Nova Série
BOLETIM
DA SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

Bol. Soc. Bras. Mat., Vol. 30, N. 1, 61-93

Un codage sofique des automorphismes hyperboliques du tore

Stéphane Le Borgne

Resumé. Nous étudions les propriétés géométriques et algébriques du codage des automorphismes hyperboliques du tore défini dans [L3]. Nous donnons également des preuves détaillées pour la construction de ce codage qui diffère en plusieurs points de celle proposée (indépendamment) dans [KV].
Mots Clef: Codage, automorphisme, partition markovienne.

Abstract. We study geometrical and algebraic properties of the coding for hyperbolic automorphisms of the torus defined in [L3]. We also give the detailed construction of this coding which differs from the one independantly proposed in [KV] in several points.
Keywords: Coding, automorphism, Markov partition.

I. Introduction

Vershik [V2] a posé la question de l'existence de bons codages pour un automorphisme hyperbolique du tore de dimension $d \geq 2$ et proposé une approche algébrique pour leur construction. Il s'agit de trouver des systèmes symboliques codant l'automorphisme tels que certaines structures algébriques propres à l'automorphisme (feuille dilatante, points homoclines, ...) soient transportées dans le système symbolique.

En effet, les constructions géométriques existantes de partitions markoviennes ([AW]) ne sont pas entièrement satisfaisantes de ce point de vue et il est connu ([Bo],[C]) que, sauf dans les situations se réduisant au cas de la dimension deux, la géométrie de ces partitions markoviennes présente une certaine pathologie. Il est donc utile de trouver une autre méthode. Lorsque l'automorphisme n'a qu'une valeur propre β de module supérieur à 1 réelle positive (β est alors un nombre de Pisot),

Received 30 April 1997.

Bertrand-Mathis [B] a montré comment obtenir un codage régulier par le β-décalage bilatère, système sofique construit à partir des écritures des réels en base β. En 1995 nous avons donné une construction de type algébrique, basée sur une méthode de Thurston [T], d'un codage pour un automorphisme hyperbolique quelconque du tore. Cette construction, généralisant celle de Bertrand-Mathis, a fait l'objet d'une note ([L3]). Indépendamment Kenyon et Vershik ([KV]) ont utilisé un argument similaire pour construire un codage. Mentionnons également un travail récent de M.Einsiedler et K.Schmidt ([ES]), dont avons eu connaissance après la rédaction de cet article, où une méthode analogue est appliquée pour montrer la soficité de codages de certains automorphismes de groupes compacts abéliens (dont les automorphismes hyperboliques du tore).

Nous présentons ici une étude des propriétés du codage décrit dans [L3].

Dans la première section nous exposons brièvement quelques rappels et fixons les notations.

La deuxième section présente la construction du codage. Il s'agit d'une méthode simple et nouvelle pour coder les automorphismes hyperboliques du tore. L'application réalisant le codage est donnée sous la forme explicite d'une série. Le point de départ est la définition, à l'aide de l'ordre lexicographique, d'un analogue dans la feuille dilatante du β-développement des réels. Nous montrons que, sous une hypothèse simple, l'adhérence (pour la topologie produit) de l'ensemble des développements obtenus est un système sofique. Après avoir calculé l'entropie de ce système sous certaines conditions naturelles, nous explicitons le codage.

La troisième section est consacrée à l'étude de propriétés géométriques du codage. Cette étude est menée en grande partie grâce à l'utilisation de propriétés d'autosimilarité qu'il est très facile d'établir à partir de l'expression de l'application de codage. Le problème de l'injectivité presque sûre est abordé et une partition markovienne associée est construite.

Dans la dernière section nous étudions certaines propriétés algébriques des objets introduits : choix d'un alphabet d'entiers, écritures finies ou périodiques. Plusieurs questions restent ouvertes, cependant il apparaît que la méthode proposée est bien adaptée à l'étude des questions algébriques qui nous intéressent. Par ailleurs une grande liberté est laissée dans la construction. Aussi peut-on espérer que parmi tous les codages possibles obtenus certains fournissent un modèle symbolique naturel de l'automorphisme et des structures algébriques assosiées.

II. Préliminaires

II.a Quelques rappels sur les systèmes sofiques.

Nous rappelons très rapidement quelques résultats sur les systèmes sofiques qui seront utilisés par la suite. Pour une étude plus complète des propriétés de ces systèmes nous renvoyons aux articles de Fischer [F] et Krieger [Kr] ou au livre de Lind et Marcus [LM].

Soit S un ensemble fini. Sur $S^{\mathbb{Z}}$ muni de la topologie produit notons σ l'application (décalage)

$$\sigma \ : \ S^{\mathbb{Z}} \longrightarrow S^{\mathbb{Z}} : (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \longmapsto (x_{i+1})_{i\in\mathbb{Z}} .$$

On appelle sous-décalage un sous-ensemble Y de $S^{\mathbb{Z}}$ qui est fermé et σ-invariant. Par restriction il est muni de façon naturelle du décalage σ. Un sous-décalage est caractérisé par l'ensemble des mots "autorisés" à apparaître dans ses éléments. Pour tout sous-décalage (Y, σ), nous notons $\mathcal{B}(Y,n)$ l'ensemble des mots de longueur n de Y et $\mathcal{B}(Y)$ l'ensemble des mots de Y. Etant donnés deux mots x et y, nous notons xy leur concaténation. Etant données deux suites $(x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ et $(x_i')_{i\in\mathbb{Z}}$, soit k le plus grand des $|i|$ tels que $|j| \leq |i|$ entraîne $x_j = x_j'$ et posons

$$d(x, x') = 2^{-k}.$$

Pour tout sous-décalage Y, cette quantité définit une distance sur Y, induisant sur Y la topologie produit, et donne un sens à la notion d'application höldérienne de Y dans un espace métrique. L'entropie topologique d'un sous-décalage Z, sur lequel on fait opérer σ, est notée $h(Z, \sigma)$. Un mot de Y de longueur n indexé $(c_k, \dots, c_{k+n-1})$ étant donné, on définit

$$C\left(c_k, \ldots, c_{k+n-1}\right) = \{y \in Y : \ \forall j = k, \ldots, k+n-1, \ y_j = c_j\}.$$

Un sous-décalage $Y \subset S^{\mathbb{Z}}$ est dit *de type fini* s'il peut être défini à l'aide d'un ensemble fini de mots $\mathcal{E}$ par la condition : "aucun élément de $\mathcal{E}$ n'apparaît dans une suite $y \in Y$" (nous écrivons dans ce cas en abrégé "Y est un STF"). L'ensemble $\mathcal{E}$ représente l'ensemble des mots "interdits" du sous-décalage Y. On dit qu'un sous-décalage est un *système sofique* s'il est facteur topologique d'un sous-décalage de type fini (appelé recouvrement du système sofique).

Quitte à changer d'alphabet, on peut toujours considérer qu'un sous-décalage de type fini est l'ensemble de suites déterminées par la donnée d'une matrice carrée de 0 et de 1 fixant les transitions autorisées. Un système sofique peut être caractérisé de manière semblable comme l'ensemble des suites définies par un graphe.

Soit G un graphe orienté ayant un nombre fini de sommets et dont les flèches sont étiquetées par un ensemble S (alphabet). Soit $Y = Y(G)$ l'ensemble des suites unilatères $(y_0, y_1, \ldots)$ telles qu'il existe un chemin dans G dont les arcs sont étiquetés $(y_0, y_1, \ldots)$. L'ensemble Y est un sous-décalage unilatère appelé sous-décalage engendré par G. On peut aussi définir le sous-décalage bilatère engendré par G :

$$Z(G) = \{(y_i)_{i \in \mathbb{Z}} \quad / \ \forall n \quad (y_n, \ldots) \in Y(G)\}.$$

Un système est sofique si et seulement s'il est engendré par un graphe.

Un graphe de Shannon est un graphe dans lequel deux flèches partant d'un même sommet portent des étiquettes différentes. Csizar et Komlos ([CK]) ont montré que tout système sofique est engendré par un graphe de Shannon. On appelle graphe de Shannon minimal engendrant X un graphe de Shannon engendrant X qui a le nombre minimal de sommets.

On dit qu'un graphe est transitif si, pour tout couple de sommets, il existe un chemin dans le graphe les joignant. On dit qu'un sous-décalage (Y, σ) est *transitif* si, pour tout couple (x, z) de mots de Y, il existe un troisième mot y tel que la concaténation xyz soit encore un mot de Y. Ces deux notions de transitivité sont liées : un graphe de Shannon minimal engendrant un système sofique transitif est transitif.

Un sous-décalage (Y, σ) est dit *IES* si (Y, σ) est intrinsèquement ergodique (i.e. possède une unique mesure de probabilité ν d'entropie maximale) et si ν charge les ouverts non vides. Un système sofique Y est IES si et seulement s'il est transitif. Dans ce cas tout sous-décalage strictement inclus dans Y est d'entropie topologique strictement plus petite que celle de Y.

II.b Automorphismes hyperboliques, notations

Soit M une matrice carrée de taille $d \times d$, à coefficients entiers, de déterminant ± 1, sans valeur propre de module 1. Cette matrice permet de définir un automorphisme (dit hyperbolique), noté T_M ou simplement T, du tore de dimension d par :

$$T_M : \mathbb{T}^d \longrightarrow \mathbb{T}^d \ : \ \xi \longmapsto M\xi \bmod 1.$$

La mesure de Lebesgue m sur $\mathbb{T}^d$ est invariante par T. On peut donc considérer le système dynamique $\left(\mathbb{T}^d, T, m\right)$.

Nous notons F_u (resp. F_s) le sous-espace vectoriel M-stable associé aux valeurs propres de M de module supérieur (resp. inférieur) à 1, π_u (resp. π_s) la projection sur F_u (resp. F_s) parallèlement à F_s (resp. F_u) et M_u (resp. M_s) la restriction de M à F_u (resp. F_s).

Nous fixons une fois pour toute une norme $\|\ \|$ sur $\mathbb{R}^d$. Elle induit des normes sur F_u et F_s. Nous notons $B(\xi, \delta)$ (resp. $B_u(\xi, \delta)$, $B_s(\xi, \delta)$) la boule fermée de $\mathbb{R}^d$ (resp. F_u, F_s) de centre ξ et de rayon δ. Pour une partie K de $\mathbb{R}^d$, de F_u ou de F_s, nous notons ∂K le bord de K. Etant donnés deux ensembles $K_u \subset F_u$ et $K_s \subset F_s$, nous écrivons indifféremment $K_u \times K_s$ ou $K_u + K_s$.

Nous désignerons par m_u (resp. m_s) une mesure de Lebesgue portée par F_u (resp. F_s).

La norme $\|\ \|$ induit une distance $d(\ ,\ )$ sur $\mathbb{R}^d$ qui détermine à son tour une distance sur le tore $\mathbb{T}^d$ que nous noterons encore $d(\ ,\ )$.

III. Construction du codage

Le codage que nous proposons ci-dessous est basé sur la notion d'ordre lexicographique qui fournit une caractérisation possible des β-développements utilisés par Bertrand-Mathis dans [B]. Il pourrait sembler également naturel de chercher à construire un codage de l'automorphisme à partir d'une β-transformation multidimensionnelle définie par M_u et un réseau sur F_u. Une telle construction est parfois possible mais le codage obtenu n'est qu'exceptionnellement sofique (on peut montrer (*voir* [L4]) que si le polynôme caractéristique de M a des racines de modules supérieurs à 1 distincts ou de la forme $\rho \exp(2i\pi s)$ avec s irrationnel, alors ce codage n'est pas sofique).

III.a M_u-développement

Dans ce paragraphe nous définissons une écriture des points de F_u en "base" M_u^{-1} et étudions l'ensemble de ces écritures sous certaines conditions naturelles.

Donnons-nous un ensemble fini E d'éléments de F_u. C'est l'alphabet avec lequel nous écrirons les M_u-développements. Considérons l'ensemble

$$W = \left\{ \sum_0^\infty M_u^{-i} e_i \quad / \quad (e_i) \in E^{\mathbb{N}} \right\}.$$

Cet ensemble compact est caractérisé par la relation

$$W = \bigcup_{e \in E} \left(M_u^{-1} W + e \right).$$

Fixons un ordre sur E. Cet ordre induit un ordre lexicographique sur $E^{\mathbb{N}}$.

Définition III.1. Soit w un élément de W. Nous appelons *M_u-développement* de w le plus grand des éléments e de $E^{\mathbb{N}}$ tels que $w = \sum M_u^{-i} e_i$. Un mot $e_0 \ldots e_k$ est dit admissible, s'il existe un M_u-développement commençant par $e_0 \ldots e_k$.

Notons Y l'adhérence de l'ensemble des M_u-développements des points de W (pour la topologie produit sur $E^{\mathbb{N}}$). L'ensemble des mots du sous-décalage unilatère Y est l'ensemble des mots admissibles. Donnons une caractérisation simple des mots admissibles. A partir de la définition, on voit facilement qu'un mot $e_0 \ldots e_k$ est admissible si et seulement s'il existe une suite $e_{k+1}e_{k+2}\dots$ telle que, pour tout mot $c_0\dots c_k$ supérieur strictement à $e_0\dots e_k$ et toute suite $c_{k+1}\dots$, on ait

$$\sum_{i=0}^{\infty} M_u^{-i} e_i \neq \sum_{i=0}^{\infty} M_u^{-i} c_i,$$

ou encore (en prenant l'image par M^{k+1})

$$\sum_{i=0}^{k} M_u^{k+1-i}(e_i - c_i) + \sum_{i=k+1}^{\infty} M_u^{k+1-i} e_i \neq \sum_{i=k+1}^{\infty} M_u^{k+1-i} c_i.$$

Notons $a_{k+1}(c,e)$ la quantité $\sum_0^k M^{k+1-i}(e_i - c_i)$, et $A'_{e_0\dots e_k}$ l'ensemble des vecteurs $a_{k+1}(c,e)$ lorsque $c_0\dots c_k$ décrit l'ensemble des mots supérieurs strictement au mot $e_0\dots e_k$. Ce qui précède permet alors de voir que $e_0\dots e_k$ est admissible si et seulement si

$$W \not\subset \bigcup_{a\in A'_{e_0\dots e_k}} (W-a).$$

Désignons par $W-W$ l'ensemble $\left\{w-w' \ / \ (w,w')\in W^2\right\}$. Si a n'appartient pas à $W-W$, $W\cap(W-a) = \varnothing$ (parmi les mots $c_0\dots c_k$ supérieurs à $e_0\dots e_k$ seuls nous intéressent ceux qui peuvent être le début d'une écriture d'un $\sum_{i=0}^{\infty} M^{-i}e_i$). Posons donc

$$A_{e_0\dots e_k} = A'_{e_0\dots e_k} \cap (W-W).$$

On obtient la caractérisation suivante des mots admissibles : un mot $e_0\dots e_k$ est admissible si et seulement si

$$W \not\subset \bigcup_{a\in A_{e_0\dots e_k}} (W-a).$$

Cette condition fournit un graphe engendrant Y. Ce graphe est défini par ses sommets (les $A_{e_0\dots e_k}$ tels que $(e_0\dots e_k)$ soit admissible (*a priori* en nombre infini)) et ses flèches (une flèche numérotée e_{k+1} joint $A_{e_0\dots e_k}$ à $A_{e_0\dots e_{k+1}}$).

Lemme III.2. *Lorsque E est un ensemble de projections par π_u d'éléments de $\mathbb{Z}^d$, l'ensemble des vecteurs $a_i(c,e)$ (i décrivant $\mathbb{N}$, c et e décrivant $E^{\mathbb{N}}$) est discret dans F_u. En particulier les vecteurs $a_i(c,e)$ appartenant au compact $W-W$ sont en nombre fini.*

Preuve. Considérons l'ensemble Ξ de points à coordonnées entières tel que π_u soit une bijection de Ξ sur E. On peut écrire

$$a_{k+1}(c,e) = \sum_0^k M_u^{k+1-i}(e_i - c_i) = \pi_u\left(\sum_0^k M^{k+1-i}(x_i - y_i)\right)$$

où x_i et y_i sont dans Ξ tels que $\pi_u(x_i) = e_i$ et $\pi_u(y_i) = c_i$. Notons $\alpha_{k+1}(y,x)$ le vecteur à coordonnées entières $\sum_0^k M^{k+1-i}(x_i - y_i)$. Comme M_s est contractante et Ξ est fini, les quantités $\pi_s(\alpha_{k+1}(y,x))$ sont bornées par une borne R indépendante des suites x et y choisies. Donnons-nous un ensemble B borné de F_u. L'ensemble des points z de $\mathbb{Z}^d$ tels $\pi_u(z) \in B$ et $||\pi_s(z)|| \leq R$ est fini, donc l'ensemble des $a_{k+1}(c,e)$ appartenant à B aussi. □

On en déduit immédiatement le théorème suivant :

Théorème III.3. *Si E est un ensemble de projections (par π_u) d'éléments du réseau $\mathbb{Z}^d$, Y est sofique.* □

Preuve. Comme le montre le lemme précédent, les $A_{e_0 \dots e_k}$ sont dans ce cas des parties d'un ensemble fini, donc en nombre fini. Ainsi, Y est engendré par un graphe fini, et Y est sofique. □

Bien évidemment pour obtenir un codage de $\left(\mathbb{T}^d, T\right)$ à partir de Y, il faut que Y soit d'une certaine manière suffisamment gros. Pour cela, nous montrons qu'il est possible de choisir E de sorte que W ait de bonnes propriétés topologiques.

Soit $\mathcal{K}$ l'ensemble des compacts de F_u.

L'application

$$\Gamma \;:\; \mathcal{K} \longrightarrow \mathcal{K} \;:\; K \longmapsto \Gamma(K) = \bigcup_{e \in E}\left(M^{-1}K + e\right)$$

est contractante pour la distance de Hausdorff sur $\mathcal{K}$ induite par une norme adéquate sur F_u. Pour tout compact K, $\Gamma^n(K)$ converge donc vers W, unique point fixe de Γ. Nous en déduisons la proposition suivante.

Proposition III.4. *On peut toujours choisir un sous-ensemble E de $\pi_u\left(\mathbb{Z}^d\right)$ tel que W soit un voisinage de 0.*

Preuve. Soit U un compact tel que $U \subset \bigcup_{e \in E} \left(M^{-1}U + e\right)$, alors U est inclus dans W. En effet, la relation $U \subset \bigcup_{e \in E} \left(M^{-1}U + e\right)$ entraîne, Γ étant croissante pour l'inclusion, $U \subset \Gamma^k(U)$ pour tout k, donc $U \subset W$.

Considérons alors, dans F_u, la boule compacte de rayon positif δ, $B_u(0, \delta)$. D'après le théorème de Kronecker $\pi_u\left(\mathbb{Z}^d\right)$ est dense dans F_u, donc la famille des ouverts $\left(M^{-1}B_u(0, \delta)^\circ + e\right)_{e \in \pi_u\left(\mathbb{Z}^d\right)}$ forme un recouvrement de $B_u(0, \delta)$. Un sous-recouvrement fini fournit un ensemble $E \subset \pi_u\left(\mathbb{Z}^d\right)$ tel que

$$B_u(0, \delta) \subset \bigcup_{e \in E} \left(M^{-1}B_u(0, \delta) + e\right),$$

et l'ensemble W défini par un tel E contient $B_u(0, \delta)$. □

Pour un mot $e = e_1 \ldots e_k$, notons W_e l'ensemble des points de W dont le M_u-développement commence par e. La famille $\{W_e\}_{e \in E^k}$ forme une partition de W (W_e n'est non vide que si e est admissible). Pour un mot $e = e_1 \ldots e_k$, notons v_e le vecteur $e_1 + M^{-1}e_2 + \ldots + M^{-k+1}e_k$. On peut écrire :

$$W_e = \left(M^{-k}W + v_e\right) \setminus \left(\bigcup_{c \in E^k, c > e} \left(M^{-k}W + v_c\right)\right).$$

Proposition III.5. *Pour tout mot admissible e, l'ensemble W_e et son adhérence ont même intérieur.*

Preuve. Remarquons tout d'abord que le compact W est l'adhérence de son intérieur. En effet, l'ensemble $\bigcup_{e \in E} \left(M^{-1}W^\circ + e\right)$ est un ouvert inclus dans W donc dans W°. Ainsi $\overline{\bigcup \left(M^{-1}W^\circ + e\right)} = \bigcup \left(M^{-1}\overline{W^\circ} + e\right)$ est inclus dans $\overline{W^\circ}$, c'est-à-dire $\Gamma\left(\overline{W^\circ}\right) \subset \overline{W^\circ}$ et, en itérant, $\Gamma^k\left(\overline{W^\circ}\right) \subseteq \overline{W^\circ}$ pour tout k entier naturel. Or $\Gamma^k\left(\overline{W^\circ}\right)$ converge vers W, donc $W \subseteq \overline{W^\circ}$. L'inclusion inverse étant triviale (W est compact), cela montre $W = \overline{W^\circ}$.

On a donc les relations

$$W = \overline{W} = \overline{W^\circ} \qquad W^\circ = \left(\overline{W}\right)^\circ.$$

Toute boule ouverte rencontrant la frontière de W rencontre donc W° et le complémentaire de W.

Revenons aux ensembles W_e. On a l'inclusion suivante :

$$\partial W_e \subset \bigcup_{c \in E^k, c \geq e} \left(M^{-k} \partial W + v_c\right) = X_e.$$

En effet, si ξ n'appartient pas au compact X_e, on peut trouver $\epsilon > 0$ tel que $B(\xi, \epsilon) \cap X_e = \varnothing$. Alors, d'après la remarque préliminaire, pour chaque c supérieur ou égal à e, $B(\xi, \epsilon)$ est incluse dans $\left(M^{-k} W^\circ + v_c\right)$ ou dans le complémentaire de $\left(M^{-k} W + v_e\right)$. Cela entraîne que $B(\xi, \epsilon)$ est incluse soit dans W_e°, soit dans ${}^c\left(\overline{W_e}\right)$, donc que ξ n'appartient pas à ∂W_e.

Supposons W_e non vide et prenons un ξ dans ∂W_e. D'après l'inclusion précédente et la remarque préliminaire, pour tout $\epsilon > 0$, $B(\xi, \epsilon)$ rencontre $\left(M^{-k} W + v_e\right)^c$ ou un $\left(M^{-k} W^\circ + v_c\right)$ $(c > e)$, donc ξ est limite de points de $\left(M^{-k} W + v_e\right)^c \cup \left(\bigcup_{c > e} \left(M^{-k} W^\circ + v_c\right)\right)$. Cet ensemble est un ouvert inclus dans le complémentaire de W_e, donc dans le complémentaire de l'adhérence de W_e. Le point ξ n'est donc pas dans l'intérieur de l'adhérence de W_e. La proposition en découle. $\square$

Nous nous placerons désormais dans la situation suivante :

$$E \subset \pi_u\left(\mathbb{Z}^d\right) \ \textit{et}\ W^\circ \neq \varnothing.$$

Désignons par $\mathcal{B}(Y, k)$ l'ensemble des mots admissibles de longueur k. Notons Δ la valeur absolue du déterminant de M_u.

Théorème III.6. *Il existe un réel L tel que*

$$\Delta^k \leq \operatorname{Card} \mathcal{B}(Y, k) \leq L\ m_u(W)\ \Delta^k.$$

En particulier, l'entropie topologique de Y est égale à $\log \Delta$.

Preuve. Pour un mot e admissible, désignons par $o_+(e)$ l'ensemble des éléments $c = c_1 \ldots c_n \ldots$ de Y tels que $e_1 \ldots e_k c_1 \ldots c_n \ldots$ soit encore dans Y. L'ensemble $o_+(e)$ ne dépend que de $A_{e_1 \ldots e_k}$, donc l'ensemble des $o_+(e)$ lorsque e décrit $\mathcal{B}(Y)$ est un ensemble fini. Considérons l'application ψ de Y dans W définie par : $\psi(c) = \sum_{i=0}^{\infty} M^{-i} c_i$. Les définitions, la compacité de Y et la continuité de ψ entraînent que

$$\psi\left(o_+\left(e\right)\right) = M^k\overline{W_e} - M^k v_e.$$

Les $o_+\left(e\right)$ étant en nombre fini, la proposition précédente entraîne que les $M^k W_e^\circ$ sont en nombre fini à translation près. Donc il existe un $L > 0$ tel que, pour tout k et tout $e \in \mathcal{B}\left(Y,k\right)$, on ait :

$$L^{-1}\Delta^{-k} \leq m_u\left(W_e^\circ\right) \leq L\ \Delta^{-k}.$$

D'autre part, on peut écrire

$$m_u\left(W\right) = \sum_{e\in\mathcal{B}(Y,k)} m_u\left(W_e\right).$$

On en déduit la majoration

$$m_u\left(W\right) \leq \sum_{e\in\mathcal{B}(Y,k)} \Delta^{-k} m_u\left(W\right) \leq \mathrm{Card}\mathcal{B}\left(Y,k\right)\ \Delta^{-k}\ m_u\left(W\right)$$

et la minoration

$$m_u\left(W\right) \geq \sum_{e\in\mathcal{B}(Y,k)} m_u\left(W_e^\circ\right) \geq \mathrm{Card}\mathcal{B}\left(Y,k\right)\ L^{-1}\Delta^{-k},$$

d'où l'encadrement souhaité. □

La proposition III.5 et la soficité de Y nous permettent d'affirmer que, lorsque k est suffisamment grand, la famille $\left(W_e\right)_{e\in\mathcal{B}(Y,k)}$ est un pavage autosimilaire de W. On en déduit que le nombre de développements Y-admissibles des points de W est uniformément borné.

III.b Le codage

Considérons le système sofique bilatère Z extension naturelle de Y défini par :

$$Z = \left\{(e_i)_{i\in\mathbb{Z}} \,/\, \forall k \quad \left(e_k, e_{k+1}, \ldots\right) \in Y\right\}.$$

C'est un système sofique d'entropie $\log\Delta$. Il contient donc (en général strictement) un système sofique X transitif d'entropie $\log\Delta$ (*voir* [CP]). Nous allons montrer qu'il est possible de coder $\left(\mathbb{T}^d, T\right)$ par $\left(X,\sigma\right)$. Comme X est intrinsèquement ergodique, tous les sous-décalages strictement inclus dans X sont d'entropie strictement plus petite que l'entropie topologique de X, donc aucun ne permet de coder $\left(\mathbb{T}^d, T, m\right)$ (en ce sens le codage est minimal).

Soit Ξ l'ensemble fini dans $\mathbb{Z}^d$ en bijection avec E par π_u. En utilisant π_u nous changeons l'alphabet de X et considérons que X est inclus dans $\Xi^{\mathbb{Z}}$.

Dans F_u la suite $\sum_{-N}^{N} M^{-i}\pi_u(x_i)$ n'est généralement pas convergente. Cependant x_i appartenant à $\mathbb{Z}^d$, on a l'égalité modulo 1 : $\pi_u(x_i) = -\pi_s(x_i)$. Les propriétés de contraction de M_u^{-1} et M_s assurent alors l'existence d'une limite modulo 1 de la suite $\sum_{-N}^{N} M^{-i}\pi_u(x_i)$.

Rappelons que l'on dit qu'un point ζ du tore est générique si, pour toute $f \in \mathcal{C}\left(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}\right)$,

$$\lim \frac{1}{N}\sum_{0}^{N-1} f\left(M^k\zeta\right) = m(f).$$

Lemme II.7. *Presque tout point ζ de F_u (pour la mesure m_u) est générique.*

Preuve. Il suffit de montrer que si ζ est générique, $\pi_u(\zeta)$ est générique. Cela résulte du fait que, pour toute $f \in \mathcal{C}\left(\mathbb{T}^d, \mathbb{R}\right)$, les deux suites

$$\frac{1}{N}\sum_{0}^{N-1} f\left(M^k\zeta\right)$$

$$\textit{et} \quad \frac{1}{N}\sum_{0}^{N-1} f\left(M^k\pi_u(\zeta)\right)$$

sont adjacentes. □

Soit ν l'unique probabilité d'entropie maximale sur X.

Théorème III.8. *Le système dynamique $\left(\mathbb{T}^d, T, m\right)$ est facteur du système symbolique (X, σ, ν) par l'application höldérienne*

$$\phi : X \longrightarrow \mathbb{T}^d \;:\; (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto \sum_{1}^{\infty} \pi_u\left(M^{-i}x_i\right) \bmod 1 \;-\; \sum_{-\infty}^{0} \pi_s\left(M^{-i}x_i\right) \bmod 1.$$

Preuve. Le système sofique X étant d'entropie $\log \Delta$, on a un encadrement de la forme

$$L'^{-1}\ \Delta^n < Card\mathcal{B}(X,n) < L'\ \Delta^n.$$

Pour tout entier naturel n, posons $F_n = \bigcup_{x\in\mathcal{B}(X,n)} \overline{W_x}$. Les ensembles W_x° étant disjoints et en nombre fini à translation près, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$m_u(F_n) \geq Card\mathcal{B}(X,n) \inf_{x\in\mathcal{B}(X,n)} m_u(W_x^\circ) \geq L'^{-1}\ \Delta^n\ \alpha\Delta^{-n} = L'^{-1}\alpha$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet d'affirmer que le compact $F = \bigcap_{n>0} F_n$ est de mesure supérieure à $L'^{-1}\alpha$. Or l'ensemble F est l'image de X_+ par l'application

$$\psi : X_+ \longrightarrow W\ :\ (x_i)_{i\geq 1} \longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} M^{-i}\pi_u(x_i).$$

En effet, étant donné un point ξ dans F, pour tout n il existe x_n dans $\mathcal{B}(X,n)$ et y_n dans Y_+ tels que $\xi = \psi(x_n y_n)$. Le sous-décalage Y_+ étant compact, on peut extraire une suite convergente de la suite $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La limite x de cette suite convergente appartient à X_+ et $\xi = \psi(x)$. Cela montre l'inclusion $F \subset \psi(X_+)$. L'inclusion inverse est triviale. D'après le lemme, $\psi(X_+) \bmod 1$ contient donc un point générique. Prenons x dans X_+ tel que $\psi(x) \bmod 1$ soit générique. Pour tout ξ dans le tore, il existe une suite (k_n) d'entiers telle que la suite

$$T^{k_n}(\psi(x) \bmod 1) = \sum_{1}^{\infty} \pi_u\left(M^{-i}x_{i+k_n}\right) \bmod 1\ -\ \sum_{1-k_n}^{0} \pi_s\left(M^{-i}x_{i+k_n}\right) \bmod 1$$

tende vers ξ. L'ensemble $(\Xi \bigcup \{0\})^{\mathbb{Z}}$ est compact, on peut donc extraire une suite convergente de la suite $\sigma^{k_n}(\ldots, 0, 0, x_1, x_2, \ldots)$. La limite y de cette suite appartient à X et $\phi(y) = \xi$. L'application ϕ est donc surjective.

Le fait que m soit l'image de ν par ϕ est alors une conséquence de l'intrinsèque ergodicité de X.

Les égalités

$$\begin{aligned}
\phi\left(\sigma\left((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\right)\right) &= \lim_{N\to\infty}\left(\left(\sum_{-N}^{N} M^{-i}\pi_u\left(x_{i+1}\right)\right) \mod 1\right)\\
&= \lim_{N\to\infty}\left(M\left(\sum_{-N}^{N} M^{-i-1}\pi_u\left(x_{i+1}\right)\right) \mod 1\right)\\
&= T\left(\phi\left((x_i)_{i\in\mathbb{Z}}\right)\right).
\end{aligned}$$

montrent que σ et T sont conjugués par ϕ, ce qui achève de prouver que $\left(\mathbb{T}^d, T, m\right)$ est facteur de (X, σ, ν) par ϕ.

Enfin soient x et x' deux suites telles que $x_i = x'_i$ pour $|i| \leq N$. On a

$$\begin{aligned}
d\left(\phi\left(x\right), \phi\left(x'\right)\right) &= d\left(\sum_{1}^{\infty}\pi_u\left(M^{-i}\left(x_i - x'_i\right)\right)\right.\\
&\qquad\qquad \left. - \sum_{-\infty}^{0}\pi_s\left(M^{-i}\left(x'_i - x_i\right)\right), \mathbb{Z}^d\right)\\
&\leq d\left(\sum_{N+1}^{\infty}\pi_u\left(M^{-i}\left(x_i - x'_{i+1}\right)\right), \mathbb{Z}^d\right)\\
&\qquad\qquad + d\left(\sum_{-\infty}^{-N-1}\pi_s\left(M^{-i}\left(x'_i - x_i\right)\right), \mathbb{Z}^d\right)\\
&\leq R\,\alpha^N
\end{aligned}$$

pour des réels $R > 0$ et $0 < \alpha < 1$, car M_u est dilatante, M_s est contractante et les x_i sont en nombre fini. Cette inégalité montre que ϕ est höldérienne. $\square$

Remarque 1: Nous montrons plus loin que l'application :

$$\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^d \ : \ (x_i)_{i\in\mathbb{Z}} \mapsto \sum_{1}^{\infty}\pi_u\left(M^{-i}x_i\right) - \sum_{-\infty}^{0}\pi_s\left(M^{-i}x_i\right)$$

est presque sûrement injective. La compacité de $\Phi\left(X\right)$ et l'ergodicité de $\left(\mathbb{T}^d, T, m\right)$ permettent alors de montrer qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que presque tous les points de $\mathbb{T}^d$ ont p antécédents par ϕ.

Remarque 2: La construction présentée permet de coder plus généralement les endomorphismes hyperboliques du tore. On vérifie facilement que les démonstrations sont encore valables dans ce cas.

IV. Propriétés géométriques

IV.a Etude de ϕ.

Dans cette section, nous utilisons les propriétés d'ensembles autosimilaires associés à X pour étudier l'application ϕ. Cette application a une forme particulièrement intéressante. L'image d'une suite est donnée par ses coordonnées dans la feuille dilatante et dans la feuille contractante. Dans ce paragraphe nous étudions essentiellement ces "applications coordonnées".

Considérons les applications suivantes :

$$\psi \ : \ X_+ \to F_u \ : \ x \mapsto \sum_1^{\infty} \pi_u \left(M^{-i} x_i\right),$$

$$\chi \ : \ X_- \to F_s \ : \ x \mapsto \sum_{-\infty}^{0} \pi_s \left(M^{-i} x_i\right),$$

$$o_+ \ : \ \mathcal{B}(X) \to \mathcal{P}(X_+) \ : \ x \mapsto \{y \in X_+ \ / \ (x,y) \in X_+\},$$

et

$$o_- \ : \ \mathcal{B}(X) \to \mathcal{P}(X_-) \ : \ x \mapsto \{y \in X_- \ / \ (y,x) \in X_-\}.$$

Comme ϕ est surjective, la réunion

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} (\chi(X_-) \times \psi(X_+)) + k$$

est un recouvrement de $\mathbb{R}^d$. Grâce au théorème de Baire, on montre que les compacts $\chi(X_-)$ et $\psi(X_+)$ sont d'intérieurs non-vides. Etudions $\psi(X_+)$ (l'étude de $\chi(X_-)$ se fait de la même manière).

Un mot $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de longueur n étant donné, nous noterons v_x la quantité

$$v_x = \sum_1^n M_u^{-i} \pi_u(x_i).$$

Le compact $\psi(X_+)$ a une structure particulière, de type autosimilarité:

$$\psi(X_+) = \bigcup_{x \in \mathcal{B}(X,n)} \left(v_x + M_u^{-n} \psi(o_+(x))\right).$$

Chaque $\psi(o_+(x))$ vérifie lui-même une propriété analogue:

$$\psi(o_+(x)) = \bigcup_{y \in \mathcal{B}(X,n), (x,y) \in \mathcal{B}(X)} \left(v_y + M_u^{-n} \psi(o_+(x,y))\right).$$

Proposition IV.1. *Pour tout x de $\mathcal{B}(X)$, $\psi(o_+(x))$ est l'adhérence de son intérieur.*

Preuve. Rappelons que, X étant transitif, il existe un graphe transitif engendrant X. Soient $\mathcal{G}$ un tel graphe et S l'ensemble de ses sommets. Pour un sommet s, appelons $o_+(s)$ l'ensemble fermé des suites engendrées par les chemins infinis partant de s. Pour tout x de $\mathcal{B}(X)$, il existe un ensemble de sommets S_x tel que:

$$o_+(x) = \bigcup_{s \in S_x} o_+(s).$$

Cela signifie que, pour tout entier n positif, $\psi(X_+)$ est une réunion finie de translatés de $M_u^{-n}\psi(o_+(s))$. Le compact $\psi(X_+)$ est d'intérieur non vide, donc l'un au moins des $\psi(o_+(s))$ est d'intérieur non vide. Mais les $\psi(o_+(s))$ vérifient également une égalité de la forme:

$$\psi(o_+(s)) = \bigcup \left(v_z + M_u^{-n} \psi(o_+(s_z))\right),$$

où la réunion est prise sur les mots z engendrés par les chemins de longueur n partant de s (le graphe $\mathcal{G}$ étant de Shannon pour chaque mot z, il existe au plus un chemin partant de s engendrant z ; on désigne par s_z l'extrémité finale de ce chemin). Le graphe $\mathcal{G}$ étant transitif, on voit que pour tout s, $\psi(o_+(s))$ contient un translaté d'un $M_u^{-k_t}\psi(o_+(t))$, pour tout t de S. On en déduit que tous les $\psi(o_+(s))$ sont d'intérieurs non vides. Par suite, pour tout x, $\psi(o_+(x))$ est d'intérieur non vide.

Prenons maintenant un point ξ sur la frontière de $\psi(o_+(x))$, r un réel positif et n suffisamment grand pour que le diamètre de $M_u^{-n}\psi(X_+)$

soit plus petit que r. L'égalité

$$\psi\left(o_+\left(x\right)\right) = \bigcup_{y\in\mathcal{B}(X,n),(x,y)\in\mathcal{B}(X)} \left(v_y + M_u^{-n}\psi\left(o_+\left(x,y\right)\right)\right)$$

montre alors que $B\left(\xi, r\right)$ contient un $v_y + M_u^{-n}\psi\left(o_+\left(x,y\right)\right)$, donc un point intérieur à $\psi\left(o_+\left(x\right)\right)$, et le résultat est démontré. □

Cette proposition montre en particulier que les bords de $\psi\left(o_+\left(x\right)\right)$ sont d'intérieur vide. En fait, ils sont de m_u-mesure nulle.

Proposition 4.2. *Quel que soit le mot x, le bord de $\psi\left(o_+\left(x\right)\right)$ est de m_u-mesure nulle.*

Preuve. Considérons de nouveau un graphe de Shannon $\mathcal{G}$, transitif, d'ensemble de sommets S engendrant X. Pour un sommet s quelconque de $\mathcal{G}$ considérons maintenant le recouvrement

$$\psi\left(o_+\left(s\right)\right) = \bigcup \left(v_z + M_u^{-n}\psi\left(o_+\left(s_z\right)\right)\right).$$

Le compact $\psi\left(o_+\left(s\right)\right)$ est d'intérieur non vide. Donc pour n suffisamment grand, l'un des $v_z + M_u^{-n}\psi\left(o_+\left(s_z\right)\right)$ est contenu dans l'intérieur de $\psi\left(o_+\left(s\right)\right)$. Cet ensemble $v_z + M_u^{-n}\psi\left(o_+\left(s_z\right)\right)$ est donc inutile pour couvrir le bord de $\psi\left(o_+\left(s\right)\right)$.

Pour tout n, construisons à partir de $\mathcal{G}$ un autre graphe $\mathcal{G}_n$, de même ensemble de sommets, mais avec des flèches étiquetées par $\mathcal{B}\left(X,n\right)$ définies de la manière suivante : deux sommets s et s' sont joints par une flèche x allant de s à s' s'il existe un chemin dans $\mathcal{G}$ de longueur n allant de s à s' engendrant x. Pour des raisons de périodicité de $\mathcal{G}$, il se peut que, pour certaines valeurs de n, $\mathcal{G}_n$ ne soit pas transitif. Néanmoins, pour tout N on peut choisir $n \geq N$ tel que $\mathcal{G}_n$ soit transitif. Prenons un n_0 tel que $\mathcal{G}_{n_0}$ soit transitif, et z_0 un mot tel que $v_{z_0} + M_u^{-n}\psi\left(o_+\left(s_{z_0}\right)\right)$ soit inclus dans l'intérieur de $\psi\left(o_+\left(s\right)\right)$. Appelons $\mathcal{H}$ le graphe déduit de $\mathcal{G}_{n_0}$ en enlevant la flèche numérotée z_0 allant de s à s_{z_0} et U (resp. V) le système sofique engendré par $\mathcal{G}_{n_0}$ (resp. $\mathcal{H}$). Le graphe $\mathcal{G}_{n_0}$ étant de Shannon et transitif, V est inclus strictement dans U, donc d'entropie topologique $h(V,\sigma)$ strictement inférieure à celle de U, $\log\Delta^{n_0}$. Le choix de z_0 a été fait pour que l'on ait pour tout t :

$$\partial\psi\left(o_+(t)\right) \subset \bigcup_{y\in\mathcal{B}(V,k)} \left(v_y + M_u^{-kn_0}\psi\left(o_+\left(t_y\right)\right)\right).$$

Il vient donc:

$$m_u\left(\partial\psi\left(o_+(t)\right)\right) \leq Card\mathcal{B}(V,k)\ \ \Delta^{-kn_0}\ m_u\left(\psi\left(X_+\right)\right).$$

Or il existe L tel que $Card\mathcal{B}(V,k)$ soit inférieur à $L\exp(kh(V,\sigma))$, on peut donc écrire

$$m_u\left(\partial\psi\left(o_+(t)\right)\right) \leq\ L\exp(kh(V,\sigma))\Delta^{-kn_0}\ m_u\left(\psi\left(X_+\right)\right),$$

et on conclut car $\exp(h(V,\sigma)) < \Delta^{n_0}$. □

En utilisant un graphe de Shannon transitif engendrant

$$X^* = \left\{x\ /\ \left(x_{-i}\right)_{i\in\mathbb{Z}} \in X\right\},$$

on obtient de même la proposition suivante:

Proposition IV.3. *Pour tout mot x, $\chi\left(o_-(x)\right)$ est l'adhérence de son intérieur et son bord $\partial\chi\left(o_-(x)\right)$ est de m_s-mesure nulle.*

Corollaire IV.4. *Les applications ψ et χ sont presque sûrement injectives.*

Preuve. Un point de $\psi\left(X_+\right)$ admettant deux antécédents par ψ appartient à l'intersection de deux compacts $v_x + M_u^{-n}\psi\left(o_+(x)\right)$ pour deux mots x distincts de même longueur. Il suffit donc de montrer que deux $v_x + M_u^{-n}\psi\left(o_+(x)\right)$ distincts ne peuvent se rencontrer que sur leur frontière (de mesure nulle d'après les propositions précédentes).

Faisons à partir de $\psi\left(X_+\right)$ la même construction que celle faite à partir de W dans la section 3. Fixons un ordre sur Ξ (qui peut être le même que celui que l'on a utilisé pour définir Y). A tout point ζ du compact

$$\psi\left(X_+\right) = \left\{\sum_1^\infty M_u^{-i}\pi_u\left(x_i\right)\ /\ x = \left(x_i\right)_1^\infty \in X_+\right\}$$

associons la plus grande des suites $x = \left(x_i\right)_1^\infty$ (au sens lexicographique) appartenant à X_+ telles que

$$\zeta = \sum_1^\infty M_u^{-i}\pi_u\left(x_i\right).$$

Appelons X'_+ l'adhérence de l'ensemble des suites ainsi obtenues. Deux mots x et y de longueur n étant donnés, notons $a(x,y)$ la quantité

$$\sum_1^n M^{k+1-i} \pi_u (x_i - y_i) .$$

Comme dans la section 3, on montre qu'un mot $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est admissible si et seulement si

$$\psi(o_+(x)) \not\subset \bigcup_{y \in \mathcal{B}(X,n),\ y > x} (a(y,x) + \psi(o_+(y))) .$$

Le sous-décalage X est sofique et l'ensemble des vecteurs $a(x,y)$ est fini, donc l'ensemble des couples

$$\left(\psi(o_+(x)) , \bigcup_{y \in \mathcal{B}(X,n),\ y > x} (a(y,x) + \psi(o_+(y))) \right) ,$$

à partir duquel on définit facilement un graphe engendrant X'_+, est fini. Cela prouve que X'_+ est sofique. On montre alors, exactement comme on l'a fait pour Y dans la section 3, que X'_+ est d'entropie $\log \Delta$ (c'est-à-dire de même entropie que X_+). Mais X est intrinsèquement ergodique donc X'_+ et X_+ sont égaux.

Supposons maintenant qu'il existe deux mots x et x' distincts, $x' < x$, de même longueur et tels que

$$v_x + M_u^{-n} \psi(o_+(x)) \quad \text{et} \quad v_{x'} + M_u^{-n} \psi(o_+(x'))$$

se rencontrent en un point intérieur à $v_x + M_u^{-n} \psi(o_+(x))$. Alors il existe un mot y' appartenant à $o_+(x')$ tel que

$$v_{x'y'} + M_u^{-n} \psi(o_+(x'y')) \subset v_x + M_u^{-n} \psi(o_+(x)) .$$

Ceci entraîne que $x'y'$ appartient à $\mathcal{B}(X_+)$ mais pas à $\mathcal{B}(X'_+)$, ce qui constitue une contradiction. L'application ψ est donc presque sûrement injective. On prouve par un raisonnement identique que χ est également presque sûrement injective. □

Corollaire IV.5. *L'application*

$$\Phi : X \longrightarrow \mathbb{R}^d \ : \ (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \mapsto \sum_1^\infty \pi_u \left(M^{-i} x_i \right) - \sum_{-\infty}^0 \pi_s \left(M^{-i} x_i \right)$$

est presque sûrement injective.

Ce corollaire entraîne en particulier que ϕ est à fibres finies presque sûrement. Il est naturel de se demander si l'application ϕ est injective presque partout. C'est le cas si le compact $\Phi(X)$ est de mesure 1. Il est clair que l'on peut faire des choix d'ensembles Ξ pour lesquels ϕ n'est pas injective. Dans (*voir* [L4]) nous avons donné quelques exemples pour lesquels certaines propriétés algébriques permettent de montrer l'injectivité presque sûre de ϕ. La question reste ouverte dans le cas général.

IV.b Partition markovienne

Dans ce paragraphe nous montrons comment le recouvrement de Krieger $X_{\mathcal{K}}$ de X permet de décrire une partition markovienne pour $\left(\mathbb{T}^d, T\right)$.

Definition IV.6. Une *partition markovienne* de $\left(\mathbb{T}^d, T, m\right)$ est un recouvrement de $\mathbb{T}^d$ par une famille $\mathcal{C} = \{R_i\}_{i=1}^{l}$ ayant les propriétés suivantes :

(a) Les R_i sont des rectangles fermés, c'est-à-dire des ensembles de la forme $R_i^s \times R_i^u$, où R_i^s (resp.R_i^u) est inclus dans F_s (resp. F_u).

(b) Pour chaque i, R_i est l'adhérence de son intérieur, et, pour tout couple (i, j) où i et j sont distincts, les intérieurs de R_i et de R_j sont disjoints.

(c) Si $T^{-1}R_i \cap R_j$ est d'intérieur non vide alors $\left(T^{-1}R_i\right)^u \subset R_j^u$.

(d) Si $TR_i \cap R_j$ est d'intérieur non vide alors $(TR_i)^s \subset R_j^s$.

Afin qu'une telle partition fournisse un codage, il est nécessaire en général d'ajouter à cette définition une condition sur le diamètre des R_i. Dans le cas que nous étudions ce problème ne se pose pas.

Rappelons quelques notions utiles.

A toute suite bilatère y appartenant à Y associons y_- (resp.y_+) la suite unilatère $(\ldots, y_{-n}, \ldots, y_{-1}, y_0)$ (resp.$(y_1, \ldots, y_n, \ldots)$). Désignons par Y_- (resp.Y_+) l'ensemble des suites y_- (resp.y_+). Considérons alors l'application Ω_+ de Y_- dans $\mathcal{P}(Y_+)$ qui, à un "passé" y_-, associe la partie de Y_+ formée des "futurs" admissibles pour y_-:

$$\Omega_+ \ : \ y_- \longmapsto \{z_+ \in Y_+ : \ (y_-, z_+) \in Y\}.$$

On appelle bloc finitaire (ou mot finitaire) un mot x, que l'on peut numéroter $x = (x_{-k}, \dots, x_0)$, tel que Ω_+ soit constante sur $C(x_{-k}, \dots, x_0)$. Un élément y de Y est dit finitaire si, pour tout entier j, il existe un entier k, $k < j$, tel que le mot $(y_k, \dots, y_j)$ soit finitaire. Nous désignons par $\mathcal{F}$ l'ensemble des éléments finitaires de Y.

Notons $C(y_1)$ l'ensemble des éléments de Y dont l'élément d'indice 1 est y_1. Lorsque Y est transitif, on peut construire le recouvrement naturel suivant de Y. Notons Θ l'ensemble (fini) des parties $\Omega_+(y_-)$ de Y_+ obtenu pour y_- décrivant l'ensemble des éléments finitaires de Y_-. Le recouvrement de Krieger, $Y_\mathcal{K}$, est défini par son alphabet

$$S_\mathcal{K} = \{(y_1, \theta) \in \Xi \times \Theta : \ C(y_1) \cap \theta \neq \varnothing\}$$

et par la matrice carrée $\mathcal{K}$ indexée par $S_\mathcal{K} \times S_\mathcal{K}$

$$\mathcal{K}\left((y_1, \theta), (y'_1, \theta')\right) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta' = \sigma\left(C(y_1) \cap \theta\right), \\ 0 & \text{sinon ;} \end{cases}$$

$$Y_\mathcal{K} = \{(y_i, \theta_i)_{i \in \mathbb{Z}} \ / \ \forall i \in \mathbb{Z} \ \ \mathcal{K}\left((y_i, \theta_i), (y_{i+1}, \theta_{i+1})\right) = 1\}.$$

Le système (Y, σ) est facteur du système $(Y_\mathcal{K}, \sigma)$ par l'application ρ qui à une suite $((y_i, \lambda_i))_{i \in \mathbb{Z}}$ d'éléments de $S_\mathcal{K}$ associe la suite des premières coordonnées $(y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$. L'application ρ est bijective sur l'ensemble $\mathcal{F}$.

Si (Y, σ) est un système sofique transitif d'entropie topologique $\log \beta$ d'unique probabilité d'entropie maximale maximale ν alors l'ensemble des points finitaires est de mesure pleine, $\nu(\mathcal{F}) = 1$. En particulier l'application ρ définie ci-dessus est donc presque sûrement bijective et le rapport

$$\frac{\text{Card}\{\text{mots non \ finitaires de longueur } n\}}{\text{Card}\, \mathcal{B}(Y, n)}$$

tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.

Pour chaque θ dans Θ, appelons X_θ la réunion des points finitaires de X_- tels que $\Omega_+(x) = \theta$. Notons A_θ l'adhérence de X_θ, R_θ l'adhérence de $X_\theta \times \theta$ et $R(x_1, \theta)$ le rectangle $R_\theta \bigcap C(x_1)$. Le rectangle $R_\theta = A_\theta \times \theta$ est l'adhérence de son intérieur.

Lemme IV.7. *On a l'égalité*

$$\rho\left(C\left(x_1,\theta\right)\right)=R\left(x_1,\theta\right).$$

Preuve. Soit $((x_i,\theta_i))_{i\in\mathbb{Z}}$ un élément de $C(x_1,\theta_1)\bigcap \ell^{-1}\mathcal{F}$. Pour tout i, θ_i est égal à $\Omega_+(\ldots,x_{i-1})$ donc $\rho(x)$ appartient à $(X_{\theta_1}\times\theta_1)\bigcap C(x_1)$. Réciproquement soit x un point de $(X_{\theta_1}\times\theta_1)\bigcap C(x_1)$. C'est un point finitaire et $\ell^{-1}(x)$ appartient à $C(x_1,\theta_1)\bigcap \ell^{-1}\mathcal{F}$. On a donc l'égalité

$$\rho\left(C\left(x_1,\theta_1\right)\bigcap \ell^{-1}\mathcal{F}\right)=\left(X_{\theta_1}\times\theta_1\right)\bigcap C\left(x_1\right).$$

On en déduit

$$R\left(x_1,\theta_1\right)=\overline{\rho\left(C\left(x_1,\theta_1\right)\bigcap \ell^{-1}\mathcal{F}\right)}.$$

Or l'ensemble $C(x_1,\theta_1)$ est l'adhérence de l'ensemble $C(x_1,\theta_1)\bigcap \ell^{-1}\mathcal{F}$ et l'application ρ est continue donc

$$\left(X_{\theta_1}\times\theta_1\right)\bigcap C\left(x_1\right)\subset\rho\left(C\left(x_1,\theta_1\right)\right)\subset\overline{\rho\left(C\left(x_1,\theta_1\right)\bigcap \ell^{-1}\mathcal{F}\right)}$$

et le résultat est démontré. □

Proposition IV.8. *Le bord des rectangles $\phi(\rho(C(x_1,\theta_1)))$ est de mesure nulle.*

Preuve. On a l'égalité :

$$\partial\left(\phi\left(A_\theta\times\theta\right)\right)=\left(\partial\chi\left(A_\theta\right)\times\psi\left(\theta\right)\right)\cup\left(\chi\left(A_\theta\right)\times\partial\psi\left(\theta\right)\right)\mod 1.$$

On a montré que l'ensemble $\partial\psi(\theta)$ est de m_u-mesure nulle. L'ensemble $\chi(A_\theta)$ est l'adhérence de la réunion des $\chi(C(y_{-k}\ldots y_0))$ lorsque $(y_{-k}\ldots y_0)$ décrit l'ensemble des mots finitaires tels que $o_+(y_{-k}\ldots y_0)=\theta$. Le bord de $\chi(A_\theta)$ est donc inclus dans la réunion des $\partial\chi(o_-(y_{-k}\cdots y_0))$ (de m_s-mesure nulle), et de l'image par χ de l'ensemble des points non finitaires de X_-. Comme le rapport du nombre de mots non finitaires de longueur k et de Δ^k tend vers 0 lorsque k tend vers l'infini, l'image par χ de l'ensemble des points non finitaires de X_- est également de m_s-mesure nulle. □

Proposition IV.9. *Les rectangles $\phi(\rho(C(x_1,\theta_1)))$ sont adhérences de leurs intérieurs.* □

Théorèm IV.10. *Si ϕ est bijective presque partout, les ensembles $\phi(\rho(C(x_1,\theta_1)))$ forment une partition markovienne. Dans le cas général, ils forment un recouvrement du tore et leurs intersections forment un pavage qui est une partition markovienne.* □

Preuve. Une suite $(x_i,\theta_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ appartenant à $X_{\mathcal{K}}$ étant donnée, les “fibres” dilatantes et contractantes du rectangle $C(x_1,\theta_1)$ passant par $(x_i,\theta_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ sont

$$C(x_1,\theta_1)^u\left((x_i,\theta_i)_{i\in\mathbb{Z}}\right)=\left\{(x_i',\theta_i')_{i\in\mathbb{Z}}\in X_{\mathcal{K}}\ /\ (x_i,\theta_i)=(x_i',\theta_i')\ \ i\leq 1\right\}$$

et

$$C(x_1,\theta_1)^s\left((x_i,\theta_i)_{i\in\mathbb{Z}}\right)=\left\{(x_i',\theta_i')_{i\in\mathbb{Z}}\in X_{\mathcal{K}}\ /\ (x_i,\theta_i)=(x_i',\theta_i')\ \ i\geq 1\right\}.$$

Les cylindres $C(x_1,\theta_1)$ forment évidemment une partition markovienne de $(X_{\mathcal{K}},\sigma)$. En particulier, on a :

$$\sigma^{-1}C(x_1,\theta_1)\cap C(x_1',\theta_1')\neq\varnothing\implies\left(\sigma^{-1}C(x_1,\theta_1)\right)^u\subset C(x_1',\theta_1')^u$$

et

$$\sigma C(x_1,\theta_1)\cap C(x_1',\theta_1')\neq\varnothing\implies\left(\sigma C(x_1,\theta_1)\right)^s\subset C(x_1',\theta_1')^s.$$

Appelons $r(x_1,\theta_1)$ le rectangle $\phi(\rho(C(x_1,\theta_1)))$. On voit immédiatement que

$$r(x_1,\theta_1)^u\left(\phi\left(\rho\left((x_i,\theta_i)_{i\in\mathbb{Z}}\right)\right)\right)=\phi\left(\rho\left(C(x_1,\theta_1)^u\left((x_i,\theta_i)_{i\in\mathbb{Z}}\right)\right)\right)$$

et

$$r(x_1,\theta_1)^s\left(\phi\left(\rho\left((x_i,\theta_i)_{i\in\mathbb{Z}}\right)\right)\right)=\phi\left(\rho\left(C(x_1,\theta_1)^s\left((x_i,\theta_i)_{i\in\mathbb{Z}}\right)\right)\right).$$

On en déduit que si

$$\sigma^{-1}C(x_1,\theta_1)\cap C(x_1',\theta_1')\neq\varnothing\quad\text{alors}\quad T^{-1}r(x_1,\theta_1)^u\subset r(x_1',\theta_1')^u$$

et si $\sigma C(x_1,\theta_1)\cap C(x_1',\theta_1')\neq\varnothing$ alors $Tr(x_1,\theta_1)^s\subset r(x_1',\theta_1')^s$.

Lorsque ϕ est presque sûrement injective, la famille des rectangles $r(x_1,\theta_1)$ est donc une partition markovienne. En effet, les ensembles $r(x_1,\theta_1)$ sont des rectangles adhérences de leurs intérieurs dont les intérieurs ne se rencontrent pas (car ϕ est presque sûrement injective).

De plus, les inclusions vérifiées par les sections stables et instables de ces rectangles sont vérifiées d'après ce qui précède.

Lorsque ϕ n'est pas presque sûrement injective, il existe un entier p tel que presque tout point du tore ait p antécédents par $\phi \circ \rho$. Comme

$$\left(\bigcap_{k=1}^{p} r\left(x_1^{(k)}, \theta_1^{(k)}\right)\right)^u = \bigcap_{k=1}^{p} r\left(x_1^{(k)}, \theta_1^{(k)}\right)^u$$

et

$$\left(\bigcap_{k=1}^{p} r\left(x_1^{(k)}, \theta_1^{(k)}\right)\right)^s = \bigcap_{k=1}^{p} r\left(x_1^{(k)}, \theta_1^{(k)}\right)^s,$$

on montre que l'ensemble des intersections p à p des rectangles $r\left(x_1, \theta_1\right)$, d'intérieurs non vides, forment une partition markovienne. □

Lorsque ϕ est bijective presque partout, nous obtenons donc une construction algébrique d'une partition markovienne, avec notamment une expression explicite de l'application géométrique associée à cette partition markovienne.

V. Propriétés algébriques

Une grande liberté quant au choix de Ξ et de l'ordre sur Ξ est laissée dans la construction précédente. La question de l'existence d'un choix conduisant à un codage ayant les meilleures caractéristiques se pose naturellement. Dans cette section, nous exposons quelques éléments relatifs à ce problème et mettons en évidence certaines qualités du codage construit.

V.a Quelques propriétés des M_u-développements

Comme nous l'avons déjà dit, la définition des M_u-développements donnée ici est inspirée par une notion d'écriture en base complexe introduite par Thurston [T]. Cette écriture en base complexe a été étudiée par plusieurs auteurs ([T] [K] [P] [S]). Certaines propriétés s'étendent aisément au cas des M_u-développements.

On peut ainsi montrer que l'application de normalisation qui, à une suite $x \in \Xi^{\mathbb{N}}$ associe le M_u-développement de $\sum M^{-i}\pi_u x_i$, est rationnelle, c'est-à-dire reconnaissable par un automate fini. De même sont rationnels : l'application qui à une suite $x \in \Xi^{\mathbb{N}}$ associe l'ensemble des suites $y \in Y$ telles que $\sum M^{-i}\pi_u y_i = \sum M^{-i}\pi_u x_i$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'ensemble des suites $y \in Y$ telles que $\sum M^{-i}\pi_u y_i$ admette exactement k écritures Y-admissibles.

On peut également caractériser l'ensemble des points de W dont le M_u-développement est ultimement périodique.

Proposition V.1. *Soit ξ un point de W. Le M_u-développement de ξ est périodique à partir d'un certain rang si et seulement si ξ est la projection par π_u d'un point de $\mathbb{R}^d$ à coordonnées rationnelles. De plus, toutes les écritures Y-admissibles de ces points sont périodiques à partir d'un certain rang.*

Preuve. L'implication directe est triviale. Donnons la preuve de la réciproque. Supposons que ξ soit la projection du point à coordonnées rationnelles ζ et que son M_u-développement soit donné par

$$\xi = \pi_u(\zeta) = \sum_{j=0}^{\infty} M_u^{-j}\pi_u(x_j).$$

Pour tout entier $i \geq 1$, $\sum_{j=0}^{\infty} M_u^{-j}\pi_u(x_{j+i})$ est le M_u-développement de

$$M_u^i\left(\pi_u(\zeta) - \sum_{j=0}^{i-1} M_u^{-j}\pi_u(x_j)\right) = \pi_u\left(M^i\left(\zeta - \sum_{j=0}^{i-1} M^{-j}x_j\right)\right).$$

Mais la suite $\left(M^i\left(\zeta - \sum_{j=0}^{i-1} M^{-j}x_j\right)\right)_{i\geq 1}$ est à valeurs dans un ensemble borné de points d'un réseau donc prend un nombre fini de valeurs. On en déduit qu'il existe un couple d'entiers (k, j), $j > k$, tel que

$$(x_j, x_{j+1}, \dots) = (x_k, x_{k+1}, \dots),$$

ce qui signifie que la suite $(x_j)_{j\geq 1}$ est périodique à partir d'un certain rang. La première partie de la proposition est démontrée.

Pour la deuxième partie nous reprenons la démonstration de [S]. Donnons-nous une suite $y \in Y$ ultimement périodique et $y' \in Y$ telle que $\sum M^{-i}\pi_u y'_i = \sum M^{-i}\pi_u y_i$. Comme nous l'avons remarqué, les sommes $\sum_{i=k+1}^{\infty} M^{k+1-i}\pi_u(y'_i - y_i)$ prennent nécessairement un nombre fini de valeurs lorsque k varie. La suite y étant ultimement périodique, il en est de même des sommes $\sum_{i=k+1}^{\infty} M^{k+1-i}\pi_u(y'_i)$. Il existe donc $w \in W$ tel que $w = \sum_{i=k+1}^{\infty} M^{k+1-i}\pi_u(y'_i)$ pour une infinité de k. Mais w ayant un nombre fini de représentations Y-admissibles, il existe un couple d'entiers (k, k'), $k < k'$, tel que

$$(y'_{k+1}, y'_{k+2}, \dots) = (y'_{k'+1}, y'_{k'+2}, \dots). \qquad \square$$

V.b Choix de l'alphabet

Nous montrons que, lorsque M est monogène (c'est-à-dire semblable à la matrice compagne d'un polynôme), il est possible de choisir pour Ξ un ensemble de la forme $\{-Nu_0, \dots , Nu_0\}$. On obtient ainsi une écriture "plus classique" de l'application ϕ.

Supposons que M soit monogène. Alors il existe un élément u_0 de $\mathbb{Z}^d$ tel que $u_0, \dots , M^{d-1}u_0$ soit une base de $\mathbb{R}^d$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$ notons $u_i = M^i u_0$.

Lemma V.2. *Lorsque N est suffisamment grand, tout élément ξ de F_u admet une écriture de la forme*

$$\xi = \sum_{i=k}^{\infty} x_i \pi_u (u_{-i}),$$

où k est un entier relatif et où, pour tout i, x_i appartient à $\{-N, \dots , N\}$.

Preuve. Notons r la dimension de F_u. Les vecteurs $\pi_u (u_1), \dots , \pi_u (u_r)$ forment une base de F_u. Cette base permet de définir dans F_u les ensembles

$$\Lambda_{k_1 \dots k_r} = \{\xi_1 \pi_u (u_1) + \dots + \xi_r \pi_u (u_r) \quad / \quad 2k_i - 1 \le \xi_i < 2k_i + 1\}.$$

Posons $\Lambda = \Lambda_{0,\dots,0}$ et considérons la transformation T' de Λ définie par

$$\forall\ \xi \in \Lambda \quad T'\xi = M\xi - 2 (k_1 \pi_u (u_1) + \dots + k_r \pi_u (u_r))$$

où $(k_1, \dots , k_r)$ est le point de $\mathbb{Z}^r$ tel que $M\xi$ appartient à $\Lambda_{k_1 \dots k_r}$. En itérant cette transformation à partir de ξ, on obtient une écriture de la forme

$$\xi = 2 \sum_{i=1}^{\infty} M^{-i} \left(k_1^i \pi_u (u_1) + \dots + k_r^i \pi_u (u_r)\right),$$

où les k_j^i sont en nombre fini (car un nombre fini de $\Lambda_{k_1,\dots,k_r}$ suffit à recouvrir $M\Lambda$). Ensuite il suffit de remarquer que $F_u = \bigcup_{l=1}^{\infty} M^l \Lambda$ (car la restriction de M à F_u est dilatante) pour conclure (prendre $N \geq r \max k_j^i$). □

Lorsque M est monogène, pour N assez grand, l'ensemble

$$W = \left\{ \sum_0^{\infty} x_i \pi_u (u_{-i}) \ / \ (x_i) \in \{-N, \dots, N\}^{\mathbb{N}} \right\}$$

contient donc un voisinage de 0 dans F_u. Le procédé décrit dans la section précédente fournit alors un codage par un sous-décalage d'alphabet $\{-N, \dots, N\}$. Le système sofique X apparaît dans ce cas comme l'ensemble des développements des points du tore en base $M_u^{-i}\pi_u(u_0)$ et $M_s^i \pi_s(u_0)$.

V.c Ecritures des points à coordonnées enti res

Supposons que la matrice M soit la matrice compagne d'un polynôme P :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{d-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{d-1} \end{pmatrix}.$$

Soit u_0 le premier vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^d$. Pour tout entier k, notons u_k le vecteur $u_k = M^k u_0$.

Proposition V.3. *Il existe N_0 tel que tout point du groupe engendré par les u_i soit une combinaison linéaire des u_i à coefficients entiers de valeurs absolues bornées par N_0.*

Preuve. Notons $X^d + \sum_{i=0}^{d-1} b_i^{(k)} X^i$ le polynôme caractéristique de M^k et r la dimension de F_u. En utilisant les relations coefficients-racines et l'hyperbolicité de M, on montre que, pour k suffisamment grand, on a $|b_{d-r}^{(k)}| > \sum_{i=0, i\neq d-r}^{d-1} |b_i^{(k)}| + 1$.

Prenons k tel que le polynôme caractéristique de M^k soit de la forme $X^d + \sum_{i=0}^{d-1} b_i X^i$, avec $|b_{i_0}| > \sum_{i=0, i\neq i_0}^{d-1} |b_i| + 1$.

Soit x une suite presque nulle d'entiers. Montrons que $z = \sum x_i u_i$ peut s'écrire comme une somme finie à coefficients y_i dans $\{1 - b_{i_0}, \dots, b_{i_0} - 1\}$. Posons $N(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} |x_i|$. Supposons qu'il existe l tel que $|x_l| \geq |b_{i_0}|$. Si par exemple $x_l \geq b_{i_0} > 0$ utilisons la relation

$$b_{i_0} u_l = -u_{l+k(d-i_0)} - \sum_{i=0, i \neq i_0}^{d-1} b_i u_{l+k(i-i_0)}$$

pour obtenir $z = \sum x_i^{(1)} u_i$ avec:

$$\begin{aligned} x_k^{(1)} &= x_k, \quad k \neq l + k(i - i_0) \;\; i = 0, \dots, d, \\ x_{l+k(i-i_0)}^{(1)} &= x_{l+k(i-i_0)} - b_i \quad i = 0, \dots, d-1, \\ x_{l+k(d-i_0)}^{(1)} &= x_{l+k(d-i_0)} - 1. \end{aligned}$$

De manière similaire, quel que soit le signe de x_l, la relation

$$b_{i_0} u_l = -u_{l+k(d-i_0)} - \sum_{i=0, i \neq i_0}^{d-1} b_i u_{l+k(i-i_0)}$$

permet d'obtenir une nouvelle suite presque nulle $x^{(1)}$ telle que $z = \sum x_i^{(1)} u_i$ et $N\left(x^{(1)}\right) < N(x)$. S'il existe l_1 tel que $x_{l_1}^{(1)} \geq b_{i_0}$, alors on définit de la même façon une suite $x^{(2)}$ telle que $z = \sum x_i^{(2)} u_i$ et $N\left(x^{(2)}\right) < N\left(x^{(1)}\right)$. L'entier $N(x)$ étant fini, on ne peut itérer cette transformation qu'un nombre fini de fois. $\square$

On peut définir une application höldérienne de $\left(\{-N, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}, \sigma\right)$ sur $\left(\mathbb{T}^d, T\right)$. Cette application n'est généralement pas satisfaisante. L'entropie topologique de $\left(\{-N, \dots, N\}^{\mathbb{Z}}, \sigma\right)$ sera généralement strictement supérieur à celle de $\left(\mathbb{T}^d, T\right)$. Le procédé décrit dans la section 3 permet d'obtenir à partir de

$$W = \left\{ \sum_0^{\infty} x_i \pi_u(u_{-i}) \;/\; (x_i) \in \{-N, \dots, N\}^{\mathbb{N}} \right\}$$

un système sofique transitif X codant l'automorphisme par une application ϕ telle que tout point du tore ait un nombre fini d'antécédents par ϕ. Cependant nous ne savons pas en général comment assurer que l'ensemble des suites presque nulles décrivant un point de G ait un plus grand élément (ni même si c'est possible). Il n'est pas exclus que X (ou Z) ne contienne aucune suite presque nulle. Le problème de l'existence d'un entier N et d'un ordre sur $\{-N, \ldots, N\}$ tel que les éléments de G soient des combinaisons linéaires X-admissibles (ou Z-admissibles) des u_{-i} reste ouvert (problème équivalent à celui de l'existence d'une écriture presque nulle pour les points homoclines).

V.d Points à "coordonnées rationnelles"

L'ensemble des points homoclines est l'ensemble $(F_u + \mathbb{Z}^d) \cap (F_s + \mathbb{Z}^d)$ mod 1. Nous montrons dans ce paragraphe que les points de l'ensemble $(F_u + \mathbb{Q}^d) \cap (F_s + \mathbb{Q}^d)$ mod 1 sont toujours codés par des suites ultimement périodiques (une suite $x \in X$ est dite ultimement périodique si x_+ et x_- sont ultimement périodiques). Notons $Per(X)$ (resp. $Per(X_+)$, resp. $Per(X_-)$) l'ensemble des suites ultimement périodiques de X (resp. X_+, resp. X_-).

La preuve de la proposition suivante est la même que celle de la proposition V.1. Les notations sont celles de la partie IV.

Proposition V.4. *On a les égalités suivantes :*

$$\begin{aligned}
&\psi(Per(X_+)) = \pi_u(\mathbb{Q}^d) \cap \psi(X_+),\\
&\chi(Per(X_-)) = \pi_s(\mathbb{Q}^d) \cap \chi(X_-)\\
&\psi^{-1}\left(\pi_u(\mathbb{Q}^d) \cap \psi(X_+)\right) = Per(X_+) \ et\\
&\chi^{-1}\left(\pi_s(\mathbb{Q}^d) \cap \chi(X_-)\right) = Per(X_-).
\end{aligned}$$

Proposition V.5. *On a les égalités :*

$$\phi(Per(X)) = (F_u + \mathbb{Q}^d) \cap (F_s + \mathbb{Q}^d) \bmod 1$$

et

$$\phi^{-1}\left((F_u + \mathbb{Q}^d) \cap (F_s + \mathbb{Q}^d) \bmod 1\right) = Per(X).$$

Preuve. La première égalité résulte immédiatement de la proposition précédente. Montrons la seconde. Si $\phi(x)$ appartient à $(F_u + \mathbb{Q}^d) \cap (F_s + \mathbb{Q}^d)$ mod 1, il existe q et q' dans $\mathbb{Q}^d$ tels que $\psi(x_+) - \chi(x-) =$

$(q+F_u)\cap(q'+F_s)$, c'est-à-dire $\psi(x_+) = \pi_u(q')$ et $\chi(x_-) = \pi_s(-q)$. D'après la proposition précédente, ceci entraîne que x_+ et x_- sont ultimement périodiques. □

V.e Constructibilité

Dans ce paragraphe nous montrons comment obtenir une construction effective de X. Les notations sont celles de la section 3. Le système X est obtenu à partir de Y, l'adhérence des M_u-développements des points de W.

Nous avons vu que Y est engendré par un graphe $\mathcal{G}$ dont les sommets sont des parties d'un ensemble A (les $a_{k+1}(e,c)$ de $W-W$) dont *a priori* on sait seulement qu'il est fini. On trouve facilement des bornes L et L' à $\pi_s(A)$ et $\pi_u(A)$. Ceci nous permet de déterminer un ensemble $C \subset \pi_u\left(\mathbb{Z}^d\right)$ tel que $A \subset C$, et c'est à partir de cet ensemble que nous définissons un graphe $\mathcal{G}'$ engendrant également Y.

Pour un mot $(e_0 \dots e_k)$ de E^k, considérons les objets suivants :

$$\mathcal{G}_{e_0\dots e_k} = \{(c_0 \dots c_k) > (e_0 \dots e_k) \ / \ \forall i = 0, \dots, k+1 \ \ a_i(c,e) \in C\}$$

$$et\ C_{e_0\dots e_k} = \left\{a_{k+1}(c,e) \ \ /(c_0 \dots c_k) \in \mathcal{G}_{e_0\dots e_k}\right\}.$$

Il est possible de construire effectivement tous les ensembles $C_{e_0\dots e_k}$. Il suffit de construire

$$\{C_{e_0\dots e_k} \ / \ (e_0, \dots, e_k) \in E^k, \ k \leq r\}$$

jusqu'à ce que

$$\begin{aligned}\{C_{e_0\dots e_k} \ / \ (e_0, \dots, e_k) \in E^k, \ k \leq r\} &= \\ = \{C_{e_0\dots e_k} \ / \ (e_0, \dots, e_k) \in E^k, \ k \leq r-1\}&.\end{aligned}$$

Choisissons pour sommets du graphe de $\mathcal{G}'$ les $C_{e_0\dots e_k}$ tels que

$$W \not\subset \bigcup_{c \in C_{e_0\dots e_k}} (W-c).$$

Les flèches de $\mathcal{G}'$ sont définies naturellement : une flèche étiquetée e_{k+1} joint l'état $C_{e_0\dots e_k}$ à l'état $C_{e_0\dots e_{k+1}}$:

Proposition V.6. *Le graphe $\mathcal{G}'$ engendre Y.*

Preuve. Soit $e_0 \dots e_k$ un mot. L'admissibilité de ce mot est équivalente à

$$W \not\subset \bigcup_{a \in A_{e_0 \dots e_k}} (W - a)\,.$$

On peut écrire $C_{e_0 \dots e_k} = A_{e_0 \dots e_k} \cup D_{e_0 \dots e_k}$ avec $D_{e_0 \dots e_k} \subset C \setminus (W - W)$. Or

$$W \cap \bigcup_{d \in D_{e_0 \dots e_k}} (W - d) = \varnothing.$$

Finalement

$$\bigcup_{c \in C_{e_0 \dots e_k}} (W - c) \cap W = \bigcup_{a \in A_{e_0 \dots e_k}} (W - a) \cap W$$

et le graphe proposé engendre bien Y. □

Pour construire $\mathcal{G}'$, il faut encore tester pour chaque $C_{e_0 \dots e_k}$ la condition

$$W \not\subset \bigcup_{c \in C_{e_0 \dots e_k}} (W - c)\,.$$

Posons

$$W_n = \left\{ \sum_0^n M^{-i} e_i \;\; / \;\; (e_i) \in E^{n+1} \right\}.$$

Si $W \subset \bigcup_{b \in B} (W - b)$, il existe $0 < \alpha < 1$ et $R > 0$ (calculables) tels que :

$$\forall w_n \in W_n \quad d\left(w_n, \bigcup_{b \in B} (W_n - b) \right) \leq R\alpha^n.$$

Comme W est l'adhérence de son intérieur, si $W \not\subset \bigcup_{b \in B} (W - b)$, il existe $w \in W$ tel que $d\left(z, \bigcup_{b \in B} (W - b)\right) > 0$, donc, pour n suffisamment grand, il existe w_n tel que

$$d\left(w_n, \bigcup_{b \in B} (W_n - b) \right) > R\, \alpha^n.$$

Nous pouvons maintenant proposer un procédé permettant d'identifier les ensembles $C_{e_0 \dots e_k}$ qui sont des sommets de $\mathcal{G}'$. Pour n donné, pour chaque ensemble $B = C_{e_0 \cdots e_k}$ il suffit de tester s'il existe un point w_n de W_n tel que l'inégalité $d\left(w_n, \bigcup_{b \in B} (W_n - b)\right) > R\ \alpha^n$ soit vérifiée. Si c'est le cas, B est un sommet de $\mathcal{G}'$. Pour n suffisamment grand, nous obtenons ainsi tous les sommets de $\mathcal{G}'$. Le problème cependant reste entier car nous n'avons pas de critère fixant la taille d'un entier n suffisant.

Nous ne sommes donc pas en mesure de construire Y par un calcul effectif. Cependant, on peut construire un graphe engendrant un système sofique transitif X codant $\left(\mathbb{T}^d, T, m\right)$ par ϕ. En effet, pour obtenir un tel X il nous suffit de construire un sous-graphe transitif de $\mathcal{G}'$ engendrant un système sofique d'entropie $\log \Delta$. Dans le procédé précédent, à chaque fois que l'on détecte un nouveau sommet de $\mathcal{G}'$, construisons donc une matrice A dont le rayon spectral est l'exponentielle de l'entropie du sous-décalage engendré par le morceau du graphe $\mathcal{G}'$ déjà détecté. Si ce rayon spectral est inférieur à Δ, il faut essayer un n plus grand. S'il est égal à Δ, le morceau du graphe construit suffit à engendrer un X codant l'automorphisme du tore.

Nous tenons à exprimer ici notre reconnaissance envers Jean-Pierre Conze qui a dirigé ce travail.

References

[AW] R. L. Adler & B. Weiss: *Entropy, a complete invariant for automorphism of the torus*, Proceedings of National Academy of Science, **57:** 1967, 1573-1576.

[B] A. Bertrand-Mathis: *Développement en base θ, répartition modulo 1 de la suite $(x\theta^n)_{n\geq 0}$, langages codés et θ-shift*, Bull. Soc. Math. France, **114:** 1986, 271-323.

[Bo] R. Bowen: *Markov partitions are not smooth*, Proc. Amer. Math. Soc., **71:** 1978, 130-132.

[C] E. Cawley: *Smooth Markov Partitions and Toral Automorphisms*, Ergod. Th. and Dynam. Sys., **11:** 1991, 633-651.

[CP] E.M. Coven & M.E. Paul: *Sofic systems*, Israël Journal of Mathematics, **20**(2): 1975, 165-177.

[CK] I. Csizar & J. Komlos: *On the equivalence of two models of finite-state noiseless channels from the point of view of the output*, Proceedings of the colloquium of information theory. Edited by A.Renyi, J.Bolyai, Math. Soc., Budapest, 1968.

[ES] M. Einsiedler & K. Schmidt: *Markov partitions and homoclinic points of algebraic* $\mathbb{Z}^d$*-actions*, Preprint.

[F] R. Fischer: *Sofic Systems and Graphs*, Monatshefte für Mathematik, **80:** 1975, 179-186.

[Fr] C. Frougny: *Representations of Numbers and Finite Automata*, Math. Systems Theory, **25:** 1992, 37-60.

[FS] C. Frougny & B. Solomiak: *Finite beta-expansions*, Ergod. Th. and Dynam. Sys., **4:** 1992, 713-723.

[GH] Y. Guivarc'h & J. Hardy: *Théorèmes limites pour une classe particulière de chaînes de Markov et applications aux difféomorphismes d'Anosov*, Ann. Inst. Henri Poincaré, **24**(1): 1988, 73-98.

[K] R. Kenyon: *Self-similar tilings*, Thèse, Princeton University, 1990.

[KV] R. Kenyon & A.M. Vershik: *Arithmetic construction of sofic partitions of hyperbolic toral automorphisms*, Preprint, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 1995.

[Kr] W. Krieger: *On sofic systems I*, Israël Journal of Mathematics, **48**(4): 1984, 305-330.

[L3] S. Le Borgne: *Un codage sofique des automorphismes hyperboliques du tore*, CRAS, t. 323, Série I, 1996, p. 1123-1128.

[L4] S. Le Borgne: *Dynamique symbolique et propriétés stochastiques des automorphismes du tore : cas hyperbolique et quasihyperbolique*, Thèse, Université de Rennes 1, 1997.

[P] C. Petronio: *Thurston's solitaire tilings of the plane*, Rendiconti dell'Istituto di Matematica dell'Università di Trieste, **26:** 1994, 261-295.

[LM] D. Lind & B. Marcus: *Symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press, 1995.

[S] T. Safer: *Représentation des nombres complexes et automates finis*, Thèse, Université Paris 6, 1997.

[T] W.P. Thurston: *Groups, Tilings and Finite State Automaton*, Colloquium Lectures 92^{nd} Summer Meeting of the AMS, 1989.

[V1] A. M. Vershik: *The fibadic expansions of real numbers and adic transformation*, Preprint Inst. Mittag Leffler, **4:** 1991-1992, 1-9.

[V2] A. M. Vershik: *Arithmetic isomorphism of hyperbolic toral automorphisms and sofic shift*, Functional Anal. Appl., **26:** 1992, 170-173.

[W] B. Weiss: *Subshifts of finite type and sofic systems*, Monats. Math., **77:** 1973, 462-474.

Stéphane Le Borgne
IRMAR,
Université de Rennes I,
35042 Rennes Cedex
France

E-mail: sleborgn@maths.univ-rennes1.fr