Nova Série
BOLETIM
DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 25, N. 2, 223-235

Complétude des Métriques Lorentziennes de $\mathbb{T}^2$ et Difféomorphismes du Cercle

Yves Carrière et Luc Rozoy

Abstract. Let $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$ the foliations by the null geodesics of some lorentzian metric g on the torus $\mathbb{T}^2$. We analyse how geodesic completeness properties of g are related to the dynamics of $\mathcal{F}$ and $\mathcal{G}$.

0. Introduction

L'étude de la complétude des géodésiques d'une variété lorentzienne compacte a fait l'objet de quelques articles récents [**GL**],[**K**],[**L1-2**] et [**RS1-2**]. Dans [**RS1**], Romero et Sánchez donnent différents exemples de métriques lorentziennes incomplètes sur le tore $\mathbb{T}^2$. Ils conjecturent que la complétude des géodésiques de lumière (*i.e. la nulcomplétude*) d'une variété lorentzienne compacte entraîne sa complétude. Cette conjecture est vraie dans le cas d'une variété lorentzienne localement symétrique [**L1**]. Nous nous intéressons ici à cette question sur $\mathbb{T}^2$ et nous retrouvons au passage une façon de décrire topologiquement les exemples donnés dans [**RS1**] (*cf.* 2-1). Quitte à se placer dans un revêtement à deux feuillets, les géodésiques de lumière d'une métrique lorentzienne g (qui sera toujours supposée C^2) de $\mathbb{T}^2$ forment deux feuilletages transverses, *les feuilletages de lumière*, que nous noterons toujours $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.

Dans le cas particulier où $\mathcal{G}$ est formé de cercles, le feuilletage $\mathcal{F}$ est obtenu par suspension d'un difféomorphisme du cercle φ (de classe C^2). Notre résultat essentiel est que, dans ce cas particulier, g est nulcomplète si et seulement si φ est C^0-conjugué à une rotation (théorème 2-1) et g est complète si la conjugaison est C^1 (théorème 3-2). Un théorème

Received 4 March 1994.

remarquable d'Herman [**H**] assure que pour presque tout nombre de rotation de φ la C^0-conjugaison est en fait de classe C^1. On obtient ainsi que, dans le cas particulier où $\mathcal{G}$ est formé de cercles, la conjecture de Romero et Sánchez est "génériquement vraie" au sens de la théorie de la mesure. Cependant, il nous semble qu'une métrique g correspondant à un exemple d'Arnold (*cf.* [**H**] et [**MS**]) de difféomorphisme φ qui est C^0 mais non C^1-conjugué (ni même absolument continûment conjugué) à une rotation pourrait être un bon candidat pour un contre-exemple à cette conjecture.

Dans le cas général, nous montrons que si g est nulcomplète, alors $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont C^0-linéarisables et qu'on a une réciproque partielle en remplaçant C^0 par C^1-linéarisables (2-2). Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont C^2-linéarisables, alors g est complète. Par [**C**] ou [**FGH**], c'est le cas si g est (globalement) conformément plate (théorème 3-1 déjà démontré dans [**RS2**]).

1. Généralités

On se réfèrera pour tout ce § au livre de O'Neill [**O**].

1.1 Equations des géodésiques

Soit (M,g) une variété lorentzienne de dimension 2 qui sera toujours supposée de classe au moins C^2. Ecrivons $g = udx^2 + vdxdy + wdy^2$ dans des coordonnées locales (x,y). Une géodésique de g est une courbe paramétrée $\sigma(t) = (x(t),y(t))$ rendant critique l'intégrale d'"énergie" $\int g(\sigma')\,dt$ où $\sigma' = d\sigma/dt$. Cette condition est satisfaite en demandant que

$$L = g(\sigma') = u(x,y)x'^2 + v(x,y)x'y' + w(x,y)y'^2$$

vérifie les équations d'Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial x'} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0 \qquad (EL)$$

Un paramètre t résultant de ces équations est dit *affine* et si $I =]a,b[$ $(a < b)$, l'intervalle de paramétrisation de σ, est maximal, on dit que σ est une *géodésique maximale.* Si $I =]-\infty,+\infty[$, on dit que σ est *complète.* La métrique g est (géodésiquement) *complète* si toute

géodésique maximale est complète. Tout au long de σ, on a $g(\sigma') = c = Cte$; si $c = 0$, on dit que σ est une *géodésique de lumière* (ou *nulle* ou *isotrope*). La métrique g est dite *nulcomplète* si toute géodésique maximale de lumière est complète.

1.2 Relation avec une métrique riemannienne auxiliaire g_R

Soit (M,g) une variété lorentzienne et σ une géodésique maximale. On notera s un paramètre de σ donné par la longueur d'arc au sens d'une métrique riemannienne auxiliaire g_R sur M et I_R l'intervalle de paramétrisation correspondant. On continuera cependant de noter $\sigma' = d\sigma/dt$ la dérivée de σ par rapport à un paramètre affine t.

Proposition. *Si M est compacte alors:*
(i) $I_R =]-\infty,+\infty[$.
(ii) *Si $g_R(\sigma')$ est borné, alors σ est complète.*

Démonstration.
(i) Soit S_RM le fibré unitaire tangent de (M,g_R). Les géodésiques maximales de g se relèvent dans la variété compacte S_RM pour donner un feuilletage de dimension 1 dont les feuilles pour la métrique relevée de g_R se paramètrent par longueur d'arc de $-\infty$ à $+\infty$. Même chose en reprojetant sur M.
(ii) L'intervalle (maximal) de paramétrisation affine de σ étant toujours noté $I =]a,b[$ et $t_0 \in I$ étant la valeur du paramètre affine correspondant à $s = 0$, on a

$$b - t_0 = \int_0^{+\infty} \frac{ds}{g_R(\sigma')^{1/2}}$$

donc si $g_R(\sigma')$ est borné, $b = +\infty$. De même, $a = -\infty$. $\square$

1.3 Classe conforme d'une métrique lorentzienne de $\mathbb{T}^2$

Les directions de lumière d'une métrique lorentzienne g de $\mathbb{T}^2$ donnent deux feuilletages transverses $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. A un revêtement d'orientation près, il est possible de supposer, ce que nous ferons dans la suite, que ces deux feuilletages sont orientés (et donc aussi transversalement orientés). On dit qu'une métrique g_1 est *conforme* à g s'il existe un C^2-

difféomorphisme h de $\mathbb{T}^2$ tel que $h^* g_1 = kg$ où k est une fonction qui n'est a priori que C^1. On voit que se donner la classe conforme de g revient à se donner la paire $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ à C^2 conjugaison près. Nous allons voir que cette donnée, ou même celle plus faible de $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ à C^1 voire C^0 conjugaison près, contient une information sur les propriétés de complétude de g. Une première illustration de ceci réside dans la proposition bien connue qui suit.

Avant d'énoncer cette proposition, il convient de faire la remarque suivante, fondamentale pour le reste de cet article. Dire que la paire $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ est C^r conjuguée à un produit (ce qui est toujours vrai localement avec $r = 2$ puisque g est C^2), revient à dire que l'on peut choisir des coordonnées (x, y) définies globalement, que nous qualifierons de *canoniques*, dans lesquelles g a pour expression:

$$g = f(x, y)dxdy$$

avec f a priori de classe C^{r-1}. Si $r \geq 2$ les équations (EL) s'écrivent alors:

$$fx'' + \frac{\partial f}{\partial x}x'^2 = 0 \quad \text{et} \quad fy'' + \frac{\partial f}{\partial y}y'^2 = 0 \qquad (*)$$

et les équations des géodésiques de lumière sont $x' = 0$ ou $y' = 0$.

Proposition. *La complétude d'une géodésique de lumière ne dépend que de la classe conforme de g.*

Démonstration. Choisissons (x, y) des coordonnées canoniques locales (de classe C^2). Soit σ une géodésique de lumière, on peut supposer par exemple que $y' = 0$. On a alors $y = Cte = y_0$ et d'après la première équation de $(*)$: $f(x, y_0)x' = Cte \neq 0$. Par conséquent, si t est un paramètre affine de σ, on a:

$$dt = Cte\, f dx.$$

Maintenant soit $g_1 = kg$ une métrique conforme à g où k est une fonction de classe C^1 et > 0 sur $\mathbb{T}^2$. Soit t_1 un paramètre affine de σ pour g_1, on a de même: $dt_1 = Cte\, k f dx$ d'où $dt_1/dt = Cte\ k$ tout le long de σ.

Du fait que k est encadrée par des constantes > 0, on a le résultat. □

1.4 Un exemple incomplet: le tore de Clifton-Pohl

Soit $g = f(x, y)dxdy$ avec $f(x, y) = 1/(x^2 + y^2)$. La métrique lorentzienne g de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ainsi définie est invariante par homothéties.

Proposition. *Les géodésiques de lumière de g sont toutes incomplètes.*

Démonstration. Soit $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ une géodésique de lumière, elle est solution de $(*)$. Vérifions par exemple que σ est incomplète dans le cas où $y = y_0 = Cte$. Comme précédemment, si t est un paramètre affine, $dt = \alpha f dx$ où $\alpha = Cte \neq 0$. Si I est un intervalle maximal de paramétrisation et $t_0, t \in I$, on a alors:

$$t - t_0 = \alpha \int_{x_0}^{x} \frac{d\xi}{\xi^2 + y_0^2}$$

qui est forcément borné du côté où $|x|$ tend vers sa borne supérieure. □

Le tore de Clifton-Pohl est obtenu en quotientant $(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, g)$ par une homothétie. Il a toutes ses géodésiques de lumière (dont 4 sont fermées) incomplètes. Il faut observer que dans cet exemple, les feuilletages de lumière sont deux feuilletages de Reeb transverses.

2. Nulcomplétude

2.1 Cas où $\mathcal{G}$ est formé de cercles

On va se restreindre ici à l'étude de la nulcomplétude des métriques lorentziennes du tore $\mathbb{T}^2$ dont un des feuilletages de lumière, disons $\mathcal{G}$, est formé de cercles, $\mathcal{F}$ est alors obtenu par suspension d'un difféomorphisme du cercle φ.

Avec ces hypothèses, $\mathbb{T}^2$ s'écrit comme le quotient de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ par

$$\gamma\colon (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 \mapsto (x + 1, \varphi(y))$$

et la métrique a pour expression dans le cylindre $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$:

$$g = f(x, y)dxdy$$

où $f > 0$ qui n'est a priori que C^1 vérifie pour tout entier k:

$$f(x,y) = (\varphi^k)'(y) f(x+k, \varphi^k(y)) \tag{1}$$

Comme au § précédent, la complétude de la géodésique d'équation $x = x_0$, revient à la divergence des intégrales:

$$\int_0^{\pm\infty} f(x_0, e^{i\theta}) d\theta$$

qui est assurée puisque f a une borne inférieure > 0 sur $\{x_0\} \times \mathbb{S}^1$. Donc *les géodésiques de $\mathcal{G}$ sont toutes complètes.*

De même, la complétude de la géodésique d'équation $y = y_0$, revient à la divergence des intégrales:

$$\int_0^{\pm\infty} f(\xi, y_0) d\xi = \sum_{k=0}^{\pm\infty} (\varphi^{-k})'(y_0) \int_0^1 f(\xi, \varphi^{-k}(y_0)) d\xi$$

la deuxième expression étant obtenue grâce à un changement de variable et à l'équation d'invariance (1). Du fait que f est encadrée par des constantes > 0 sur $[0,1] \times \mathbb{S}^1$, ceci revient encore à la divergence des séries:

$$\psi^{\pm}(y_0) = \sum_{k=0}^{\pm\infty} (\varphi^{-k})'(y_0) \tag{2}$$

Rappelons qu'un intervalle J de $\mathbb{S}^1$ est dit *errant* par φ si tous ses itérés par φ sont disjoints. On désigne par λ la mesure de Lebesgue de $\mathbb{S}^1$.

Lemme. *Si J est errant, alors pour λ-presque tout $y \in J$, on a $\psi^{\pm}(y) < +\infty$.*

Démonstration. Si J est errant, les séries $\sum_{k=0}^{\pm\infty} \lambda(\varphi^k(J))$ sont convergentes. Comme elles s'obtiennent en intégrant $\psi^{\pm}$ sur J, on a le résultat. □

Si les géodésiques de $\mathcal{F}$ sont toutes complètes, par ce lemme, on est assuré qu'il n'y a aucun intervalle errant par φ et donc que φ est C^0-conjugué à une rotation (*cf.* [**G**] ou [**HH**]).

Réciproquement, dans le cas où le nombre de rotation ρ de φ est irrationnel, comme φ est de classe C^2, les séries (2) sont toujours divergentes par application de l'

Inegalité de Denjoy (*cf.* [**H**] ou [**MS**]). *Soit φ un difféomorphisme de $\mathbb{S}^1$ dont le logarithme de la dérivée a une variation totale $V < +\infty$. Alors si $\rho \notin \mathbb{Q}$ et q_n est la suite des dénominateurs des réduites de ρ, on a l'inégalité:*

$$e^{-V} \leq (\varphi^{q_n})' \leq e^V.$$

Si φ est périodique, le terme général des séries (2) est périodique, ce qui assure leur divergence. Au total, les géodésiques qui sont dans $\mathcal{F}$ sont toutes complètes si et seulement si φ est C^0 conjugué à une rotation. On a finalement le

Théorème. *La métrique g est nulcomplète si et seulement si φ est C^0-conjugué à une rotation.*

Remarquons pour finir que puisque les géodésiques de $\mathcal{G}$ sont toutes complètes, le lemme appliqué à un difféomorphisme φ de $\mathbb{S}^1$ avec un seul point fixe y_0 tel que $\varphi'(y_0) = 1$ permet de retrouver les exemples de métriques lorentziennes incomplètes sans géodésique fermée incomplète donnés par A. Romero et M. Sánchez [**RS1**].

2.2 Cas général

Nous allons généraliser une partie du § précédent en montrant le

Théorème. *Soit $(\mathbb{T}^2, g)$ un tore lorentzien avec g de classe C^2. Si g est nulcomplète, alors ses feuilletages de lumière sont C^0-linéarisables.*

Le lemme à démontrer est le suivant:

Lemme. *Si σ_0 est une géodésique de lumière fermée et attractive d'un côté, alors presque toute géodésique de lumière σ attirée par σ_0 est incomplète.*

Démonstration. On peut voir le demi-voisinage de σ_0 attiré par σ_0 comme étant le domaine $D = \{0 < x, 0 \leq y \leq y_0\} \subset \mathbb{R}^2$ quotienté par l'action de

$$\gamma(x,y) = (x+1, \varphi(y))$$

où maintenant φ n'est plus qu'une application avec $\varphi(y) < y$ si $0 < y \leq y_0$; l'axe Ox se projetant sur σ_0 et la métrique ayant dans D pour expression:

$$g = f(x,y)dxdy$$

où $f > 0$ vérifie l'équation d'invariance (1) mais uniquement pour les $k \geq 0$ puisque maintenant, seuls les itérés positifs de γ sont définis.

Comme au § précédent, la complétude de la géodésique d'équation $y = y_0$, implique la divergence de la série:

$$\psi(y_0) = \sum_{k=0}^{\infty} (\varphi^k)'(y_0) \tag{2'}$$

or les itérés de $J =]\varphi(y_0), y_0[$ par φ sont disjoints, donc la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda(\varphi^k(J))$$

est convergente. Comme elle s'obtient en intégrant ψ sur J, la somme de la série (2') converge pour presque tout $y_0 \in J$. $\square$

D'après ce lemme, si une métrique lorentzienne sur $\mathbb{T}^2$ est nul-complète alors ses feuilletages de lumière n'ont pas de composante de Reeb, ce qui d'après [**Kn**] (cf. [**Gl**]) implique qu'ils possèdent une section (une courbe fermée transverse coupant toutes les feuilles). Donc ces feuilletages sont obtenus par suspension de difféomorphismes de classe C^2 sans point périodique attractif d'un côté par une deuxième application du lemme. Un tel difféomorphisme est toujours soit périodique, soit C^0-conjugué à une rotation irrationnelle d'après le théorème de Denjoy (*cf.* [**H**], [**HH**], [**G**] ou [**MS**]). D'où le théorème.

Nous allons montrer une réciproque partielle au théorème:

Théorème. *Soit $(\mathbb{T}^2, g)$ un tore lorentzien avec g de classe C^2. Si les feuilletages de lumière $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont C^1-linéarisables, alors g est nul-complète.*

Démonstration. Supposons que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ soient C^1-linéarisables. Alors, la métrique g étant de classe C^2, les relevés de ces feuilletages dans le revêtement universel $\mathbb{R}^2$ de $\mathbb{T}^2$ sont C^2 conjugués à un produit et donc il y a des coordonnées canoniques globales (x, y) de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$. La métrique s'écrit alors $g = f(x,y)dxdy$ où $f > 0$ est de classe C^1. Le groupe fondamental Γ de $\mathbb{T}^2$ agissant sur $\mathbb{R}^2$ est un groupe

de difféomorphismes de la forme $\gamma(x,y) = (\varphi_1(x), \varphi_2(y))$. L'hypothèse de C^1-linéarisabilité de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ a pour conséquence que $\log \varphi_1'(x)$ et $\log \varphi_2'(y)$ sont uniformément bornés lorsque γ parcourt Γ. Comme f satisfait l'équation d'invariance:

$$f(x,y) = \varphi_1'(x)\varphi_2'(y) f(\varphi_1(x), \varphi_2(y))$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$, la fonction $\log f$ est bornée. Ceci garantit la divergence des intégrales du type $\int_0^{\pm\infty} f(\xi, y_0)d\xi$ et prouve la complétude des géodésiques de lumière. $\square$

En utilisant l'inégalité de Denjoy comme en 2-1, on pourrait affaiblir l'hypothèse et supposer qu'un des feuilletages est C^1 et l'autre seulement C^0 linéarisable.

3. Complétude

3.1 Cas général

Supposons que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ soient C^2-linéarisables, alors $\mathbb{T}^2$ peut être vu comme le quotient de $\mathbb{R}^2$ par un réseau Γ de translations, la métrique s'écrivant sur $\mathbb{R}^2$:

$$g = f(x,y)dxdy$$

où $f > 0$ est de classe C^1 et Γ-invariante.

Proposition. *La métrique lorentzienne g est complète.*

Démonstration. Les équations d'une géodésique $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ s'écrivent encore sous la forme $(*)$. On note toujours $I =]a, b[$ l'intervalle (supposé maximal) de paramétrisation de σ.

Comme $\log f$ est bornée, la complétude se démontre comme en 2-2 lorsque σ est de lumière.

Reste le cas où:

$$fx'y' = Cte \neq 0 \tag{3}$$

de $(*)$, on obtient pour $t_0, t \in I$:

$$\left[\frac{1}{x'}\right]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \log f}{\partial x}(x(\tau), y(\tau))d\tau \tag{4}$$

$$\left[\frac{1}{y'}\right]_{t_0}^{t} = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial \log f}{\partial y}(x(\tau), y(\tau))d\tau \tag{5}$$

Montrons par l'absurde que le paramètre affine t ne peut être borné d'aucun côté et donc que σ est complète. En effet, si t était borné, du fait que $\log f$ et ses dérivées partielles sont bornées, on obtiendrait de (4) et (5) que $|x'|$ et $|y'|$ seraient bornées inférieurement par un $\varepsilon_0 > 0$. Mais alors, comme f est aussi bornée inférieurement par un nombre > 0, de (3) on tirerait que $|x'|$ et $|y'|$ seraient bornées supérieurement. Ceci contredit la Proposition (ii) du §1-2, d'après laquelle si σ n'est pas complète alors la vitesse σ' ne peut être bornée. □

Joint au résultat ([**FGH**] ou [**C**]) qui assure que toute métrique lorentzienne plate de $\mathbb{T}^2$ est complète, on retrouve le résultat suivant déjà démontré grâce à la considération de champs de Killing conformes dans [**RS2**]:

Théorème. *Les métriques lorentziennes conformément plates de $\mathbb{T}^2$ sont complètes.*

3.2 Cas où $\mathcal{G}$ est formé de cercles

Avec les mêmes notations qu'en 2-1, on a le

Théorème. *Si φ est C^1-conjugué à une rotation, alors la métrique g est complète.*

Démonstration. On sait déjà que les géodésiques de lumière sont complètes, il reste à montrer que celles qui ne sont pas de lumière sont encore complètes. L'hypothèse φ est C^1-conjugué à une rotation revient à dire (cf. [**H**]):

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}(\varphi^k)' < +\infty.$$

Ceci par l'équation d'invariance (1) a pour conséquence que $\log f$ est borné.

Si x ne tend pas vers l'infini, le même raisonnement de bornitude qu'au § précédent conduit à la complétude.

Reste le cas où $x \to \infty$. Soit alors la suite u_n de paramètres affines tels que: $x(u_n) = x_0 + n$ le théorème des accroissements finis assure l'existence d'une suite

$$t_n, \quad u_n < t_n < u_{n+1}$$

telle que:

$$1 = x'(t_n)(u_{n+1} - u_n)$$

du fait que $\log f$ est borné, par l'équation (3), on a:

$$\frac{1}{y'(t_n)} \geq Cte\, x'(t_n) = \frac{Cte}{v_n}$$

où l'on a posé $v_n = u_{n+1} - u_n$. L'équation (5) donne alors:

$$\begin{aligned}\left[\frac{1}{y'}\right]_{u_0}^{t_n} &= \int_{u_0}^{t_n} \frac{\partial \log f}{\partial y}(x(\tau), y(\tau))d\tau \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{u_k}^{u_{k+1}} \frac{\partial \log f}{\partial y} d\tau + \int_{u_n}^{t_n} \frac{\partial \log f}{\partial y} d\tau\end{aligned}$$

Dérivant par rapport à y l'équation d'invariance (1), on obtient alors:

$$\frac{\partial \log f}{\partial y}(x,y) = (\log(\varphi^k)')' + (\varphi^k)'(y)\frac{\partial \log f}{\partial y}(x+k, \varphi^k(y))$$

comme on a:

$$\log(\varphi^k)' = \sum_{l=0}^{k-1} \log \varphi'(\varphi^l)$$

$$(\log(\varphi^k)')' = \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(\varphi^l)'\varphi''(\varphi^l)}{\varphi'(\varphi^l)}$$

il vient la majoration:

$$\frac{1}{y'(t_n)} \leq Cte \sup_{0\leq k\leq n} (\varphi^k)' \sum_{k=1}^{n+1} k v_k$$

Donc:

$$\frac{1}{v_n} \leq Cte \sum_{k=1}^{n+1} k v_k$$
$$\leq Cte\,(n+1) \sum_{k=1}^{n+1} v_k$$

ce qui force $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ à être divergente, d'où la complétude. □

Bibliographie

[**C**] Carrière, Y. – *Autour de la conjecture de L. Markus sur les variétés affines*, Invent. Math. **95** (1989) 615–628.

[**FGH**] Fried, D., Goldman, W., Hirsch, M. – *Affine manifolds with nilpotent holonomy*, Comment. Math. Helv. **56** (1981) 487–523.

[**Gl**] Gluck, H. – *Dynamical behavior of geodesics fields*, Proceedings of the International conference at Northwestern, Lecture Notes in Mathematics 819, pp. 190-215 (1979).

[**G**] Godbillon, C. – *Dynamical systems on surfaces*, Universitext, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York (1983)

[**GL**] Guediri, M., Lafontaine, J. – *Sur la complétude des variétés pseudoriemanniennes*, A paraître au J. of Geom. and Physic (1993).

[**H**] Herman, M. – *Sur la conjugaison des difféomorphismes du cercle à des rotations*, Pub. Math. I.H.E.S. **49** (1979) 5–234.

[**HH**] Hector, G., Hirsch, U. – *Introduction to the geometry of foliations*, Part A: Aspects of Mathematics, Vieweg, Braunschweig (1981).

[**K**] Kamishima, Y. – *Completeness of Lorentz manifolds*, J. Diff. Geom. **37** (1993) 569–601.

[**Kn**] Kneser, H. – *Reguläre Kurvenscharen auf den Ringflächen*, Math. Annalen **91** (1924) 135–154.

[**L1**] Lafuente, J. – *A geodesic completeness theorem for locally symmetric Lorentz manifolds*, Revista Matemática de la Universidad Complutense de Madrid **1** (1988) 101–110.

[**L2**] Lafuente, J. – *On the limit set of an incomplete geodesic of a lorentzian torus*, XV Jornadas Luso-Espagnolas Universidad de Evora (1991).

[**MS**] de Melo, W., van Strien, S. – *One-dimensional dynamics*, Ergebnisse Math. 25, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York (1993).

[**O**] O'Neill, B. – *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, New York (1983).

[**RS1**] Romero, A., Sánchez, M. – *On the completeness of geodesics obtained as a limit*, J. Math. Phys. **34** (1993) 3768–74.

[**RS2**] Romero, A., Sánchez, M. – *New properties and examples of incomplete Lorentzian tori*, J. Math. Phys. **35** (1994) 1992–97.

Yves Carrière et Luc Rozoy
Institut Fourier, BP 74,
F-38402 St Martin d'Hères Cedex
France

carriere@fourier.grenet.fr