Nova Série
BOLETIM
DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 27, N. 2, 161-186

Ensembles Invariants pour un Opérateur de Transfert dans $\mathbb{R}^d$

D. Cerveau, J.-P. Conze et A. Raugi

Abstract. We give the explicit algebraic form of the closed invariant sets for a transfer operator associated to a dilating matrix in $\mathbb{R}^d$.

Resumé. Nous explicitons la forme algébrique des fermés invariants pour les opérateurs de transfert associés aux matrices dilatantes dans $\mathbb{R}^d$.

0. Introduction

Etant données une matrice dilatante A, une famille

$$\mathcal{D} = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{q-1}\}$$

d'éléments de $\mathbb{R}^d$ et une fonction $u \geq 0$ sur $\mathbb{R}^d$, nous considérons l'opérateur P_u opérant sur les fonctions f définies sur $\mathbb{R}^d$ par

$$P_u f(x) = \sum_{\tau \in \mathcal{D}} u(A^{-1}(x+\tau)) f(A^{-1}(x+\tau)).$$

Ces opérateurs, ou sous une forme plus générale les opérateurs associés à des applications dilatantes, ont des propriétés spectrales remarquables (cf. **[7]**, **[5]**, **[15]**) et apparaissent dans plusieurs domaines, par exemple comme opérateurs de transition dans la construction de chaînes de Markov (**[12]**) et comme opérateurs de transfert en théorie ergodique et mécanique statistique (**[8]**, **[13]**, **[14]**).

Ils interviennent également dans la construction des fonctions d'échelle de la théorie des analyses multirésolutions développée notamment à partir des travaux d'Y. Meyer **[11]** sur les bases d'ondelettes. Les propriétés spectrales de ces opérateurs sont en effet liées aux pro-

Received 5 January 1996.

priétés fonctionnelles d'analyses multirésolutions associées et fournissent des critères d'orthogonalité, de base de Riesz, de régularité (cf. [**2**], [**6**]) des fonctions d'échelle correspondantes.

La notion de "compact invariant" pour les opérateurs définis plus haut permet de formuler des critères effectifs et d'étudier, par exemple, les obstructions à l'orthogonalité dans la construction d'une fonction d'échelle. Ces critères, qui se traduisent par une condition algébrique sur les zéros d'un polynôme, sont simples à mettre en oeuvre en dimension 1. En dimension > 1, le formalisme général des constructions d'analyses multirésolutions et des méthodes d'opérateurs reste inchangé, mais des problèmes nouveaux, liés à la dimension, apparaissent dans l'étude des critères algébriques portant sur les compacts invariants.

Nous donnons ici la forme algébrique explicite des compacts invariants pour les opérateurs de transfert associés aux matrices dilatantes dans $\mathbb{R}^d$ (ou des fermés périodiques invariants dans le cas des matrices dilatantes à coefficients entiers). La preuve fait appel à un résultat algébrique (proposition 2.4) démontré en appendice.

Plusieurs travaux récents (cf. [**3**], [**4**], [**9**], [**10**]) ont relié l'étude des pavages auto-similaires de $\mathbb{R}^d$ aux analyses multirésolutions. L'application des résultats du présent article à la construction des analyses multirésolutions et particulièrement des pavages auto-similaires de $\mathbb{R}^d$ fait l'objet d'un autre travail [**1**].

Plan de l'article

I. Un opérateur de transfert, définitions, notations

1.1 Notations et hypothèses

On considère une matrice carrée A d'ordre $d \geq 1$ inversible, à coefficients réels, *dilatante* (c'est-à-dire dont toutes les valeurs propres sont de module strictement supérieur à 1), et une famille $\mathcal{D} = \{\tau_0, \tau_1, \dots, \tau_{q-1}\}$ de $q \geq 1$ éléments de $\mathbb{R}^d$.

Pour $\tau \in \mathcal{D}$, on note $\breve{\tau}$ l'affinité de $\mathbb{R}^d$ définie par $\breve{\tau}x = A^{-1}(x+\tau)$, $x \in \mathbb{R}^d$. Nous désignons par $\breve{\mathcal{D}}$ la famille de ces affinités.

Nous supposons que la matrice A et la famille $\mathcal{D}$ vérifient l'hypothèse (H) suivante, qui assure l'unicité des développements finis:

Hypothèse (H) . *"Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ l'égalité $\breve{\gamma}_1 \dots \breve{\gamma}_p x = \breve{\eta}_1 \dots \breve{\eta}_p x$ implique $\gamma_k = \eta_k$, $1 \leq k \leq p$."*

Il suffit que la propriété soit vraie pour $x = 0$. Une formulation équivalente est:

"Pour tout entier $p \geq 1$, l'égalité

$$\sum_{k=1}^{p} A^{-k}\gamma_k = \sum_{k=1}^{p} A^{-k}\eta_k,$$

avec γ_k, $\eta_k \in \mathcal{D}$, entraîne les égalités $\gamma_k = \eta_k$, $1 \leq k \leq p$".

On choisit sur $\mathbb{R}^d$ une norme $\| \ \|$ pour laquelle

$$\left\|A^{-1}\right\| < 1.$$

Pour $x \in \mathbb{R}^d$ et α réel positif, on note $\mathcal{B}(x,\alpha)$ la boule ouverte de centre x et de rayon α. La boule fermée de centre 0 et de rayon

$$R = \sup_{\tau \in \mathcal{D}} \|\tau\| \frac{\left\|A^{-1}\right\|}{(1 - \left\|A^{-1}\right\|)}$$

est invariante par les affinités $\breve{\tau}$, $\tau \in \mathcal{D}$. On notera simplement K cette boule.

Notons que, pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $(\tau_k)_{k \geq 0}$ dans $\mathcal{D}$, on a:

$$\breve{\tau}_n \dots \breve{\tau}_1 x = \breve{\tau}_n \dots \breve{\tau}_1 0 + A^{-n}x,$$

et donc:

$$\lim_{n \to +\infty} d(\breve{\tau}_n \dots \breve{\tau}_1 x, K) = 0.$$

Dans la suite, nous considérons une fonction u à valeurs positives ou nulles, appartenant à l'espace $C(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues sur $\mathbb{R}^d$, et nous formons l'opérateur P_u défini par

$$P_u f(x) = \sum_{\tau \in \mathcal{D}} u(\check{\tau}x) f(\check{\tau}x) \quad (x \in \mathbb{R}^d).$$

Cet opérateur opère sur $C(\mathbb{R}^d)$ et peut être restreint à l'espace $C(K)$ des fonctions continues sur K. Dans la suite, nous considérons plus particulièrement des fonctions u qui sont entières sur $\mathbb{R}^d$.

On notera que l'opérateur de "transfert" P_u n'est pas supposé normalisé, l'étude qui suit dépendant essentiellement de la structure de l'ensemble des zéros de u. Il est cependant commode de se représenter P_u comme un opérateur de transition, la transition d'un point x étant possible vers un point y si, et seulement si, y est de la forme $y = \check{\tau}x$, pour un τ dans $\mathcal{D}$ tel que $u(\check{\tau}x) > 0$. On schématisera cette situation par la notation:

$$x \to \check{\tau}x,$$

et on dira que x "mène à" $y = \check{\tau}x$; ou encore, pour être plus précis, que la transition $x \to \check{\tau}x$ est permise (ou possible) pour le triplet $(A, uCalD)$.

Nous supposerons que, de tout point de $\mathbb{R}^d$, il est possible d'aller "quelque part". En d'autres termes, nous ferons l'hypothèse:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \sum_{\tau \in \mathcal{D}} u(\check{\tau}x) > 0.$$

La quantité $a = \inf_{x \in K} \left\{ \sum_{\tau \in \mathcal{D}} u(\check{\tau}x) \right\}$ est donc > 0.

1.2 Définitions. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, une *trajectoire* de x est une suite de points de $\mathbb{R}^d$ de la forme $\{\check{\sigma}_n \ldots \check{\sigma}_1 x, n \geq 1\}$, où $\{\sigma_n, n \geq 1\}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{D}$ vérifiant $u(\check{\sigma}_n \ldots \check{\sigma}_1 x) \cdots u(\check{\sigma}_2\check{\sigma}_1 x) u(\check{\sigma}_1 x) > 0$, pour tout $n \geq 1$.

L'ensemble des trajectoires de x, noté $\mathcal{O}(x)$, est donc l'ensemble des points atteints à partir de x après un nombre fini de transitions permises. Son adhérence $\overline{\mathcal{O}(x)}$ est un compact de $\mathbb{R}^d$ appelé *orbite* de x. Un fermé F de $\mathbb{R}^d$ est dit *invariant* (ou absorbant selon une autre terminologie) s'il est non vide et contient les orbites de chacun de ses points: pour tout $x \in F$ et tout $\sigma \in \mathcal{D}$ tels que $u(\check{\sigma}x) > 0$, on a $\check{\sigma}x \in F$.

Si $x \in K$, l'orbite de x est dans K; si $x \notin K$, comme la distance à K des trajectoires de tout point tend vers 0, $\overline{\mathcal{O}(x)} \cap K$ est un compact non vide invariant.

Un fermé M de $\mathbb{R}^d$ invariant est dit *minimal* s'il ne contient pas de sous-ensemble invariant non vide autre que lui-même. De façon équivalente, M est minimal si, pour tout $z \in M$, on a $\overline{\mathcal{O}(z)} = M$. L'intersection d'une famille totalement ordonnée par inclusion de compacts invariants non vides dans K est encore un compact invariant non vide de K. Le lemme de Zorn assure alors que tout compact invariant M dans K contient un compact invariant minimal.

Dans les cas où l'opérateur P_u est un opérateur de transition, i.e. $P_u 1 = 1$, il y a un lien étroit entre les fonctions P_u-harmoniques et les compacts invariants. La dimension de l'espace vectoriel

$$\{f \in C(\mathbb{R}^d)\colon P_u f = f\}$$

(ou celle de $\{f \in C(K)\colon P_u f = f\}$) est majorée par le nombre maximal (nécessairement fini) de compacts invariants disjoints, et lui est égale sous une hypothèse de régularité de u. Dans tout les cas, l'étude du spectre de l'opérateur P_u est liée à celle des compacts invariants minimaux. La situation de ce point de vue n'est pas différente de celle de la dimension 1 et les arguments de [**2**] et [**6**] s'étendent sans difficultés. Le lecteur pourra se reporter à [**2**] pour cette étude.

La nouveauté principale en dimension > 1 réside dans la caractérisation algébrique des compacts invariants que nous abordons maintenant.

II. Structure des compacts invariants minimaux

L'utilisation des points périodiques joue un rôle important dans la caractérisation des compacts invariants.

Compacts invariants et points périodiques

Définitions. Etant donné un entier $m \geq 1$, on appelle *point périodique* associé à un m-uple $(\gamma_1, \dots \gamma_m)$ de $\mathcal{D}^m$ l'élément de $\mathbb{R}^d$ noté

$$\wp(\gamma_1, \dots, \gamma_m),$$

qui est le point fixe de l'application contractante $\breve{\gamma}_1 \dots \breve{\gamma}_m$. Ce point s'écrit:

$$\wp(\gamma_1, \dots, \gamma_m) = \sum_{k \geq 1} A^{-k} \gamma_{\underline{k}}, \text{ avec } \underline{k} \in \{1, \dots, m\} \text{ et } \underline{k} = k \mod m.$$

Nous appelons *cycle périodique*, associé au m-uple $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, le sous-ensemble de K noté $\varsigma(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, formé des points périodiques associés aux m-uples déduits par permutation circulaire du m-uple $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$.

Le lemme suivant montre qu'un cycle périodique $\varsigma(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ est *invariant* si, et seulement si, pour toute substitution circulaire $(\eta_1, \dots \dots, \eta_m)$ du m-uple $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ et pour tout $\gamma \in \mathcal{D}$ différent de η_m, on a $u(\breve{\gamma}\wp(\eta_1, \dots, \eta_m)) = 0$. Autrement dit, les seules transitions permises, à partir d'un point d'un cycle périodique $\varsigma(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ invariant, consistent à "tourner" sur ce cycle par les affinités $\breve{\gamma}_i$.

Lemme 2.1. *Soit $v = \wp(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ un point périodique. Supposons qu'il existe des éléments $\tau_1, \dots, \tau_s$ de $\mathcal{D}$ tels que $\breve{\tau}_s \dots \breve{\tau}_1 v$ soit encore un point périodique. Alors, nous avons: $\tau_1 = \gamma_m$, $\tau_2 = \gamma_{m-1}, \dots,$ et donc $\breve{\tau}_1 v = \wp(\gamma_m, \gamma_1, \dots, \gamma_{m-1})$, $\breve{\tau}_2\tau_1 v = \wp(\gamma_{m-1}, \gamma_m \dots, \gamma_{m-2})$, etc...*

Preuve. Le point $\breve{\tau}_s \cdots \breve{\tau}_q v$ étant périodique, il existe $\sigma_1, \dots, \sigma_r \in \mathcal{D}$ tels que:

$$\breve{\sigma}_1 \cdots \breve{\sigma}_r \breve{\tau}_s \cdots \breve{\tau}_s \cdots \breve{\tau}_1 v.$$

En répétant m fois le bloc $\breve{\sigma}_1 \cdots \breve{\sigma}_r$ et r fois le bloc $\breve{\gamma}_1 \cdots \breve{\gamma}_m$, on obtient l'égalité

$$(\breve{\sigma}_1 \cdots \breve{\sigma}_r)^m \breve{\tau}_s \cdots \breve{\tau}_1 v = \breve{\tau}_s \cdots \breve{\tau}_1 (\breve{\gamma}_1 \cdots \breve{\gamma}_m)^r v,$$

dans laquelle on a, des deux côtés, le même nombre d'applications. Grâce à l'hypothèse (H), on en déduit successivement, en commençant par la droite: $\tau_1 = \gamma_m$, $\tau_2 = \gamma_{m-1}$, etc... □

Remarque 2.2. Dans les démonstrations, nous utiliserons à plusieurs reprises la remarque simple suivante: si, à partir d'un point $x \in K$, une suite de transitions, dont les poids restent supérieurs à une constante > 0, est permise, alors cette suite de transitions est également possible à partir de tout point d'un voisinage convenable de x.

Nous désignons par δ un réel positif tel que, pour tous éléments x, y de K vérifiant $\|x-y\|<\delta$, on ait $|u(x)-u(y)|<a/q$. (Rappelons que a est la quantité >0 définie par $a=\inf_{x\in K}\{\sum_{\tau\in\mathcal{D}} u(\breve{\tau}x)\}$.)

En notant $\text{diam}(K)$ le diamètre de la boule K, nous définissons l'entier naturel N par

$$\left\|A^{-(N+1)}\right\| \text{diam}(K) < \delta \leq \left\|A^{-N}\right\| \text{diam}(K).$$

Le résultat suivant reprend, en le précisant, un résultat de [**2**] sur les cycles périodiques des compacts invariants.

Proposition 2.3. a) *Si F et G sont deux compacts invariants disjoints de K, alors $d(F,G)\geq \delta/\left\|A^{-1}\right\|$.*

b) *Pour tout compact invariant F de K, nous avons l'alternative suivante:*

- *ou bien F contient un cycle périodique invariant;*
- *ou bien F contient un cycle périodique non isolé (c'est-à-dire dont tout point est limite d'une suite d'éléments de F, deux à deux distincts).*

Preuve. a) Nous utilisons la remarque précédente.

Pour tout couple de points x et y de K tel que $\|x-y\|<\delta/\left\|A^{-1}\right\|$, il existe une suite $(\sigma_n, n\geq 1)$ à valeurs dans $\mathcal{D}$ telle que l'on ait simultanément, pour tout $n\geq 1$,

$$u(\breve{\sigma}_n\cdots\breve{\sigma}_1 x)\cdots u(\breve{\sigma}_2\breve{\sigma}_1 x)u(\breve{\sigma}_1 x)>0$$

et

$$u(\breve{\sigma}_n\cdots\breve{\sigma}_1 y)\cdots u(\breve{\sigma}_2\breve{\sigma}_1 y)u(\breve{\sigma}_1 y)>0.$$

En effet, partant de x, construisons la trajectoire de x correspondant à des transitions de poids maximal (donc supérieur à a/q): il est possible de trouver une suite $(\sigma_n, n\geq 1)$ d'éléments de $\mathcal{D}$ telle que:

$$u(\breve{\sigma}_n\cdots\breve{\sigma}_1 x)\geq a/q, \text{ pour tout } n\geq 1.$$

Soit y un point de K tel que $\|x-y\|<\delta/\left\|A^{-1}\right\|$. Alors, la propriété de contraction des applications de $\breve{\mathcal{D}}$ implique que, pour tout entier $n\geq 1$, les points $\breve{\sigma}_n\cdots\breve{\sigma}_1 y$ et $\breve{\sigma}_n\cdots\breve{\sigma}_1 x$ restent à une distance inférieure à δ.

D'après le choix de la suite σ et celui de δ, on a, pour tout $n \geq 1$,

$$u(\breve{\sigma}_n \cdots \breve{\sigma}_1 y) \cdots u(\breve{\sigma}_1 y) > 0,$$

et donc les suites $(\breve{\sigma}_n \cdots \breve{\sigma}_1 x, n \geq 1)$ et $(\breve{\sigma}_n \cdots \breve{\sigma}_1 y, n \geq 1)$ sont deux trajectoires de x et de y dont la distance $\|\breve{\sigma}_n \cdots \breve{\sigma}_1 x - \breve{\sigma}_n \cdots \breve{\sigma}_1 y\|$ tend vers zéro.

Soient F et G deux compacts invariants. Si x est dans F et y dans G, avec $\|x - y\| < \delta / \left\|A^{-1}\right\|$, d'après ce qui précède, les orbites fermées de x et de y, et donc F et G, ont un point commun. Ceci montre que deux compacts invariants disjoints F et G sont à une distance supérieure à $\delta / \left\|A^{-1}\right\|$.

b) Montrons maintenant que tout compact invariant F contient un point périodique.

Soit x un élément de F. Considérons comme précédemment une suite $(\sigma_n, n \geq 1)$ d'éléments de $\mathcal{D}$ telle que

$$u(\breve{\sigma}_n \cdots \breve{\sigma}_1 x) \geq \frac{a}{q}, \text{ pour tout } n \geq 1.$$

Il existe au plus q^N "blocs" de longueur N. L'un de ces blocs, soit $\eta_1, \ldots, \eta_N$, apparaît une infinité de fois (donc au moins deux fois!) dans la suite $(\sigma_n, n \geq 1)$.

On peut donc trouver des entiers naturels r et s et des éléments $\gamma_1, \ldots, \gamma_r, \rho_1, \ldots, \rho_s$ de $\mathcal{D}$ tels que:

$$(\sigma_{2N+r+s}, \ldots, \sigma_1) = (\eta_1, \ldots, \eta_N, \gamma_1, \ldots, \gamma_r, \eta_1, \ldots, \eta_N, \rho_1, \ldots, \rho_s).$$

Montrons que F contient le point périodique associé au $(N+r)$-uple $(\eta_1, \ldots, \eta_N, \gamma_1, \ldots, \gamma_r)$. Notons z_0 le point $\breve{\eta}_1 \cdots \breve{\eta}_N \breve{\rho}_1 \cdots \breve{\rho}_s x$ et U l'affinité $\breve{\eta}_1 \cdots \breve{\eta}_N \breve{\gamma}_1 \cdots \breve{\gamma}_r$.

Le point z_0 est un élément de F pour lequel les transitions

$$z_0 \to \breve{\gamma}_r z_0 \to \cdots \to \breve{\gamma}_1 \cdots \breve{\gamma}_r z_0 \to \cdots \to \breve{\eta}_1 \cdots \breve{\eta}_N \breve{\gamma}_1 \cdots \breve{\gamma}_r z_0 = U z_0$$

sont possibles avec des poids $\geq \frac{a}{q}$.

Soit z un élément de F pour lequel les transitions

$$z \to \breve{\gamma}_r z \to \cdots \to \breve{\gamma}_1 \cdots \breve{\gamma}_r z \to \cdots \to \breve{\eta}_1 \cdots \breve{\eta}_N \breve{\gamma}_1 \cdots \breve{\gamma}_r z = U z$$

sont possibles. On a

$$\forall \gamma \in \mathcal{D}, \|\breve{\gamma} U z - \breve{\gamma} z_0\| \leq \left\| A^{-(N+1)} \right\| \operatorname{diam}(K) < \delta,$$

et cette inégalité reste vérifiée pour les images successives de Uz et de z_0 par des affinités de $\mathcal{D}$.

Grâce au choix de δ, il en résulte que les transitions

$$Uz \to \breve{\gamma}_r Uz \to \cdots \to \breve{\gamma}_1 \cdots \breve{\gamma}_r Uz \to \cdots \to \breve{\eta}_1 \cdots \breve{\eta}_N \breve{\gamma}_1 \cdots \breve{\gamma}_r Uz = U^2 z$$

sont possibles.

En appliquant cette remarque successivement aux points $z = z_0$, $z = Uz_0$, $z = U^2 z_0, \ldots$, on obtient que F contient le point fixe de U et le cycle périodique associé au $(N + r)$-uple $(\eta_1, \ldots, \eta_N, \gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ qui s'en déduit.

Le cycle périodique construit est non isolé, excepté si $\breve{\rho}_1 \cdots \breve{\rho}_s x$ coïncide avec le point périodique associé au $(N + r)$-uple

$$(\gamma_1, \ldots, \gamma_r, \eta_1, \ldots, \eta_N).$$

Il en résulte que le compact invariant F contient un cycle périodique non isolé, sauf s'il ne contient que des points x qui peuvent être rendus périodiques en prenant leur image par une affinité composée d'un nombre fini d'éléments de $\breve{\mathcal{D}}$ (le compact F ne contient alors que des points "pré-périodiques").

Plaçons-nous dans ce cas et considérons un point v du cycle périodique associé au $(N + r)$-uple $(\eta_1, \ldots, \eta_N, \gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ et un élément θ de $\mathcal{D}$ vérifiant $u(\breve{\theta} v) > 0$ (et donc $\breve{\theta} v \in F$). Il existe alors des éléments $\theta_1, \ldots, \theta_s$ de $\mathcal{D}$ tels que le point $\breve{\theta}_1 \cdots \breve{\theta}_s \breve{\theta} v$ soit périodique.

D'après le lemme 2.1, $\breve{\theta} v$ appartient, de même que v, au cycle périodique $\varsigma(\eta_1, \ldots, \eta_N, \gamma_1, \ldots, \gamma_r)$, ce qui prouve que ce cycle est invariant.

□

Nous montrerons en appendice qu'à une fonction g entière sur $\mathbb{C}^d$ et à une matrice dilatante A, on peut associer une décomposition de g en série de polynômes P_j caractéristiques pour A, $g = \sum_{j \geq 1} P_j$, telle que:

Proposition 2.4. *Si $g(\cdot) = \sum_{j \geq 1} P_j(\cdot)$ est la décomposition en série de*

polynômes caractéristiques pour A de la fonction entière g, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $r \in \mathbb{N}^*$, les conditions suivantes sont équivalentes:
(i) $g(A^{-rk}x) = 0, \ \forall k \geq 0,$
(ii) $P_j(A^{-rk}x) = 0, \ \forall k \geq 0, \ \forall j \geq 1,$
(iii) $P_j(A^k x) = 0, \ \forall k \in \mathbb{Z}, \ \forall j \geq 1,$
(iv) $g(A^k x) = 0, \ \forall k \in \mathbb{Z}.$

Proposition 2.5. *Soient M un compact invariant minimal et x_0 un point d'un cycle périodique non isolé de M. Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ et une fonction entière h nulle sur $\mathcal{B}(x_0, \alpha) \cap M$.*

Alors il existe $\eta > 0$ et V, sous-espace vectoriel propre de $\mathbb{R}^d$ stable par A, tels que h s'annule sur $x_0 + V$ et, pour tout $y \in M$,

$$\mathcal{B}(y, \eta) \cap M \subset y + V.$$

En particulier, le compact M est contenu dans un nombre fini de translatés de V.

Preuve. Par hypothèse le point périodique x_0 est de la forme $\wp(\sigma_1, \ldots$ $\ldots, \sigma_m), \varsigma(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ étant un cycle périodique non isolé dans M.

Nous posons $\beta = \inf\{u(x) : x \in \varsigma(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)\}$. Soit δ_1 un réel positif tel que, pour tous éléments x, $y \in K$ vérifiant $\|x - y\| < \left\|A^{-1}\right\| \delta_1$, on ait $|u(x) - u(y)| < \beta$. Posons $\delta_2 = \inf(\delta_1, \alpha)$.

D'après la remarque 2.2, pour tout $x \in M$, vérifiant $|x - x_0| < \delta_2$, les points

$$x, \breve{\sigma}_m x, \ldots, \breve{\sigma}_1 \cdots \breve{\sigma}_m x, \ldots, (\breve{\sigma}_1 \cdots \breve{\sigma}_m)^2 x, \ldots$$

sont encore dans M. En particulier, parmi ces points figurent les éléments

$$(\breve{\sigma}_1 \cdots \breve{\sigma}_m)^k x = x_0 + A^{-mk}(x - x_0), k \geq 0.$$

Considérons l'ensemble $\mathcal{O}(x_0)$ des trajectoires de x_0, et soit $\mathcal{V}$ l'ensemble $\mathcal{O}(x_0) \cap \mathcal{B}(x_0, \delta_2)$. Comme le cycle périodique $\varsigma(\sigma_1, \cdots, \sigma_m)$ n'est pas isolé, il existe des points de M arbitrairement proches de x_0 et, d'après la minimalité de M, ces points peuvent être approchés par des points de l'orbite de x_0. Ceci assure que $\mathcal{V}$ n'est pas réduit au singleton $\{x_0\}$.

L'application $\breve{\sigma}_1 \cdots \breve{\sigma}_m$ est contractante avec x_0 comme point fixe.

Soient y_ℓ, $1 \leq \ell \leq p$, des éléments distincts ou non de $\mathcal{V}$. Ils sont de la forme:

$$y_\ell = \breve{\gamma}^\ell_{r_\ell} \cdots \breve{\gamma}^\ell_1 x_0, \ 1 \leq \ell \leq p,$$

pour des éléments $\gamma^l_k, 1 \leq k \leq r_\ell, 1 \leq \ell \leq p$, de $\mathcal{D}$. D'après ce qui précède, pour $k \geq 0$ et $1 \leq \ell \leq p$, $(\breve{\sigma}_1 \cdots \breve{\sigma}_m)^k y_\ell$ appartient à $\mathcal{V}$ et est proche de x_0, pour k assez grand. Il en résulte que les points

$$(\breve{\sigma}_1 \cdots \breve{\sigma}_m)^{k_p} \cdots \breve{\gamma}^2_{r_2} \cdots \breve{\gamma}^2_1 (\breve{\sigma}_1 \cdots \breve{\sigma}_m)^{k_1} \breve{\gamma}^1_{r_1} \cdots \breve{\gamma}^1_1 x_0$$

sont obtenus par des transitions permises et appartiennent à $\mathcal{V}$, pour des entiers $k_1, \ldots, k_p$ suffisamment grands.

Compte-tenu de la forme des transformations et du fait que x_0 est le point fixe de $\breve{\sigma}_1 \cdots \breve{\sigma}_m$, ces points s'écrivent:

$$\begin{aligned} x_0 + A^{-mk_p}(y_p - x_0) + A^{-[m(k_{p-1}+k_p)+r_p]}(y_{p-1} - x_0) + \cdots \\ + A^{-[m(k_1+\cdots+k_p)+r_2+\cdots+r_p]}(y_1 - x_0). \end{aligned}$$

On a donc, quels que soient $y_1, \ldots, y_p \in \mathcal{V}$ et pour $k_1, \ldots, k_p$ assez grands,

$$\begin{aligned} h(x_0 + A^{-mk_p}(y_p - x_0) + A^{-[m(k_{p-1}+k_p)+r_p]}(y_{p-1} - x_0) + \cdots \\ + A^{-[m(k_1+\cdots+k_p)+r_2+\cdots+r_p]}(y_1 - x_0)) = 0. \end{aligned}$$

Soit

$$h(x_0 + \cdot) = \sum_{j \geq 1} P_j(\cdot)$$

la décomposition en série de polynômes caractéristiques pour A de la fonction entière $h(x_0 + \cdot)$. Par application itérée de la proposition 2.4, montrons que

$$h(x_0 + v) = 0 \ \text{ et } \ \forall j \geq 1, \ P_j(v) = 0,$$

pour tout élément v appartenant au sous-espace vectoriel (réel ou complexe) engendré par

$$\mathcal{H} = \{A^p(y - x_0), p \in \mathbb{Z}, y \in \overline{\mathcal{V}}\}.$$

Pour cela, nous appliquons d'abord l'équivalence entre (i) et (iv) dans cette proposition à la fonction entière

$$g_1(\cdot) = h(x_0 + \cdots + A^{-[m(k_2+\cdots+k_p)+r_3+\cdots+r_p]}(y_2 - x_0) \\ + A^{-[m(k_2+\cdots+k_p)+r_3+\cdots+r_p]}(\cdot))$$

au point $x = A^{-r_2}(y_1 - x_0)$, pour r multiple suffisamment grand de m; ce qui donne:

$$h(x_0 + \cdots + A^{-[m(k_2+\cdots+k_p)+r_3+\cdots+r_p]}(y_2 - x_0) \\ + A^{l_1}(y_1 - x_0)) = 0, \ \forall l_1 \in \mathbb{Z}.$$

On recommence ensuite avec la fonction entière

$$g_2(\cdot) = h(x_0 + \cdots + A^{-[m(k_3+\cdots+k_p)+r_4+\cdots+r_p}(\cdot)),$$

au point $x = A^{-r_3}(y_2 - x_0) + A^{l_1}(y_1 - x_0)$, $l_1 \in \mathbb{Z}$, pour r multiple suffisamment grand de m; d'où, $\forall l_1,\, l_2 \in \mathbb{Z}$,

$$h(x_0 + \cdots + A^{-[m(k_3+\cdots+k_p)+r_4+\cdots+r_p]}(y_3 - x_0) \\ + A^{l_2}(y_2 - x_0) + A^{l_1}(y_1 - x_0) = 0.$$

En répétant ainsi ce procédé, on obtient:

$$h(x_0 + A^{l_p}(y_p - x_0) + \cdots + A^{l_1}(y_1 - x_0)) = 0, \ \forall l_1, \ldots, l_p \in \mathbb{Z}.$$

L'équivalence $(iii) \iff (iv)$ de la proposition 2.4 entraîne alors que, $\forall j \geq 1$:

$$P_j(A^{l_p}(y_p - x_0) + \cdots + A^{l_1}(y_1 - x_0)) = 0, \ \forall l_1, \ldots, l_p \in \mathbb{Z}.$$

Si $\mathcal{G}$ désigne le semi-groupe additif de $\mathbb{R}^d$ engendré par $\mathcal{H}$, nous avons donc $P_j(v) = 0$, $\forall j \geq 1$, $\forall v \in \mathcal{G}$.

Mais tout polynôme s'annulant sur un semi-groupe additif $\mathcal{G}$ s'annule sur le sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^d$, ou $\mathbb{C}^d$, engendré par $\mathcal{G}$. On a donc, $\forall j \geq 1$, $P_j(v) = 0$, $\forall v \in V$.

Le sous-espace vectoriel V est invariant par A et, d'après la proposition 2.4, on a $h(x_0 + v) = 0$, $\forall v \in V$, ce qui implique le résultat pour $y = x_0$.

Soit $y \in M$. D'après la minimalité, il existe une trajectoire

$$(\check{\gamma}_1 \cdots \check{\gamma}_n y, n \geq 1)$$

qui converge vers x_0. Les poids des transitions correspondant à cette trajectoire sont minorés, car $u(x_0) > 0$. Il existe donc $\eta > 0$ tel que, $\forall z \in \mathcal{B}(y, \eta)$, les mêmes transitions $\breve{\gamma}_1, \dots, \breve{\gamma}_n \dots$ appliquées à z soient permises.

Par suite il existe L tel que, pour $n \geq L$, $\breve{\gamma}_1 \cdots \breve{\gamma}_n z \in \mathcal{V}$, $\forall z \in \mathcal{B}(y, \eta)$. Pour $n \geq L$, on a $\breve{\gamma}_1 \cdots \breve{\gamma}_n z - \breve{\gamma}_1 \cdots \breve{\gamma}_n y \in V$, c'est-à-dire $A^{-n}(z - y) \in V$ et donc $z - y \in A^n V = V$.

La compacité de K permet de choisir un nombre $\eta > 0$ indépendant de y. □

Remarque 2.6. Reprenons les hypothèses de la proposition 2.5. Parmi les translatés de V qui recouvrent M se trouvent les translatés de la forme $x + V$, où $x \in \varsigma(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$. Nous allons voir que, sous une hypothèse supplémentaire, ces translatés suffisent à recouvrir M.

Notons $x_0 = \wp(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ le point périodique associé au m-uple $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ et désignons par $\{x_i, 1 \leq i \leq l\}$ des points de M tels que

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{1} (x_i + V).$$

Comme $\overline{\mathcal{O}(x_0)} = M$, on peut choisir les points x_i dans $\mathcal{O}(x_0)$.

Soit y un élément de M appartenant au translaté $x_j + V$, $1 \leq j \leq l$. Puisque $x_j \in \mathcal{O}(x_0)$, il existe des transitions permises menant de x_0 à x_j:

$$x_0 \to \breve{\gamma}_1 x_0 \to \cdots \to \breve{\gamma}_r \cdots \breve{\gamma}_1 x_0 = x_j.$$

Puisque $\overline{\mathcal{O}(y)} = M$ et $\mathcal{B}(x_0, \delta_2) \cap M \subset x_0 + V$, il existe des transitions permises qui mènent de y à un élément de $x_0 + V$:

$$y \to \breve{\gamma}_{r+1} y \to \cdots \to \breve{\gamma}_{r+s} \cdots \breve{\gamma}_{r+1} y \in x_0 + V.$$

Nous obtenons alors la relation:

$$\breve{\gamma}_{r+s} \cdots \breve{\gamma}_1 x_0 \in x_0 + V,$$

qui équivaut (en utilisant la méthode de la preuve du lemme 2.1) aux relations:

$$\forall p \geq 1, \breve{\gamma}_{r+s} \cdots \breve{\gamma}_1 (\breve{\sigma}_1 \cdots \breve{\sigma}_m)^p 0 - (\breve{\sigma}_1 \cdots \breve{\sigma}_m)^p \breve{\gamma}_{r+s} \cdots \breve{\gamma}_1 0 \in V.$$

Supposons que "l'hypothèse (H) modulo V" suivante soit satisfaite: "*Pour tout entier* $p \geq 0$, *l'égalité* $\breve{\epsilon}_1 \cdots \breve{\epsilon}_p 0 - \breve{\eta}_1 \cdots \breve{\eta}_p 0 \in V$, *avec* ϵ_i, $\eta_i \in \mathcal{D}$ *implique* $\epsilon_i - \eta_i \in V$, $\forall i \in \{1, \ldots, p\}$."

On obtient successivement: $\gamma_{r+s} - \sigma_1 \in V$, ce qui montre que

$$\breve{\gamma}_{r+s-1} \cdots \breve{\gamma}_{r+1} y \in \breve{\sigma}_2 \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + V,$$

puis $\gamma_{r+s-1} - \sigma_2 \in V$, ce qui montre que

$$\breve{\gamma}_{r+s-2} \cdots \breve{\gamma}_{r+1} y \in \breve{\sigma}_3 \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + V,$$

etc...

D'où l'on déduit que

$$M \subset \bigcup_{q=1}^{m} (\breve{\sigma}_q \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + V)$$

et tout point de $M \cap (\breve{\sigma}_q \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + V)$, $1 \leq q \leq m$, mène à un point de $M \cap (\breve{\sigma}_{q-1} \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + V)$, avec la convention $\sigma_0 = \sigma_m$.

Exemple. Prenons $A = 2I$, $u(x,y) = v(x,y)\cos^2 3\pi x$, avec $v(x,y) > 0$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, et

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a, pour

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R} \right\},$$

les transitions suivantes:

$$1/3 + V \leftrightarrow 2/3 + V \leftarrow 4/3 + V \leftrightarrow 5/3 + V \leftrightarrow 7/3 + V \rightarrow 8/3 + V,$$

ainsi que

$$1/3 + V \rightarrow 5/3 + V, 8/3 + V \rightarrow 4/3 + V.$$

Ici, "l'hypothèse (H) modulo V" n'est pas satisfaite. On a, par exemple:

$$A^{-1}\tau_0 + A^{-2}\tau_2 = A^{-1}\tau_3 + A^{-2}\tau_3, \quad \text{mod } V.$$

Par contre, si l'on prend, avec les mêmes A, u et V, les représentants:

$$\tau_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tau_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tau_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \tau_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix},$$

alors "l'hypothèse (H) modulo V" est satisfaite et on a le schéma de transitions suivant:

$$1/3+V \to 5/3+V \to 7/3+V \to 8/3+V \to 4/3+V \to 2/3+V \to 1/3+V.$$

Dans le théorème 2.8 qui suit, nous nous intéressons aux compacts invariants contenus dans les zéros d'une fonction entière. Si la fonction u est elle-même entière, cette condition est vérifiée sous une hypothèse très générale, d'après le lemme suivant.

Lemme 2.7. *Soit C un compact invariant non vide. Si la fonction u définissant les transitions permises est une fonction entière sur $\mathbb{R}^d$ et s'il existe un point z de K de la forme $\sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}\epsilon_k, \epsilon_k \in \mathcal{D}$, n'appartenant pas à C, alors il existe un entier $L \geq 1$ tel que*

$$u(\breve{\epsilon}_1 \cdots \breve{\epsilon}_L x)u(\breve{\epsilon}_2 \cdots \breve{\epsilon}_{L-1} x) \cdots u(\breve{\epsilon}_L x) = 0,$$

pour tout $x \in C$.

Preuve. Soit $\eta > 0$ la distance du point $z = \sum_{k=1}^{\infty} A^{-k}\epsilon_k$ à C. Choisissons un entier L tel que $\left\|A^{-L}\right\| \operatorname{diam}(K) < \eta$. Pour tout $x \in C$, on a $d(\breve{\epsilon}_1 \cdots \breve{\epsilon}_L x, z) < \eta$, et donc $\breve{\epsilon}_1 \cdots \breve{\epsilon}_L x$ n'est pas dans C.

La relation annoncée en résulte. □

Théorème 2.8. *Soit M un compact invariant minimal contenu dans l'ensemble des zéros d'une fonction entière h sur $\mathbb{R}^d$.*

a) *Il existe V, sous-espace vectoriel propre de $\mathbb{R}^d$ stable par A (éventuellement réduit à $\{0\}$), tel que M soit contenu dans une réunion finie $\mathcal{R}$ de translatés de V.*

b) *Cette réunion contient les translatés de V par les éléments d'un cycle périodique $\varsigma(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$ de M de $\forall x \in \varsigma(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$, h est identiquement nulle sur $x + V$.*

c) *Si l'hypothèse "(H) modulo V" est vérifiée (cf. remarque 2.6), alors*

$$\mathcal{R} = \{x_0 + V, \breve{\sigma}_m x_0 + V, \ldots, \breve{\sigma}_2 \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + V\},$$

où $x_0 = \wp(\sigma_1, \ldots, \sigma_m)$, et toute transition permise à partir d'un point de $M \cap (\breve{\sigma}_q \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + V)$ mène à un point de $M \cap (\breve{\sigma}_{q-1} \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + V)$, pour tout $1 \leq q \leq m$, avec $\sigma_0 = \sigma_m$.

d) *Si la fonction u est entière, la réunion $\mathcal{R}$ de translatés de V est elle-même invariante.*

Preuve. Si M est un cycle périodique invariant, la preuve est terminée (avec $V = \{0\}$).

Dans le cas contraire, d'après la proposition 2.3, il existe un cycle périodique non isolé dans M, soit $\varsigma(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$. Notons $x_0 = \wp(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$ le point périodique associé au m-uple $(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$.

D'après la proposition 2.5, M est contenu dans une réunion finie $\mathcal{R}$ de translatés d'un sous-espace propre V de $\mathbb{R}^d$ et h est nulle sur $x + V$, $\forall x \in \varsigma(\sigma_1, \dots, \sigma_m)$.

L'assertion c) résulte de la remarque 2.6.

Il nous reste à montrer que $\mathcal{R}$ est elle-même invariante, sous l'hypothèse que u est entière.

Désignons par $\{x_i, 1 \leq i \leq l\}$ des points de $\mathcal{O}(x_0)$ tels que

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{l} (x_i + V).$$

Soit z un élément d'un translaté $x_i + V$, $1 \leq i \leq l$. Puisque $x_i \in \mathcal{O}(x_0)$, il existe $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ dans $\mathcal{D}$ tels que les transitions

$$x_0 \to \check{\gamma}_1 x_0 \to \cdots \to \check{\gamma}_r \cdots \check{\gamma}_1 x_0 = x_i$$

soient permises.

Soit $z \to \check{\gamma} z$ une transition possible à partir de z. Pour tout $\alpha > 0$, la fonction entière $u(\check{\gamma}\check{\gamma}_r \cdots \check{\gamma}_1 .)$ n'est pas nulle sur $M \cap \mathcal{B}(x_0, \alpha)$. (En effet, dans le cas contraire, d'après la proposition 2.5, cette fonction serait nulle sur $x_0 + V$ et par suite u s'annulerait en $\check{\gamma} z$.) Pour $\alpha > 0$ assez petit, on obtient alors un élément

$$y_\alpha \in M \cap \mathcal{B}(x_0, \alpha) \subset x_0 + V$$

(proposition 2.5), pour lequel les transitions

$$y_\alpha \to \check{\gamma}_1 y_\alpha \to \cdots \to \check{\gamma}_r \cdots \check{\gamma}_1 y_\alpha \to \check{\gamma}\check{\gamma}_r \cdots \check{\gamma}_1 y_\alpha$$

sont permises. L'élément $\check{\gamma}\check{\gamma}_r \cdots \check{\gamma}_1 y_\alpha$ de M appartient à un $x_j + V$, pour un j, $1 \leq j \leq l$, car

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{l} (x_i + V).$$

Mais, puisque $y_\alpha \in x_0 + V$, il appartient aussi à $\check{\gamma} x_i + V = \check{\gamma} z + V$. On en déduit que $\check{\gamma} z \in x_j + V$.

D'où le résultat. □

III. Les ca du tore, matrices à coefficients entiers

Nous supposons maintenant que la matrice dilatante A est à coefficients entiers et que la fonction u est $\mathbb{Z}^d$-périodique. Soit $q = |\det(A)|$.

Nous choisissons pour $\mathcal{D}$ une famille de translations appartenant au réseau $\mathbb{Z}^d$, formant un *système complet de représentants* $\{\tau_0 = 0, \ldots$ $\ldots, \tau_{q-1}\}$ de $\mathbb{Z}^d / A\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{Z}^d$.

L'opérateur P_u conserve alors l'espace des fonctions f continues $\mathbb{Z}^d$-périodiques et sa restriction à cet espace ne dépend pas du choix de la famille $\mathcal{D}$ des représentants. Elle peut en effet s'écrire sous la forme:

$$P_u f(x) = \sum_{Ay = x \mod \mathbb{Z}^d} u(y) f(y), x \in \mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d.$$

Nous allons considérer des compacts invariants sur le tore $\mathbb{R}^d / \mathbb{Z}^d$ ou, de façon équivalente, des fermés invariants $\mathbb{Z}^d$-périodiques sur $\mathbb{R}^d$. La notion de fermé invariant $\mathbb{Z}^d$-périodique ne dépend pas du choix du système de représentants $\mathcal{D}$. On a en effet:

Lemme 3.1. *Soient E_1 et E_2 deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^d$ tels que toute transition possible pour le triplet $(A, u, \mathcal{D})$ à partir d'un point de E_1 mène à un point de E_2. Soit $\mathcal{D}'$ un système quelconque complet de représentants de $\mathbb{Z}^d / A\mathbb{Z}^d$ dans $\mathbb{Z}^d$.*

Alors, toute transition possible pour le triplet $(A, u, \mathcal{D}')$ à partir d'un point de $E_1 + \mathbb{Z}^d$ mène à un point de $E_2 + \mathbb{Z}^d$.

Preuve. Soit $x \in E_1$, $\ell' \in \mathbb{Z}^d$ et $\gamma' \in \mathcal{D}'$ tels que la transition $x + \ell' \to \check{\gamma}'(x + \ell')$ soit permise, c'est-à-dire: $u(A^{-1}(x + \ell' + \gamma')) > 0$.

On peut écrire $\gamma' + \ell' = \gamma + A\ell$, avec $\gamma \in \mathcal{D}$ et $\ell \in \mathbb{Z}^d$. Nous avons donc:

$$u(A^{-1}(x+\gamma)) = u(A^{-1}(x+\ell'+\gamma')) > 0,$$

ce qui montre que la transition $x \to \breve{\gamma}x$ est permise. D'après l'hypothèse, on doit avoir $\breve{\gamma}x \in E_2$, et par suite:

$$\breve{\gamma}'(x+\ell') = \breve{\gamma}x + \ell \in E_2 + \mathbb{Z}^d. \qquad \square$$

Remarques 3.2. a) Dans la situation considérée ici, l'hypothèse (H) est vérifiée.

b) Si f est une fonction positive non identiquement nulle, $\mathbb{Z}^d$-périodique, telle que: $P_u f = \lambda f$, $\lambda > 0$, l'ensemble $\{f = 0\}$, s'il est non vide, est un fermé invariant $\mathbb{Z}^d$-périodique de $\mathbb{R}^d$. En effet, pour tout $(x,\gamma) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{D}$ vérifiant $f(x) = 0$ et $u(\breve{\gamma}x) > 0$, il résulte de l'équation $P_u f = \lambda f$ que $f(\breve{\gamma}x) = 0$.

Le théorème suivant montre que, dans le cas où la fonction u est entière, ce fermé doit vérifier des conditions algébriques qui généralisent en dimension > 1 les conditions obtenues dans [**2**] pour la dimension 1.

Théorème 3.3. *Supposons que u soit une fonction entière et qu'il existe un fermé invariant $\mathbb{Z}^d$-périodique C différent de $\mathbb{R}^d$.*

Alors il existe un élément x_0 de $\mathbb{R}^d$, vérifiant $A^m x_0 = x_0 \mod \mathbb{Z}^d$, pour un entier $m \geq 1$, et un sous-espace rationnel W de $\mathbb{R}^d$ stable par A (éventuellement réduit à $\{0\}$) tels que la réunion

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k=0}^{m-1} (A^k x_0 + W + \mathbb{Z}^d)$$

soit un ensemble invariant. De plus, toute transition permise à partir d'un point de $A^k x_0 + W + \mathbb{Z}^d$, $1 \leq k \leq m$, mène à un point de $A^{k-1}x_0 + W + \mathbb{Z}^d$.

Preuve. Le sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ défini par

$$\mathcal{Q}(A,\mathcal{D}) = \left\{ \sum_{k\geq 1} A^{-k}\tau_k, \tau_k \in \mathcal{D} \right\}$$

est contenu dans K. Les points de cet ensemble possèdent un codage naturel en "base" A, à l'aide des éléments de $\mathcal{D}$. Il n'est pas difficile de montrer que les translatés par $\mathbb{Z}^d$ de l'ensemble $\mathcal{Q}(A,\mathcal{D})$ forment un recouvrement de $\mathbb{R}^d$ (cf. par exemple [9] ou [1]).

Il existe donc un élément de $\mathcal{Q}(A,\mathcal{D})$ qui n'appartient pas à C. D'après le lemme 2.7, il existe alors des éléments de $\mathcal{D}$, $\epsilon_1,\dots,\epsilon_L$, $L\geq 1$, tels que la fonction entière $h(\cdot) = u(\breve{\epsilon}_1\cdots\breve{\epsilon}_L\cdot)u(\breve{\epsilon}_1\cdots\breve{\epsilon}_{L-1}\cdot)\cdots u(\breve{\epsilon}_1\cdot)$ s'annule sur C. On note que h est $A^L\mathbb{Z}^d$-périodique.

Soit M un compact invariant minimal contenu dans C (et donc dans $C\cap K$). D'après le théorème 2.8, il existe un sous-espace vectoriel propre V de $\mathbb{R}^d$, stable par A, un point périodique $x_0 = \wp(\sigma_1,\dots,\sigma_m)$ de M et une famille finie d'éléments $\{x_i, 1\leq i\leq \ell\}$ de $\mathcal{O}(x_0)$ contenant le cycle périodique $\varsigma(\sigma_1,\dots,\sigma_m)$ tels que

$$M\subset \mathcal{R} = \bigcup_{i=1}^{\ell}(x_i+V).$$

De plus $\mathcal{R}$ est invariante et h est identiquement nulle sur $x+V$, pour tout $x\in\varsigma(\sigma_1,\dots,\sigma_m)$.

D'après le lemme 3.1, la réunion

$$\mathcal{S} = \bigcup_{i=1}^{\ell}(x_i+V+\mathbb{Z}^d)$$

est encore invariante (elle contient les trajectoires de chacun de ses points). On vérifie facilement que la fermeture d'un ensemble invariant est encore un ensemble invariant. La fermeture $\overline{\mathcal{S}}$ de $\mathcal{S}$ est donc un fermé invariant.

De plus, la fermeture de $V+\mathbb{Z}^d$ est de la forme $W+\mathbb{Z}^d$, où W est un sous-espace rationnel contenant V, stable par A.

La fonction h étant $A^L\mathbb{Z}^d$-périodique et s'annulant sur x_0+V, elle s'annule sur $x_0+V+A^L\mathbb{Z}^d$, donc sur $x_0+A^L(V+\mathbb{Z}^d)$, donc sur

$$x_0+A^L(W+\mathbb{Z}^d) = x_0+W+A^L\mathbb{Z}^d.$$

Ceci montre que W est un sous-espace propre de $\mathbb{R}^d$.

Il est immédiat que, si les éléments γ_i, τ_i, $1\leq i\leq p$, de $\mathcal{D}$ vérifient:

$$\breve{\gamma}_1\cdots\breve{\gamma}_p 0 = \breve{\tau}_1\cdots\breve{\tau}_p 0 \mod W+\mathbb{Z}^d,$$

alors nous avons, $\forall i\in\{1,\dots,p\}$, $\gamma_i=\tau_i \mod W+\mathbb{Z}^d$.

Il suffit de reprendre le raisonnement de la remarque 2.6 pour obtenir que:

$$\overline{S} = \{x_0 + W + \mathbb{Z}^d, \breve{\sigma}_m x_0 + W + \mathbb{Z}^d, \dots, \breve{\sigma}_2 \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + W + \mathbb{Z}^d\},$$

et toute transition permise, à partir d'un point de $\breve{\sigma}_q \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + W + \mathbb{Z}^d$ mène à un point de $\breve{\sigma}_{q-1} \cdots \breve{\sigma}_m x_0 + W + \mathbb{Z}^d$, $\forall q \in \{1, \dots, m\}$, avec $\sigma_0 = \sigma_m$.

On termine la démonstration du théorème en remarquant que

$$A^m x_0 = x_0 \mod \mathbb{Z}^d$$

et

$$\breve{\sigma}_q \cdots \breve{\sigma}_m x_0 = A^{m+1-q} x_0 \mod \mathbb{Z}^d, \forall q \in \{1, \dots, m\}. \qquad \square$$

IV. Appendice

Soient d un entier naturel non nul et A une matrice carrée d'ordre d, dilatante, inversible, à coefficients complexes.

Nous notons $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ les valeurs propres de A. Soit:

$$\mathcal{D}_A = \{(\rho_1, \dots, \rho_d) \in \mathbb{C}^d \colon \rho_1^{\alpha_1} \cdots \rho_d^{\alpha_d} = 1, \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d$$

vérifiant $\lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_d^{\alpha_d} = 1\}$.

Pour tout entier $s \geq 1$ et toute famille $\{\mu_1, \dots, \mu_s\}$ de s nombres complexes non nuls, nous notons $R(\mu_1, \dots, \mu_s)$ l'ensemble des s-uples d'entiers relatifs $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ vérifiant $\mu_1^{\alpha_1} \cdots \mu_s^{\alpha_s} = 1$.

Il est facile de voir que:

- ou bien, $R(\mu_1, \dots, \mu_s) = \{(0, \alpha) \colon \alpha \in R(\mu_2, \dots, \mu_s)\}$,
- ou bien, $R(\mu_1, \dots, \mu_s) = \mathbb{Z}\beta + \{(0, \alpha) \colon \alpha \in R(\mu_2, \dots, \mu_s)\}$, en désignant par $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ un élément de $R(\mu_1, \dots, \mu_s)$ avec $\beta_1 \geq 1$ minimal.

Notons que, pour tout entier relatif n, le vecteur $(\lambda_1^n, \dots, \lambda_d^n)$ appartient à $\mathcal{D}_A$. D'autre part, pour tout vecteur $(v_1, \dots, v_d)$ orthogonal à $R(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, pour le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^d$, le vecteur $(e^{tv_1}, \dots, e^{tv_d})$ appartient à $\mathcal{D}_A$, pour tout nombre complexe t. En particulier, pour tout $t \in \mathbb{C}$, le vecteur $(e^{t \ln|\lambda_1|}, \dots, e^{t \ln|\lambda_d|})$ appartient à $\mathcal{D}_A$. On notera que si deux valeurs propres de A sont égales, par exemple

$\lambda_1 = \lambda_2$, alors $\mathbb{Z}(1,-1,0,\ldots,0) \subset R(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)$, et $\forall(\rho_1,\ldots,\rho_d) \in \mathcal{D}_A$, $\rho_1 = \rho_2$. Nous désignons par I_d la matrice identité d'ordre d.

Pour toute matrice carrée inversible M, d'ordre d, notons T_M l'opérateur de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_d]$ défini par $T_M(P) = P \circ M$. Cet opérateur respecte le degré et par conséquent agit sur tous les sous-espaces $\mathbb{C}_n[X_1,\ldots,X_d]$, $n \geq 0$, des polynômes de degré au plus n. Nous notons I l'opérateur identité de $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_d]$.

Le lemme suivant donne la décomposition d'une fonction entière en série de polynômes caractéristiques pour A.

Lemme 4.1. *Lorsque A est diagonalisable, l'opérateur T_A est semi-simple. Les sous-espaces propres $\{\ker(T_A - \mu I); \mu \in \mathbb{C})$ de T_A sont de dimension finie. Si Q est une matrice qui diagonalise A (c'est-à-dire telle que $A = Q\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_d)Q^{-1}$), alors tout polynôme propre P pour l'opérateur T_A est un polynôme propre pour l'opérateur $T_{Q\,\mathrm{diag}(\rho_1,\ldots,\rho_d)Q^{-1}}$, quel que soit le vecteur $(\rho_1,\ldots,\rho_d)$ de $\mathcal{D}_A$.*

Toute fonction entière g sur $\mathbb{C}^d$ s'écrit

$$g = \sum_{j\geq 1} P_j, \text{ avec, pour tout } j \geq 1,\ P_j \circ A = \mu_j P_j,$$

et $|\mu_1| = \cdots = |\mu_{r_1}| < \cdots < \left|\mu_{r_q} + 1\right| = \cdots \left|\mu_{r_{q+1}}\right| < \cdots$

Dans le cas général, écrivons $A = SU = US$ avec S diagonalisable et U unipotente (i.e. telle que $U - I_d$ soit nilpotente). Les opérateurs T_S et T_U sont respectivement semi-simple et unipotent. Les sous-espaces caractéristiques $\{\oplus_{s\geq 1}\ker(T_A - \mu I)^s; \mu \in \mathbb{C}\}$ de T_A sont de dimension finie.

Toute fonction entière g sur $\mathbb{C}^d$ s'écrit

$$g = \sum_{j\geq 1} P_j, \text{ avec } P_j \in \ker(T_A - \mu_j I)^{s_j}, P_j \notin \ker(T_A - \mu_j I)^{s_j - 1},$$

et $|\mu_1| = \cdots = |\mu_{r_1}| < \cdots < \left|\mu_{r_q} + 1\right| = \cdots \left|\mu_{r_{q+1}}\right| < \cdots$

Preuve. *Cas diagonalisable.* L'étude se ramène au cas où

$$A = \mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_d).$$

Dans ce cas, tout monôme de $\mathbb{C}[X_1, \dots, X_d]$ est propre pour T_A:

$$(x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}) \circ A = \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_d^{\alpha_d} x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}.$$

Comme les valeurs propres λ_j, $1 \leq j \leq d$, sont toutes de module > 1, pour tout nombre réel $\rho > 0$, il existe un nombre fini (éventuellement nul) de d-uples $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ tels que $\left|\lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_d^{\alpha_d}\right| = \rho$. Ceci montre que les sous-espaces propres de T_A sont de dimension finie.

Deux monômes quelconques $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ et $x^\beta = x_1^{\beta_1} \cdots x_d^{\beta_d}$ d'un polynôme propre P, de T_A, sont tels que le vecteur $(\alpha_1 - \beta_1, \dots, \alpha_d - \beta_d)$ appartient à $R(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$. On en déduit que P est propre pour la matrice $\mathrm{diag}(\rho_1, \dots, \rho_d)$, pour tout vecteur $(\rho_1, \dots, \rho_d)$ de $\mathcal{D}_A$.

Si g est une fonction entière, on obtient la décomposition voulue en réordonnant les monômes qui interviennent dans sa décomposition en série entière.

Cas général. On utilise la relation $T_A = T_S \circ T_U$ et le fait que, pour tout entier $s \geq 1$ et tout $\mu \in \mathbb{C}$,

$$\ker(T_A - \mu I)^s = \ker(T_S - \mu I) \cap \ker(T_U - I)^s. \qquad \square$$

Proposition 4.2. *Soit $g: \mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$ une fonction entière. Soient $x \in \mathbb{C}^d$ et r un entier ≥ 1 tels que $g(A^{-rk}x) = 0$, $\forall k \geq 0$. Désignons par*

$$g = \sum_{j \geq 1} P_j$$

une décomposition de g en série de polynômes caractéristiques pour A donnée par le lemme 4.1.

i) *Lorsque A est diagonalisable, nous avons, pour tout entier $k \geq 0$,*

$$\forall j \geq 1, \;\; P_j(A^{-rk}x) = 0.$$

ii) *Dans le cas général, nous avons, pour tout entier $k \geq 0$,*

$$\forall j \geq 1, \forall 0 \leq \ell \leq s_j - 1, (T_U - I)^\ell P_j(A^{-rk}x) = 0.$$

Preuve. **(Cas diagonalisable.)** Nous montrons la propriété par récurrence. Supposons que cette propriété soit vraie pour $j \leq p$, $p \geq 0$, en convenant que $P_0 = 0$. Pour tout $y \in \mathbb{C}^d$, nous avons

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mu_{p+1}^{rk} \left(g - \sum_{\ell=0}^{p} P_\ell \right) (A^{-rk}y) = P_{p+1}(y),$$

ce qui permet d'en déduire que la propriété est vraie pour $j \leq p+1$.

Cas général. Pour tous entiers $j \geq 1$ et $n < 0$, nous avons

$$P_j \circ A^n = ((T_U - I) + I)^n T_S^n P_j = \mu_j^n \sum_{\ell=0}^{s_j-1} C_n^\ell (T_U - I)^\ell P_j,$$

où l'on a noté, pour tout $n < 0$, $C_n^\ell = n(n-1)\cdots(n-\ell+1)/\ell!$.

Nous ordonnons les polynômes

$$P_{j,\ell} = (T_U - I)^\ell P_j, \ j \geq 1, \ 0 \leq \ell \leq s_j - 1,$$

à l'aide de la relation d'ordre

$$(j,\ell) \leq (j',\ell') \Leftrightarrow \{|\mu_j| < |\mu_{j'}|\} \text{ ou } \{|\mu_j| = |\mu_{j'}| \text{ et } \ell \geq \ell'\}.$$

Notons que

$$g \circ A^n = \sum_{j\geq 1} \sum_{\ell=0}^{s_j-1} \mu_j^n C_n^\ell P_{j,\ell}.$$

Nous montrons la propriété par récurrence. Supposons que

$$P_{j,\ell}(A^{-mk}x) = 0,$$

pour tout $k \geq 0$ et tout $(j,\ell) \leq (j_0,\ell_0)$, avec la convention $P_{0,0} = 0$.

Appelons P_{j_1,ℓ_1} le polynôme succédant à P_{j_0,ℓ_0}. De la convergence

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_{j_1}^{rk}}{C_{-rk}^{\ell_1}} \left(g(A^{-rk}y) - \sum_{(j,\ell)\leq(j_0,\ell_0)} \mu_j^{-rk} C_{-rk}^\ell P_{j,\ell}(y) \right) = P_{j_1,\ell_1}(y),$$

il résulte que $P_{j_1,\ell_1}(A^{-rk}x) = 0$, $\forall k \geq 1$. D'où la propriété. □

Lorsque A est diagonalisable, nous désignons par $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_d)$ une base de vecteurs propres de A: $A\epsilon_i = \lambda_i \epsilon_i$, $1 \leq i \leq d$.

Dans le cas général, nous désignons par $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_d)$ une base de $\mathbb{C}^d$ telle que:

$$S\epsilon_i = \lambda_i \epsilon_i, 1 \leq i \leq d; \epsilon_i \in \ker(U - I_d)^{\nu_i} \quad \text{et} \quad \epsilon_i \notin \ker(U - I_d)^{\nu_i - 1}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{C}$, posons

$$U^t = (I_d + (U - I_d))^t = \sum_{\ell=0}^{q-1} \frac{t(t-1)\cdots(t-\ell+1)}{\ell!}(U - I_d)^\ell,$$

où q est l'ordre de nilpotence de $(U - I_d)$.

En utilisant les notations et hypothèses de la proposition 4.2, nous avons:

Corollaire 4.3. *Soit* $x = \sum_{i=1}^{d} x_i \epsilon_i$.

i) *Lorsque A est diagonalisable, pour tout vecteur $(\rho_1, \dots, \rho_d)$ de $\mathcal{D}_A$ et tout entier $j \geq 1$,*

$$g\left(\sum_{i=1}^{d} x_i \rho_i \epsilon_i\right) = 0 \quad \text{et} \quad P_j\left(\sum_{i=1}^{d} x_i \rho_i \epsilon_i\right) = 0$$

ii) *Dans le cas général, nous avons, pour tout vecteur $(\rho_1, \dots, \rho_d)$ de $\mathcal{D}_A$, tous entiers $j \geq 1$ et $0 \leq l \leq s_j - 1$, et tout nombre complexe t,*

$$g\left(\sum_{i=1}^{d} x_i \rho_i U^t \epsilon_i\right) = 0 \quad \text{et} \quad (T_U - I)^l P_j\left(\sum_{i=1}^{d} x_i \rho_i U^t \epsilon_i\right) = 0.$$

Preuve. Dans le cas diagonalisable, le corollaire résulte immédiatement du lemme 4.1 et de la proposition 4.2.

Dans le cas général, soient $j \geq 1$, $0 \leq \ell < s_j$ et $y \in \mathbb{C}^d$ tels que $P_{j,\ell}(y) = (T_U - I)^\ell P_j(y) = 0$. Puisque $P_{j,\ell}$ est propre pour T_S, comme dans le cas diagonalisable, nous avons:

$$P_{j,\ell}[Q \operatorname{diag}(\rho_1, \dots, \rho_d) Q^{-1} y] = 0,$$

pour tout vecteur $(\rho_1, \dots, \rho_d)$ de $\mathcal{D}_A$.

D'autre part, soient $j \geq 1$ et $y \in \mathbb{C}^d$ tels que $P_{j,\ell}(y) = 0$, pour $0 \leq \ell < s_j$. Alors, pour tout $0 \leq \ell < s_j$ et tout $t \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned}(T_U - I)^\ell P_j(U^t y) &= (T_U - I)^\ell T_U^t P_j(y) \\ &= \sum_{k=0}^{s_j-\ell-1} \frac{t(t-1)\cdots(t-k+1)}{k!} (T_U - I)^{k+\ell} P_j(y) = 0.\end{aligned}$$

□

Ceci conduit à l'énoncé suivant, que nous avons utilisé au paragraphe II:

Proposition 2.4. *Si $g(\cdot) = \sum_{j\geq 1} P_j(\cdot)$ est la décomposition en série de polynômes caractéristiques pour A de la fonction entière g, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $r \in \mathbb{N}^*$, les conditions suivantes sont équivalentes:*
(i) $g(A^{-rk}x) = 0, \ \forall k \geq 0,$
(ii) $P_j(A^{-rk}x) = 0, \ \forall k \geq 0, \ \forall j \geq 1,$
(iii) $P_j(A^k x) = 0, \ \forall k \in \mathbb{Z}, \ \forall j \geq 1,$
(iv) $g(A^k x) = 0, \ \forall k \in \mathbb{Z}.$

Preuve. La proposition 2.4 résulte du corollaire 4.3, en prenant,

- dans le cas diagonalisable: $(\rho_1, \dots, \rho_d) = (\lambda_1^n, \dots, \lambda_d^n)$, avec $n \in \mathbb{Z}$. On a alors:
$$\sum_{i=1}^{d} x_i \rho_i \epsilon_i = A^n x.$$
- dans le cas général: $(\rho_1, \dots, \rho_d) = (\lambda_1^n, \dots, \lambda_d^n)$ et $t = n$, $n \in \mathbb{Z}$. En utilisant la commutation de S et de U, on obtient:
$$\sum_{i=1}^{d} x_i \rho_i U^t \epsilon_i = A^n x. \qquad \square$$

Remarque 4.4. Supposons que les λ_j, $1 \leq j \leq d$, admettent les décompositions polaires $\rho_j e^{2i\pi\beta_j}$ vérifiant:
$$\sum_{j=1}^{d} \alpha_j \beta_j = 0, \ \forall (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in R(\lambda_1, \dots, \lambda_d).$$
(A priori ces égalités ne sont vraies que modulo 1). Alors en écrivant
$$A[\text{resp. } S] = Q \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d) Q^{-1} = e^D,$$
avec Q matrice inversible et
$$D = Q \operatorname{diag}[\ln(\rho_1) + 2i\pi\beta_1, \dots, \ln(\rho_d) + 2i\pi\beta_d] Q^{-1},$$
les relations du corollaire contiennent les égalités:
$$g(e^{tD}x) = 0, \ \forall t \in \mathbb{C} \ [\text{resp. } g(e^{t_1 D} U^{t_2} x) = 0, \ \forall t_1, t_2 \in \mathbb{C}].$$

La propriété ci-dessus n'est pas toujours satisfaite par les valeurs propres λ_j, $1 \leq j \leq d$. Cependant elle l'est toujours pour une puissance entière $p \geq 1$ des λ_j. Si bien qu'on a toujours les égalités précédentes, avec $A^p[\text{resp.}\, S^p] = e^D$.

Bibliographie

[**1**] Conze, J.-P., Hervé, L. et Raugi, A.: *Pavages auto-affines, opérateurs de transfert et critères de réseau.* Prétirage, 1995.

[**2**] Conze, J.-P. et Raugi, A.: *Fonctions harmoniques pour un opérateur de transition et applications.* Bull. Soc. Math. France **118** (1990), 273–310.

[**3**] Gröchenig, K. and Haas, A.: *Self-similar lattice tilings.* J. Fourier Anal. et Appl. **1** (1994), 131–170.

[**4**] Gröchenig, K. and Madych, W. R.: *Multiresolution analysis, Haar bases and self-similar tilings.* IEEE Trans. Inform. Th. **38** (2), Part 2, (1992), 556–568.

[**5**] Hennion, H.: *Sur un théorème spectral et son application aux noyaux lipschitziens.* Proc. A. M. S. **118** (1993), 627–634.

[**6**] Hervé, L.: *Construction et régularité des fonctions d'échelle.* SIAM J. Math. Analysis. Vol. **26, 5** (1995), p. 1361-1385.

[**7**] Ionescu-Tulcea, C. T. and Marinescu, G.: *Théorie ergodique pour une classe d'opérations non complètement continues.* Annals of Math. **52** (1950), 140–147.

[**8**] Keane, M.: *Strongly mixing g-measures.* Inventiones Math. **16** (1972), 309–324.

[**9**] Lagarias, J. C. and Wang, Y.: *Integral self-affine tiles in* $\mathbb{R}^n$, à paraître dans J. London Math. Soc.

[**10**] Lagarias, J. C. and Wang, Y.: *Integral self-affine tiles in* $\mathbb{R}^n$. II. Prétirage.

[**11**] Meyer, Y.: *Ondelettes et Opérateurs.* Hermann, 1990.

[**12**] Norman, M. F.: *Markov Processes and Learning Models.* Academic Press, 1972.

[**13**] Ruelle, D.: *Statistical Mechanics of a one-dimensional lattice gas.* Comm. Math. Phys. **9**, (1968), 267–278.

[**14**] Ruelle, D.: *The thermodynamic formalism for expanding maps.* Comm. Math. Phys. **125**, (1989), 239–262.

[**15**] Ruelle, D.: *An extension of the theory of Fredholm determinants.* I.H.E.S. Publ. **72**, (1990), 175–193.

D. Cerveau, J.-P. Conze et A. Raugi
Université de Rennes I
Campus de Beaulieu
35042, Rennes Cedex, France

Courier életronique:
conge@univ-rennes1.fr
raugi@univ-rennes1.fr