Soit ℓ une borne supérieure de la longueur des a_i par rapport à la partie génératrice S. Si $R: \Gamma \to \mathrm{Diff}^\omega(V)$ est un homomorphisme tel que pour $\gamma \in S$, on a:

$$\|R(\gamma) - id\|_\tau \leq \varepsilon$$

avec $\varepsilon \leq \min(c_1, \frac{1}{NC_1})\frac{\delta}{2\ell}$ et $\delta \leq \frac{\tau}{10\ell}$, le lemme 2.5 montre que:

$$\|R(a_i) - id\|_{\tau-\ell\delta} \leq 2\ell \cdot \varepsilon \quad \text{pour} \quad i = 1, \ldots, 4.$$

Considérons la suite de parties $\Sigma^k \subset L \subset \Gamma$ définie au lemme 2.8, dont la réunion est infinie. La proposition 2.7 montre que si $\ell\delta \leq \frac{\tau}{2}$ et $2\ell\varepsilon \leq \frac{\tau}{200C}$, alors on a pour γ dans Σ^k:

$$\|R(\gamma) - id\|_{\frac{\tau}{4}} \leq 2^{-k}\,\varepsilon.$$

Nous avons donc montré que pour tout $\tau(\leq \tau_0)$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que si $R: \Gamma \to \mathrm{Diff}^\omega(V)$ est un homomorphisme vérifiant, pour $\gamma \in S$:

$$\|R(\gamma) - id\|_\tau \leq \varepsilon,$$

alors il existe une suite γ_i d'éléments distincts de Γ telle que $\|R(\gamma_i) - id\|_{\frac{\tau}{4}}$ tende vers 0. En particulier, $R(\gamma_i)$ tend uniformément

vers l'identité de V et R est récurrente. Ceci établit le Théorème A. □

3. Les groupes de difféomorphismes du cercle

Dans ce paragraphe, nous démontrons la première moitié du ThéorèmeB et le ThéorèmeC. La structure des groupes résolubles de difféomorphismes du cercle a déjà été étudiée par divers auteurs (voir en particulier [**Pl1-2**], [**P-T**], [**Na1-2**]) et une partie des résultats que nous présentons est déjà connue. Nous les décrivons cependant car ils servent de motivation, à la fois pour les groupes de difféomorphismes de la sphère et pour les groupes "pseudo-résolubles" du paragraphe 5. Pour cette raison, nous nous plaçons directement dans le cadre analytique sans chercher les hypothèses optimales sur la régularité des difféomorphismes considérés. Pour simplifier l'exposition, nous nous limiterons en fait aux sous-groupes du groupe $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(S^1)$ des difféomorphismes analytiques réels du cercle qui respectent l'orientation. Nous laissons au lecteur la généralisation (facile) aux sous-groupes de $\mathrm{Diff}^{\omega}(S^1)$ (on remarquera qu'un difféomorphisme du cercle qui renverse l'orientation a exactement deux points fixes).

Proposition 3.1. *Un sous-groupe nilpotent du groupe* $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(S^1)$ *est abélien.*

Preuve. Un groupe nilpotent non abélien contient deux éléments α, β qui ne commutent pas et tels que $\gamma = [\alpha, \beta]$ commute avec α et β.

Supposons donc par l'absurde qu'il existe deux éléments α, β de $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(S^1)$ qui vérifient ces propriétés. On sait que l'application "nombre de rotation":

$$\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(S^1) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

n'est pas un homomorphisme mais que sa restriction à un sous-groupe résoluble (et, en fait, moyennable) est un homomorphisme (voir, par exemple [**Ba**]). Il en résulte que le nombre de rotation de γ est nul et que l'ensemble $\mathrm{Fix}(\gamma)$ des points fixes de γ est fini et non vide. En remplaçant α et β par une de leurs puissances, on peut supposer que α et β fixent tous les points de $\mathrm{Fix}(\gamma)$. Le groupe engendré par α et β opère donc librement sur chacune des composantes de $S^1 - \mathrm{Fix}(\gamma)$ car

l'ensemble des points fixes d'un élément non trivial de ce groupe est un ensemble fini invariant par γ. Il est bien connu qu'un groupe opérant librement sur $\mathbb{R}$ est abélien et ceci est la contradiction cherchée. □

Remarquons que la proposition reste valable en classe C^2; il s'agit alors d'utiliser le lemme de N. Koppel [**Ko**] que nous rappelons, pour un usage ultérieur. Soit f un germe de difféomorphisme de classe C^2 de $\mathbb{R}^+$ en 0 fixant 0 et sans point fixe autre que 0. Alors il existe un groupe à un paramètre f_t de germes d'homéomorphismes de $\mathbb{R}^+$ en 0, sans point fixe autre que 0, tel que $f = f_1$ et contenant tous les germes de difféomorphismes de classe C^2 commutant avec f.

Pour étudier les sous-groupes résolubles de $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(S^1)$, nous allons considérer d'abord les groupes de germes de difféomorphismes et, plus généralement, de difféomorphismes formels.

Notons $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}, 0)$ le groupe des difféomorphismes formels directs de $\mathbb{R}$ en 0, de la forme

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$$

où a_i est une suite de réels quelconques, avec $a_1 > 0$. Notons $\widehat{\mathcal{X}}(\mathbb{R}, 0)$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels de $\mathbb{R}$ en 0, de la forme:

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i x^i \frac{\partial}{\partial x}$$

où b_i est une suite de réels quelconque. L'application exponentielle:

$$\exp: \widehat{\mathcal{X}}(\mathbb{R}, 0) \longrightarrow \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}, 0)$$

est bijective, i.e. tout difféomorphisme formel est le "temps 1" d'un champ formel (voir [**Ar**], [**Ma**],[**MR**]). Nous notons:

$$(f, x) \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}, 0) \times \widehat{\mathcal{X}}(\mathbb{R}, 0) \longmapsto f_* X \in \widehat{\mathcal{X}}(\mathbb{R}, 0)$$

l'action adjointe naturelle, de "changement de coordonnées". Nous notons encore $\widehat{\mathcal{O}}(\mathbb{R})$ l'anneau des séries formelles en une variable et $\widehat{K}(\mathbb{R})$ son corps des fractions. Le groupe $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}, 0)$ opère naturellement par automorphismes de $\widehat{\mathcal{O}}(\mathbb{R})$ et $\widehat{K}(\mathbb{R})$:

$$(f, u) \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}, 0) \times \widehat{K}(\mathbb{R}) \longmapsto u \circ f \in \widehat{K}(\mathbb{R}).$$

De même, l'algèbre $\widehat{\mathcal{X}}$ opère par dérivations sur $\widehat{\mathcal{O}}(\mathbb{R})$ et $\widehat{K}(\mathbb{R})$:

$$(X,u) \in \widehat{\mathcal{X}}(\mathbb{R},0) \times \widehat{K}(\mathbb{R}) \longmapsto X(u) \in \widehat{K}(\mathbb{R}).$$

Si ℓ est un entier strictement positif, on considère le groupe $Aff(\ell)$, "revêtement ramifié" du groupe affine; c'est le sous-groupe de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$ formé des éléments de la forme:

$$x \longmapsto \frac{ax}{\sqrt[\ell]{1+bx^\ell}} \quad a \in \mathbb{R}_+^* \quad b \in \mathbb{R}.$$

C'est aussi l'exponentielle de la sous-algèbre de $\widehat{\mathcal{X}}(\mathbb{R},0)$ engendrée par $x\frac{\partial}{\partial x}$ et $x^{\ell+1}\frac{\partial}{\partial x}$. Il s'agit bien sûr d'un sous-groupe métabélien de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$.

La proposition suivante est bien connue, voir par exemple [**Na1**].

Proposition 3.2. *Tout sous-groupe résoluble de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$ est contenu dans un sous-groupe résoluble de l'un des deux types suivants:*

i) *un sous-groupe à un paramètre $\{\exp tX,\ t \in \mathbb{R}\}$.*

ii) *un conjugué d'un $Aff(\ell)$ pour $\ell \geq 1$.*

Avant de démontrer cette proposition, nous établissons un lemme élémentaire.

Lemme 3.3. *Le centralisateur d'un élément non trivial de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$ est l'unique sous-groupe à un paramètre qui le contient.*

Preuve. L'unicité du groupe à un paramètre contenant $f = \exp X$ (avec $X \neq 0$) montre que si $g = \exp Y$ commute avec f, alors il commute avec $\exp tX$ pour tout t. Il en résulte alors que $[X,Y] = 0$. Si l'on écrit Y sous la forme uX avec $u \in \widehat{K}(\mathbb{R})$, cette condition devient $X(u) = 0$. En écrivant X sous la forme $v\frac{\partial}{\partial x}$ où v est un élément non nul de $\widehat{\mathcal{O}}(\mathbb{R})$, on obtient $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, c'est-à-dire que Y est un multiple constant de X. Ainsi, g appartient au groupe à un paramètre contenant f. □

Preuve de la Proposition 3.2. Soit G un sous-groupe résoluble non trivial de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$ et A un sous-groupe abélien distingué non trivial de G. D'après 3.3, A est contenu dans un unique sous-groupe à un paramètre $\{\exp tX\}$. Par conséquent, G est contenu dans le normalisateur $N(X)$ de $\{\exp tX\}$, i.e. le groupe des éléments g de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$ tels qu'il existe

$\lambda(g) \in \mathbb{R}^*$ avec

$$g_*X = \lambda(g)X.$$

Distingons alors deux cas.

Supposons d'abord que $N(X)$ ne contienne que des éléments ayant un contact supérieur ou égal à 2 avec l'identité. En écrivant X sous la forme $(b_px^p + \ldots)\frac{\partial}{\partial x}$ avec $b_p \neq 0$, on voit que, pour tout élément g de $N(X)$, on a $g_*X = (b_px^p + \ldots)\frac{\partial}{\partial x}$ de sorte qu'en fait $g_*X = X$. En d'autres termes, $N(X)$ coïncide avec le centralisateur de $\{\exp tX\}$, qui n'est autre que ce sous-groupe $\{\exp tX\}$.

Supposons que $N(X)$ contienne un élément hyperbolique, c'est-à-dire un élément g dont la dérivée μ en 0 est différente de 1. Il est bien connu que g est conjugué à l'homothétie de rapport μ. A conjugaison près, on peut donc supposer que le champ $X = u(x)\frac{\partial}{\partial x}$ vérifie

$$u(\mu x) = \lambda\mu u(x).$$

C'est donc que u est un monôme. Si u est linéaire, on trouve $\lambda = 1$ et $N(X)$ coïncide encore avec $\{\exp tX\}$. Si u est un multiple constant de $x^{\ell+1}$, il n'est pas difficile de constater que $N(X)$ n'est autre que le groupe $Aff(\ell)$ défini plus haut. Ceci démontre la proposition. En particulier, nous avons montré qu'un sous-groupe résoluble de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$ est métabélien. □

Signalons qu'un germe hyperbolique de difféomorphisme analytique réel de $\mathbb{R}$ en 0 est analytiquement conjugué à sa partie linéaire. La preuve précédente montre donc que si un groupe résoluble de germes analytiques contient un élément hyperbolique, alors il est analytiquement conjugué à un sous-groupe de $Aff(\ell)$ pour un certain ℓ.

Mentionnons une conséquence de la preuve de 3.2 qui sera utilisée de nombreuses fois au paragraphe 5. Si $G \subset \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$ est un groupe abélien, soit $\overline{G}$ son centralisateur. Si G est un groupe résoluble non abélien, de premier groupe dérivé $[G,G]$, soit $\overline{G}$ le normalisateur de $[\overline{G},\overline{G}]$. Dans le premier cas, $\overline{G}$ est un groupe à un paramètre et, dans le second, $\overline{G}$ est conjugué d'un $Aff(\ell)$.

Proposition 3.4. *Si G_1 et G_2 sont deux sous-groupes résolubles non*

triviaux de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$ *et si l'élément* f *de* $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$ *vérifie* $fG_1f^{-1}\subset G_2$, *alors* $f\overline{G}_1f^{-1}\subset\overline{G}_2$. *Le normalisateur d'un sous-groupe résoluble non trivial de* $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$ *est résoluble.*

Nous allons introduire un groupe adapté à la description de la dynamique au voisinage d'une orbite finie. Soit G un groupe quelconque et $q\geq 1$ un entier. On notera $q\cdot G$ le produit semi-direct de G^q par $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ sous l'action de la permutation cyclique des facteurs (c'est le "wreath product" de G et $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$). En d'autres termes, un élément de $q\cdot G$ est de la forme

$$(r;g_1,\dots,g_q)$$

avec $r\in\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ et $g_1,\dots,g_q\in G$. Le produit s'écrit

$$(r;g_1,\dots,g_q)(r';g'_1,\dots,g'_q)=(r+r',g_{1+r}g'_1,g_{2+r}g'_2,g_{q+r}g'_q)$$

où les indices sont entendus modulo q.

Si un sous-groupe de $\mathrm{Diff}^\omega_+(S^1)$ préserve un ensemble à q éléments $x_1,\dots,x_q$ cycliquement ordonnés sur le cercle, ce sous-groupe se plonge naturellement dans $q\cdot\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$ en considérant les germes aux voisinages des points x_i.

On a la suite exacte

$$1\to\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)^q\to q\cdot\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)\to\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}\to 0$$

et nous venons de déterminer les sous-groupes résolubles de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$. Il n'est pas difficile d'en déduire la description des sous-groupes résolubles de $q\cdot\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$. Nous nous contenterons de donner le résultat, laissant la preuve (facile) de la proposition suivante au lecteur. Soit C un sous-groupe de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ et choisissons pous chaque $i=1,\dots,q$ un sous-groupe H_i de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$ qui est soit trivial, soit un sous-groupe à un paramètre, soit $Aff(\ell)$ pour un certain ℓ. On suppose que $H_i=H_{i+r}$ pour $r\in C$ et on considère le sous-groupe résoluble $G(C;H_i)$ de $q\cdot\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$ formé des $(r;f_1,\dots,f_q)$ tels que $r\in C$ et $f_i\in H_i$ pour $i=1,\dots,q$.

Proposition 3.5. *Tout sous-groupe résoluble de* $q\cdot\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$ *est contenu dans un conjugué d'un groupe du type* $G(C;H_i)$.

Les groupes $G(C;H_i)$ sont des produits directs de groupes cycliques et de groupes isomorphes à $c\cdot\mathbb{R}$ ou $c\cdot Aff(\ell)$ (où c est le cardinal de C).

Notons que $c\cdot\mathbb{R}$ est métabélien et $c\cdot Aff(\ell)$ est résoluble de longueur 3.

Convenons de dire qu'un sous-groupe de $q\cdot\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$ est *fidèle* si son intersection avec le noyau $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)^q$ de la projection sur $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ se projette injectivement sur chaque facteur $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$. Les sous-groupes de $q\cdot\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$ obtenus à partir d'un groupe de difféomorphismes du cercle préservant un ensemble à q éléments sont fidèles. La proposition 3.4 donne facilement:

Proposition 3.6. *Le normalisateur d'un sous-groupe résoluble de* $q\cdot\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$, *fidèle et infini, est résoluble.*

Nous pouvons maintenant donner une première description des groupes résolubles de difféomorphismes du cercle.

Proposition 3.7. *Soit* $\Gamma\subset\mathrm{Diff}^\omega_+(S^1)$ *un sous-groupe résoluble de type fini. Alors, on a l'une des deux possibilités suivantes:*

i) Γ *est topologiquement conjugué à un groupe de rotations,*

ii) il existe un ensemble fini non vide $P\subset S^1$ *invariant par* Γ *et des homéomorphismes entre* $\mathbb{R}$ *et les composantes connexes de* S^1-P *tels que l'action de* Γ *sur* S^1-P *est affine dans ces coordonnées.*

Preuve. On sait qu'un groupe résoluble d'homéomorphismes d'un espace compact préserve une mesure de probabilité. D'autre part, trois cas sont a priori possibles pour la dynamique topologique de Γ:

a) toutes les orbites de Γ sont denses dans le cercle. Dans ce cas, le support d'une probabilité invariante est nécessairement le cercle tout entier. En paramétrant le cercle grâce à cette mesure, on conjugue Γ à un groupe de rotations.

b) il existe un "minimal exceptionnel", c'est-à-dire un ensemble de Cantor $K\subset S^1$ invariant par Γ tel que l'orbite de tout point de K est dense dans K. En considérant l'action de Γ sur K, on montre qu'il existe une mesure invariante dont le support est K. Ceci est en contradiction avec le théorème de Sacksteder selon lequel, dans cette situation, il existe un élément γ de Γ ayant un point fixe hyperbolique dans K [**Sa**].

c) il existe une orbite finie.

Puisque nous supposons que Γ est formé de difféomorphismes ana-

lytiques, la réunion P des orbites finies de Γ est alors une partie finie de S^1 ou le cercle tout entier. Dans le second cas, le groupe Γ est un groupe fini cyclique dont l'action est bien sûr conjuguée à un groupe de rotations. Nous supposons donc que P est fini. Le sous-groupe Γ' de Γ formé des éléments qui fixent tous les points de P est un sous-groupe d'indice fini dont l'action sur chaque composante connexe de $S^1 - P$ est sans point fixe commun. Dans [**P12**], J. Plante montre que si un groupe résoluble de difféomorphismes de classe C^2 de $\mathbb{R}$ opère sans point fixe commun, alors ce groupe est topologiquement conjugué à un groupe d'applications affines. Ceci termine la preuve de la proposition. □

En fait, l'analyse locale des sous-groupes résolubles de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}, 0)$ permettrait facilement de démontrer ce résultat de J. Plante dans le cas analytique.

Proposition 3.8. *Un sous-groupe résoluble de* $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(S^1)$ *est métabélien.*

Preuve. Il suffit de le vérifier pour un sous-groupe Γ de type fini et, d'après la proposition précédente, on peut supposer que l'action de Γ sur le cercle a une orbite finie à q éléments, de sorte que Γ se plonge dans $q \cdot \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}, 0)$. Ainsi, d'après 3.5, Γ est résoluble de longueur 3. Puisque Γ se surjecte sur $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, nous savons que Γ est isomorphe à un sous-groupe de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$, $q \cdot \mathbb{R}$ ou $q \cdot Aff(\ell)$ et c'est uniquement dans le dernier cas que Γ pourrait ne pas être de longueur 2. Plaçons nous dans ce cas et soit P la réunion des orbites finies de Γ: c'est un ensemble fini dont le cardinal est un multiple de q.

Nous supposons donc que le stabilisateur commun Γ_1 de tous les points de P est un sous-groupe non abélien. Nous avons déjà remarqué qu'au voisinage de chaque p de P, on peut introduire une coordonnée locale x telle que $x = 0$ corresponde à p et que les éléments γ de Γ_1 agissent au voisinage de 0 sous la forme

$$x \mapsto \frac{a(\gamma, p)x}{\sqrt[\ell']{1 + b(\gamma, p)x^{\ell'}}}.$$

D'autre part, d'après 3.7, on peut munir chaque composante connexe I de $S^1 - P$ d'une mesure μ_I, positive sur les ouverts, de masse infinie, telle que chaque élément γ de Γ, restreint à I, envoie μ_I sur un multiple

constant $c(\gamma, I)\mu_{\gamma(I)}$ de la mesure $\mu_{\gamma(I)}$. Puisque Γ_1 n'est pas abélien, pour chaque p de P, il contient des éléments γ tels que $a(\gamma, p) = 1$ et $b(\gamma, p)$ décrit un sous-groupe dense de $\mathbb{R}$. Il est facile d'en déduire que les deux mesures sur les deux intervalles de part et d'autre de p, et dans la coordonnée x sont des multiples constants de la mesure $x^{-\ell'}dx$. Il en résulte que si I et J sont deux intervalles adjacents de $S^1 - P$ et si γ est un élément de Γ_1, alors $c(\gamma, I) = c(\gamma, J)$. Autrement dit, il existe un homomorphisme $c\colon \Gamma_1 \to \mathbb{R}^*_+$ tel que pour toute composante connexe I de $S^1 - P$ et tout élément γ de Γ_1, on ait $\gamma_*\mu_I = c(\gamma)\mu_I$. Nous affirmons que c se prolonge de manière unique en un homomorphisme $c\colon \Gamma \to \mathbb{R}^*$. Pour cela, il suffit de vérifier que si γ est dans Γ et γ_1 dans Γ_1, alors $c(\gamma_1) = c(\gamma^{-1}\gamma_1\gamma)$. Mais ceci est clair car, si I est un intervalle quelconque, on a $(\gamma_1)_*\mu_I = c(\gamma_1)\mu_I$, $(\gamma_1)_*\mu_{\gamma(I)} = c(\gamma_1)\mu_{\gamma(I)}$ et $(\gamma)_*\mu_I = c(\gamma, I)\mu_{\gamma(I)}$ d'où il résulte que $(\gamma^{-1}\gamma_1\gamma)_*\mu_I = c(\gamma_1)\mu_I$ et donc, comme annoncé, que $c(\gamma_1) = c(\gamma^{-1}\gamma_1\gamma)$. Nous affirmons maintenant qu'il est possible de trouver des constantes strictement positives $\alpha(I)$ telles que si l'on définit les mesures ν_I sur chaque I par $\nu_I = \alpha(I)\mu_I$, alors pour tout γ de Γ (et pas seulement de Γ_1), on a $\gamma_*\nu_I = c(\gamma)\nu_{\gamma(I)}$. Il suffit de remarquer que Γ opère sur l'ensemble des composantes de $S^1 - P$, de choisir une composante par orbite et de définir ν_I comme étant μ_I pour cette composante. On définit alors ν_I pour les autres composantes par $\gamma_*\nu_I = c(\nu)\nu_{\gamma(I)}$; le fait que c est un morphisme et que $\gamma_*\mu_I = c(\gamma)\mu_I$ pour γ dans Γ_1 garantit que ceci définit ν_I sans ambiguïté.

La proposition est maintenant claire: le premier groupe dérivé de Γ agit en fixant chaque composante I et en préservant chacune des mesures ν_I, c'est-à-dire par "translations"; il est donc abélien. Nous avons bien montré que Γ est métabélien. □

Signalons que la proposition 3.8 n'est pas valide dans le cadre des difféomorphismes de classe C^∞. Il est possible de construire une action de classe C^∞ du groupe affine Aff de la droite réelle sur l'intervalle $[0, 1]$, C^∞-plate sur l'identité aux deux extrémités. On obtient ainsi des actions de classe C^∞ de $q \cdot Aff$ sur le cercle et nous avons déjà remarqué que $q \cdot Aff$ n'est pas métabélien.

Pour terminer ce paragraphe, nous démontrons le théorème C. Nous

utiliserons la proposition suivante que l'auteur a appris de G. Hector.

Proposition 3.9. *Soit* Γ *un sous-groupe du groupe* $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}([0,1])$ *des difféomorphismes analytiques réels croissants de l'intervalle* $[0,1]$. *On suppose que* Γ *n'est ni trivial ni infini cyclique et que* 0 *et* 1 *sont les seuls points fixes communs à tous les éléments de* Γ. *Alors, l'orbite de tout point intérieur à* $[0,1]$ *est dense dans* $[0,1]$.

Preuve. Soit f un difféomorphisme analytique croissant de $[0,1]$ tel que 0 soit un point fixe attractant. Il existe donc $\varepsilon > 0$ tel que si $0 < x < \varepsilon$ alors $0 < f(x) < x$. Soit i l'ordre de contact en 0 entre f et l'identité. Soit g un autre difféomorphisme analytique croissant de $[0,1]$ et supposons que l'ordre de contact entre g et id en 0 soit strictement supérieur à i. Il est alors facile de vérifier que la suite $f^{-k}gf^{k}$ tend uniformément vers l'identité sur $[0,\varepsilon]$ lorsque k tend vers l'infini.

Plaçons nous sous les hypothèses de la proposition. Soit x un point intérieur à $[0,1]$ et K l'adhérence de son orbite par Γ. La borne inférieure de K étant un point fixe commun aux éléments de Γ, le fermé K contient 0. Il suffit alors de montrer que 0 est intérieur à K car la borne supérieure de l'ensemble des t tels que $[0,t] \subset K$ est aussi un point fixe commun et on aura alors $t = 1$.

Soit f un élément de Γ tel que 0 soit un point fixe attractif ayant un ordre de contact avec l'identité minimal parmi les éléments de Γ. Supposons dans un premier temps que Γ contienne par ailleurs un élément g dont le contact en 0 est strictement supérieur à celui de f. La remarque précédente, appliquée à g et à g^{-1} montre alors que si y est un point du domaine d'attraction $[0,\varepsilon]$ de f, alors les suites $f^{-k}gf^{k}(y)$ et $f^{-k}g^{-1}f^{k}(y)$ s'accumulent sur y, par valeurs supérieures et inférieures. Si 0 n'était pas intérieur à K, on aurait donc une contradiction en choisissant pour y une extrémité d'une composante connexe de $[0,1] - K$ contenue dans $[0,\varepsilon]$.

Il reste à examiner le cas où tous les éléments de Γ (différents de l'identité) ont le même contact i avec l'identité en 0. En remarquant que l'ordre de contact du commutateur de deux éléments de Γ est alors strictement supérieur à i, nous pouvons donc supposer Γ commutatif.

Nous avons décrit plus haut la structure des groupes commutatifs de difféomorphismes de $[0,1]$: il existe un flot topologique ϕ^t agissant sur $[0,1]$, contenant Γ et sans point fixe commun. Si Γ n'est ni trivial ni infini cyclique, il en résulte que les adhérences des orbites de Γ sont les mêmes que celles du flot, c'est-à-dire $[0,1]$ tout entier. Ceci établit la proposition. □

Si Γ est un groupe de difféomorphismes analytiques du cercle, on sait que trois cas seulement sont possibles:

i) toutes les orbites de Γ sont denses,
ii) il existe un "minimal exceptionnel" $K \subset S^1$,
iii) il existe une orbite finie.

Dans le troisième cas, soit $P \subset S^1$ la réunion des orbites finies. Il existe alors un sous-groupe d'indice fini dont P est l'ensemble des points fixes. La proposition précédente, appliquée à chaque composante connexe de $S^1 - P$ donne alors immédiatement que l'on a l'une des possibilités suivantes:

1) P est le cercle tout entier et Γ est un groupe fini cyclique.
2) P est un ensemble fini et l'adhérence de l'orbite d'un point de $S^1 - P$ est la réunion d'un nombre fini d'intervalles dont les extrémités sont dans P.
3) P est un ensemble fini et Γ contient un sous-groupe infini cyclique d'indice fini. Les orbites infinies de Γ sont alors propres et s'accumulent sur des points de P.

Par conséquent, pour démontrer le théorème C, il s'agit de démontrer qu'un groupe Γ de difféomorphismes analytiques du cercle, engendré par un nombre fini de difféomorphismes proches de l'identité, ne possède pas de minimal exceptionnel.

Si S est une partie de $\mathrm{Diff}^{\omega}(S^1)$, notons $S(k)$ la suite de parties définies par: $S(0) = S$, $S(1)$ est l'ensemble des commutateurs $[a^{\pm 1}, b^{\pm 1}]$ avec $a, b \in S$, et $S(k+1)$ est l'ensemble des commutateurs $[a^{\pm 1}, b^{\pm 1}]$ avec $a \in S(k)$ et $b \in S(k) \cup S(k-1)$ (pour $k \geq 1$). La proposition 2.8 montre qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de l'identité dans $\mathrm{Diff}^{\omega}(S^1)$ tel que si $S \subset \mathcal{U}$, alors les éléments de $S(k)$ convergent uniformément vers l'identité (dans

la topologie C^0) lorsque k tend vers l'infini. Pour démontrer le théorème C, nous allons montrer que si S est une partie finie de $\mathcal{U}$, alors le groupe Γ engendré par S n'a pas de minimal exceptionnel.

Supposons, par l'absurde, qu'un tel groupe Γ possède un minimal exceptionnel $K \subset S^1$.

Nous affirmons d'abord qu'il existe un entier k_0 tel que $S(k_0)$ est réduit à l'identité. En effet, soit I une composante connexe du complémentaire de K dans le cercle. Pour chaque γ de Γ, l'image $\gamma(I)$ est aussi une composante connexe de $S^1 - K$. Puisque les éléments de $S(k)$ tendent vers l'identité quand k tend vers l'infini et qu'il n'y a qu'un nombre fini de composantes de longueur supérieure à un réel positif donné, tous les éléments de $S(k)$ fixent I pour k assez grand. Soit $\Gamma(k)$ le groupe engendré par la réunion des $S(k')$ avec $k' \geq k$ et considérons l'action de $\Gamma(k)$ sur l'intervalle $J = S^1 - I$. Puisque $K \subset J$ est invariant par $\Gamma(k)$, la proposition 3.9 montre que $\Gamma(k)$ est trivial ou infini cyclique, en particulier commutatif, pour k assez grand. Ceci entraîne évidemment que $S(k)$ est trivial pour k assez grand. Soit k_0 le plus grand entier tel que $S(k_0)$ n'est pas réduit à l'identité.

Soit k_1 le plus petit entier tel que l'action du groupe $\Gamma(k_1)$ sur le cercle possède une orbite finie. Puisque les éléments de $S(k_0)$ commutent évidemment, le groupe $\Gamma(k_0)$ est abélien et n'a pas toutes ses orbites denses puisqu'il préserve K. Nous savons que ceci entraîne que $\Gamma(k_0)$ possède une orbite finie et donc que $k_1 \leq k_0$. Nous allons montrer que $k_1 = 0$, c'est-à-dire que Γ possède une orbite finie, et ce sera la contradiction cherchée. Supposons donc $k_1 \geq 1$ et considérons un élément f de $S(k_1 - 1)$. Soit $G_2(k_1) \subset \Gamma(k_1)$ le groupe engendré par les éléments de $S(k_1)$. Si $f \in S(k_1 - 1)$ et $g \in S(k_1)$, les commutateurs $[f^{\pm 1}, g]$ appartiennent à $S(k_1 + 1)$. *Ainsi les conjugués de $G(k_1)$ par f et f^{-1} sont contenus dans $\Gamma(k_1)$.* Distingons trois cas.

3.10 Premier cas. *Supposons $G(k_1)$ infini.* Alors $\Gamma(k_1)$ est infini et nous savons que la réunion P de ses orbites finies est finie. Si γ est un élément d'ordre infini quelconque dans $\Gamma(k_1)$, la réunion des points périodiques de γ coincide avec P, d'après 3.9. En appliquant cette remarque à un

élément g d'ordre infini dans $G(k_1)$, et en rappelant que fgf^{-1} est dans $\Gamma(k_1)$, on conclut que f préserve P. Autrement dit, tous les éléments de $S(k_1 - 1) \cup S(k_1) \cup \cdots \cup S(k_0)$ préservent P. Ceci est en contradiction avec le choix de k_1.□

3.11 Deuxième cas. *Supposons maintenant $\Gamma(k_1)$ fini.* C'est alors un groupe fini cyclique opérant librement sur le cercle et $G(k_1)$ est un sous-groupe cyclique non trivial. Si $f \in \Gamma(k_1 - 1)$ et $g \in S(k_1)$, nous savons que $fgf^{-1} \in \Gamma(k_1)$ et donc que g et fgf^{-1} sont deux éléments de $\Gamma(k_1)$ de même nombre de rotation: ils sont donc égaux. Ainsi, les éléments de $S(k_1 - 1)$ commutent tous avec $G(k_1)$. Si f_1 et f_2 sont dans $S(k_1 - 1)$, le commutateur $[f_1, f_2]$ est dans $S(k_1)$ et il existe donc g dans $g(k_1)$ tel que $f_2^{-1} f_1 f_2 = g f_1$. En comparant les nombres de rotation et en tenant compte du fait que f_1 et g commutent, on trouve que g est un élément de $G(k_1) \subset \Gamma(k_1)$ de nombre de rotation nul; c'est donc que g est l'identité. Ainsi les éléments de $S(k_1 - 1) \cup S(k_1)$ commutent entre eux et le groupe $\Gamma(k_1 - 1)$ est un groupe commutatif.

Un groupe commutatif de type fini dont les orbites ne sont pas toutes denses possède une orbite finie. C'est une contradiction avec le choix de k_1.

3.12 Troisième cas. *Supposons enfin que $\Gamma(k_1)$ est infini et $G(k_1)$ est fini.* Soit P la réunion des orbites finies de $\Gamma(k_1)$ et g un générateur de $G(k_1)$. En considérant l'action de $\Gamma(k_1)$ sur P, on obtient un morphisme ρ de $\Gamma(k_1)$ sur un groupe fini cyclique $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ qui est bien sûr le nombre de rotation. Les éléments non triviaux du noyau de ρ fixent P point par point et sont donc d'ordre infini.

Soit $f \in S(k_1 - 1)$. Nous savons que $\gamma_1 = fgf^{-1}$ et $\gamma_2 = f^{-1}gf$ sont dans $\Gamma(k_1)$. Soit $\gamma_3 = g\gamma_2^{-1}$. On a alors $\gamma_3 \in \Gamma(k_1)$, $\rho(\gamma_3) = 0$ et $f\gamma_2 f^{-1} \in \Gamma(k_1)$. Par conséquent, γ_3 est d'ordre infini ou est trivial. Nous dirons respectivement que f est de type 1 ou 2.

Si f est de type 1, les points fixes de γ_3 coïndident avec P et f préserve donc P.

Si f est de type 2, alors f commute avec $G(k_1)$.

Si tous les éléments de $S(k_1 - 1)$ sont de type 1, alors $\Gamma(k_1 - 1)$

préserve P et ceci contredit le choix de k_1.

Si tous les éléments de $S(k_1-1)$ sont de type 2, ils commutent tous avec $G(k_1)$ et on conclut exactement comme dans le deuxième cas que $\Gamma(k_1-1)$ est commutatif, ce qui est encore une contradiction.

Soient f et f_2 deux éléments de $S(k_1-1)$ avec f_2 de type 2. Puisque $[f,f_2]\in S(k_1)$ il existe une puissance g^α de g telle que $ff_2f^{-1}=f_2g^\alpha$. Comparant les nombres de rotation et tenant compte du fait que f_2 et g commutent, on déduit que f et f_2 commutent. Les éléments de type 2) de $S(k_1-1)$ commutent donc avec tous les éléments de $S(k_1-1)$ ainsi qu'avec ceux de $S(k_1)$; ils commutent donc aussi avec les éléments de $S(k')$ avec $k'\geq k_1$. Autrement dit, les éléments de type 2) commutent avec $\Gamma(k_1)$; ils préservent donc P, tout comme les éléments de type 1). Nous avons montré que $\Gamma(k_1-1)$ préserve P et c'est encore une contradiction.

Ceci termine la preuve du théorème C. □

4. Groupes nilpotents de difféomorphismes de la sphère.

Nous allons étudier, sur le même schéma, les groupes de difféomorphismes de la sphère. Auparavant, nous établissons une proposition dont la preuve servira de modèle pour plusieurs arguments qui suivent. On trouvera un résultat plus fort dans [**E-T**].

Proposition 4.1. *Soit $\mathcal{L}$ une sous-algèbre nilpotente de dimension finie de l'algèbre des champs de vecteurs analytiques réels d'une variété de dimension n, Alors, la $n^{\text{ème}}$-sous-algèbre dérivée de $\mathcal{L}$ est triviale.*

Preuve. Par récurrence, nous supposons la proposition démontrée jusqu'à $n-1$. Soit Z un champ non nul dans le centre de $\mathcal{L}$. Au voisinage d'un point régulier de Z, on peut introduire un système de coordonnées locales $(x_1,\dots,x_n)$ tel que Z soit $\frac{\partial}{\partial x_n}$. Les éléments de $\mathcal{L}$, commutant avec Z, sont donc de la forme:

$$\sum_{i=1}^{n-1} u_i(x_1,\dots,x_{n-1})\frac{\partial}{\partial x_i}+v(x_1,\dots,x_{n-1})\frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Ainsi, les éléments de $\mathcal{L}$ définissent par projection une sous-algèbre $\mathcal{L}_1$ de

champs de vecteurs sur un ouvert de $\mathbb{R}^{n-1}$, de coordonnées $x_1,\dots,x_{n-1}$. On a donc une suite exacte:

$$0\to\mathcal{H}\to\mathcal{L}\to\mathcal{L}_1\to 0.$$

Le noyau $\mathcal{H}$ est constitué de champs de la forme $v(x_1,\dots,x_{n-1})\frac{\partial}{\partial x_n}$: c'est une algèbre abélienne. Par hypothèse de récurrence, la $(n-1)^{\text{ème}}$-sous-algèbre dérivée de $\mathcal{L}_1$ est triviale. La proposition en résulte. □

Nous allons adapter cet argument pour les difféomorphismes et champs formels. Nous ne traiterons ici que le cas de la dimension 2. Les notations que nous employons sont analogues à celles définies plus haut:

$\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}^2,0)$ est le groupe des difféomorphismes formels de $\mathbb{R}^2$ en 0, fixant 0.

$\widehat{\mathcal{X}}(\mathbb{R}^2,0)$ est l'anneau des champs de vecteurs formels de $\mathbb{R}^2$, nuls en 0.

$\widehat{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^2)$ est l'anneau des séries formelles en deux variables x,y et $\widehat{K}(\mathbb{R}^2)$ est son corps des fractions.

L'algèbre $\widehat{\mathcal{X}}(\mathbb{R}^2,0)$ peut être considérée comme une algèbre de dérivations de $\widehat{\mathcal{O}}(\mathbb{R}^2)$ et de $\widehat{\mathcal{X}}(\mathbb{R}^2)$; si $X\in\widehat{\mathcal{X}}(\mathbb{R}^2,0)$ et $u\in\hat{K}(\mathbb{R}^2,0)$, on note $X(u)\in\widehat{K}(\mathbb{R}^2,0)$ la"dérivée de u dans la direction de X".

On note encore:

$$\exp\colon\widehat{\mathcal{X}}(\mathbb{R}^2,0)\to\widehat{\text{Diff}}(\mathbb{R}^2,0)$$

l'application exponentielle.

Finalement, on utilise les mêmes notations, en remplaçant $\mathbb{R}^2$ par $\mathbf{C}^2$, pour les complexifications naturelles de ces objets; difféomorphismes et champs complexes formels de $\mathbf{C}^2$ en 0.

Proposition 4.2. *Une sous-algèbre nilpotente de $\widehat{\mathcal{X}}(\mathbf{C}^2,0)$ est métabélienne (i.e. sa deuxième sous-algèbre dérivée est triviale).*

Preuve. Soit $\mathcal{L}$ une sous-algèbre nilpotente et $\mathcal{L}$ son centre. Puisque $\widehat{\mathcal{X}}(\mathbf{C}^2,0)\otimes\widehat{K}(\mathbf{C}^2)$ est évidemment un espace vectoriel sur $\widehat{K}(\mathbf{C}^2)$ de dimension 2, deux cas sont possibles:

1. $\mathcal{L}$ engendre un sous-espace de dimension 2, i.e. il existe deux éléments X et Y de $\mathcal{L}$ linéairement indépendants sur $\widehat{K}(\mathbf{C}^2)$. Tout élément de $\mathcal{L}$

s'écrit donc sous la forme $uX+vY$ avec u et v dans $\widehat{K}(\mathbf{C}^2)$ et la relation de commutation avec X et Y s'écrit:

$$X(u) = X(v) = Y(u) = Y(v) = 0.$$

Il en résulte que u et v sont en fait des constantes car $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ sont des combinaisons de X et Y à coefficients dans $\widehat{K}(\mathbf{C}^2)$ de sorte que les dérivées partielles de u et v sont nécessairement nulles. Par conséquent, $\mathcal{L}$ est contenue dans l'algèbre abélienne des combinaisons linéaires de X et Y à coefficients constants. En particulier, $\mathcal{L}$ est abélienne.

2. $\mathcal{L}$ engendre un $\widehat{K}(\mathbf{C}^2)$-espace vectoriel de dimension 1, i.e. il existe X dans $\mathcal{L}$ tel que tout autre élément de $\mathcal{L}$ s'écrit $u.X$ avec $u \in \widehat{K}(\mathbf{C}^2)$. Considérons la sous-algèbre $\mathcal{G}$ de $\mathcal{L}$ formée des éléments qui sont de la forme $u.X$, avec $u \in \widehat{K}(\mathbf{C}^2)$. La commutation avec X s'écrit $X(u) = 0$ d'où il résulte que $\mathcal{G}$ est abélienne. D'autre part, le fait que X soit dans le centre de $\mathcal{L}$ montre que $\mathcal{G}$ est un idéal dans $\mathcal{L}$.

Supposons $\mathcal{L}$ non abélienne et soit Y un élément de $\mathcal{L}$ dont la projection dans $\mathcal{L}/\mathcal{G}$ est un élément non trivial du centre de $\mathcal{L}/\mathcal{G}$. Tout élément de $\mathcal{L}$ s'écrit alors sous la forme $uX + vY$ avec u et v dans $\widehat{K}(\mathbf{C}^2)$. Le fait que X est central donne:

$$X(u) = X(v) = 0,$$

et le fait que Y est central modulo $\mathcal{G}$ donne:

$$Y(v) = 0.$$

Il en résulte que v est une constante. Le crochet de deux éléments de $\mathcal{L}$ est donc dans $\mathcal{G}$ et nous avons bien montré que $\mathcal{L}$ est métabélienne. □

Proposition 4.3. *Un sous-groupe nilpotent de* $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}^2, 0)$ *est métabélien.*

Preuve. Soit Γ un sous-groupe nilpotent de longueur ℓ de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}^2, 0)$. Pour chaque entier $i \geq 0$, notons Diff_i le quotient de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}^2, 0)$ par le sous-groupe normal des difféomorphismes formels tangents à l'identité à l'ordre i. Si $j > i$, on a une projection naturelle de Diff_j sur Diff_i et on peut considérer $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}^2, 0)$ comme la limite projective des Diff_i. Observons que Diff_i est naturellement un groupe algébrique linéaire complexe. Soit Γ_i la projection de Γ dans Diff_i et $\overline{\Gamma}_i$ sa clôture de Zariski; c'est un

groupe algébrique nilpotent de longueur ℓ. Pour montrer la proposition, il suffit bien sûr de montrer que $\overline{\Gamma}_i$ est métabélien.

Rappelons que tout groupe algébrique nilpotent complexe est le produit direct du sous-groupe de ses éléments unipotents et du sous-groupe de ses éléments semi-simples ([**Bo**], [**We**]).

Un élément de Diff_i est unipotent si et seulement si sa partie linéaire, élément de $GL(2, \mathbf{C})$, est une matrice unipotente. Le sous-groupe $\overline{\Gamma}_{i,ss}$ des éléments semi-simples de $\overline{\Gamma}_i$ se projette donc injectivement sur un sous-groupe nilpotent de $GL(2, \mathbf{C})$; c'est donc un groupe abélien (et, en particulier, métabélien).

Il reste donc à montrer que le sous-groupe $\overline{\Gamma}_{i,u}$ des éléments unipotents de $\overline{\Gamma}_i$ est métabélien. D'après la structure des groupes unipotents, ce sous-groupe est l'expoentielle d'une sous-algèbre nilpotente de l'algèbre de Lie de Diff_i, de même longueur de nilpotence ℓ. Le caractère naturel de ces constructions par rapport aux diverses projections $\mathrm{Diff}_j \to \mathrm{Diff}_i$ montre qu'il existe une sous-algèbre nilpotente $\mathcal{L}$ de longueur ℓ de $\widehat{\mathcal{X}}(\mathbf{C}^2, 0)$ dont l'exponentielle se projette sur $\overline{\Gamma}_{i,u}$ pour tout i. D'après la proposition 4.2, $\mathcal{L}$ est métabélienne et il en est donc de même pour $\overline{\Gamma}_{i,u}$. Ceci établit la proposition. □

Nous pouvons maintenant étudier les groupes nilpotents de difféomorphismes globaux de la sphère.

Proposition 4.4. *Un groupe nilpotent de difféomorphismes analytiques de la sphère* S^2 *possède une orbite finie.*

Preuve. En passant à un groupe d'indice 2, on peut ne considérer que les sous-groupes nilpotents Γ de $\mathrm{Diff}^{\omega}(S^2)$ qui respectent l'orientation. Soit γ_0 un élément non trivial du centre de Γ et notons $\mathrm{Fix}(\gamma_0)$ l'ensemble (non vide) de ses points fixes; c'est un ensemble analytique, globalement invariant par Γ. Distingons plusieurs cas:

i. $\mathrm{Fix}(\gamma_0)$ est fini; c'est alors une orbite finie pour Γ.

ii. $\mathrm{Fix}(\gamma_0)$ est singulier; l'ensemble fini de ses points singuliers est une orbite finie pour Γ.

iii. $\mathrm{Fix}(\gamma_0)$ est une courbe lisse. Soit D l'une des composantes connexes de $S^2 - \mathrm{Fix}(\gamma_0)$ qui est un disque. Un sous-groupe d'indice fini Γ_1 de Γ

(contenant γ_0) fixe D. Soit γ un élément de Γ_1 et x un point fixe de γ situé dans le disque fermé $\overline{D}$. Puisque γ_0 n'a pas de point fixe dans le disque ouvert, la suite $\gamma_0^k(x)$ s'accumule sur le bord ∂D de $\overline{D}$ (théorème de Brouwer). Ainsi, γ possède au moins un point fixe sur ∂D. Donc Γ_1 opère sur le cercle ∂D et tous ses éléments ont un point fixe dans ∂D. D'après la description des groupes nilpotents de difféomorphismes du cercle, faite au paragraphe 3, il existe un point de ∂D fixe par tous les éléments de Γ_1 et ceci achève la preuve de la proposition. □

Pour un résultat beaucoup plus précis dans le cas d'un groupe abélien, voir [**Bo**] et [**Ha**].

Nous pouvons démontrer la dernière partie du théorème B,

Théorème 4.5. *Un sous-groupe nilpotent du groupe des difféomorphismes analytiques de la sphère est métabélien.*

Preuve. Soit Γ un sous-groupe nilpotent de $\mathrm{Diff}^\omega(S^2)$ et Γ_1 un sous-groupe d'indice fini possédant un point fixe commun. En considérant les jets d'ordre infini des éléments de Γ_1 en ce point fixe, on plonge Γ_1 dans $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}^2,0)$ et donc dans $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}^2,0)$. D'après 4.3, Γ_1 est métabélien. Pour montrer le théorème, on peut toujours supposer que Γ est de type fini. Distingons deux cas.

Supposons d'abord Γ sans torsion. On sait alors que Γ est un réseau cocompact dans un groupe de Lie $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ nilpotent simplement connexe [**Ra**]. Le groupe Γ est métabélien si et seulement si le groupe de Lie $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ est métabélien. Puisque Γ_1 est aussi un réseau dans $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ et que Γ_1 est métabélien, on déduit que $\Gamma \otimes \mathbb{R}$ (et donc Γ) est métabélien.

Supposons maintenant que Γ contienne des éléments de torsion. On sait alors que ces éléments de torsion constituent un sous-groupe normal de Γ qui rencontre donc non trivialement le centre de Γ. Soit γ un élément de torsion non trivial central dans Γ. Il est bien connu qu'un groupe fini de difféomorphismes de la sphère est conjugué à un groupe d'isométries.

Si γ renverse l'orientation, γ est d'ordre 2 et Γ est le produit direct de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec le sous-groupe Γ^+ de Γ formé des éléments qui respectent l'orientation. Il suffit donc de montrer que Γ^+ est métabélien.

Si γ respecte l'orientation, il a exactement deux points fixes sur la sphère S^2 et Γ possède donc un ensemble invariant à deux éléments. En reprenant les notations introduites pour l'étude des difféomorphismes du cercle, on voit que Γ se plonge dans $2 \cdot \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}^2,0)$ et donc dans $2 \cdot \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}^2,0)$:

$$1 \to \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}^2,0) \to 2 \cdot \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}^2,0) \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \to 0.$$

Le groupe $2 \cdot \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbf{C}^2,0)$ est limite projective des groupes algébriques $2 \cdot \mathrm{Diff}_i$ (avec la notation de 4.3). L'argument de la proposition 4.3 s'adapte sans difficulté à une modification mineure près. Le sous-groupe de $2 \cdot \mathrm{Diff}_i$ formé des éléments semi-simples de $\overline{\Gamma}_i$ se plonge maintenant dans $2 \cdot GL(2,\mathbf{C})$ et il n'est plus nécessairement abélien. Il est cependant métabélien car il contient un sous-groupe abélien d'indice 2. Ceci termine la preuve du théorème. □

Terminons ce paragraphe par quelques remarques.

Il existe des sous-groupes nilpotents de $\mathrm{Diff}^\omega(S^2)$ dont la longueur de nilpotence est arbitrairement grande. Il suffit en effet de considérer le groupe diédral engendré par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2^k}$ autour d'un axe passant par l'origine de $\mathbb{R}^3$ et par une symétrie par rapport à un autre axe passant par l'origine, orthogonal au premier. Il s'agit d'un groupe fini, nilpotent de longueur k, mais bien sûr métabélien.

Il est probable, cependant, que si Γ est un sous-groupe nilpotent de $\mathrm{Diff}^\omega(S^2)$, le quotient de Γ par son sous-groupe de torsion est de longueur 2 au plus.

La plupart des arguments précédents s'adaptent sans difficulté aux surfaces compactes différentes du tore et de la bouteille de Klein (pour généraliser 4.4). Cependant, tout groupe fini se plonge dans le groupe des difféomorphismes d'une certaine surface compacte (de genre assez elévé) de sorte qu'il existe des sous-groupes nilpotents non métabéliens dans le groupe des difféomorphismes analytiques d'une surface compacte. Ce phénomène ne se produit pas dans le sous-groupe des difféomorphismes isotopes à l'identité car nos preuves se généralisent immédiatement à ce cas.

La même méthode permet probablement d'analyser la structure des

sous-groupes résolubles de $\mathrm{Diff}^\omega(S^2)$.

Il n'est pas difficile de construire des sous-groupes nilpotents non métabéliens du groupe des difféomorphismes de classe C^∞ de la sphère mais nous ignorons si la longueur de résolubilité de ces groupes est bornée.

5. Les groupes "pseudo-résolubles"

Soit Γ un groupe engendré par une partie S et définissons, comme précédemment, la suite $S(k)$ par $S(0) = S$; $S(k+1)$ est l'ensemble des commutateurs $[a^{\pm 1}, b^{\pm 1}]$ avec $a \in S(k)$ et $b \in S(k) \cup S(k-1)$ ($b \in S(0)$ si $k = 0$).

Définition 5.1. *On dit qu'un groupe Γ est pseudo-résoluble s'il est engendré par une partie S telle que $S(k)$ est réduit à l'identité pour k assez grand.*

Le théorème suivant ne fait que paraphraser 2.7:

Théorème 5.2. *Soit V une variété compacte analytique réelle, $\tau > 0$ suffisamment petit et $\tilde{V}_\tau$ le τ-voisinage de V dans sa complexification $\tilde{V}$ (voir §2). Il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de l'identité dans $\mathrm{Diff}^\omega(V)$ tel que si S est une partie quelconque de $\mathcal{U}$ et si Γ désigne le groupe engendré par S, alors on a l'une des deux possibilités suivantes:*

i) *Γ est pseudo-résoluble;*

ii) *il existe une suite γ_i d'éléments de Γ différents de l'identité ayant une extension holomorphe à $\tilde{V}_\tau$ et tendant uniformément vers l'identité sur $\tilde{V}_\tau$.*

L'inconvénient de ce théorème est bien sûr que la signification algébrique de la pseudo-résolubilité est peu claire: nous avons déja noté qu'elle n'entraîne pas la résolubilité en général. Il est même probable qu'il existe des groupes pseudo-résolubles contenant des sous-groupes non abéliens libres... Cependant, dans certains cas, il est possible qu'on puisse conclure à la résolubilité.

Problème 5.3. *Un sous-groupe pseudo-résoluble de $\mathrm{Diff}^\omega(V)$ est-il résoluble?*

Le but de ce paragraphe est de donner quelques résultats dans cette direction. Avant de les énoncer, signalons que la définition que nous avons choisie pour la pseudo-résolubilité est assez arbitraire et que beaucoup d'autres seraient possibles. Par exemple, on pourrait définir $S(k+1)$ comme étant l'ensemble des produits d'au plus 1000 commutateurs $[a, b]$ avec a et b dans la réunion $S([k/100]) \cup S([k/100+1]) \cup \cdots \cup S(k)$. Le théorème 5.2 resterait valide avec cette définition étendue.

Il est évident qu'un quotient d'un groupe pseudo-résoluble est pseudo-résoluble. Par conséquent, les deux théorèmes suivants entraînent immédiatement les théorèmes D' et $C' - D$ respectivement.

Théorème 5.4. *Un sous-groupe pseudo-résoluble du groupe $GL_+(2, \mathbb{R})$ des matrices à déterminant positif est résoluble.*

Théorème 5.5. *Un sous-groupe pseudo-résoluble de $\mathrm{Diff}^\omega_+(S^1)$ est résoluble.*

Commençons par la preuve de 5.4, évidemment plus élémentaire. Puisque $GL_+(2, \mathbb{R})$ est une extension centrale de $PSL(2, \mathbb{R})$, il suffit de considérer des sous-groupes pseudo-résolubles Γ de $PSL(2, \mathbb{R})$, engendrés par S et tels que $S(k_0)$ est réduit à l'élément neutre. Notons $G(k)$ le groupe engendré par $S(k)$ et $\Gamma(k)$ le groupe engendré par $S(k) \cup S(k+1) \cup \cdots \cup S(k_0 - 1)$ (ou, de manière équivalente, par $S(k) \cup S(k+1)$). Soit k_1 le plus petit entier tel que $\Gamma(k_1)$ est résoluble. Nous allons montrer que $k_1 = 0$, c'est-à-dire que Γ est résoluble. Supposons donc, par l'absurde, que $k_1 \geq 1$ et soit $f \in S(k_1 - 1)$. Si $g \in S(k_1)$, les commutateurs $[f^{\pm 1}, g]$ sont dans $S(k_1 + 1)$ de sorte que $f^{\pm 1} G(k_1) f^{\mp 1} \subset \Gamma(k_1)$. Nous allons analyser cette situation.

Remarquons d'abord que $G(k_1)$ n'est certainement pas trivial car si $S(k_1)$ était trivial, il en serait de même pour $S(k')$ avec $k' \geq k$ et $\Gamma(k_1 - 1)$ serait commutatif.

Les sous-groupes résolubles de $PSL(2, \mathbb{R})$ se décrivent facilement. Il est commode d'utiliser l'action isométrique de $PSL(2, \mathbb{R})$ sur le disque de Poincaré D^2. Soit R un sous-groupe résoluble non trivial de $PSL(2, \mathbb{R})$. On a l'une des possiblités suivantes:

1. R est contenu dans le groupe abélien R_α des rotations de centre le

point α de D^2.

2. R est contenu dans le groupe abélien $R_{\alpha,\beta}$ des isométries de D^2 qui fixent deux points α, β du bord ∂D^2.

3. R n'est pas du type précédent mais est contenu dans le groupe diédral (résoluble) $R_{\{\alpha,\beta\}}$ des isométries de D^2 qui fixent l'ensemble à deux éléments $\{\alpha, \beta\} \subset \partial D^2$.

4. R n'est pas de l'un des types précédents mais il est contenu dans le groupe résoluble R_α des isométries qui fixent le point α de ∂D^2.

Notons que l'ensemble à un ou deux éléments $\{\alpha\}$, $\{\alpha, \beta\}$ est, dans chaque cas, associé à R, i.e. tout élément f de $PSL(2, \mathbb{R})$ normalisant R fixe $\{\alpha\}$ ou $\{\alpha, \beta\}$ suivant les cas.

Appliquons cette description au groupe résoluble $\Gamma(k_1)$.

i. si $\Gamma(k_1)$*est de type* 1), alors $G(k_1)$ est aussi de type 1) avec le même point fixe α. Le fait que $fG(k_1)f^{-1} \subset \Gamma(k_1)$ montre que f fixe α. Le groupe $\Gamma(k_1 - 1)$, engendré par $S(k_1 - 1) \cup S(k_1)$ est donc contenu dans R_α. Il est donc commutatif et c'est une contradiction.

ii. si $\Gamma(k_1)$ est de type 2), alors $G(k_1)$ est lui aussi de type 2), contenu dans $R_{\{\alpha,\beta\}}$. Il en résulte que f préserve l'ensemble $\{\alpha, \beta\}$. Ainsi, $\Gamma(k_1 - 1)$ est contenu dans le groupe diédral $R_{\{\alpha,\beta\}}$ et c'est une contradiction.

iii. si $\Gamma(k_1)$ *est de type* 3), alors $G(k_1)$ est de type 2) ou 3) et l'argument précédent s'applique, sauf peut-être si $G(k_1)$ est un groupe à deux éléments, contenant la symétrie par rapport à un point x situé sur la géodésique $\alpha\beta$ de D^2. Puisque $f^{\pm 1}G(k_1)f^{\mp 1} \subset \Gamma(k_1)$, les points $x, f(x)$ et $f^{-1}(x)$ sont tous trois sur cette géodésique $\alpha\beta$ qui est donc invariante par f. Ici encore, nous avons montré que $\Gamma(k_1 - 1)$ est contenu dans un groupe diédral.

iv. si $\Gamma(k_1)$ *est de type* 4), contenu dans R_α, le sous-groupe $G(k_1)$ peut être de type 2) ou 4). Si $G(k_1)$ est de type 4), son seul point fixe est bien sûr α et f préserve α. Dans ce cas, $\Gamma(k_1 - 1)$ est contenu dans le groupe résoluble R_α et c'est une contradiction. Si $G(k_1)$ est de type 2), il est contenu dans $R_{\{\alpha,\beta\}}$ où β est un point de ∂D^2 différent de α. On a donc deux possibilités, puisque $f^{\pm 1}G(k_1)f^{\mp 1} \subset \Gamma(k_1)$:

a) $f(\alpha) = \alpha$

b) $f(\beta) = \alpha$ et $f(\alpha) = \beta$.

Si tous les éléments f de $S(k_1 - 1)$ sont de type a), alors $\Gamma(k_1 - 1)$ est contenu dans le groupe résoluble R_α. Si tous les éléments f de $S(k_1 - 1)$ sont de type b), alors $\Gamma(k_1 - 1)$ est contenu dans le groupe diédral $R_{\{\alpha,\beta\}}$ et ceci est encore impossible.

Soit $f_1 \in S(k_1 - 1)$ avec $f_1(\alpha) = \alpha$ et $f_2 \in S(k_1 - 1)$ avec $f_2(\alpha) = \beta$ et $f_2(\beta) = \alpha$. Nous savons que $[f_1, f_2]$ appartient à $S(k_1)$ et fixe donc β. On obtient que f_1 fixe β. Ainsi, tous les éléments de $S(k_1 - 1) \cup S(k_1)$ sont dans $R_{\{\alpha,\beta\}}$ et c'est une contradiction.

Ceci termine la preuve du théorème 5.4, que l'on comparera avec celle du théorème C, faite au paragraphe 3. □

Remarquons qu'il ne serait pas difficile de généraliser aux sous-groupes de $GL(2, \mathbf{C})$. Nous laissons les détails au lecteur (qui n'oubliera pas que le groupe d'isométries du cube est un sous-groupe résoluble de $GL(2, \mathbf{C})$ de longueur 4...) Il est probable que le théorème se généralise aux groupes de Lie en général.

Avant d'étudier les sous-groupes de $\mathrm{Diff}^\omega_+(S^1)$, il est naturel d'examiner la situation au voisinage d'un point fixe:

Théorème 5.6. *Un sous-groupe pseudo-résoluble de* $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}, 0)$ *est résoluble.*

Preuve. Comme précédemment, soit Γ un sous-groupe pseudo-résoluble de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}, 0)$, engendré par S. Soit $G(k)$ le groupe engendré par $S(k)$ et $\Gamma(k)$ le groupe engendré par $S(k) \cup S(k-1)$. Soit k_0 le plus grand entier tel que $S(k_0)$ est non trivial et $k_1 \leq k_0$ le plus petit entier tel que $\Gamma(k_1)$ est résoluble. Nous supposons par l'absurde que $k_1 \geq 1$ et soit $f \in S(k_1 - 1)$. Nous allons encore exploiter le fait que $f^{\pm 1}G(k_1)f^{\mp 1} \subset \Gamma(k_1)$.

Puisque $k_1 \geq 1$, tous les éléments de $\Gamma(k_1)$ sont tangents à l'identité. D'après la description que nous avons donnée des sous-groupes résolubles de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}, 0)$, il résulte que $\Gamma(k_1)$ est en fait commutatif et que son centralisateur est un groupe à un paramètre $\{\exp tX\}$ qui est aussi le centralisateur de $G(k_1)$. Ainsi, f normalise ce sous-groupe à un paramètre. Nous avons vu en 3.4 que le normalisateur d'un sous-groupe résoluble non trivial de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}, 0)$ est résoluble. Par conséquent, $\Gamma(k_1 - 1)$ est

résoluble et ceci est la contradiction cherchée. □

Nous montrons enfin le théorème 5.5, c'est-à-dire que nous considérons un sous-groupe Γ de $\mathrm{Diff}^{\omega}_{+}(S^1)$ pseudo-résoluble, engendré par S. Nous utilisons les mêmes notations que dans le théorème précédent et nous supposons encore par l'absurde que $k_1 \geq 1$. Nous utiliserons certains des arguments de la preuve du théorème C, faite au paragraphe 3 et décomposée en trois cas 3.10, 3.11, 3.12. Puisqu'une réunion croissante de groupes métabéliens est un groupe métabélien, nous pouvons supposer que S est un ensemble fini.

i) *Si $\Gamma(k_1)$ est un groupe fini abélien.* On conclut exactement comme dans le Deuxième cas 3.11 que $\Gamma(k_1 - 1)$ est commutatif, ce qui est impossible.

ii) *Si $\Gamma(k_1)$ est un groupe infini abélien opérant librement sur le cercle*, alors l'action est topologiquement conjuguée à un groupe de rotations. En particulier, deux éléments de $\Gamma(k_1)$ de même nombre de rotation sont égaux et l'argument de 3.11 s'applique encore.

Il faut maintenant étudier le cas où l'ensemble des orbites finies de $\Gamma(k_1)$ est un ensemble non vide P à q éléments. Les stabilisateurs (infinis) de chacun des points de P sous l'action de $\Gamma(k_1)$ donnent des sous-groupes résolubles non triviaux $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_q$ de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}, 0)$. Nous avons vu que, à conjugaison près, on peut supposer que Γ_i est contenu dans un sous-groupe du type $Aff(\ell_i)$ ou dans un sous-groupe à un paramètre $\{\exp tX_i\}$ (voir la proposition 3.2). Notons aussi que si l'un des Γ_i est abélien, alors tous les Γ_i sont abéliens par le caractère analytique de l'action de $\Gamma(k_1)$. De même, les stabilisateurs des points de P sous l'action de $G(k_1)$ donnent des sous-groupes $G_1, \ldots, G_q$ de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}, 0)$.

Continuons notre étude (fastidieuse) des différentes possibilités.

iii) *Les Γ_i et les G_i sont non abéliens.* Dans ce cas, l'ensemble des orbites finies de $G(k_1)$ coïncide avec P et f préserve P. Par conséquent, f définit un élément $(r; f_1, \ldots, f_q)$ de $q \cdot \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}, 0)$ et le fait que $f^{\pm 1} G(k_1) f^{\mp 1} \subset \Gamma(k_1)$ entraîne que $f_i Aff(\ell_i) f_i^{-1} = Aff(\ell_{i+r})$ (voir 3.4). L'ensemble des f ayant cette propriété est un sous-groupe résoluble de $q \cdot \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}, 0)$ et ceci est une contradiction.

iv) *Les Γ_i sont abéliens et les G_i sont abéliens non triviaux.* Le même argument que dans iii) fonctionne en remplaçant $Aff(\ell_i)$ par $\{\exp tX_i\}$.

Il y a deux classes de conjugaison de sous-groupes à un paramètre dans $Aff(\ell)$: le sous-groupe des homothéties ax dont tous les éléments non triviaux sont hyperboliques et le sous-groupe des "translations"

$$\frac{x}{\sqrt[\ell]{1 + bx^{\ell}}}$$

dont aucun élément n'est hyperbolique. L'argument de 3.8 montre que si un élément γ de $\Gamma(k_1)$ fixe tous les éléments de P, alors les q éléments de $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}, 0)$ qu'il définit sont simultanément de type homothetie ou de type translation. Dans le premier cas, γ a un point fixe unique dans chaque composante de $S^1 - P$ et, dans le second cas, γ n'a pas d'autres points fixes que les éléments de P.

v) *Les Γ_i sont non abéliens et les G_i sont des sous-groupes non triviaux du groupe des translations de $Aff(\ell_i)$.* Dans ce cas, l'ensemble des orbites finies de $G(k_1)$ coïncide avec P et f préserve P. Par conséquent, f définit un élément $(r; f_1, \ldots, f_q)$ de $q \cdot \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}, 0)$ et le conjugué par f_i du groupe des translations de $Aff(\ell_i)$ est contenu dans $Aff(\ell_{i+r})$, nécessairement dans le groupe des translations de $Aff(\ell_{i+r})$ car l'hyperbolicité est invariante par conjugaison. Notons que l'ordre de contact avec l'identité montre que $\ell_i = \ell_{i+r}$. L'ensemble des f ayant cette propriété de normalisation est un groupe résoluble, ce qui montre que $\Gamma(k_1 - 1)$ est résoluble. Contradiction.

vi) *Les Γ_i sont non abéliens et les G_i sont des sous-groupes non triviaux du groupe des homothéties.* C'est le cas où la réunion des orbites finies de $G(k_1)$ est un ensemble fini $Q = P \cup P'$ de cardinal $2q$, contenant exactement un élément dans chaque composante connexe de $S^1 - P$. On ne peut plus conclure que f préserve P et définit un élément de $q \cdot \widehat{\mathrm{Diff}}$. Cependant, puisque $f^{\pm 1} G(k_1) f^{\mp 1} \subset \Gamma(k_1)$, on a $f(P) = P$ (type 1) ou $f(P) = P'$ et $f(P') = P$ (type 2).

Supposons d'abord que tous les éléments de $S(k_1 - 1)$ sont de type 1) et soit toujours f l'un d'entre eux. Il définit un élément $(r; f_1, \ldots, f_q)$ de $q \cdot \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R}, 0)$ tel que f_i conjugue le groupe des homothéties de $Aff(\ell_i)$ et un sous-groupe de $Aff(\ell_{i+r})$. Ceci entraîne que f_i est dans $Aff(\ell_{i+r})$.

En utilisant f^{-1}, on trouve que f_i est aussi dans $Aff(\ell_i)$. En d'autres termes, si l'on fait le changement de variable formel "ramifié" $x \mapsto x^{\ell_i}$ autour de chaque point de P, les éléments de $S(k_1-1)$ (et de $S(k_1)$) opèrent "affinement". Ceci entraîne que $\Gamma(k_1-1)$ est résoluble et donc est exclu.

Si tous les éléments de $S(k_1-1)$ sont de type 2, alors $P \cup P'$ est invariant par $S(k_1-1) \cup S(k_1)$ et donc par $\Gamma(k_1)$, ce qui contredit la définition de P.

Si f_1 est de type 1 et f_2 de type 2, le commutateur $[f_1, f_2]$, élément de $S(k_1)$, préserve P' (globalement), f_2 permute P et P' et f_1 préserve P. On en déduit que f_1 préserve aussi P'. Mais ceci entraîne encore que $P \cup P'$ est invariant par $S(k_1-1) \cup S(k_1)$ et donc par $\Gamma(k_1)$, contredisant la définition de P.

Il reste encore deux cas...

vii) *Les Γ_i sont abéliens et les G_i sont triviaux, i.e. $G(k_1)$ est un groupe fini cyclique.* Nous procédons comme en 3.12. Soit g un générateur de $G(k_1)$ et $f \in S(k_1-1)$. Soient $\gamma_1 = fgf^{-1}$ et $\gamma_2 = f^{-1}gf$ et $\gamma_3 = g\gamma_2^{-1}$. Les éléments g et γ_2^{-1} sont deux éléments de $\Gamma(k_1)$, γ_3 a un nombre de rotation nul et $f\gamma_3 f^{-1} \in \Gamma(k_1)$. Puisque $\Gamma(k_1)$ est abélien, γ_3 est trivial ou l'ensemble de ses points fixes est exactement P. Ainsi, pour tout f de $S(k_1-1)$, on a $f(P) = P$ (type 1) ou f commute avec $G(k_1)$ (type 2). On conclut de manière analogue à 3.12:

Si tous les f sont de type 1, ils définissent des éléments de $q\cdot\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$ et on conclut comme précédemment.

Si tous les f sont de type 2, ils commutent tous avec $G(k_1)$ et on conclut comme plus haut que $\Gamma(k_1-1)$ est commutatif.

Soient f et f_2 deux éléments de $S(k_1-1)$ avec f_2 de type 2. Puisque $[f, f_2]$ est une puissance de g, on obtient, en comparant les nombres de rotation et en notant que g et f_2 commutent, que f et f_2 commutent. Les éléments de type 2 commutent donc avec $S(k_1-1) \cup S(k_1)$, c'est-à-dire avec $\Gamma(k_1)$; ils préservent donc P et définissent des éléments de $q \cdot \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{R},0)$. On conclut toujours de la même façon.

viii) *Les Γ_i sont non abéliens et les G_i sont triviaux.* La seule difficulté pour adapter la preuve précédente vii est de montrer que si γ_3

est non trivial, alors ses points fixes sont exactement les points de P. Nous avons vu en 3.8 qu'il est possible d'équiper chaque composante connexe I de $S^1 - P$ d'une mesure ν_I, positive sur les ouverts, de masse infinie, de sorte que, pour chaque γ de $\Gamma(k_1)$, il existe $c(\gamma) > 0$ tel que $\gamma_* \nu_I = c(\gamma)\nu_{\gamma(I)}$. Evidemment, si γ est de torsion, $c(\gamma) = 1$. Puisque $\gamma_3 = g\gamma_2^{-1}$ et g et γ_2 sont de torsion, on a $c(\gamma_3) = 1$. En d'autres termes, γ_3 agit par "translations" sur chaque composante de $S^1 - P$. Si γ_3 est non trivial, ses seuls points fixes sont donc les éléments de P. L'argument de vii) s'applique alors.

Ceci termine la preuve du théorème 5.5. □

Bibliographie

[A-G] *d'Ambra, G., Gromov, M.*: Lectures on transformation groups: geometry and dynamics. Preprint.

[Ar] *Arnold, V.I.*: Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires. Mir, Moscou, 1980.

[Ba] *Bavard, C.*: Longueur stable des commutateurs. L'Ens. math. 37 (1991) 109–150.

[Bon] *Bonatti, C.*: Un point fixe commun pour des difféomorphismes commutants de S^2. Ann. Math. 129 (1989) 61–79.

[Bo] *Borel, A.*: Linear algebraic groups. W.A. Benjamin, 1969.

[B-T] *Broer, M., Tangerman, F.*: From a differentiable to a real analytic perturbation theory, application to the Kupka-Smale theorems. Ergodic Th. & Dynam. Systems 6 (1986).

[E-T] Epstein, D.B.A., Thurston, W.P.: Transformation groups and natural bundles. Proc. London Math. Soc. **38** (1979) 219-236.

[Ha] *Handel, M.*: Commuting homeomorphisms of S^2. Topology 31 (1992) 293–303.

[Ko] *Koppel, N.*: Commuting diffeomorphisms. Global Analysis, Berkeley 1968. Proc. Symp. Pure math. 14 (1970) 165–184.

[Le] *Leslie, J.*: On the group of real analytic diffeomorphisms of a compact real analytic manifold. Trans. A.M.S. 274 (1982).

[Ma] *Margulis, G.A.*: Discrete subgroups of semi-simple groups, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1990.

[M-R] *Martinet, J., Ramis, J.P.*: Classification analytique des équations différentelles non linéaires résonnantes du premier ordre. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 16 (1983) 571–621.

[Mt] *Martinet, J.*: Normalisation des champs de vecteurs holomorphes (d'après Brjuno). Séminaire Bourbaki, exposé 564, novembre 1980. LNM 901, Springer (1981) 55–70.

[Na1] *Nakai, I.*: Separatrices for non solvable dynamics on $\mathbf{C}, 0$. Preprint.

[Na2] *Nakai, I.*: A rigidity theorem for transverse dynamics. Preprint.

[Nar] *Narasimhan, R.*: Analysis on real and complex manifolds. North Holland, 1968.

[Ne] *Neumann, H.*: Varieties of groups. Springer, Berlin, Heidelberg New York, 1967.

[Pl1] *Plante, J.F.*: Solvable groups acting on the line. Trans. A.M.S. 278 (1983) 401–414.

[Pl2] *Plante, J.F.*: Subgroups of continuous groups acting differentiably on the half line. Ann. Inst. Fourier 34 (1984) 47–56.

[P-T] Plante, J.F., Thurston, W.P.: Polynomial growth in holonomy groups of foliations. Comment. Math. Helv. 51 (1976) 567-584.

[Ra] *Raghunathan, M.S.*: Discrete subgroups of Lie groups. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1972.

[Sa] *Sacksteder, R.*: Foliations and pseudogroups. Amer. J. Math. 87 (1965) 79–102.

[We] *Wehrfritz, B.A.F.*: Infinite linear groups. Springer, Berlin Heidelberg New York, 1973.

[Wi] *Witte, D.*: Arithmetic groups of higher $\mathbb{Q}$-ranks cannot act on 1-manifolds. Preprint.

[Zi] *Zimmer, R.J.*: Actions of semi-simple groups and discrete subgroups. Proc. Int. math. Cong. Berkeley, California, USA, 1986, pp. 1247–1258.

Etienne Ghys
Ecole Normale Supérieure de Lyon, Juin 1993
UMR 128 – CNRS
46, Allée d'Italie
69364 – Lyon