Nova Série
BOLETIM
DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 25, N. 1, 93-106

Classification de Certains Feuilletages Associés à un Cusp

Frank Loray et Rafik Meziani

Abstract. We study singularities of foliations given by R. Moussu closely related to a conjecture of R. Thom. We give their analytic classification and prove their topological rigidity.

0. Introduction et définitions

Soit $\mathcal{O}_2$ l'anneau (resp. Ω_2^1 le $\mathcal{O}_2$-module) des germes de fonctions (resp. de 1-formes) holomorphes de $\mathbb{C}^2, 0$. On note Σ l'ensemble des germes de feuilletages analytiques singuliers de codimension 1 dans $\mathbb{C}^2, 0$: si $\omega \in \Omega_2^1, \mathcal{F}_\omega$ désigne l'élément de Σ associé à ω; pour tout $\mu \in \mathcal{O}_2$ inversible, on a $\mathcal{F}_{\mu\omega} = \mathcal{F}_\omega$. On appelle séparatrice de $\mathcal{F}_\omega$ tout germe de courbe C qui est l'adhérence d'une feuille L: $C = \overline{L} = L \cup \{0\}$. D'après [**C,S**] tout élément de Σ possède au moins une séparatrice.

On dit que deux germes de feuilletages $\mathcal{F}_{\omega_0}$, $\mathcal{F}_{\omega_1} \in \Sigma$ sont analytiquement (resp. topologiquement) conjugués et l'on note $\mathcal{F}_{\omega_0} \overset{an.}{\sim} \mathcal{F}_{\omega_1}$ (resp. $\mathcal{F}_{\omega_0} \overset{top.}{\sim} \mathcal{F}_{\omega_1}$) s'il existe un germe de difféomorphisme analytique (resp. d'homéomorphisme) de $\mathbb{C}^2, 0$ échangeant les feuilles de $\mathcal{F}_{\omega_0}$ avec celles de $\mathcal{F}_{\omega_1}$. Quand la classe topologique de $\mathcal{F}_\omega$ coïncide avec sa classe analytique, $\mathcal{F}_\omega$ est dit topologiquement rigide.

Soit $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ le groupe des germes de difféomorphismes analytiques de $\mathbb{C}, 0$. On dit que deux sous-groupes H_0 et H_1 de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ sont analytiquement (resp. topologiquement) conjugués et l'on note $H_0 \overset{an.}{\sim} H_1$ (resp. $H_0 \overset{top.}{\sim} H_1$) s'il existe un germe g de difféomorphisme analytique (resp. d'homéomorphisme) de $\mathbb{C}, 0$ tel que $H_0 = g^* H_1$ où $g^* H =$

Received 24 June 1993.

$\{g^{-1}hg; h \in H\}$. Quand la classe topologique d'un sous-groupe H de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ coïncide avec sa classe analytique, H est dit topologiquement rigide.

L'étude des feuilletages ayant pour séparatrices un croisement ordinaire a fait l'objet de nombreuses publications. Nous proposons ici une contribution à la classification analytique et topologique des feuilletages dont la feuille la plus simple est un cusp: on définit l'ensemble Σ-cusp des feuilletages $\mathcal{F}_\omega \in \Sigma$ dont l'unique séparatrice est analytiquement conjuguée au cusp $C: \{y^2 + x^3 = 0\}$, et ayant même désingularisation que celui-ci.

Leur structure transverse est donnée par un sous-groupe H_ω de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ défini à conjugaison analytique près appelé groupe d'holonomie projective ou évanescente ([**M**]). En fait, la classe analytique de H_ω détermine la classe analytique de $\mathcal{F}_\omega$ dans Σ-cusp ([**C,M**]). Par exemple, si ce groupe est abélien, $\mathcal{F}_\omega$ est analytiquement conjugué à la fibration de Milnor

$$y^2 + x^3 = \text{constante}$$

(voir [**M**], [**C,M**] ou encore [**M,M**]).

Lorsque H_ω est résoluble non abélien (on note $\mathcal{F}_\omega \in \Sigma_r$-cusp), on montre que celui-ci est analytiquement conjugué à un et un seul des $H_{\omega p} = \langle jx, -x/(1+x^p)^{1/p}\rangle$, $j = e^{2i\pi/3}$ pour un $p \in \mathbb{N}$ multiple ni de 2 ni de 3 (I-4). Sous cette hypothèse, $\mathcal{F}_\omega$ est analytiquement conjugué au feuilletage défini par: $\omega_p = d(y^2 + x^3) + (y^2 + x^3)^n(3ydx - 2xdy)$ si $p = 6n - 1$ et $\omega_p = d(y^2 + x^3) + x(y^2 + x^3)^n(3ydx - 2xdy)$ si $p = 6n + 1$ (III-2).

Par ailleurs, Σ-cusp est stable par conjugaison topologique (II-2): si $\mathcal{F}_{\omega_1} \overset{top.}{\sim} \mathcal{F}_{\omega_0} \in \Sigma$-cusp alors $\mathcal{F}_{\omega_1} \in \Sigma$-cusp. Nous montrons que ce résultat reste vrai pour Σ_r-cusp (III-4); En fait on a mieux: il suffit qu'un germe d'homéomorphisme de $\mathbb{C}^2, 0$ envoie une feuille de $\mathcal{F}_{\omega_1}$ sur une feuille de $\mathcal{F}_{\omega_0} \in \Sigma_r$-cusp autre que la séparatrice pour que $\mathcal{F}_{\omega_1}$ appartienne lui aussi à Σ_r-cusp (II-5). En ce sens, les éléments de Σ_r-cusp sont caractérisés par le type topologique de leur feille générique.

La fibration de Milnor est topologiquement rigide et on se demande

si les éléments de Σ_r-cusp le sont aussi; ceci revient à vérifier que le degré de ramification p de $H_{\omega p}$ est un invariant topologique pour les feuilletages de Σ_r-cusp. Les groupes H_p sont topologiquement rigides mais on n'a pas dans le cas topologique de dualité entre conjugaison des feuilletages et conjugaison des groupes d'holonomie projective. Cependant on obtient la rigidité topologique pour les familles à un paramètre: soit $s \longrightarrow \mathcal{F}_{\omega_s}$ une famille d'élements de Σ à type topologique constant dépendant analytiquement de $s \in [0,1]$; si $\mathcal{F}_{\omega_0} \in \Sigma_r$-cusp, alors $\mathcal{F}_{\omega_1} \overset{an.}{\sim} \mathcal{F}_{\omega_0}$ (IV-2).

I. Sous-groupes résolubles de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$

Soit $\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ le groupe des germes de difféomorphismes formels de $\mathbb{C}, 0$:

$$\widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}, 0) = \{h \in \mathbb{C}[[x]]; h(0) = 0 \text{ et } h'(0) \neq 0\}.$$

On dit que deux sous-groupes H_0 et H_1 de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ sont formellement conjugués et l'on note $H_0 \overset{for.}{\sim} H_1$ s'il existe $g \in \widehat{\mathrm{Diff}}(\mathbb{C}, 0)$ tel que $H_0 = g^* H_1$. Quand la classe formelle d'un sous-groupe H de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ coïncide avec sa classe analytique, H est dit formellement rigide.

Rappelons qu'un groupe H est résoluble si la suite dérivée $H_0 \supset H_1 \supset \ldots \supset H_n \supset \ldots$ définie par $H_0 = H$ et pour $n \geq 0$, $H_{n+1} = [H_n, H_n]$ est finie, c'est-à-dire H_n est trivial pour un $n \geq 0$. En particulier, lorsque H_2 est trivial, on dit que H est métabélien.

Exemple I-0. Le sous-groupe $\mathcal{H}_1 = \{ax/(1+bx);\ a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}\}$ de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$ est métabélien. Plus généralement, toute ramification $\mathcal{H}_p = \{ax/(1+bx^p)^{1/p};\ a \in \mathbb{C}^*,\ b \in \mathbb{C}\}$ de H_1 par $x \longrightarrow x^p$ est encore métabélienne ($p \in \mathbb{N}^*$).

Proposition I-1. *Soit H un sous-groupe résoluble non abélien de* $\mathrm{Diff}(\mathbb{C}, 0)$. *Alors H est métabélien et formellement conjugué à un sous-groupe de $\mathcal{H}_p$ pour un entier $p \in \mathbb{N}^*$ unique.*

Ce résultat est énoncé à la fin de [**C,M**]. Nous proposons ici une démonstration; le lecteurs pourra trouver d'autres preuves dans [**N**], [**E,I,S,V**] ou [**L**]; enfin, un analogue réel a récemment été montré dans [**G**].

Rappelons que tout élément tangent à l'identité de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ s'écrit dans une bonne coordonnée formelle $\exp(tX_{p,\lambda})$ où $t \in \mathbb{C}$ et $X_{p,\lambda}$ est le champs $[x^{p+1}/(1+\lambda x^p)]\frac{\partial}{\partial x}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Par exemple, les éléments de $\mathcal{H}_p$ s'écrivent $a \cdot \exp(tX_{p,0})$, $a \in \mathbb{C}^*$, $t \in \mathbb{C}$.

Pour démontrer la proposition, on a besoin du:

Lemme [C,M]. *Soient g un élément de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ et $\mu \in \mathbb{C}^*$. Alors $g^* \exp(t \cdot X_{p,\lambda}) = \exp(t \cdot \mu \cdot X_{p,\lambda})$ si et seulement si on est dans l'une ou l'autre des situations suivantes:*

(i) $\mu = 1$ et $g = a \cdot \exp(sX_{p,\lambda})$ où $s \in \mathbb{C}$ et a racine $p^{\text{ième}}$ de 1,

(ii) $\mu \neq 1$, $\lambda = 0$ et $g = a \cdot \exp(sX_{p,0})$ où $s \in \mathbb{C}$ et a racine $p^{\text{ième}}$ de μ.

Preuve de la proposition I-1. On note $H_d \subset \ldots \subset H_1 \subset H_0 = H$ la suite dérivée, H_d abélien non trivial et $d \geq 1$. Soit $h \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{C},0}$ un élément de H_d; il est tangent à l'identité et s'écrit $h = \exp(t_h X_{p,\lambda})$ pour un bon choix de coordonnée formelle, $t_h \neq 0$.

Si $g \in H$ commute avec h, d'après le lemme,

$$g = e^{2i\pi k/p} \cdot \exp(t_g X_{p,\lambda}).$$

En particulier, $H_d = \exp(\Lambda X_{p,\lambda})$ où Λ est un sous-groupe additif de $\mathbb{C}$.

Remarquons que si tous les éléments de H_{d-1} commutaient à h, d'après le lemme, H_{d-1} serait abélien, ce que l'on a exclu. Soit $g \in H_{d-1} \backslash H_d$ tel que $g^{-1}hg = h_0 h$ pour un $h_0 \in H_d$ non trivial; on a:

$$g^* \exp(t_h X_{p,\lambda}) = \exp((t_h + t_0)X_{p,\lambda}) \text{ où } t_0 = t_{h_0} \in \Lambda.$$

D'après le lemme, $\lambda = 0$ et $g = a \cdot \exp(tX_{p,0})$ avec $a^p = 1 + t_0/t_h$. En particulier, $a \neq 1$ et $d = 1$. Visiblement, H est un sous-groupe de $\mathcal{H}_p$ dans cette coordonnée formelle. □

Nous allons voir que, dans la plupart des cas, la conjugaison de la proposition I-1 est en fait analytique:

Théorème I-2 ([C,M]). *Un sous-groupe H non abélien de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ est rigide si et seulement si le sous-groupe des éléments de H tangents à l'identité n'est pas monogène (i.e. cyclique).*

Exemple I-3. On note $\mathcal{H}$-cusp l'ensemble des sous-groupes H de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ engendrés par deux éléments h_1 et h_2 de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ d'ordre

3 et 2 respectivement:

$$H = \langle h_1, h_2 \rangle, h_1, h_2 \in \mathrm{Diff}(\mathbb{C},0), h_1^3 = h_2^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C},0} \text{ avec } h_1, h_2 \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{C},0}.$$

Lemme. *Un élément $H = \langle h_1, h_2 \rangle$ de $\mathcal{H}$-cusp est résoluble si et seulement si $(h_1 \circ h_2)^6 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C},0}$.*

Ce lemme a été montré indépendemment dans **[E,I,S,V]**.

Preuve. Le groupe H est résoluble si et seulement s'il est métabélien. On vérifie que le premier groupe dérivé H_1 est engendré par les $[h_1^n, h_2^m], n, m \in \mathbb{Z}$; par suite, H_1 est engendré par $[h_1, h_2]$ et $[h_1^2, h_2]$. Donc H est métabélien si et seulement si $[[h_1, h_2], [h_1^2, h_2]]$ est trivial, c'est-à-dire $(h_1 \circ h_2)^6 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C},0}$. □

Soit H un élément de $\mathcal{H}$-cusp résoluble; deux cas se présentent:

1) H est abélien; H est alors fini et donc linéarisable i.e. analytiquement conjugué au groupe engendré par la rotation d'angle $2\pi/6$: $H \overset{an.}{\sim} \langle e^{2i\pi/6} \cdot x \rangle$;

2) H n'est pas abélien; dans ce cas, H est formellement conjugué à un sous-groupe de $\mathcal{H}_p$:

$$H \overset{for.}{\sim} \langle jx/(1+b_1x^p)^{1/p}, -x/(1+b_2x^p)^{1/p} \rangle \text{ pour un } p \in \mathbb{N}, b_1, b_2 \in \mathbb{C};$$

dans cette coordonnée, on vérifie que

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1^3 = h_2^2 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C},0} \\ [h_1, h_2] \neq \mathrm{Id}_{\mathbb{C},0} \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} p \text{ n'est multiple ni de 2 ni de 3} \\ b_1/(1-(-1)^p) \neq b_2/(1-j^p); \end{array} \right.$$

dans ces conditions, quitte à conjuguer ce groupe par un élément adéquat de $\mathcal{H}_p$, on obtient:

$$H \overset{for.}{\sim} H_{\omega p} = \langle jx, -x/(1+x^p)^{1/p} \rangle, j = e^{2i\pi/3}.$$

Un calcul simple montre que le premier groupe dérivé $[H_{\omega p}, H_{\omega p}]$ n'est pas monogène:

$$H \overset{an.}{\sim} H_{\omega p} \text{ pour un } p \text{ non multiple de 2 ou de 3.}$$

On note $\mathcal{H}_r$-cusp le sous-ensemble des groupes résolubles non abéliens de $\mathcal{H}$-cusp. Le degré de ramification p détermine la classe analytique de $H \in \mathcal{H}_r$-cusp, ainsi que sa classe topologique d'après le:

Lemme. *Les éléments de $\mathcal{H}_r$-cusp sont topologiquement rigides.*

Preuve. Soit H un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ topologiquement conjugué à $H_{\omega_{p_0}}$ par φ: $\varphi^*H = H_{\omega_{p_0}}$. Ainsi, $H = \langle h_1, h_2\rangle$ avec $jx = \varphi^* h_1$ et $-x/(1+x^{p_0})^{1/p_0} = \varphi^* h_2$. On a $h_1^3 = h_2^2 = (h_1h_2)^6 = \mathrm{Id}_{\mathbb{C},0}$ et par suite $H \in \mathcal{H}_r$-cusp: H est analytiquement conjugué à un des groupes H_{ω_p}. Comme $[h_1, h_2]$ est topologiquement conjugué à $[jx, -x/(1+x^{p_0})^{1/p_0}]$, d'après Camacho [**C**], $p = p_0$. □

Notons $\mathcal{H}_r$-cusp / $\overset{an.}{\sim}$ (resp. $\mathcal{H}_r$-cusp / $\overset{top.}{\sim}$) le quotient de $\mathcal{H}_r$-cusp par la relation d'équivalence induite par les conjugaisons analytiques (resp. topologiques). On peut résumer tout ce qui précède par:

Proposition I-4. *$\mathcal{H}_r$-cusp / $\overset{an.}{\sim}$ = $\mathcal{H}_r$-cusp / $\overset{top.}{\sim}$. Une famille de représentants est donnée par: $H_{\omega_p} = \langle jx, -x/(1+x^p)^{1/p}\rangle$ où $p \in \mathbb{N}\backslash(2\mathbb{N}\cup 3\mathbb{N})$.*

II. Courbes généralisées non dicritiques attachées à un cusp

Rappelons que $\mathcal{F}_\omega \in \Sigma$ se désingularise par un morphisme $\prod: M_{,D} \to \mathbb{C}^2_{,0}$ obtenu par composition d'un nombre fini d'éclatements ponctuels ([**M,M**]), où D désigne le diviseur exceptionnel: $D = \prod^{-1}(0)$. On note $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ l'éclaté strict de $\mathcal{F}_\omega$.

Définition II-1. Un élément $\mathcal{F}_\omega$ de Σ est appelé courbe généralisée non dicritique si après désingularisation de $\mathcal{F}_\omega$

(i) chaque composante du diviseur exceptionnel est une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$;

(ii) toute singularité de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ a deux valeurs propres non nulles.

Cette notion a été introduite dans [**C,L,S**] et vient généraliser les fibrations de Milnor; on trouve notamment dans le même article les propriétés suivantes. Le procédé de désingularisation de $\mathcal{F}_\omega$ est le même que celui de ses séparatrices (qui sont en nombre fini). L'ordre de ω est le même que celui de la fibration de Milnor associée aux séparatrices de $\mathcal{F}_\omega$: si $f_1, \dots, f_n$ sont les équations réduites des séparatrices alors

$$\mathrm{Ord}(\omega) = \mathrm{Ord}(d(f_1\dots f_n)) = (\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Ord}(f_j)) - 1.$$

Si un élément $\mathcal{F}_{\omega_1}$ de Σ est topologiquement conjugué à une courbe généralisée non dicritique $\mathcal{F}_{\omega_0}$, $\mathcal{F}_{\omega_1}$ est aussi une courbe généralisée non

dicritique et l'homéomorphisme de conjugaison échange les séparatrices de $\mathcal{F}_{\omega_0}$ avec celles de $\mathcal{F}_{\omega_1}$.

Nous allons donner une brève description des courbes généralisées (non dicritiques) ayant le cusp comme unique séparatrice. Pour cela, on introduit l'ensemble Σ-cusp des éléments de Σ analytiquement conjugués aux feuilletages $\mathcal{F}_\omega$ définis par $\omega = d(y^2+x^3) + g(x,y)(3ydx - 2xdy)$ où $g \in \mathcal{O}_2$, $g(0,0) = 0$. Par exemple, lorsque $g \equiv 0$, on retrouve la fibration de Milnor du cusp.

Le feuilletage $\mathcal{F}_\omega \in \Sigma$-cusp se désingularise après trois éclatements ponctuels $y = t_1x$, $x = t_1t_2$ et $t_1 = t_2t_3$:

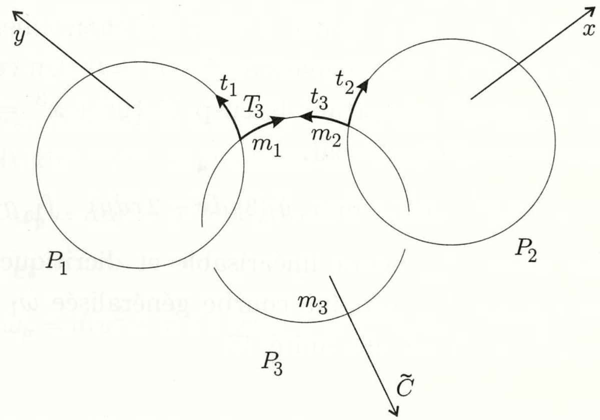

Figure 1

Le diviseur exceptionnel est l'union de trois projectifs P_1, P_2 et P_3. Dans la carte (t_2, t_3), l'éclaté strict $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ est défini par la forme:

$$\tilde{\omega} = (6+6t_3)t_3dt_2 + [3+4t_3 - \frac{1}{t_2}g(t_2^3, t_3^2)]t_2dt_3.$$

Le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ a trois singularités: $m_1 = P_1\cap P_3$, $m_2 = P_2 \cap P_3$ et $m_3 = \tilde{C}\cap P_3$ où $\tilde{C}$: $\{t_3+1 = 0\}$ est le transformé strict par $\prod: M_{,D} \to \mathbb{C}^2_{,0}$ du cusp C: $\{y^2+x^3 = 0\}$. Le feuilletage $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$ est défini au voisinage de ces points par des 1-formes dont le 1-jet s'écrit respectivement:

$$3T_3dt_1 + t_1dT_3,\ 2t_3dt_2 + t_2dt_3 \text{ et } 6(t_3+1)dt_2 + t_2d(t_3+1).$$

Ainsi $\mathcal{F}_\omega$ est une courbe généralisée non dicritique et, comme on l'a dit plus haut, a même désingularisation que son unique séparatrice, le cusp $C\colon \{y^2+x^3=0\}$.

Proposition II-2. *L'ensemble Σ-cusp est stable par conjugaisons topologiques: si $\mathcal{F}_{\omega_1} \in \Sigma$ est topologiquement conjugué à un élément $\mathcal{F}_{\omega_0}$ de Σ-cusp, alors $\mathcal{F}_{\omega_1} \in \Sigma$-cusp. De plus, Σ-cusp est exactement l'ensemble des courbes généralisées non dicritiques ayant un cusp comme unique séparatrice.*

Preuve. Comme $\mathcal{F}_{\omega_0}$ est une courbe généralisée non dicritique, il en est de même de $\mathcal{F}_{\omega_1}$ [**C,L,S**]. De plus, $\mathcal{F}_{\omega_1}$ possède une unique séparatrice C_1 topologiquement conjuguée au cusp C_0. Comme celui-ci est topologiquement rigide ([**Ce,S**], p. 231), quitte à faire un changement de coordonnées analytiques, C_1 a pour équation $y^2+x^3=0$. Un calcul simple montre qu'un feuilletage admettant le cusp $C\colon \{y^2+x^3=0\}$ comme séparatrice peut être représenté par:

$$\omega_1 = f_1(x,y)\cdot d(y^2+x^3) + g_1(x,y)(3ydx-2xdy) \qquad f_1, g_1 \in \mathcal{O}_2.$$

Si g_1 était une unité, $\mathcal{F}_{\omega_1}$ serait linéarisable et dicritique, par suite, $g_1(0,0)=0$ et comme $\mathcal{F}_{\omega_1}$ est une courbe généralisée ω_1 est d'ordre $1=\mathrm{Ord}(d(y^2+x^3))$ et f_1 est une unité. □

III. Holonomie projective d'un élément de Σ-cusp

Le projectif P_3 privé des trois singularités m_1, m_2 et m_3 est une feuille de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$. On appellera holonomie projective son groupe d'holonomie H_ω calculé sur une transversale, par exemple $\{t_3=\text{constante}\}$. C'est un sous-groupe de $\mathrm{Diff}(\mathbb{C},0)$ qui n'est bien défini qu'à conjugaison analytique près. Si h_1 (resp. h_2) désigne l'holonomie du germe de P_3 en m_1 (resp. en m_2), on a $H_\omega = \langle h_1, h_2\rangle$.

Lemme III-1. *$H_\omega \in \mathcal{H}$-cusp.*

Preuve. Comme $P_1\backslash\{m_1\}$ est une feuille simplement connexe de $\widetilde{\mathcal{F}}_\omega$, son holonomie est triviale. D'après Mattéi et Moussu [**M,M**], le feuilletage est linéarisable au voisinage de m_1: il est défini par $3T_3'dt_1' + t_1'dT_3'$ dans un bon système de coordonnées locales et $h_1^3=\mathrm{Id}_{\mathbb{C},0}$. De la même manière, on montre que $h_2^2=\mathrm{Id}_{\mathbb{C},0}$. □

L'holonomie projective nous fournit une application Σ-cusp $/ \overset{an.}{\sim} \longrightarrow \mathcal{H}$-cusp $/ \overset{an.}{\sim}$. D'après Cerveau et Moussu [**C,M**] cette flèche est injective. Elle est surjective d'après Lins Neto [**LN**]. On a une bijection canonique Σ-cusp $/ \overset{an.}{\sim} \overset{\sim}{\longrightarrow} \mathcal{H}$-cusp $/ \overset{an}{\sim}$.

Par exemple, dire que H_ω est abélien, $H_\omega \overset{an.}{\sim} \langle e^{2i\pi/6}\cdot x\rangle$, c'est encore dire que $\mathcal{F}_\omega$ est la fibration de Milnor du cusp (définie par $d(y^2+x^3)$ dans une bonne coordonnée). On dit encore que $\mathcal{F}_\omega$ admet y^2+x^3 comme intégrale première et un tel feuilletage est topologiquement rigide. On note Σ_r-cusp le sous-ensemble de Σ-cusp dont les éléments sont à holonomie projective résoluble non abélienne:

$$\Sigma_r\text{-cusp} = \{\mathcal{F}_\omega \in \Sigma\text{-cusp};\, H_\omega \in \mathcal{H}_r\text{-cusp}\}.$$

On récupère la bijection canonique: Σ_r-cusp $/ \overset{an.}{\sim} \overset{\sim}{\longrightarrow} \mathcal{H}_r$-cusp $/ \overset{an.}{\sim}$.

Théorème III-2. *Soit $\mathcal{F}_\omega \in \Sigma_r$-cusp. Alors $H_\omega \overset{an.}{\sim} H_{\omega_p} = \langle -x, jx/(1+x^p)^{1/p}\rangle$, $p\in\mathbb{N}\backslash(2\mathbb{N}\cup 3\mathbb{N})$, si et seulement si $\mathcal{F}_\omega \overset{an.}{\sim} \mathcal{F}_{\omega_p}$, où*

$$\omega_p = d(y^2+x^3) + (y^2+x^3)^n(3ydx-2xdy)$$

si $p=6n-1$, et

$$\omega_p = d(y^2+x^3) + x(y^2+x^3)^n(3ydx-2xdy),$$

si $p=6n+1$.

Preuve. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $p=6n-1$. Dans la carte (t_2,t_3), $\widetilde{\mathcal{F}}_{\omega_{6n-1}}$ est défini par:

$$(6+6t_3)t_3dt_2 + [3+4t_3 - t_2^{6n-1}(t_3^{3n}+t_3^{4n})]t_2dt_3.$$

Cette forme est le "pull-back" par la ramification $t_2 \longmapsto t_2^{6n-1}$ de l'équation de Ricatti:

$$\frac{6}{6n-1}(1+t_3)t_3dt_2 + [3+4t_3 - t_2(t_3^{3n}+t_3^{4n})]t_2dt_3.$$

Ainsi l'holonomie de $[t_2=0]$ avant ramification est un groupe d'homographies et $H_{\omega_{6n-1}}$ est un sous-groupe de $\mathcal{H}_{6n-1}$. Il reste à vérifier que $H_{\omega_{6n-1}}$ n'est pas abélien, c'est-à-dire que $\mathcal{F}_{\omega_{6n-1}}$ n'admet pas d'intégrale première holomorphe. En ramifiant ω_{6n-1} par $(x,y)\longmapsto(x^2,y^3)$ on obtient

$$d(y^6+x^6) + 6(y^6+x^6)^n xy^2(ydx-xdy)$$

qui admet une intégrale première si et seulement si elle définit le même feuilletage que $d(y^6+x^6)+(y^6+x^6)dW$ oú W est une unité de $\mathcal{O}_2$. Si on cherche à résoudre formellement en W

$$[d(y^6+x^6)+6(y^6+x^6)^n xy^2(ydx-xdy)]\wedge[d(y^6+x^6)+(y^6+x^6)dW]=0$$

c'est-à-dire

$$y^5\frac{\partial W}{\partial x}-x^5\frac{\partial W}{\partial y}-6(y^6+x^6)^n xy^2\left(1+x\frac{\partial W}{\partial x}-y\frac{\partial W}{\partial y}\right)=0,$$

on trouve une obstruction pour la composante homogène d'ordre $6n-1$ de W (voir détail des calculs dans [**L**]). La preuve est la même pour $p=6n+1$. □

Le lemme suivant va nous permettre de caractériser topologiquement les éléments de Σ_r-cusp:

Lemme III-3. *Soit $\mathcal{F}_\omega \in \Sigma$-cusp. Alors H_ω est résoluble si et seulement si l'holonomie du cusp $C\colon\{y^2+x^3=0\}$ est triviale.*

Preuve. L'holonomie du germe de P_3 en m_3 est représentée par $h_1\circ h_2$. Le groupe H_ω est résoluble si et seulement si $h_1\circ h_2$ est périodique (I-3, III-1). D'après Mattéi et Moussu [**M,M**], le feuilletage est linéarisable au voisinage de m_3: il est défini par $6t_3'dt_2'+t_2'dt_3'$ dans un bon système de coordonnées locales (II) et $\widetilde{C}$ n'a pas d'holonomie. □

Théorème III-4. *L'ensemble Σ_r-cusp est stable par conjugaisons topologiques: si $\mathcal{F}_{\omega_1}\in\Sigma$ est topologiquement conjugué à un élément $\mathcal{F}_{\omega_0}\in\Sigma_r$-cusp, alors $\mathcal{F}_{\omega_1}\in\Sigma_r$-cusp.*

Preuve. Soit φ un homéomorphisme qui envoie les feuilles de $\mathcal{F}_{\omega_0}$ sur celles de $\mathcal{F}_{\omega_1}$. D'après (II-2), $\mathcal{F}_{\omega_1}\in\Sigma_r$-cusp: on peut supposer sans perte de généralité que

$$\omega_1=d(y^2+x^3)+g_1(x,y)(3ydx-2xdy),\qquad g_1(0,0)=0.$$

En particulier, φ laisse invariant le cusp $C\colon\{y^2+x^3=0\}$ et va induire une conjugaison topologique entre l'holonomie du cusp en tant que séparatrice de $\mathcal{F}_{\omega_0}$ et l'holonomie du cusp en tant que séparatrice de $\mathcal{F}_{\omega_1}$. D'après (III-3), H_{ω_1} est résoluble; si H_{ω_1} était abélien, $\mathcal{F}_{\omega_1}$

et $\mathcal{F}_{\omega_0}$ seraient topologiquement et donc analytiquement conjugués à la fibration de Milnor, ce que l'on a exclu: $H_{\omega_1}\in\Sigma_r$-cusp. □

En fait, on a mieux:

Proposition III-5. *Soient $\mathcal{F}_{\omega_1}\in\Sigma$ et $\mathcal{F}_{\omega_0}\in\Sigma_r$-cusp. On suppose qu'une feuille de $\mathcal{F}_{\omega_1}$ est envoyée sur une feuille de $\mathcal{F}_{\omega_0}$ autre que le cusp par un germe d'homéomorphisme φ de $\mathbb{C}^2_{,0}$. Alors si ω_1 est d'ordre 1, $\mathcal{F}_{\omega_1}\in\Sigma_r$-cusp.*

Preuve. Soit L_0 une feuille de $\mathcal{F}_{\omega_0}$ autre que la séparatrice C_0. On a $\overline{L}_0=L_0\cup C_0$; en effet, toute (pseudo-)orbite du groupe d'holonomie projective (III) adhère à 0: il s'en suit que L_0 adhère au cusp C_0; le même argument nous dit que $L_0\cup C_0$ est fermé (pour plus de détails, voir [**L**]). Maintenant, soit L_1 la feuille de $\mathcal{F}_{\omega_1}$ envoyée sur L_0. Alors $\overline{L}_1\backslash L_1$ est une union de feuilles homéomorphes à $C_0=\overline{L}_0\backslash L_0$: $\overline{L}_1\backslash L_1$ est une séparatrice analytiquement conjuguée au cusp $C\colon\{y^2+x^3=0\}$ (rigidité topologique du cusp). Remarquons que $\mathcal{F}_{\omega_1}$ n'est pas linéarisable dicritique: L_1 n'est pas fermée. En reprenant le raisonnement de la preuve précédente (II-2) on montre que $\mathcal{F}_{\omega_1}\in\Sigma$-cusp.

Comme l'holonomie du cusp C_0 est triviale, la feuille L_0 revêt trivialement C_0 (i.e. sans monodromie) et dehors d'un voisinage de 0; il en est de même pour L_1 et C_1; par suite l'holonomie du cusp C_1 est triviale: $\mathcal{F}_{\omega_1}\in\Sigma_r$-cusp. □

Question 1. Les éléments de Σ_r-cusp sont-ils topologiquement rigides?

D'après III-2 et III-4, c'est le cas si et seulement si le degré de ramification p de l'holonomie projective est un invariant topologique pour les éléments de Σ_r-cusp. La proposition I-4 nous amène à la:

Question 2. La conjugaison topologique entre deux éléments de Σ_r-cusp entraîne-telle celle de leurs holonomies projectives ([**Ce,S**])?

Ce genre de problème reste actuellement ouvert, et c'est pour cela que l'on est amené à utiliser des familles à type topologique constant.

IV. Familles à type topologique constant

Définition IV-1. Une famille $(\mathcal{F}_{\omega_s})$ d'élements de Σ, $s\in[0,1]$, est dite à

type topologique constant s'il existe une famille (φ_s) de germes d'homéomorphisme de $C^2_{,0}$ telle que:
(i) pour tout s, φ_s conjugue $\mathcal{F}_{\omega_s}$ à $\mathcal{F}_{\omega_0}$;
(ii) $(s,x,y) \longmapsto \varphi_s(x,y)$ est définie continue sur $[0,1] \times \mathbb{C}^2_{,0}$;
(iii) $\varphi_0 = \mathrm{id}_{C^2_{,0}}$.

Théorème IV-2. *Soit $(\mathcal{F}_{\omega_s})$ une famille d'éléments de Σ à type topologique constant définie par une famille (ω_s) d'élements de Ω^1_2 dépendant analytiquement de $s \in [0,1]$. Si $\mathcal{F}_{\omega_0} \in \Sigma_r$-cusp, alors $(\mathcal{F}_{\omega_s})$ est à type analytique constant: pour tout s, $\mathcal{F}_{\omega_1} \overset{an.}{\sim} \mathcal{F}_{\omega_0}$.*

Preuve. Soit $p(s)$ le degré de ramification de H_{ω_s} D'après (i), $\mathcal{F}_{\omega_s} \in \Sigma_r$-cusp; sa classe analytique est déterminée par $p(s)$. Le lemme suivant nous permet de conclure.

Lemme. *L'application* $[0,1] \to \mathbb{N}$; $s \longmapsto p(s)$ *est constante.*

Preuve. 1$^{\text{ère}}$ étape. L'application $s \longmapsto p(s)$ est semi-continue supérieurement. Les coefficients du développement en série de ω_s, et donc des éléments de H_{ω_s}, dépendent analytiquement de s: par exemple,

$$h_s(x) = [h_{1,s}, h_{2,s}](x) = x + a_1(s)x^2 + a_2(s)x^3 + \ldots$$

où $s \longmapsto a_j(s)$ est continue pour tout $j \geq 1$. Si $s_0 \in [0,1]$, $p(s_0)$ est défini par:

$$a_1(s_0) = \ldots = a_{p(s_0)-1}(s_0) = 0 \text{ et } a_{p(s_0)}(s_0) \neq 0.$$

Ainsi, $a_{p(s_0)}$ reste non nul au voisinage de s_0; par suite, $p(s) \leq p(s_0)$ pour s proche de s_0.

2$^{\text{ème}}$ étape. L'application $s \longmapsto p(s)$ est semi-continue inférieurement. Supposons le contraire (par exemple au point $s = 0$). Considérons $h_s = x + a_1(s)\cdot x^2 + a_2(s)\cdot x^3 + \ldots$ avec $a_1(0) = \ldots = a_{p(0)-1}(0) = 0$ et $a_{p(0)}(0) \neq 0$; il existe un entier $q < p(0)$ tel que 0 adhère à $p^{-1}(q)$. Choisissons le plus petit q vérifiant ceci: il existe $s_0 \in]0,1]$ tel que, pour $s_0 \in]0, s_0[$, $a_1(s) = \ldots = a_{p-1}(s) = 0$ et $a_q(s) \neq 0$. On se place sur un disque $D(0,\varepsilon)$ sur lequel h_s est bien défini pour tout $s \in [0, s_0[$. La fonction $h_0 - \mathrm{Id}$ a un zéro d'ordre $p(0)+1$ à l'origine. Quitte à diminuer s_0, $h_s - \mathrm{Id}$ admet encore $p(0)+1$ racines dans $D(0,\varepsilon)$ pour $s \in [0, s_0[$ (théorème de

Rouché). En particulier, $h_s - \mathrm{Id}$ admet au moins une racine x_s autre que l'origine dans $D(0,\varepsilon)$, x_s dépendant analytiquement de $s \in [0, s_0[$, $x_0 = 0$. Comme $h_s(x_s) = x_s$, il existe un cycle γ_s passant par ce point et contenu dans une feuille de $\mathcal{F}_{\omega_0}$. Remarquons que le germe en x_s de $h_s - \mathrm{Id}$ ne peut être nul; par suite le lacet γ_s a une holonomie non triviale pour $\mathcal{F}_{\omega_s}$. On considère maintenant le cycle $\varphi_s(\gamma_s)$ de $\mathcal{F}_{\omega_0}$. Quitte à le pousser par une homotopie dans la feuille qui le contient, $\varphi_s(\gamma_s)$ se projette sur le projectif suivant la fibration $\{t_3 = \text{constante}\}$. Par suite, $\varphi_s(\gamma_s)$ est le relevé d'un lacet de $P_3 \backslash \{m_1, m_2, m_3\}$ et correspond à un point fixe γ_s d'un élément non trivial de H_{ω_0}. Comme φ_s tend vers l'identité quand $s \to 0$, le lacet $\varphi_s(\gamma_s)$ tend vers $0 \in \mathbb{C}^2$ quand $s \to 0$. Par suite, y_s tend vers $0 \in D(0,\varepsilon)$ quand $s \to 0$. En particulier, y_s n'est pas constant et dépend continûment de s. On obtient ainsi une infinité non dénombrable de tels points fixes. Ceci n'est pas possible, car H_{ω_0} est dénombrable et chacun de ses éléments autre que l'identité possède un nombre fini de points fixes dans $D(0,\varepsilon)$. □□

Notations

$\Sigma, \omega, \mathcal{F}_\omega$	0
H_ω	0, III
$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_p$	I
$\mathcal{H}$-cusp, $\mathcal{H}_r$-cusp	I-3
H_{ω_p}	I-3, III-2
Σ-cusp	II-1
Σ_r-cusp	III-1

Bibliographie

[C] C. Camacho: *On the local structure of conformal mappings and holomorphic vector fields in* $\mathbb{C}^2$. Société Math. de France. Astérisque 59-60 (1978), p. 83-94.

[C, S] C. Camacho, P. Sad: *Invariant varieties through singularities of holomorphic vector fields.* Annals of Math. 115 (1982), p. 579-595.

[C, LN, S] C. Camacho, A. Lins Neto, P. Sad: *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields.* Journal of Differential Geometry 20 (1984), p. 143-174.

[C, M] D. Cerveau, R. Moussu: *Groupes d'automorphismes de* $\mathbb{C}, 0$ *et équations différentielles* $ydy + \ldots = 0$. Bulletin de la Société Math. de France 116 (1988), p. 459-488.

[Ce, S] D. Cerveau, P. Sad: *Problèmes de modules pour les formes différentielles singulières dans le plan complexe.* Comment. Math. Helvetici 61 (1986) 222-253.

[E, I, S, V] P. M. Elizarov, Yu. S. I. Yashenko, A. A. Shecherbakov, S. M. Voronin: *Finitely generated groups of germs of one dimensional conformal mappings and invariants for complex singular points of analytic foliations of the complex plane.* Advances in Soviet Mathematics. Volume 14 (1993).

[G] E. Ghys: *Sur les groupes engendrés par des difféomorphismes proches de l'identité.* Prépublication de l'E.N.S. Lyon (sept. 1993).

[LN] A. Lins Neto: *Construction of singularities of holomorphic vector fields and foliations in dimension two.* Journal of differential geometry 26 (1987), p. 1-31.

[L] F. Loray: *Feuilletages holomorphes à holonomie résoluble.* Thèse (janv. 1994).

[M, M] J.-F. Mattei, R. Moussu: *Holonomie et intégrales premières.* Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure $4^{ème}$ série, t. 13 (1980), p. 469-523.

[M] R. Moussu: *Holonomie évanescente des équations différentielles dégénérées transverses.* Singularities and Dynamical Systems. S. N. Pneuvmatikos (ed.) North Holland (1985), p. 161-173.

[N] I. Nakai: *Séparatrix for non solvable dynamics on* $\mathbb{C}, 0$. Prépublication.

F. Loray et R. Meziani
IRMAR
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042, Rennes cedex
France