

# Création de connexions en topologie $C^1$ pour les flots des surfaces

Marie-Claude Arnaud

**Resumé.** En utilisant des techniques élaborées récemment par S. Hayashi pour créer des intersections hétéroclines, on démontre que si  $\varphi$  est un flot d'une surface tel qu'il existe deux points  $p$  et  $q$  et un point  $p'$  non périodique, dont l'orbite ne tend pas vers l'infini et qui est à la fois dans l'ensemble  $\omega$ -limite de  $p$  et dans l'ensemble  $\alpha$ -limite de  $q$ , alors il existe un flot  $\psi$  proche de  $\varphi$  en topologie  $C^1$  et  $T > 0$  tel que  $\psi_T(p) = q$ . On montre aussi qu'on peut supprimer l'hypothèse " $p'$  non périodique" si on impose que si  $p'$  est un point critique, il est hyperbolique.

**Mots Clefs:** Connexions, flots, perturbations, orbites périodiques.

**Abstract.** Using some technics due to S. Hayashi, we prove: if  $\varphi$  is a flow on a surface such that there exist two points  $p, q$  and a point  $p'$  which is not periodic, whose orbit doesn't go to the infinite and which is contained simultaneously in the  $\omega$ -limit set of  $p$  and in the  $\alpha$ -limit set of  $q$ , then there exists a flow  $\psi$  which is  $C^1$ -close to  $\varphi$  and such that  $\psi_T(p) = q$  for a  $T > 0$ . Then we prove: we don't need the hypothesis " $p'$  is not periodic" if we assume that when  $p'$  is critical, it is hyperbolic.

**Keywords:** Connecting lemma, flow, perturbation, periodic orbits.

## 1. Introduction

Soit  $M$  une variété,  $\varphi = (\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  un flot de classe  $C^k$  (où  $k \geq 1$ ) de  $M$ . Rappelons que si  $p \in M$ , son ensemble  $\omega$ -limite est:

$$\omega(p, \varphi) = \{q \in M; \exists (T_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = +\infty \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_{T_n}(p) = q\}$$

et son ensemble  $\alpha$ -limite est:  $\alpha(p, \varphi) = \omega(p, (\varphi_{-t})_{t \in \mathbb{R}})$ .

En d'autres termes,  $\omega(p, \varphi)$  est l'ensemble des points de  $M$  dont se rapproche l'orbite de  $p$  dans un futur aussi lointain qu'on le veut, alors que  $\alpha(p, \varphi)$  désigne l'ensemble des points de  $M$  dont se rapproche l'orbite de  $p$  dans un passé aussi lointain qu'on le veut.

Une question alors naturelle qui se pose est la suivante:

supposons que  $p$  et  $q$  soient tels que  $\omega(p, \varphi) \cap \alpha(q, \varphi) \neq \emptyset$ ; existe-t-il  $\psi$  proche de  $\varphi$  en topologie  $C^1$  tel que  $p$  et  $q$  soient sur la même orbite, i.e. plus précisément tels qu'il existe  $T > 0$  tel que  $\psi_T(p) = q$ ? En d'autres termes, on veut connecter  $p$  à  $q$  par une orbite.

Il semble que R. Mañé ait soulevé cette question dans le but de faire un "Make or Break Lemma" (cf la fin de [5]):

étant donnés  $p$  et  $q$  comme ci-dessus, peut-on perturber le flot en topologie  $C^r$  de telle sorte que:

- soit  $p$  est connecté à  $q$ ;
- soit  $\omega(p, \varphi) \cap \alpha(q, \varphi) = \emptyset$ ?

Des réponses à cette question sont connues dans certains cas:

- si  $p \in \omega(p, \varphi)$  (dans ce cas, on dit que  $p$  est *positivement récurrent*), on sait grâce au "closing lemma" (cf [1] ou [6]) trouver  $\psi$  proche de  $\varphi$  en topologie  $C^1$  tel que l'orbite de  $p$  sous  $\psi$  soit périodique;
- si  $q$  est sur la variété stable d'un point critique hyperbolique,  $p$  est sur la variété instable d'un point critique hyperbolique et  $q \in \omega(p, \varphi)$ , il existe  $\psi$  proche de  $\varphi$  en topologie  $C^1$  et  $T > 0$  tel que  $\psi_T(p) = q$ ; ce résultat a été démontré récemment par S. Hayashi dans [2] et permet de créer des intersections hétéroclines;
- d'autre part, C. Pugh a construit dans [5] un exemple dans le cas d'une surface non compacte où  $\alpha(q, \varphi) \cap \omega(p, \varphi) \neq \emptyset$  et où on ne peut pas connecter  $p$  à  $q$  en faisant une perturbation du flot petite en topologie  $C^1$ .

Nous verrons dans le théorème 1.1 que si on rajoute une condition concernant l'intersection  $\alpha(q, \varphi) \cap \omega(p, \varphi)$ , on peut connecter  $p$  à  $q$ , et que le contre-exemple décrit par C. Pugh est justement dans le seul cas où cette condition n'est pas réalisée (tous les points de  $\alpha(q, \varphi) \cap \omega(p, \varphi)$  ont une orbite qui tend vers l'"infini").

Désormais, si  $\varphi$  est un flot sur  $M$ , on notera

$$M(\varphi) = \{q \in M; \omega(q, \varphi) \neq \emptyset\};$$

en d'autres termes,  $M(\varphi)$  est l'ensemble des points dont l'orbite positive ne tend pas vers l'"infini". Remarquons que quand  $M$  est compacte, on

a:  $M = M(\varphi)$ . De plus,  $M(\varphi)$  contient toujours l'ensemble des points positivement récurrents.

Nous nous proposons de démontrer (nous munissons l'ensemble des flots de  $M$  de la topologie  $C^1$  de Whitney (cf [3])):

**Théorème 1.1.** *Soit  $M$  une variété de dimension 2,  $\varphi$  un flot de classe  $C^k$  (où  $k \in [1, \infty]$ ) sur  $M$ ,  $p$  et  $q$  deux points de  $M$  tels que  $\omega(p, \varphi) \cap \alpha(q, \varphi) \cap M(\varphi)$  contienne au moins une orbite non périodique. Soit  $U$  un voisinage de  $\varphi$  en topologie  $C^1$ .*

*Alors il existe  $\psi \in U$  de classe  $C^k$  et  $T > 0$  tel que:  $\psi_T p = q$ .*

En fait, on peut obtenir la même conclusion en supposant juste que  $\omega(p, \varphi) \cap \alpha(q, \varphi) \cap M(\varphi)$  est non vide, à condition de supposer les points critiques hyperboliques:

**Théorème 1.2.** *Soit  $M$  une variété de dimension 2,  $\varphi$  un flot de classe  $C^k$  (où  $k \in [1, \infty]$ ) sur  $M$ , dont tous les points critiques sont hyperboliques,  $p$  et  $q$  deux points de  $M$  tels que:*

$$\omega(p, \varphi) \cap \alpha(q, \varphi) \cap M(\varphi) \neq \emptyset$$

*Soit  $U$  un voisinage de  $\varphi$  en topologie  $C^1$ .*

*Alors il existe  $\psi \in U$  de classe  $C^k$  et  $T > 0$  tel que:  $\psi_T p = q$ .*

Le théorème 1.2 se déduira assez facilement du théorème 1.1. et du résultat d'Hayashi.

Pour démontrer le théorème 1.1, nous adaptons et affinons dans le cas considéré l'argument de S. Hayashi. La remarque principale qui permet en dimension 2 de simplifier l'argument est que les applications de Poincaré  $P$  sont définies sur des espaces unidimensionnels et que, si on identifie cet espace à  $\mathbb{R}$ , toutes les applications tangentes à  $P$  (linéaires définies sur  $\mathbb{R}$  donc) sont des homothéties; signalons que C. Bonatti utilisait déjà cette remarque pour sa démonstration (communication orale) du closing lemma pour les flots des surfaces.

**Corollaire 1.3.** *Soit  $M$  une variété compacte de dimension 2,  $\varphi$  un flot de classe  $C^k$  (où  $k \in [1, \infty]$ ) sur  $M$  dont tous les points critiques sont hyperboliques,  $p$  un point de  $M$  tels que:  $\alpha(p, \varphi) \cap \omega(p, \varphi) \neq \emptyset$ . Soit  $U$  un voisinage de  $\varphi$  en topologie  $C^1$ .*

Alors il existe  $\psi \in U$  de classe  $C^k$  pour lequel  $p$  est un point périodique.

Ce résultat permet de fermer des orbites pour lesquelles on ne peut pas forcément appliquer le “closing lemma”.

## 2. Des résultats concernant les perturbations

On sait depuis longtemps construire des perturbations de flots petites en topologie  $C^1$  qui permettent de “bouger” l’orbite d’un point donné non critique en modifiant le flot à l’intérieur d’une “boite de flot” (cf. par exemple [1], ou [6], ou [4]).

Rappelons (avant de préciser dans la définition qui va suivre quelles boites de flot nous allons considérer) que si  $\varphi$  est un flot, une “vraie boite de flot” (pour  $\varphi$ ) est l’image par l’application:

$$(t, x) \in [0, T] \times S \rightarrow \varphi_t(x)$$

de  $[0, T] \times S$  où:

- $S$  est un morceau d’hypersurface transverse à  $\dot{\varphi}$ ;
- $T$  est un réel strictement positif;
- on suppose que sur  $[0, T] \times S$ , l’application définie ci-dessus est une submersion injective.

Nous allons donner ici un énoncé donnant des constantes valables (pour les perturbations construites à l’intérieur d’une vraie boite de flot) dans tout un voisinage d’un point critique donné.  $M$  désignera une surface de classe  $C^\infty$ , bien qu’un analogue du premier énoncé soit valable dans une variété de dimension quelconque.

**Définition 2.1.** Etant donné un flot  $\varphi$  sur  $M$  et  $\lambda > 0$ ,  $R_\lambda(\varphi)$  désignera l’ensemble des points de  $M$  qui ne sont pas périodiques de période inférieure ou égale à  $\lambda$ . De plus,  $R(\varphi)$  désignera l’ensemble des points de  $M$  qui ne sont pas critiques (i.e. tels que  $\dot{\varphi}(p) \neq 0$ ).

Supposons maintenant que  $M$  est munie d’une métrique riemannienne de classe  $C^\infty$ . Ceci permet de définir une fonction exponentielle sur  $M$ . Alors si  $p \in R(\varphi)$  et  $\varepsilon > 0$ , on définit:

$$\Pi_\varepsilon(p, \varphi) = \{\exp_p(v); v \in \{\dot{\varphi}(p)\}^\perp \text{ et } \|v\| \leq \varepsilon\};$$

ainsi, à condition que  $\varepsilon$  soit assez petit (de façon qui dépend de  $p$ ),  $\Pi_\varepsilon(p, \varphi)$  est un morceau d'hypersurface transverse au champ de vecteurs  $\varphi$  (c'est-à-dire un arc puisqu'on a supposé la variété de dimension 2).

De plus, si  $q \in \Pi_\varepsilon(p, \varphi)$ , on notera:

$$\Pi_r(q, p, \varphi) = \{x \in \Pi_\varepsilon(p, \varphi), d(x, q) < r\}$$

(c'est la boule centrée en  $q$  et de rayon  $r$  dans le petit morceau d'hyper-surface en  $p$ ).

Dans ce cas, on notera  $\Phi$  l'application définie sur  $\Pi_\varepsilon(p, \varphi) \times \mathbb{R}$  par:  $\Phi(x, t) = \varphi_t(x)$ .

De plus, on posera

$$F_{r,T}(p, \varphi) = \Phi(\Pi_r(p, \varphi) \times [0, T]).$$

On notera aussi si  $q \in \Pi_\varepsilon(p, \varphi)$ :

$$F_{r,T}(q, p, \varphi) = \Phi(\Pi_r(q, p, \varphi) \times [0, T]).$$

Avant de donner la proposition perturbative annoncée, faisons une figure expliquant quel type de perturbation nous allons considérer.

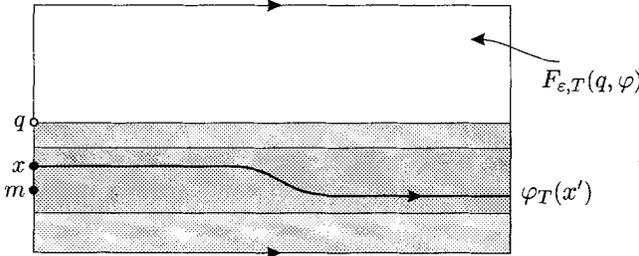


Figure 1

Expliquons un peu la figure 1: on travaille dans une boîte de flot (pour un flot  $\varphi$ ) de "longueur" en temps égale à  $T$  (boîte de flot notée  $F_{\varepsilon,T}(q, \varphi)$ ); on considère deux points  $x$  et  $x'$  à l'"entrée" de cette boîte de flot et on veut, en changeant le flot uniquement à l'intérieur de cette boîte de flot et de telle sorte que le nouveau flot soit proche en topologie  $C^1$  de  $\varphi$ , que la nouvelle orbite de  $x$  sorte de la boîte de flot par  $\varphi_T(x')$ . On représente alors en grisé foncé l'"amplitude" de la perturbation (i.e. la boîte de flot minimale de longueur en temps  $T$  qui contient à la fois

$x$  et  $x'$ ) et en grisé clair le support de la perturbation. La proposition qui suit exprime qu'il y a un rapport entre cette amplitude et la taille du support:

**Proposition 2.2.** *Soit  $M$  une variété de classe  $C^\infty$  munie d'une métrique riemannienne de classe  $C^\infty$ . Soit  $\varphi$  un flot de classe  $C^k$  (où  $k \in [1, \infty]$ ) de  $M$ ,  $U$  un voisinage de  $\varphi$  en topologie  $C^1$  et  $T > 0$ . Soit  $p \in M$ .*

*Alors existe un voisinage  $V$  de  $p$  et une constante  $c \in ]0, 1[$  telle que: pour tout  $q \in V \cap R_T(\varphi)$ , il existe  $\varepsilon > 0$  tel que:*

- (i)  $\Pi_\varepsilon(q, \varphi)$  est une hypersurface immergée injectivement;
- (ii)  $F_{\varepsilon, T}(q, \varphi)$  est une vraie boîte de flot;
- (iii) pour tout  $(x, x') \in (\Pi_\varepsilon(q, \varphi))^2$ , si

$$d(x, x') < \frac{2c}{1-c} \inf\{\varepsilon - d(q, x'), \varepsilon - d(q, x)\},$$

*il existe  $\psi \in U$  de classe  $C^k$  telle que si on pose*

$$\rho = \frac{d(x, x')}{2c}$$

*et si  $m(x, x')$  désigne le milieu (géodésique pour la métrique restreinte à  $\Pi_\varepsilon(q, \varphi)$ ) de  $x$  et  $x'$ :*

- (a)  $\text{supp}(\dot{\psi} - \dot{\varphi}) \subset F_{\rho, T}(m(x, x'), q, \varphi)$ ;
- (b)  $\psi_T(x) = \varphi_T(x')$ .

Le (i) et le (ii) de la proposition précédente sont des évidences, c'est le (iii) qui est important ici: il exprime que pour "bouger" d'une distance  $\delta$  un point voisin de  $p$  à l'aide d'une boîte de flot de longueur (en temps)  $T$ , on a besoin d'une boîte de flot de "largeur" (spaciale)  $\delta/c$ .

**Démonstration de la proposition 2.2.** Soient  $\varphi$ ,  $U$ ,  $T > 0$  et  $p \in M$  comme dans l'énoncé. Pour tout  $q \in R_T(\varphi)$ , on peut trouver  $\varepsilon > 0$  (qui dépend bien sûr de  $q$ ) tel que (i) et (ii) soient vérifiées.

De plus, on peut trouver un voisinage  $V$  relativement compact de  $p$  et  $\delta > 0$  tels que pour tout  $q \in \bar{V}$ , la fonction

$$\exp_q: \{v \in T_q M, \|v\| \leq \delta\} \rightarrow M$$

soit un difféomorphisme. Comme  $\bar{V}$  est compact, ces difféomorphismes ainsi que leurs inverses ont alors des normes ( $C^1$ ) qui sont uniformément

bornées. On peut bien sûr supposer que le diamètre de  $V$  est inférieur à  $\delta$ .

Soit alors  $q \in V$ . On choisit  $\varepsilon \in ]0, \delta[$  vérifiant (i) et (ii). Soit  $(x, x') \in (\Pi_\varepsilon(q, \varphi))^2$  tel que:

$$d(x, x') < \frac{2c}{1-c} \inf\{\varepsilon - d(q, x'), \varepsilon - d(q, x)\}$$

( $c$  est une constante que nous préciserons par la suite). Soit  $m(x, x')$  le milieu (géodésique) de  $x$  et  $x'$ . Dans la figure 2, nous représentons une surface de section de dimension 2 et non un arc comme cela devrait être, car à notre avis le dessin avec des disques est géométriquement plus compréhensible qu'un dessin avec des segments:

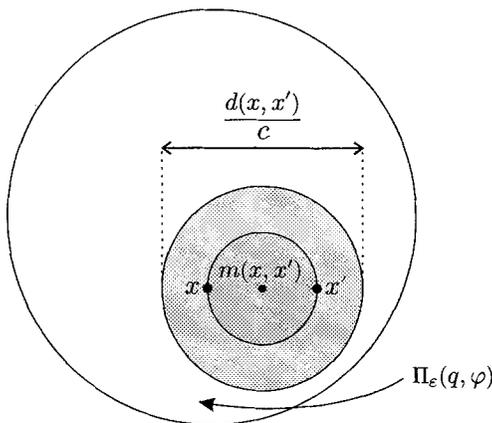


Figure 2

On définit à l'intérieur de  $F_{\varepsilon, T}(q, \varphi)$  un flot  $\psi$  de la manière suivante:  
 – comme

$$\exp_q: \{v \in T_q M, \|v\| \leq \delta\} \rightarrow M$$

est un difféomorphisme, il existe un unique couple  $(w, w') \in (T_q M)^2$  tel que  $\|w\| \leq \delta$  et  $\|w'\| \leq \delta$  qui vérifie:  $x = \exp_q w$  et  $x' = \exp_q w'$ ; de plus, on a aussi:  $m(x, x') = \exp_q m$ .

– on pose alors:

$$\forall v \in \{\dot{\varphi}(q)\}^\perp; \|v\| < \varepsilon$$

↓

$$\psi_t(\exp_q v) = \varphi_t \left( \exp_q \left( v + \beta \left( \frac{t}{T} \right) \alpha \left( \frac{4c^2 \|v - m\|^2}{\|w - w'\|^2} \right) (w' - w) \right) \right)$$

$\forall t \in [0, T]$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont deux fonctions de classe  $C^\infty$  définies sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $[0, 1]$  telles que:

- (•)  $\alpha$  est à support inclus dans  $[-1, 1]$  et vaut 1 sur  $[-1/4, 1/4]$ ;
- (•)  $\beta$  vaut 0 sur  $] -\infty, 0]$  et 1 sur  $[1, +\infty[$ .

On veut alors montrer que si on a choisi  $c$  assez petit (uniformément en  $q$ ), on peut imposer à  $\psi$  (prolongé de façon convenable) d'être un flot qui vérifie les conclusions de la proposition. Or:

– un calcul immédiat montre que si  $c$  est choisi assez petit (uniformément en  $q$ ), chaque application de  $[0, T] \times (\{\dot{\varphi}(q)\}^\perp \cap \{\|v\| < r\})$  dans lui même définie par:

$$f_q(t, v) = v + \beta \left( \frac{t}{T} \right) \alpha \left( 4c^2 \frac{\|v - m\|^2}{\|w - w'\|^2} \right) (w' - w)$$

est proche de la projection  $(t, v) \rightarrow v$  en topologie  $C^1$  (dans ce cas,

$$\|w - w'\| = d(x, x') < \frac{2c\varepsilon}{1 - c}$$

est petit);  $\psi$  est donc bien un flot sur  $F_{\varepsilon, T}(q, \varphi)$ ;

– comme les fonctions  $\exp_q$  ainsi que leurs inverses sont uniformément bornées sur les domaines considérés, on en déduit que  $\psi$  est proche en topologie  $C^1$  de  $\varphi$ ;

– de plus, on peut prolonger  $\psi$  en dehors de  $F_{\varepsilon, T}(q, \varphi)$  en le faisant coïncider avec  $\varphi$ .

Il est alors clair que  $\psi$  vérifie toutes les conclusions voulues. □

Il se trouve que pour la démonstration du théorème 1.1, nous aurons besoin d'utiliser un  $c$  très proche de 1. Or, la proposition 2.2 nous dit juste que  $c \in ]0, 1[$ ; mais  $c$  peut-être à priori très petit. L'idée pour augmenter la valeur de  $c$  est de considérer plusieurs boîtes de flot successives ou, ce qui revient au même, d'allonger la longueur (en temps) des

boites de flots considérées. Cette idée de considérer plusieurs perturbations à supports disjoints du type décrit dans la proposition 2.2 était déjà exploitée dans [1], [2] ou [6]. On représente ceci en figure 3.

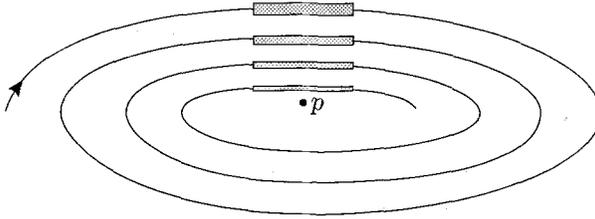


Figure 3

Ici, nous nous servirons du fait que nous travaillons sur des surfaces, c'est pourquoi notre énoncé est restreint au cas de la dimension 2. Notre énoncé concernera ce qui se passe au voisinage d'un point  $p$  non périodique fixé. Un tel point étant non critique, on peut considérer un petit arc transverse au flot passant par  $p$ , par exemple avec les notations précédentes  $\Pi_\varepsilon(p, \varphi)$ . En fait, il sera plus simple par la suite de se placer en coordonnées, c'est pourquoi nous allons faire ceci tout de suite:

- on suppose (mais cela n'est valable que pour le voisinage de  $p$ ) travailler dans  $\mathbb{R}^2$ , on a  $p = (0, 0)$ ,  $\dot{\varphi}(p) = (0, 1)$  et l'arc transverse au flot considéré est de la forme  $[-r, r] \times \{0\}$ , et nous le noterons de façon abusive  $[-r, r]_p$  qui sera identifié à  $[-r, r]$ ;
- il n'est pas difficile alors de comprendre ce que désignera  $[a, b]_p$  si  $-r \leq a \leq b \leq r$ . Bien entendu, on pourra supposer que:  $\forall (q, q') \in [-r, r]_p, d(q, q') = |q - q'|$ ;
- de plus, on conviendra de la notation (abusives mais simplificatrices) suivante: si  $I = [a, b]$  est un segment de  $\mathbb{R}$ ,  $\frac{1}{\varepsilon}I$  désignera le segment de longueur  $\ell(\frac{1}{\varepsilon}I) = \frac{1}{\varepsilon}\ell(I)$  et de même milieu que  $I$  (ici,  $\ell$  désigne la longueur). Si  $I = [q, q']_p \subset [-r, r]_p$ , on définira de manière analogue  $\frac{1}{\varepsilon}I$ , à condition que ceci soit bien dans  $[-r, r]_p$ , condition qui s'écrit:

$$|q - q'| \leq \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \inf\{r - |q|, r - |q'|\}$$

(ce qui sera justement l'hypothèse requise dans le (ii) de la proposition 2.3);

Remarquons que si ceci est vérifié, si  $I = [q, q']_p$ , on a :

$$\frac{1}{\varepsilon} I = \left[ \frac{q + q'}{2} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{|q - q'|}{2}, \frac{q + q'}{2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{|q - q'|}{2} \right]_p$$

(ce qui est justement l'intervalle qui intervient dans le (ii) a de la proposition 2.3).

**Proposition 2.3.** *Soit  $M$  une surface de classe  $C^\infty$  munie d'une métrique riemannienne de classe  $C^\infty$ . Soit  $\varphi$  un flot de classe  $C^k$  (où  $k \in [1, \infty]$ ) de  $M$ ,  $U$  un voisinage de  $\varphi$  en topologie  $C^1$ ,  $p \in M(\varphi)$  non périodique et  $\varepsilon \in ]0, 1[$ . Alors il existe  $r > 0$  et  $T > 1$  tels que :*

- (i)  $\Phi([-r, r]_p \times [0, T])$  est une vraie boîte de flot;
- (ii) pour tout  $(q, q') \in [r, r]_p^2$  tels que  $|q - q'| \leq \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \inf\{r - |q|, r - |q'|\}$ , il existe  $\psi \in U$  de classe  $C^k$  tel que :
  - (a)  $\text{supp}(\dot{\psi} - \dot{\varphi}) \subset \Phi \left( \left[ \frac{q + q'}{2} - \frac{1}{\varepsilon} \frac{|q - q'|}{2}, \frac{q + q'}{2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{|q - q'|}{2} \right]_p \times [0, T] \right)$ ;
  - (b)  $\psi_{T'}(q) = \varphi_T(q')$  pour un  $T' \in \{T - 1, T + 1\}$ .

Nous représentons en figure 4 une grande boîte de flot qui permet d'effectuer une perturbation comme décrit dans le proposition 2.2.

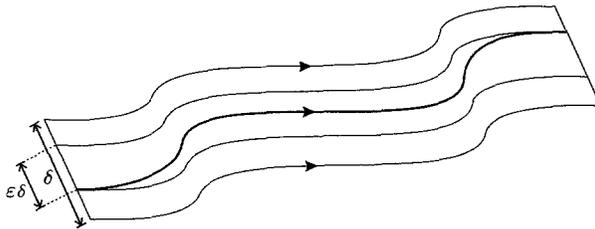


Figure 4

**Démonstration de la proposition 2.3.** Comme  $p \in M(\varphi)$ , il existe  $p' \in \omega(p, \varphi)$ . En appliquant la proposition 2.2 à  $U, p'$  et pour le temps  $T = 1$ , on trouve un voisinage  $V$  de  $p'$  ainsi qu'une constante  $c \in ]0, 1[$ . Quitte à prendre des cartes au voisinage de  $p$  et  $p'$  (en fait on en a déjà pris au voisinage de  $p$ ), on peut supposer quand on travaille au voisinage de ces points qu'on est dans  $\mathbb{R}^2$ . (cela aura par exemple l'avantage de pouvoir comparer une application et son application tangente).

De plus, quitte à diminuer  $U$ , on peut supposer que si  $(\psi, \psi') \in U^2$  sont telles que les supports de  $\dot{\psi} - \dot{\varphi}$  et les supports de  $\dot{\psi}' - \dot{\varphi}$  sont disjoints et dans  $\Phi(V \times [0, 1])$ , alors le flot  $\Phi$  qui coïncide avec  $\psi$  sur le support de  $\dot{\psi} - \dot{\varphi}$ , avec  $\psi'$  sur le support de  $\dot{\psi}' - \dot{\varphi}$  et avec  $\varphi$  partout ailleurs est dans  $U$ .

De plus, comme  $p' \in \omega(p, \varphi)$ , il existe une suite strictement croissante de réels strictement positifs  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et un réel  $\delta > 0$  tels que:

- $\forall n \in \mathbb{N}, B_\delta(\varphi_{T_n}(p)) \subset V$ ;
- $\forall n \in \mathbb{N}, T_{n+1} - T_n \geq 2$ .

On notera:  $p_n = \varphi_{T_n}(p)$ .

Soit alors  $N$  un entier fixé tel que  $N > \frac{4}{c(1 - \varepsilon)}$ . Il existe alors  $r > 0$  et  $\delta' \in ]0, \delta[$  tels que:

- $\Phi([-r, r]_p \times [0, T_N + 2])$  est une vraie boîte de flot;
- $\forall t \in [0, T_N + 2], \forall x \in [-r, r]_p, d(\varphi_t(x), \varphi_t(p)) < \delta'$ ;
- les boîtes de flots  $F_{\delta', 1}(p_n, \varphi)$  pour  $n \in [0, N]$  sont de vraies boîtes de flot et sont deux à deux disjointes;

Représentons par exemple en figure 5 les boîtes de flots en  $p_1, p_2$  à l'intérieur desquelles nous allons effectuer des perturbations.

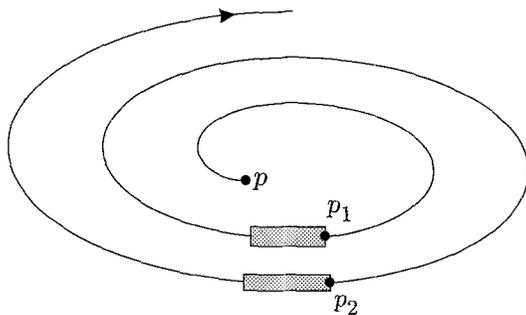


Figure 5

- pour tout  $n \in [0, N]$ , on peut définir une application de Poincaré  $P_n$  de  $[-r, r]_p$  dans  $\Pi_{\delta'}(p_n, \varphi)$ ; on impose que chaque  $P_n$  soit proche en topologie  $C^1$  de son application tangente en  $p$ ; bien sûr, dire ceci n'a un sens que si on se place dans une carte au voisinage de  $p'$  (resp.  $p$ ) qui permet d'identifier  $V$  (resp. un voisinage de  $p$ ) à une partie

de  $\mathbb{R}^2$ , mais on a déjà supposé cela; aussi, on impose:

$$\begin{aligned} \forall(x, y) \in [-r, r]_p^2, \forall n \in [0, N], \\ \frac{1}{2} \|DP_n(p)(x - y)\| \leq d(P_n(x), P_n(y)) \leq 2 \|DP_n(p)(x - y)\|. \end{aligned} \tag{1}$$

On impose de plus que le temps de retour de  $[-r, r]_p$  dans  $\Pi_{\delta'}(p_N, \varphi)$  est à valeur dans  $[T_N - 1, T_N + 1]$ .

Soit alors  $(q, q') \in [-r, r]_p^2$  tel que:  $|q - q'| \leq \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \inf\{r - |q|, r - |q'|\}$ .

On découpe alors le segment  $[q, q']_p$  en  $N$  segments de longueur  $\frac{|q - q'|}{N}$ , les extrémités de ces segments, ordonnées, étant nommées  $q_0, q_1, \dots, q_N$ ; plus précisément:

- $\forall n \in [0, N], q_n \in [q, q']_p$  (ou  $[q', q]_p$ );
- $q_0 = q$  et  $q_N = q'$ ;
- $\forall n \in [0, N - 1], |q_n - q_{n+1}| = \frac{|q - q'|}{N}$ .

Or, on avait choisi  $N > \frac{4\varepsilon(1 - c)}{c(1 - \varepsilon)}$ ; on en déduit:

$$\forall n \in [0, N - 1], |q_n - q_{n+1}| < \frac{c(1 - \varepsilon)}{4\varepsilon(1 - c)} |q - q'|.$$

On sait par hypothèse que:

$$|q - q'| \leq \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} \inf\{r - |q|, r - |q'|\};$$

on en déduit:

$$\forall n \in [0, N - 1], |q_n - q_{n+1}| < \frac{2c}{4(1 - c)} \inf\{r - |q|, r - |q'|\}.$$

Comme  $q_n \in [q, q']_p$ , on a:  $|q_n| \leq \sup\{|q|, |q'|\}$ . On a donc finalement:

$$\forall n \in [0, N - 1], |q_n - q_{n+1}| < \frac{2c}{4(1 - c)} \inf\{r - |q_n|, r - |q_{n+1}|\}. \tag{2}$$

Plaçons nous alors dans les cartes choisies précédemment qui permettent d'identifier les voisinage de  $p$  et  $p'$  à des parties de  $\mathbb{R}^2$ . Soit  $n \in [0, N - 1]$ . Alors, comme l'application  $DP_n(p)$  est affine définie sur un espace de dimension 1, c'est une homothétie qui multiplie toutes les distances par un rapport fixe  $\lambda_n$ . En joignant cette remarque à

l'inégalité (2), on obtient:  $\forall n \in \{0, \dots, N - 1\}$ ,

$$\begin{aligned} \|DP_n(p)q_n - DP_n(p)q_{n+1}\| &= \lambda_n |q_{n+1} - q_n| \\ &< \frac{2c}{4(1-c)} \lambda_n \inf\{r - |q_n|, r - |q_{n+1}|\} \\ &= \frac{2c}{4(1-c)} \inf\{\lambda_n r - |DP_n(p)q_n|, \lambda_n r - |DP_n(p)q_{n+1}|\} \end{aligned} \tag{3}$$

Or, nous avons écrit que  $DP_n(p)$  est proche en un certain sens en topologie  $C^1$  de  $P_n$  (c'était (1)); cela donne:

$$\begin{aligned} \forall n \in \{0, \dots, N - 1\}, \\ d(P_n(q_n), P_n(q_{n+1})) \leq 2\|DP_n(p)q_n - DP_n(p)q_{n+1}\|. \end{aligned} \tag{4}$$

De plus, pour tout  $n \in [0, N]$  et tout  $j \in [0, N]$ , on a:  $DP_j(p)r = \pm \lambda_j r$ , donc on a l'égalité:

$$\lambda_j r - \|DP_j(p)q_n\| = d(DP_j(p)q_n, DP_j(p)\{-r, r\}_p) \tag{5}$$

De plus, comme  $P_j(q_n) \in P_j([-r, r]_p) \subset [-\delta', \delta']_{p_j}$ , on a:

$$d(P_j(q_n), P_j(\{-r, r\}_p)) \leq d(P_j(q_n), \{-\delta', \delta'\}_{p_j}) \tag{6}$$

et comme  $p_j$  est le centre de  $[-\delta, \delta]_{p_j}$  on a évidemment:

$$d(P_j(q_n), \{-\delta', \delta'\}_{p_j}) = \delta' - d(P_j(q_n), p_j) \tag{7}$$

Joignant alors (5), (1), (6) et (7), on obtient alors:

$$\begin{aligned} \lambda_j r - \|DP_j(p)q_n\| &= d(DP_j(p)q_n, DP_j(p)\{-r, r\}_p) \\ &\leq 2d(P_j(q_n), P_j(\{-r, r\}_p)) \\ &\leq 2d(P_j(q_n), \{-\delta', \delta'\}_{p_j}) \\ &\leq 2(\delta' - d(P_j(q_n), p_j)). \end{aligned} \tag{8}$$

En réunissant ensuite (4), (3) et (8), on obtient:

$$\begin{aligned} \forall n \in [0, N - 1], \\ d(P_n(q_n), P_n(q_{n+1})) \leq \frac{2c}{1-c} \inf\{\delta' - d(P_n(q_n), p_n), \delta' - d(P_n(q_{n+1}), p_n)\}. \end{aligned}$$

Toutes les conditions sont alors réunies pour appliquer la proposition 2.2 (au voisinage de  $p'$ , i.e. aux  $p_n$ ). Posons pour tout  $n \in [0, N]$ :

$$r_n = \frac{d(P_n(q_n), P_n(q_{n+1}))}{2c}$$

et notons  $m_n$  le milieu de  $P_n(q_n)$  et  $P_n(q_{n+1})$ ;  
 alors pour tout  $n \in \{0, 1, \dots, N - 1\}$ , il existe  $\psi^{(n)} \in U$  de classe  $C^k$   
 telle que:

- (a)  $\text{supp}(\psi^{(n)} - \dot{\varphi}) \subset F_{r_n,1}(m_n, p_n, \varphi)$ ;
- (b)  $\psi_1^{(n)}(q_n) = q_{n+1}$ .

Considérons alors le flot  $\psi$  qui, pour chaque  $n \in [0, N - 1]$  coïncide  
 avec  $\psi^{(n)}$  sur  $\text{supp}(\psi^{(n)} - \dot{\varphi})$  et qui coïncide avec  $\varphi$  partout ailleurs.  
 Alors, vu l'hypothèse faite sur  $U$ , il est dans  $U$ . Il vérifie bien (i) et (ii)  
 pour  $T = T_N + 2$ . De plus, si on suit l'orbite de  $q$  sous  $\psi$ , on constate  
 qu'elle passe successivement par les points:

- $q = q_0, P_0(q_0)$  puis  $\varphi_1(P_0(q_1))$ ;
- $P_1(q_1)$ , puis  $\varphi_1(P_1(q_2))$ ;
- ⋮
- $P_{N-1}(q_{N-1})$  puis  $\varphi_1(P_{N-1}(q_N)) = \varphi_1(P_{N-1}(q'))$ ;
- $\varphi_{T_N+1}(q')$ .

Donc la condition (b) est vérifiée.

De plus, on a:

$$\text{supp}(\dot{\psi} - \dot{\varphi}) \subset \bigcup_{0 \leq n \leq N-1} F_{r_n,1}(m_n, p_n, \varphi).$$

Or, si on utilise le fait que  $P_n$  est proche en topologie  $C^1$  de son appli-  
 cation tangente (i.e. (1)), on obtient:

$$P_n^{-1}(\Pi_{r_n}(m_n, p_n, \varphi)) \subset \Pi_{\frac{2|q_n - q_{n+1}|}{2c}}(P_n^{-1}(m_n), p, \varphi)$$

où

$$\Pi_{\frac{2|q_n - q_{n+1}|}{2c}}(P_n^{-1}(m_n), p, \varphi) = \Pi_{\frac{|q - q'|}{Nc}}(P_n^{-1}(m_n), p, \varphi).$$

Or, on a:

$$P_n^{-1}(m_n) \in [q_n, q_{n+1}] \subset [q, q'].$$

On en déduit que  $\dot{\psi} - \dot{\varphi}$  est à support dans

$$\Phi \left( \left[ \frac{q + q'}{2} - \Delta, \frac{q + q'}{2} + \Delta \right] \times [0, T_N + 2] \right)$$

où:  $\Delta = \frac{|q - q'|}{2} + \frac{|q - q'|}{Nc}$ . Or, on a:  $N < \frac{2\varepsilon}{c(1 - \varepsilon)}$ . Donc:

$$\Delta = \frac{|q - q'|}{2} \left(1 + \frac{2}{Nc}\right) \leq \left(1 + \frac{2c(1 - \varepsilon)}{2c\varepsilon}\right) \frac{|q - q'|}{2} = \frac{|q - q'|}{2\varepsilon}.$$

Ceci donne la condition (a). □

Pour démontrer le théorème 1.1, nous aurons en réalité besoin de décrire de façon beaucoup plus fine les perturbations faites dans la démonstration de la proposition 2.3. En effet, nous ferons simultanément plusieurs perturbations du type de celle décrite en proposition 2.3, et aurons besoin de nous assurer qu'on peut faire que ces perturbations aient des supports deux à deux disjoints. C'est pourquoi nous énonçons (on reprend les notations données dans la démonstration de la proposition 2.3):

**Addendum à la Proposition 2.3.** *Soit  $\eta \in ]0, 1[$ ; on peut de plus ajouter à la conclusion de la proposition 2.3 que le support de  $\psi - \varphi$  est inclus dans:*

$$\bigcup_{0 \leq n \leq N} \Phi(\Pi_{\lambda n \eta |q - q'|}(m_n, p_n, \varphi) \times [0, 1]).$$

En effet, si on remplace  $N$  par  $N' \geq N$  dans la démonstration précédente, la distance entre  $q_n$  et  $q_{n+1}$  devient

$$\frac{|q - q'|}{N'} = \frac{|q - q'|}{N} \frac{N}{N'}$$

donc peut être diminuée du rapport souhaité.

**Définition 2.4.** Désormais, si  $I = [a, b]_p \subset [-r, r]_p$  et  $\varepsilon \in ]\frac{1}{3}, 1[$  sont tels que:

$$\frac{3\varepsilon - 1}{1 - \varepsilon} d(I, \{-r, r\}_p) > \ell(I),$$

on dira que  $I$  est  $\varepsilon$ -adapté.

Si  $I$  est  $\varepsilon$ -adapté, on notera  $J = D(I)$  (resp.  $J = G(I)$ ) le segment de longueur  $\frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} \ell(I)$  tel que  $J \cap I = \{b\}$  (resp.  $J \cap I = \{a\}$ ); c'est donc le segment diminué par un rapport d'homothétie fixé qui "touche"  $I$  à droite (resp. à gauche). Une autre façon de décrire cela est de dire

que  $G(I)$  et  $D(I)$  sont les deux composantes connexes de l'adhérence de  $\frac{1}{\varepsilon}I \setminus I$ .

Si  $G(I)$  (resp.  $L(I)$ ) est lui-même  $\varepsilon$ -adapté, on peut définir  $G^2(I) = G(G(I))$  (resp.  $D^2(I) = D(D(I))$ ); représentons en figure 6  $I$ ,  $G(I)$ ,  $G^2(I)$ ,  $D(I)$  et  $D^2(I)$ .

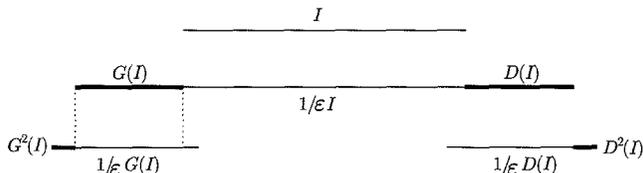


Figure 6

**Lemme 2.5.** *Supposons que  $\varepsilon \in ]1/3, 1[$  et que  $I$  soit un segment de  $[-r, r]_p$  qui est  $\varepsilon$ -adapté. Alors  $D(I)$  et  $G(I)$  sont aussi des segments  $\varepsilon$ -adaptés.*

**Démonstration du lemme 2.5.** Soit en effet  $J$  l'un de ces intervalles. On a alors:

$$\begin{aligned} d(J, \{-r, r\}_p) &\geq d(I, \{-r, r\}_p) - \ell(J) \\ &> \frac{1 - \varepsilon}{3\varepsilon - 1} \ell(I) - \ell(J) \\ &= \left( \frac{1 - \varepsilon}{3\varepsilon - 1} \cdot \frac{2\varepsilon}{1 - \varepsilon} - 1 \right) \ell(J) = \left( \frac{2\varepsilon}{3\varepsilon - 1} - 1 \right) \ell(J) \\ &= \frac{2\varepsilon - 3\varepsilon + 1}{3\varepsilon - 1} \ell(J) = \frac{1 - \varepsilon}{3\varepsilon - 1} \ell(J). \quad \square \end{aligned}$$

Ainsi, dans ce cas, on peut définir pour tout  $n \geq 0$  les intervalles  $I_{-n} = G^n(I)$  et  $I_n = D^n(I)$  (où on conviendra que  $G^{n+1}(I) = G(G^n(I))$  et  $D^{n+1}(I) = D(D^n(I))$ ), on notera alors  $\mathcal{J}(I) = \{I_n; n \in \mathbb{Z}\}$ . Il est alors naturel de se demander quelle est la réunion de ces intervalles:

**Lemme 2.6.** *Supposons que  $\varepsilon \in ]1/3, 1[$  et que  $I$  soit un segment de  $[-r, r]_p$  qui est  $\varepsilon$ -adapté. Alors*

$$\mathcal{J} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}(I)} J$$

est égal à l'intérieur du segment  $\frac{1 + \varepsilon}{3\varepsilon - 1} I$ .

**Remarquons que la condition.** “ $I$   $\varepsilon$ -adapté” peut aussi s’écrire:

“ $\frac{1 + \varepsilon}{3\varepsilon - 1} I \subset ] -r, r[_p$ ”, donc l’intervalle trouvé est bien dans  $[-r, r]_p$ .

**Démonstration du Lemme 2.6.** Vu la construction des intervalles  $I_n$ ,  $\mathcal{J}$  est un intervalle de même centre que  $I$ , ouvert car pour tout  $x \in \mathcal{J}$  il existe un point de  $\mathcal{J}$  strictement à droite de  $x$  et un autre strictement à gauche de  $\mathcal{J}$  et nous n’avons donc qu’à déterminer la longueur de  $\mathcal{J}$  pour le déterminer entièrement. Or celle-ci est la somme des longueurs des intervalles  $I_n$  :

$$\begin{aligned} \ell(\mathcal{J}) &= \ell(I) + 2 \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} \right)^n \ell(I) \\ &= \ell(I) \left( 1 + 2 \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon} \frac{1}{1 - \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon}} \right) \\ &= \ell(I) \left( 1 + 2 \frac{1 - \varepsilon}{2\varepsilon - 1 + \varepsilon} \right) \\ &= \ell(I) \left( 1 + 2 \frac{1 - \varepsilon}{3\varepsilon - 1} \right) = \ell(I) \frac{3\varepsilon - 1 + 2 - 2\varepsilon}{3\varepsilon - 1} = \frac{1 + \varepsilon}{3\varepsilon - 1} \ell(I). \quad \square \end{aligned}$$

**Proposition 2.7.** Soit  $M$  une surface de classe  $C^\infty$  munie d’une métrique riemannienne de classe  $C^\infty$ . Soit  $\varphi$  un flot de classe  $C^k$  (où  $k \in [1, \infty]$ ) de  $M$ ,  $U$  un voisinage de  $\varphi$  en topologie  $C^1$ ,  $p \in M(\varphi)$  non périodique et  $\varepsilon \in ]1/3, 1[$ . Alors il existe  $r > 0$  et  $T > 0$  tels que:

- (i)  $\Phi([-r, r]_p \times [0, T])$  est une vraie boîte de flot;
- (ii) si  $I \subset [-r, r]_p$  est un segment  $\varepsilon$ -adapté, si  $(x_n)_{0 \leq n \leq 2X+1}$  est une suite ordonnée qui vérifie:
  - (iia) pour tout  $n \in [0, X]$ ,  $x_{2n}$  et  $x_{2n+1}$  sont dans un même terme de  $\mathcal{J}(I)$ ;
  - (iib) si  $n \neq m$ ,  $x_{2n}$  et  $x_{2m}$  ne sont pas dans un même terme de  $\mathcal{J}(I)$ .

Alors il existe  $\psi \in U$  de classe  $C^k$  tel qu’il existe une suite croissante (finie)  $(i_n)_{0 \leq n \leq 2K+1}$  à valeurs dans  $[0, X]$  telle que:

- $i_0 = 0$  et  $i_{2K+1} = X$  et  $\forall j \in [1, K], i_{2j-1} + 1 = i_{2j}$ ;
- $\text{supp}(\dot{\psi} - \dot{\varphi})$  est inclus dans:  $\Phi(\left( \bigcup_{J \in \mathcal{J}(I)} J \right) \times [0, T])$ ;
- $\forall j \in [0, K], \psi_T(x_{2i_{2j}}) = \varphi_T(x_{2i_{2j+1}+1})$ .

Faisons un dessin explicatif de l'énoncé de la proposition; dans la figure 7 (qui suit), nous avons pour alléger remplacé la notation  $x_0, x_1, x_2, x_3, \dots$  par  $0, 1, 2, 3 \dots$ . La coordonnée temporelle est dirigée par une flèche "horizontale", donc les intervalles  $I_n$  sont "verticaux"; nous avons en fait sur le dessin dessiné les boites de flot qui correspondent à ces intervalles, plus "visibles" que les intervalles eux-mêmes. Nous avons tracé en gras les orbites sous  $\psi$ .

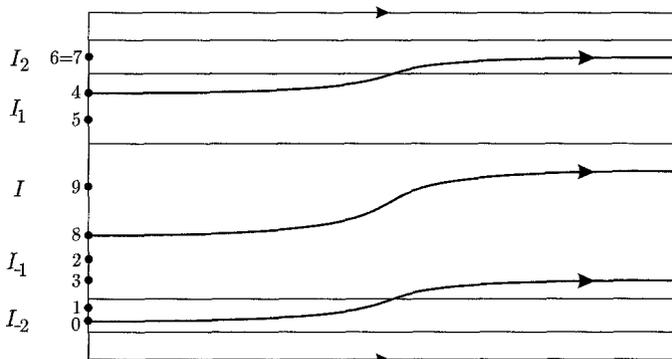


Figure 7

**Commentaires 2.8.** (1) Expliquons un peu ce que sont les hypothèses: on considère la suite  $\mathcal{J}(I)$  associée à un intervalle  $I$  qui est  $\varepsilon$ -adapté. Comme les intervalles de cette suite sont tous  $\varepsilon$ -adaptés, on sait grâce à la proposition 2.3 qu'on peut en chaque couple  $(x_{2n}, x_{2n+1})$  appliquer la proposition 2.3 de manière à obtenir  $\psi_T(x_{2n}) = \varphi_T(x_{2n+1})$  (où  $\psi$  est une perturbation de  $\varphi$ ), mais évidemment, les différentes perturbations que l'on peut ainsi construire peuvent avoir des supports que se rencontrent; mais le choix de la suite d'intervalles effectué permettra de dire que "peu" de supports de telles perturbations se rencontrent.

(2) Nous ne connectons pas les points correspondant à des supports de perturbations qui se rencontre n'importe comment, comme pourrait le laisser supposer la figure 7: nous "préservons" un certain ordre, celui donné par l'indexation  $n$  des  $x_n$ ; si au lieu de représenter ce qui se passe dans la variété ambiante comme nous l'avons fait dans la figure 7, nous nous intéressons à l'ordre des  $x_n$  et voulons visualiser quels points sont

connectés à l'aide de la perturbation, on obtient par exemple ce qui est représenté en figure 8:

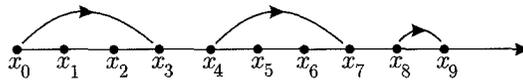


Figure 8

On voit clairement sur ce dessin que les connexions créées par perturbation “accélèrent” en un certain sens l’ordre (sur le dessin précédent, on ne conserve après perturbation que les points  $x_0, x_3, x_4, x_7, x_8, x_9$ ).

(3) A quoi allons-nous utiliser la proposition 2.7? En fait, considérant le problème envisagé dans le théorème 1. 1, les points  $x_n$  représenteront des points de l’orbite positive de  $p$  suivis de points de l’orbite négative de  $q$ . Le flot construit dans la proposition 2.7 permettra de connecter l’orbite de  $p$  à l’orbite de  $q$ ; remarquons qu’un autre phénomène se produit: on “accélère” en quelque sorte ainsi l’orbite de  $p$  et celle de  $q$ , puisque la perturbation de la proposition 2.7 permet de joindre  $p$  à  $q$  en “sautant” des  $x_n$  (c’est-à-dire des itérés de  $p$  et  $q$ ).

**Démonstration de la Proposition 2.7.** La proposition 2.2 appliquée au voisinage de  $p' \in \omega(p, \varphi)$  nous donne l’existence d’un  $c \in ]0, 1[$ . Appliquons tout d’abord la proposition 2.3 pour  $\varepsilon$  et:

$$\eta = \frac{c(1 - \varepsilon)}{16\varepsilon} :$$

on en déduit l’existence de  $r, T, N \dots$

Comme tous les termes de  $\mathcal{J}(I)$  sont  $\varepsilon$ -adaptés (nous avons déjà remarqué que dans ce cas, pour tout  $J \in \mathcal{J}(I)$ , on a :  $\frac{1}{\varepsilon}J \subset [-r, r]_p$ ), on peut pour chaque  $n \in [0, X]$  construire une perturbation  $\psi^{(n)}$  de  $\varphi$  à l’aide de la proposition 2.3 telle que  $\psi_T^{(n)}(x_{2n}) = \varphi_T(x_{2n+1})$  (dans le cas extrême où  $x_{2n} = x_{2n+1}$ , on dira que le support  $S_n$  de cette perturbation est  $\{\varphi_t(x_{2n}); t \in [0, T]\}$ ). Remarquons que les supports des perturbations ainsi construites sont bien à valeurs dans  $\Phi(\mathcal{J} \times [0, T])$ , où on note:

$$\mathcal{J} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}(I)} J,$$

puisque:

$$\forall J \in \mathcal{J}(I), \frac{1}{\varepsilon} J \subset \mathcal{J}.$$

Bien sûr, si les supports  $S_n$  des  $\psi^{(n)} - \varphi$  sont deux à deux disjoints, il suffit alors de prendre pour  $\psi$  le flot qui coïncide avec  $\psi^{(n)}$  sur  $S_n$  pour  $n \in [0, X]$ , avec  $\varphi$  partout ailleurs. Il satisfait aux conclusions de la proposition 2.7 pour  $(i_n)_{n \in [0, 2X+1]}$  définie par:  $\forall n \in \{0, \dots, X\}, i_{2n} = i_{2n+1} = n$ . Représentons en figure 9 quel genre de perturbation on peut obtenir ainsi dans le cas simple où  $X = 0$ :

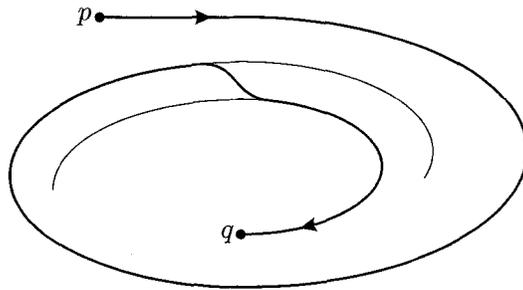


Figure 9

Le problème est que les supports des  $\psi^{(n)} - \varphi$  peuvent s'intersecter. On construit alors un flot de manière différente.

Notons pour chaque  $n \in [0, X]$   $I(n)$  l'élément de  $\mathcal{J}(I)$  tel que  $(x_{2n}, x_{2n+1}) \in I(n)^2$  (rappelons que par hypothèse cette application est injective: à deux couples distincts on associe des intervalles différents de  $\mathcal{J}(I)$ ).

**Premier pas de la construction.**

**Premier cas.** On suppose que  $S_0$  ne rencontre aucun autre  $S_n$ . On arrête alors là le premier pas de la construction: on impose à  $\psi$  de coïncider avec  $\psi^{(0)}$  sur  $S_0$ . On ne considèrera ensuite que les autres couples  $(x_{2n}, x_{2n+1})$ , et on gardera la perturbation  $\psi^{(0)}$ .

**Deuxième cas.** Si on n'est pas dans le premier cas, vu la définition de l'ensemble  $\mathcal{J}(I)$  et le choix de  $\eta$ ,  $S_0$  rencontre au plus deux termes autres que lui de la suite des  $S_k$ . Soit un tel  $k$ . On fait alors la construction

suivante: soit  $M$  le plus petit entier parmi les  $n$  tels que:

$$S_k \cap S_0 \cap \Phi(\Pi_{\lambda nr}(p_n, \varphi) \times [0, 1]) \neq \emptyset$$

(i.e. la première boîte de flot quand on suit le temps sur laquelle ces supports se rencontrent). Nous représentons ceci en figure 10; sur cette figure, nous avons afin d'alléger la représentation dessiné les boîtes de flots successives où on fait des perturbations "collées" les unes aux autres; de plus, comme précédemment, le temps est représenté "horizontalement" (suivant le sens de la flèche):

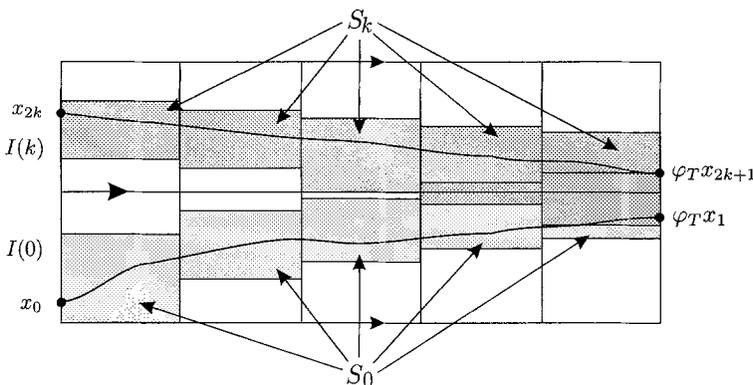


Figure 10

Comme

$$S_k \cap S_0 \cap \Phi(\Pi_{\lambda_M r}(p_M, \varphi) \times [0, 1]) \neq \emptyset,$$

et que par l'addendum de la proposition 2.3 on a:

$$\begin{aligned} S_k \cap \Phi(\Pi_{\lambda_M r}(p_M, \varphi) \times [0, 1]) &\subset \\ &\subset \Phi(\Pi_{\lambda_M \eta |x_{2k+1} - x_{2k}|}(m_M(x_{2k+1}, x_{2k}), p_M, \varphi) \times [0, 1]) \end{aligned}$$

et

$$S_0 \cap \Phi(\Pi_{\lambda_M r}(p_M, \varphi) \times [0, 1]) \subset \Phi(\Pi_{\lambda_M \eta |x_0 - x_1|}(m_M(x_0, x_1), p_M, \varphi) \times [0, 1]),$$

la réunion de ces deux supports intersectés avec

$$\Phi(\Pi_{\lambda_M r}(p_M, \varphi) \times [0, 1])$$



donc ce support ramené à  $[-r, r]_p$  (en projection) est dans la réunion de la “moitié” de  $I(k)$  qui “touche”  $I(0)$  (en projection) et de la moitié de  $I(0)$  qui touche  $I(k)$ . On considère alors la perturbation  $\tilde{\varphi}$  de  $\varphi$  telle que le champ de vecteur  $\dot{\psi}$  :

- coïncide avec  $\dot{\psi}^{(0)}$  sur  $\bigcup_{0 \leq j \leq M-1} \Phi(\Pi_{\lambda_j r}(p_j, \varphi) \times [0, 1])$ ;
- coïncide avec  $\dot{\psi}$  sur  $\Phi(\Pi_{\lambda_M r}(p_M, \varphi) \times [0, 1])$ ;
- coïncide avec  $\dot{\psi}^{(k)}$  sur  $\bigcup_{M+1 \leq j \leq N} \Phi(\Pi_{\lambda_j r}(p_j, \varphi) \times [0, 1])$ .

De plus, on retire des termes de la suite: on “oublie” tous les termes qui étaient compris entre les deux termes qu’on vient de joindre; on fera comme si ils n’avaient jamais été des termes de la suite (ce qui supprime aussi des  $I(n)$ ). Qu’obtient-on finalement? On a:

- un couple  $(x_0, x_{2k+1})$  et une perturbation  $\tilde{\varphi}$  qui permet de relier  $x_0$  à  $\varphi_T(x_{2k+1})$ .
- les couples  $(x_{2n}, x_{2n+1})$  pour  $n \in [k + 1, X]$  et des perturbations  $\psi^{(n)}$  (à supports qui se recoupent éventuellement) qui permettent de relier  $x_{2n}$  à  $\varphi_T(x_{2n+1})$ ;

Remarquons que vu quels couples on a oubliés, la réunion de  $[0, 2k + 1]$  et des segments  $[2n, 2n + 1]$  pour les indices conservés est égale à  $[0, 2X + 1]$ .

Ainsi on a strictement moins de couples qu’au début à considérer.

**Deuxième pas de la construction.**

Si on est parti du premier cas de la construction, on regarde ce qui se passe pour  $(x_2, x_3)$  et on fait pour ce couple la même construction qu’à l’étape précédente (encore une fois, il y a deux cas). De même si le support de  $\tilde{\varphi} - \varphi$  à l’étape précédente ne rencontre aucun des  $S_k$  non oublié, on s’intéresse au couple  $(x_{2k+2}, x_{2k+3})$ . Il est à noter que les supports des nouvelles perturbations que l’on fait ne rencontrent pas le support de la perturbation faite au pas précédent: on a en effet remarqué que chaque nouvelle perturbation faite est dans une moitié d’intervalle (en projection) “loin” de là où on fait l’ancienne perturbation.

De toute façon, on réussit encore à diminuer le nombre de couples considérés et on a encore que les segments de la forme  $[2j, 2i + 1]$  où les

$(x_{2j}, x_{2i+1})$  sont les couple reliés et non oubliés forment une partition de  $[0, 2X + 1]$ .

Par contre, si le support de  $\dot{\varphi} - \varphi$  rencontre un des  $S_m$  non oubliés (c'est-à-die pour  $m \geq k + 1$ ), on prend le premier de ces  $S_m$ , et on recommence la construction précédente: on joint les deux orbites comme précédemment, oubliant certains termes de la suite des  $x_n$  (ceux intermédiaires entre  $x_0$  et  $x_{2m+1}$ ); remarquons que ceci se fait dans une boite de flot en  $p_{M'}$  avec  $M' \neq M$  car le support de la perturbation  $\psi$  était compris (en projection) dans le réunion de la "moitié" de  $I(k)$  et de la "moitié" de  $I(0)$  qui s'intersectaient.

Représentons en figure 12 l'une des situations pouvant se produire:

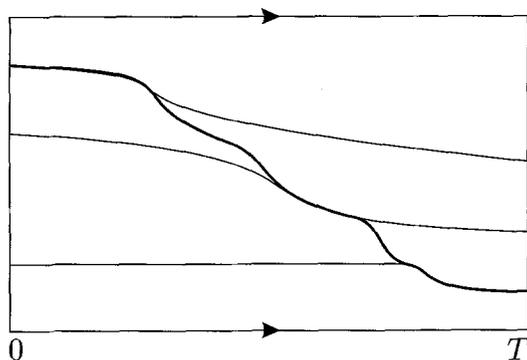


Figure 12

(En au plus  $N$  étapes, on aura fini de compléter cette orbite et on passe à la suivante).

Encore une fois, on réussit à diminuer le nombre de couples considérés et on a encore que la réunion des segments de la forme  $[2j, 2i + 1]$  où les  $(x_{2j}, x_{2i+1})$  sont les couple reliés et non oubliés est égale à  $[0, 2X + 1]$ .

**Conclusion.** Finalement, on construit une perturbation  $\psi$  de  $\varphi$  à support dans l'ensemble voulu, une suite d'indices  $(i_n)_{n \in [0, 2K+1]}$  telle que:

- $\forall n \in [0, 2K], i_n \leq i_{n+1}$  (par construction);
- $\forall n \in [1, K], i_{2k-1} + 1 = i_{2k}$  (ceci uniquement par ce qu'on suit tous les  $x_n$  dans l'ordre croissant) ;
- $\forall k \in [0, K], \psi_T(x_{2i_{2k}}) = \varphi_T(x_{2i_{2k+1}+1})$ . □

**Commentaire.** La difficulté de la démonstration précédente vient du fait que chaque nouvelle orbite construite est un cas particulier:

- elle peut être faite à l'aide de un deux trois ... couples de  $(x_{2n}, x_{2n+1})$ ;
- en oubliant aucun, peu ou beaucoup de couples de  $(x_{2n}, x_{2n+1})$  intermédiaires.

### 3. Construction des connexions (démonstration du théorème 1.1)

L'idée de la démonstration pourrait être résumée de la manière suivante: on va faire du "Hayashi" à deux suites.

Dans la démonstration de S. Hayashi, on se fixe un point  $q \in \omega(p, \varphi)$  (on suppose en plus que le point  $q$  est sur une variété stable), et on tente de connecter  $p$  à  $q$ . Pour cela, on considère la suite des itérés positifs  $\varphi_t(p)$  de  $p$  sous le flot  $\varphi$  qui sont dans  $\Pi(q, \varphi)$ , et en quelque sorte on essaie de "bouger" les points de cette suite vers  $q$ .

Dans le cas que nous considérons, on suppose que  $p' \in \omega(p, \varphi) \cap \alpha(q, \varphi) \cap M(\varphi)$  et on veut connecter  $p$  à  $q$ . Pour cela, on considère:

- la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des itérés positifs de  $p$  sous  $\varphi$  qui sont dans  $\Pi(p', \varphi)$ ;
- la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des itérés négatifs de  $q$  qui sont dans  $\Pi(p', \varphi)$ ;

et en quelque sorte on essaie de "bouger" les points de la suite  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers les points de la suite  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On a donc effectivement deux suites à considérer.

Comme nous allons faire des modifications du flot le long de l'orbite positive de  $p'$  (en appliquant la proposition 2.7) et que nous voulons connecter  $p$  à  $q$ , il faut faire attention à ce qui se passe quand  $p'$  est sur l'orbite de  $p$  ou de  $q$ , car dans ce cas en faisant des modifications le long de l'orbite de  $p'$  on peut modifier ce qui se passe au voisinage de  $p$  ou  $q$ . Mais en fait, ce cas ne pose aucun problème en effet:

- soit  $q \neq p$  et  $p$  et  $p'$  sont sur une même orbite: alors  $p \in \alpha(q, \varphi)$  puisque  $p' \in \alpha(q, \varphi)$  et  $p$  et  $p'$  sont sur une même orbite: l'orbite négative de  $q$  passe aussi près qu'on le veut de  $p$ . On utilise alors un difféomorphisme  $f$  proche en topologie  $C^1$  de l'identité qui fixe  $q$  (i.e.  $f(q) = q$ ) et qui envoie un point  $q'$  de l'orbite strictement

négative de  $q$  sur  $p : f(q') = p$ . Alors si on définit un flot  $\psi$  par:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \psi_t = f \circ \varphi_t \circ f^{-1},$$

le flot  $\psi$  est proche en topologie  $C^1$  de  $\varphi$ , et il permet de connecter  $p$  à  $q$ ;

- soit  $q \neq p$ ,  $q$  et  $p'$  sont sur une même orbite: le raisonnement est le même que ci-dessus en inversant le temps;
- soit  $p = q$  est sur la même orbite que  $p'$ ; dans ce cas,  $p \in \omega(p, \varphi)$  est un point positivement récurrent. On peut utiliser le closing lemma (cf [1] ou [6]) pour rendre  $p$  périodique.

Désormais, nous supposons donc que  $p'$  n'est ni sur l'orbite de  $p$ , ni sur l'orbite de  $q$ .

**Notations.** Fixons quelques notations. Comme dans l'énoncé du théorème 1.1,  $\varphi$  sera un flot de classe  $C^k$  sur  $M$ ,  $p$  et  $q$  seront deux points de  $M$  tels que  $p' \in \omega(p, \varphi) \cap \alpha(q, \varphi) \cap M(\varphi)$  est un point non périodique. Comme nous venons de traiter ces cas, nous supposons que  $p'$  n'est ni sur l'orbite de  $q$ , ni sur celle de  $p$ .  $U$  sera un voisinage fixé de  $f$  en topologie  $C^1$ . On reprend de plus les notations de la définition 2.1. On peut alors utiliser la proposition 2.7 pour  $\varphi$ ,  $p'$  et  $\varepsilon \in ]1/3, 1[$ ; ceci donne  $r$  et  $T$  satisfaisant les conclusions de la proposition 2.7. Il existe bien sûr un segment  $I_\varepsilon$ -adapté qui contient  $p'$  dans son intérieur. Soit alors  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite (ordonnée par le temps) des itérés positifs de  $p$  sous  $\varphi$  tels que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, p_n \in \bigcup_{J \in \mathcal{J}(I)} J$$

et  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite (ordonnée dans le sens contraire du temps) des itérés négatifs de  $q$  sous  $\varphi$  tels que:  $\forall n \in \mathbb{N}, q_n \in \mathcal{J} = \bigcup_{J \in \mathcal{J}(I)} J$ . Posons alors:

- (•)  $n_p = \inf\{n \geq 0; p_n \in I\}$  puis  $\mathcal{P} = \{p_n; n \in [0, n_p]\}$ ;
- (•)  $n_q = \inf\{n \geq 0; q_n \in I\}$  puis  $\mathcal{Q} = \{q_n; n \in [0, n_q]\}$ .

(Remarquons que comme  $p' \in \omega(p, \varphi) \cap \alpha(q, \varphi)$  et que  $p'$  est aussi dans l'intérieur de  $I$ , un tel couple  $(n_p, n_q)$  existe.)

Représentons en figure 13 l'une des situations pouvant se produire (ici,  $n_p = 3$  et  $n_q = 2$ ):

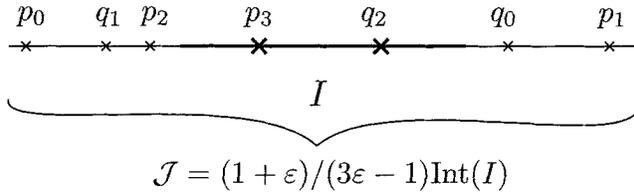


Figure 13

**Construction d'une suite.** On pose:

- si  $n \in [0, n_p], y_n = p_n$ ;
- si  $n \in [n_p + 1, n_p + n_q + 1], y_n = q_{n_p+n_q+1-n}$ .

(Remarquons que cette suite est finie par construction)

Puis on effectue la construction suivante:

- $j_0 = 0$  et  $x_0 = y_{j_0}$  est dans un élément (ou la réunion de deux éléments)  $J_0$  de  $\mathcal{J}(I)$ ; soit alors  $j_1$  le plus grand entier  $n$  tel que  $y_n \in J_0$ , on pose alors  $x_1 = y_{j_1}$  (il peut être égal à  $x_0$ ); si  $j_1 = n_p + n_q + 1$ , on arrête la construction; sinon:
- $j_2 = j_1 + 1$  et  $x_2 = y_{j_2}$  est dans un élément  $J_1$  (ou la réunion de deux éléments) de  $\mathcal{J}(I)$ ; soit alors  $j_3$  le plus grand entier tel que  $y_{j_3} \in J_1$ ; on pose alors  $x_3 = y_{j_3}$ ; si  $m = n_p + n_q + 1$ , on arrête la construction; sinon on continue ... Comme la suite a un nombre fini de termes, on arrête au bout d'un nombre fini de pas.

On obtient ainsi une partition de  $[0, n_p + n_q + 1]$  en un nombre fini et ordonné d'intervalles notés  $[j_{2k}, j_{2k+1}]$  où  $k \in \{0, \dots, X\}$  tels que pour tout  $k \in [0, X], x_{2k}$  et  $x_{2k+1}$  sont dans un même intervalle de  $\mathcal{J}(I)$  et que par contre si  $k \neq k', x_{2k}$  et  $x_{2k'}$  ne sont pas dans un même terme de  $\mathcal{J}(I)$ .

Représentons par exemple en figure 14 l'une des partitions que l'on peut obtenir:



Figure 14

En d'autres termes, on obtient le (iia) et le (iib) de la proposition 2.7. On va donc pouvoir, dans le paragraphe suivant, utiliser cette proposition.

**Construction d'une perturbation.** On applique à la suite  $(x_n)$  précédemment construite la proposition 2.7; On trouve ainsi  $\psi$  et une suite finie croissante  $(i_n)_{0 \leq n \leq 2K+1}$  à valeurs dans  $[0, X]$  qui vérifient les conclusions de la proposition 2.7.

Suivons alors l'orbite de  $p$  sous  $\psi$  :

- l'orbite de  $p$  sous  $\psi$  jusqu'à  $x_0$  est la même que celle sous  $\varphi$  jusqu'à  $x_0$  puisque que le support de la perturbation ne rencontre pas cette orbite;
- on a:  $\psi_{T'}(x_0) = \varphi_T(x_{2i_1+1})$ ;
- l'orbite de  $\psi_{T'}(x_0) = \varphi_T(x_{2i_1+1})$  sous  $\psi$  jusqu'à  $x_{2i_1+2} = x_{2i_2}$  est la même que celle sous  $\varphi$  puisqu'elle ne rencontre pas le support de la perturbation effectuée;
- on a :  $\psi_{T'}(x_{2i_2}) = \varphi_T(x_{2i_3+1})$ ;
- ⋮

ainsi on arrive à connecter  $p$  à  $q$ .

C'est ce que nous représentons ne figure 15: □

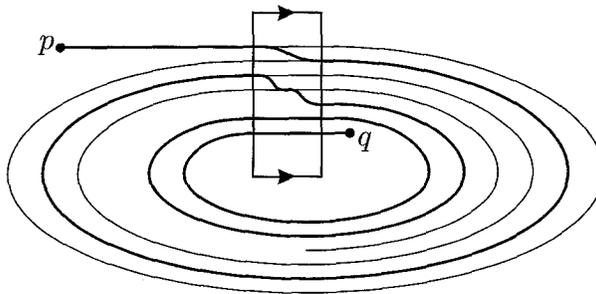


Figure 15

#### 4. Construction des connexions (démonstration du théorème 1.2)

On ne doit traiter que les cas qui ne sont pas contenus dans le théorème 1.1, c'est à dire le cas où  $\omega(p, \varphi) \cap \alpha(q, \varphi) \cap M(\varphi)$  ne contient que des

orbites périodiques ou des points critiques. Nous allons distinguer alors suivant que  $p'$  est un point critique ou un point périodique. Dans le second cas, nous distinguerons de plus deux sous-cas, suivant que  $M$  est ou n'est pas orientable.

De plus, on remarque que si  $p$  ou  $q$  est sur la même orbite que  $p'$ , on peut refaire exactement le même raisonnement que dans le début de la démonstration du théorème 1.1, aussi désormais on supposera que ni  $p$ , ni  $q$  n'est sur l'orbite de  $p'$ .

**Premier cas.** On suppose que  $\omega(p, \varphi) \cap \alpha(q, \varphi) \cap M(\varphi)$  contient un point critique  $p'$  (qui est donc hyperbolique selle). Or, on sait décrire la dynamique locale au voisinage d'un point critique hyperbolique selle (voir figure 16).

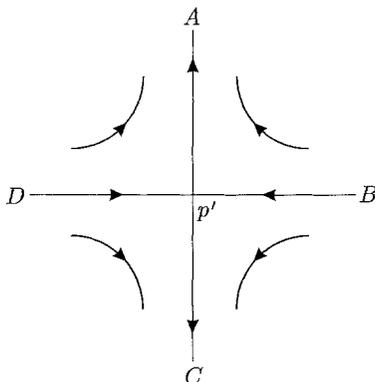


Figure 16

Comme  $p' \in \omega(p, \varphi) \cap \alpha(q, \varphi)$ ,  $\omega(p, \varphi)$  contient une branche stable de  $p'$  ( $B$  ou  $D$  sur la figure 6). Si cette branche stable rencontre  $\alpha(q, \varphi)$ , on peut directement appliquer le théorème 1.1 en remplaçant  $p'$  par un point de cette branche stable, qui est bien non périodique et dans  $M(\varphi)$ . Sinon, on peut sans changer l'orbite négative de  $q$  utiliser le résultat d'Hayashi pour connecter  $p$  à la variété stable de  $p'$ . Comme on n'a pas changé l'orbite négative de  $q$ ,  $p'$  est toujours dans l'ensemble  $\alpha$ -limite de  $q$  pour le nouveau flot  $\tilde{\varphi}$ . On fait ensuite le même raisonnement pour  $q$  (mais cette fois à l'aide du flot  $(\tilde{\varphi}_{-t})$ ), et on connecte  $q$  à la variété instable de  $p'$ .

Mais ensuite il n'est pas difficile de faire une petite perturbation du flot permettant de connecter  $p$  à  $q$ , comme indiqué sur la figure 17 (voir aussi [4]):

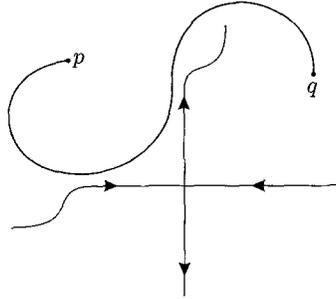


Figure 17

**Deuxième cas.** On suppose que  $\omega(p, \varphi) \cap \alpha(q, \varphi) \cap M(\varphi)$  contient un point périodique non critique  $p'$ . On a écarté le cas où  $p$  ou  $q$  est sur l'orbite de  $p'$ .

Remarquons que dans ce cas,  $p'$  est forcément un point périodique non hyperbolique, car sur une surface un point périodique hyperbolique est soit un attracteur, soit un répulseur.

On envisage deux sous-cas:

**Premier sous-cas.** On suppose qu'un petit voisinage de l'orbite de  $p'$  est un cylindre (c'est toujours le cas si  $M$  est orientable). Comme  $p' \in \omega(p, \varphi)$ , il est facile de voir que l'une des situations décrites en figure 18 se produit.

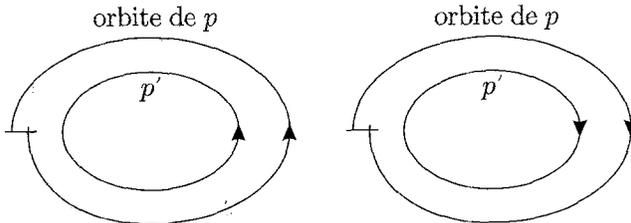


Figure 18

On considère alors le petit "anneau"  $\mathcal{A}$  délimité par l'orbite de  $p'$ , le bout d'orbite de  $p$  dessiné et le petit arc transverse au flot dessiné. On

peut bien entendu supposer (quitte à diminuer  $\mathcal{A}$ ) que ni  $p$ , ni  $q$  ne sont dans  $\mathcal{A}$ . Alors:

- si on est dans la situation du dessin de gauche, on a:

$$\forall T > 0, \varphi_{-T}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$$

donc  $p \in \mathcal{A}$ , d'où une contradiction; donc ce cas ne se produit pas;

- on est donc dans le cas du dessin de droite, pour lequel:

$$\forall T > 0, \varphi_T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}.$$

Alors, comme  $q \notin \mathcal{A}$ , forcément l'orbite négative de  $q$  ne rencontre pas  $\mathcal{A}$ .

Finalement, on peut avoir un seul type d'accumulation des orbites de  $p$  et  $q$  sur celle de  $p'$ , celui décrit en figure 19 (sur la figure 19, l'orbite de  $p$  ne s'accumule que par un côté et l'orbite de  $q$  que par l'autre côté de l'orbite périodique)

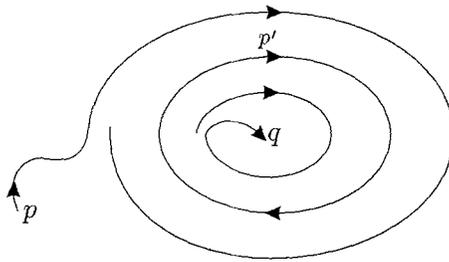


Figure 19

Si maintenant on fait une petite perturbation du flot au voisinage du point  $p'$  qui fait "monter" les orbites négatives, on peut sans difficulté connecter  $p$  à  $q$  (on considère une famille à un paramètre de tels flot, on constate que pour  $\varphi$  l'orbite de  $q$  est au dessous de celle de  $p$ , et pour une autre valeur de paramètre l'orbite de  $q$  est au dessus de celle de  $p$ , donc pour une valeur de paramètre on trouve un flot qui connecte  $p$  à  $q$ ).

**Deuxième sous-cas.** On suppose qu'un petit voisinage de l'orbite de  $p'$  est une bande de Moebius. Dessinons encore une fois un des cas pouvant se produire, c'est-à-dire sur la figure 20 une petite bande de Moebius  $\mathcal{M}$  (qui contient l'orbite périodique de  $p'$ ) délimitée par un morceau de

l'orbite de  $p$  et un petit arc transverse au flot (dont on peut supposer qu'elle ne contient ni  $p$  ni  $q$ ).

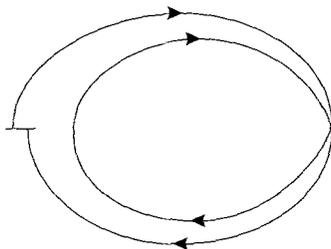


Figure 20

Dans le cas dessiné, on a :  $\forall T > 0, \varphi_T(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ , donc l'orbite de  $q$  ne peut rentrer dans  $\mathcal{M}$  (sinon on aurait  $q \in \mathcal{M}$ ), donc on ne peut avoir  $p' \in \alpha(q, \varphi)$ .

Dans le cas non dessiné, on aurait  $\forall T > 0, \varphi_{-T}(\mathcal{M}) \subset \mathcal{M}$ , d'où  $p \in \mathcal{M}$ , d'où une contradiction.

Finalement, on a montré que ce deuxième sous-cas ne peut pas se produire.

Ceci termine la démonstration du théorème 1.2. □

## Références

- [1] M.-C. Arnaud. Le "closing lemma" en topologie  $C^1$ , *Supplément au Bull. Soc. Math. Fr.* **74**: (1998).
- [2] S. Hayashi. Connecting invariant manifolds and the solution of the  $C^1$  stability and  $\Omega$ -stability conjectures for flows, *Ann. Math.* **145**: (1997), 81-137.
- [3] M. Hirsch. *Differential topology*, G.T.M. Springer-Verlag. **33**: (1988).
- [4] M.-L. Peixoto & C. Pugh. The planar closing lemma for chain recurrence, *Trans. Am. Math. Soc.* **341**: 171-192.
- [5] C. Pugh. The  $C^1$  connecting lemma, *J. Dyn. & Diff. Eq.* **4**: (1992), 545-553.
- [6] C. Pugh & C. Robinson. The  $C^1$  Closing Lemma, including Hamiltonians, *Erg. Th. & Dyn. Syst.* **3**: (1983), 261-314.

**Marie-Claude Arnaud**  
 CNRS-UMR 8628  
 Topologie et dynamique, Mathématiques-Bat. 425  
 Université Paris Sud, 91405 Orsay Cedex  
 France

E-mail: arnaud@topo.math.u-psud.fr