

Sur les Equations Différentielles Multiformes et leurs Intégrales Singulières*

R. THOM

1. Le Contour Apparent d'une Surface

Soit

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0$$

l'équation d'une surface S dans l'espace $0xyz$. On considère la projection $p : (x, y, z) \rightarrow (x, y)$ de $0xyz$ sur $0xy$; on supposera la restriction de p à S propre.

DEFINITION. La projection p est dite de *type fini* en un point m de S , si en m l'une au moins des dérivées partielles $\partial^k f / \partial z^k$ est non nulle.

Si la projection p est de *type fini* en tout point de S , on peut alors remplacer localement l'équation $f = 0$ par un polynôme distingué

$$(2) \quad z^k + \sum_{j=1}^k a_j(x, y) z^{k-j} = 0,$$

d'après le théorème de préparation de Weierstrass-Malgrange. Si l'on désigne par C l'ensemble critique de la projection p , défini par

$$f(x, y, z) = f'_z(x, y, z) = 0,$$

l'ensemble-image $p(C)$ est en principe défini en éliminant la variable z entre $f(x, y, z)$ et sa dérivée f'_z . Cette opération n'est pas définie globalement si f n'est pas un polynôme en z ; néanmoins on peut toujours faire cette opération localement, ce qui permet d'obtenir, en tout point m' de $p(C)$, un voisinage W dans lequel $p(C) \cap W$ est réunion finie d'ensembles $p(D_i)$, où D_i est l'image réciproque de l'ensemble semi-algébrique discriminant de l'équation générique (2) par une application locale $g : W \rightarrow \mathbb{R}^k$, espace des coefficients de (2).

*Recebido pela SBM em Junho de 1971.

Une application immédiate du lemme de transversalité montre que, pour presque toute f , (en topologie \mathcal{C}^3) l'ensemble critique C ne contient que des points *plis* (pour lesquels $f = f'_z = 0$, mais $f''_{zz} \neq 0$) et des points *fronces isolés* (pour lesquels $f = f'_z = f''_{zz} = 0$, mais $f'''_{zz} \neq 0$).

En un point *pli*, de modèle local $x = z^2$, l'ensemble critique C est une courbe simple, immergée par p dans l'espace-but Oxy . En un point *fronce* (cusp de Whitney) de modèle local $x = z^3/3 - yz$, $y = y$, l'ensemble critique C défini par $z^2 - y = 0$, est appliqué par p sur la parabole semi-cubique $y = z^2$, $x = -2/3z^3$. La courbe-image $p(C)$ présente donc en ce point un *rebroussement ordinaire*.

Par une nouvelle application du théorème de transversalité (appliqué aux multijets au sens de J. Mather), on peut montrer que, pour presque tout f , l'ensemble image $p(C)$ ne comprend, comme singularités, que les rebroussements projections de points-fronce, et des croisements normaux à tangentes distinctes. Ce fait est bien connu en Géométrie Algébrique; on a voulu monter ici qu'il est également vrai en Topologie Différentielle des surfaces.

2. Equations Différentielles Multifformes

Dans le plan Oxy , une équation différentielle multifforme est une relation de la forme (3) $F(x, y, y') = 0$ où on suppose qu'en tout point (x_0, y_0, y'_0) satisfaisant à $F = 0$, la projection $p(x, y, y') \rightarrow (x, y)$ est de type fini sur l'ensemble $F = 0$. On supposera également (afin de n'avoir qu'un nombre fini de déterminations de y' en un point (x_0, y_0)) que p est *propre* sur l'ensemble $F = 0$.

L'ensemble J des points (x, y) du plan pour lesquels au moins deux des y' solutions de $F(x, y, y') = 0$ sont confondues est l'*intégrale singulière* de l'équation différentielle (3). Autrement dit, J est obtenu par élimination de y' entre

$$(4) \quad F(x, y, y') = 0 \quad \text{et} \quad F'_{y'}(x, y, y') = 0,$$

élimination définie localement via le théorème de préparation, ainsi qu'on l'a expliqué plus haut. En d'autres termes, J est le *contour apparent* de la surface S d'équation $F(x, y, z) = 0$ projetée sur Oxy .

3. Intégrale Singulière et Intégrales Régulières

On enseigne, classiquement, dans les manuels, que, si l'équation (3) admet une intégrale générale de la forme $G(x, y; c) = 0$, alors l'intégrale singulière J est l'*enveloppe* des courbes définies par l'intégrale générale $G(x, y; c)$, lorsqu'on fait varier le paramètre c de cette intégrale générale. En effet, on peut définir l'enveloppe de la famille $G(x, y; c) = 0$ comme l'ensemble E des points du plan pour lesquels deux des courbes de la famille passant par ce point sont confondues; si ces courbes ont des tangentes, les valeurs correspondantes de y' sont égales, et E est contenu dans J .

Un point du complémentaire $J - E$ peut être, a priori, un point singulier de l'intégrale générale. En pareil cas, on dira que J est une *pseudo-enveloppe* de la famille des intégrales régulières.

En de nombreux exemples l'intégrale singulière est enveloppe des courbes intégrales régulières. Tel est le cas, par exemple de l'équation différentielle de *Clairaut*:

$$y - xy' = h(y').$$

L'intégrale générale est constituée de la famille de droites "isoclines" obtenues en faisant $y' = c : y - cx = h(c)$.

Chacune de ces droites touche son enveloppe (E) en un point caractéristique, défini par:

$$-x = h'(c).$$

Là, pour presque toute fonction h , l'intégrale singulière J et l'enveloppe (E) coïncident.

On va montrer que c'est là une situation tout-à-fait exceptionnelle. On a en effet le *théorème*.

Pour presque toute équation F (en topologie \mathcal{C}^3), l'intégrale singulière de l'équation:

$$(3) \quad F(x, y, y') = 0$$

est une pseudo-enveloppe de l'intégrale générale.

Dans ce but, on va se placer en un point pli de l'équation $F(x, y, y') = 0$, en supposant (ce qui n'est pas une restriction) que ce point est l'origine.

Comme $F(0, 0, 0) = F_{y'}(0, 0, 0) = 0$, $F_{y''}^2(0, 0, 0) \neq 0$, le développement de Taylor de F , au second ordre, donne:

$$F = -L(x, y) + Q(x, y) + R_3(x, y) + cp^2 + \dots$$

L, Q, R formes linéaire, quadratique, cubique en x, y , et $dL(0) \neq 0$. En appliquant le théorème de préparation de Weierstrass-Malgrange, on peut transformer cette équation locale en un polynôme distingué en $p = y'$

$$p^2 - 2a(x, y)p = b(x, y), \quad \text{où} \quad db(0, 0) \neq 0.$$

Introduisons alors une fonction Y telle que:

$$\frac{dY}{dx} = y' - a(x, y)$$

Y peut être prise comme coordonnée locale à la place de y , ce qui nous donne finalement pour équation différentielle locale:

$$(5) \quad \left(\frac{dY}{dx}\right)^2 = B(x, Y), \quad \text{ou, comme avant} \quad dB(0, 0) \neq 0.$$

Cela étant, deux cas sont à considérer: ou la dérivée partielle $\partial B/\partial x$ n'est pas nulle à l'origine, ce qui est évidemment le cas général. Ou, au contraire, elle est identiquement nulle (cas exceptionnel). On parlera brièvement du cas intermédiaire où $\partial B/\partial x$ s'annule en O sans être identiquement nulle. Pour faire l'étude du système différentiel (5), il est commode de réintroduire une coordonnée z , et de considérer dans $Oxyz$ la surface S définie par $z^2 = B(x, z)$ (on remplace dans ce qui suit Y par y , pour simplifier la notation). On considère alors le système différentiel (5) comme projection d'un système différentiel défini sur S , à savoir le système différentiel défini sur S par la 1-forme différentielle $dy - zdx$ (forme qui définit le système de Pfaff canonique dans l'espace $Oxyz$ considéré comme espace des jets d'ordre un de fonctions de Ox dans Oy).

Dans le cas général, où $\partial B/\partial x \neq 0$ à l'origine, on peut par le théorème des fonctions implicites, résoudre $z^2 = B(x, y)$ localement en x , soit $x = h(z, y)$. Le développement de Taylor de $h(z, y)$ débute par

$$x = cz^2 + by + \dots;$$

de là on déduit

$$dx = 2cz dz + bdy + \dots$$

d'où

$$dy = zdx = 2xz^2 dz + bzy + \dots$$

$$(1 - bz) dy = 2cz^2 dz + \dots$$

qui s'intègre en

$$y = \frac{2}{3} cz^3 + \dots \quad \text{termes d'ordre supérieur en } z.$$

Par suite la courbe projection de l'intégrale dans le plan Oxy a des équations locales de la forme:

$$x = cz^2 + \dots \quad y = \frac{2}{3} z^3 + \dots$$

Elle présente par suite un *rebroussement ordinaire* (fig. 1).

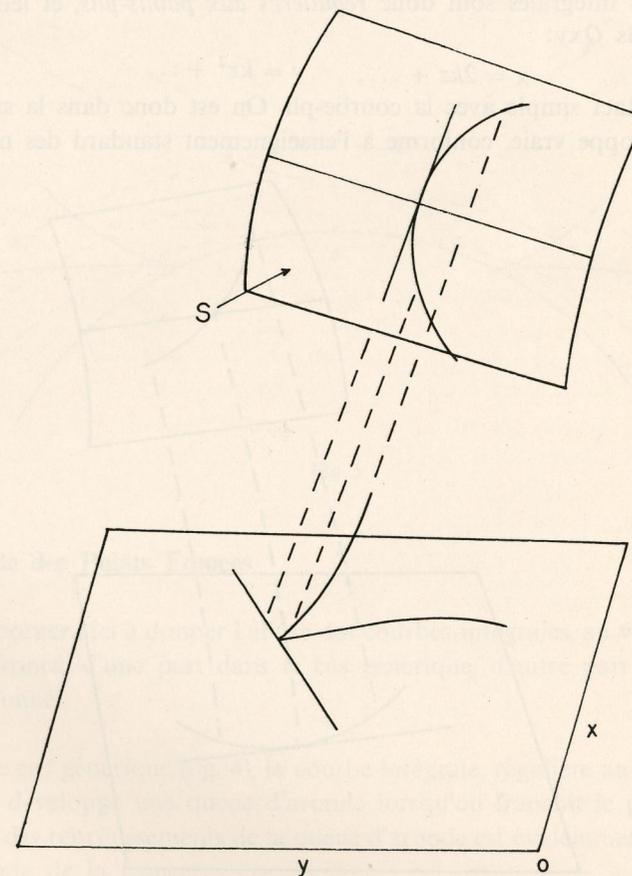


Fig. 1

On voit qu'ainsi, dans la situation générique, une courbe-pli de l'intégrale singulière est un lieu de rebroussements des intégrales générales passant par ces points-plis.

Étudions maintenant le second cas, celui où, identiquement, $\partial B/\partial x = 0$ sur le pli.

Alors, on a nécessairement $\partial B/\partial y = 0$, $b \neq 0$, et l'on peut résoudre en y : $y = kz^2 +$ termes supérieurs en z .

$$dy = 2kz dz + \dots, \text{ et de } dy = z dx,$$

on tire:

$$z dx = z(2k dz + \dots)$$

d'où

$$x = 2kz + \dots$$

Les courbes intégrales sont donc régulières aux points-plis, et leurs projections dans Oxy :

$$x = 2kz + \dots, \quad y = kz^2 + \dots$$

ont un contact simple avec la courbe-pli. On est donc dans la situation d'une enveloppe vraie, conforme à l'enseignement standard des manuels. (fig. 2)

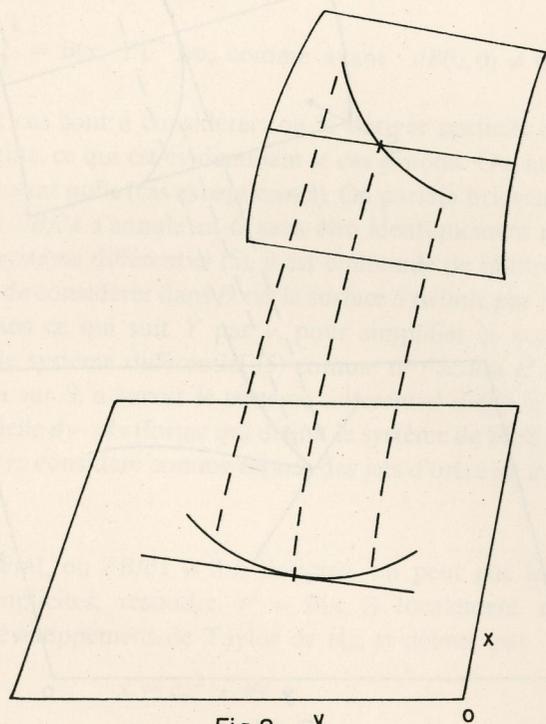


Fig.2

Reste le cas intermédiaire, que nous étudierons seulement dans le cas le plus général, celui où $\partial B/\partial x$ s'annule avec un zéro simple sur la courbe-pli. Le modèle local est donné par l'équation

$$y'^2 = y + x^2$$

On vérifiera qu'en ce cas il passe par l'origine une courbe intégrale régulière de la forme $y = cx^2$, où $4c^2 = c + 1$. En dessous de cette courbe, les intégrales viennent aboutir en rebroussement sur la courbe-pli. Au-dessus de cette courbe, on a deux réseaux de courbes intégrales symétriques par rapport à Oy , tous deux monotones, et qui ne rencontrent pas le pli (fig. 3).

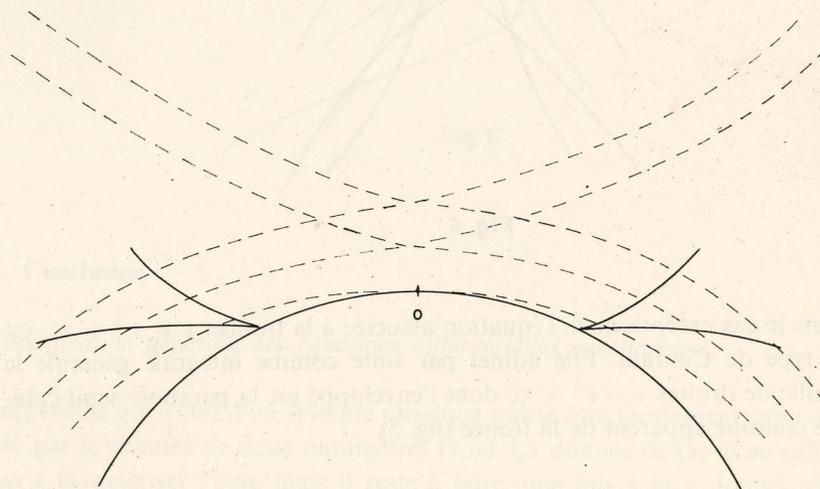


Fig.3

4. Etude des Points Fronces

On se bornera ici à donner l'allure des courbes-intégrales, au voisinage d'un point fonce, d'une part dans le cas générique, d'autre part dans le cas exceptionnel.

Dans le cas générique (fig. 4), la courbe intégrale, régulière au-dessus de la fonce, développe une queue d'aronde lorsqu'on franchit le point fonce. Le lieu des rebroussements de la queue d'aronde est évidemment le contour apparente de la fonce.

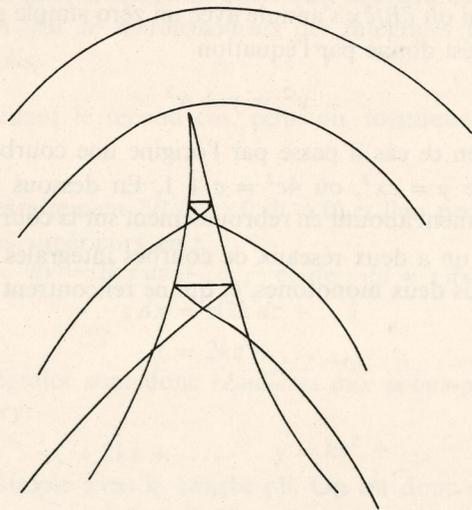


Fig. 4

Dans le cas exceptionnel, l'équation associée à la fronce: $y = v^3 + xv'$ est du type de Clairaut. Elle admet par suite comme intégrale générale la famille de droites $y = c^3 + xc$ dont l'enveloppe est la parabole semi-cubique contour apparent de la fronce (fig. 5).

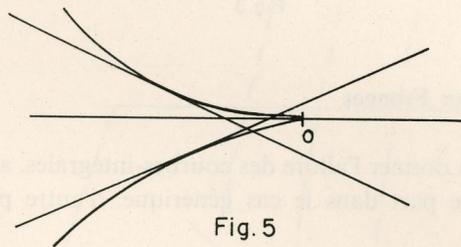


Fig. 5

On a là, très probablement, le modèle de ce qui se passe en ce cas, avec la remarque qu'on peut aussi obtenir des courbes intégrales bitangentes aux deux branches de la fronce. (Cf. fig. 6).

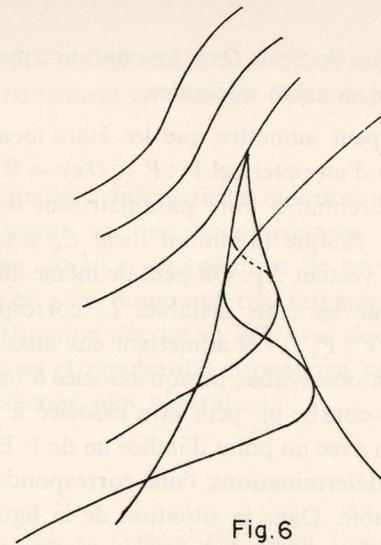


Fig. 6

5. Conclusion

Classification générale des équations différentielles multiformes.

Supposons que l'état d'un système physique puisse être localement caractérisé par la donnée de deux paramètres (x, y) . La donnée de (x, y) ne suffit pas à caractériser l'état, mais il reste à faire, une fois x et y donnés, un nombre fini de choix discrets correspondant à des états locaux stables compatibles avec les valeurs de (x, y) . Chacun de ces états stables C_k a sa propre évolution, décrite par un champ de vecteurs X_k . Toute cette donnée pourra être décrite par une équation différentielle multiforme $F(x, y, y') = 0$, les racines en y' pour x, y fixés étant alors les pentes des vecteurs X_k .

La classification décrite plus haut correspond alors à deux situations très différentes:

1.^o *Cas exceptionnel*: l'espace de configuration du système est une surface S plongée dans $Oxy \times \mathbb{R}^n$, l'évolution du système est décrite par un champ de vecteurs X dans S . Les courbes intégrales dans S sont régulières et leurs projections dans Oxy sont en général régulières, même aux points

critiques de la projection de S sur Oxy . Le contour apparent de S est alors une *enveloppe vraie* des courbes intégrales.

2.°) *Cas général*. On peut admettre que les états locaux stables C_k sont donnés par les minima d'un potentiel $V : F \times Oxy \rightarrow \mathbb{R} \times Oxy$, où l'espace F est une variété différentiable fibre paramétrisant tous les états locaux possibles du système; chaque minimum local C_k a sa propre évolution dans Oxy défini par le vecteur X_k . On peut de même admettre, par prolongement analytique, que les états instables C_i correspondant aux points critiques du potentiel $V : F_{x,y} \rightarrow \mathbb{R}$ admettent eux aussi une évolution propre X_i , en général non observable, puisqu'associée à un régime non stable. On voit qu'alors une courbe-pli peut être associée à la destruction d'un minimum par collision avec un point d'indice un de V . En ce cas, l'évolution locale X admet deux déterminations, l'une correspondant à un état stable, l'autre à un état instable. Dans la situation de la figure 7 où la branche stable C_1 aboutit sur la courbe-pli, le point représentatif, une fois arrivé

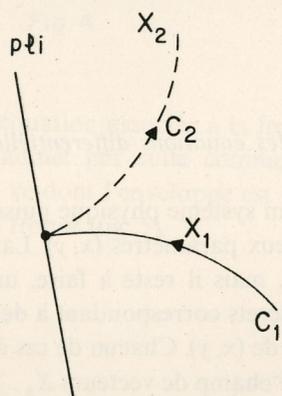


Fig.7

sur cette courbe, ne peut en ressortir car la branche sortante C_2 correspond à un régime instable. Il y a donc, en ce cas, *capture* des états du système par la branche-pli de l'intégrale singulière. Si l'on fait une statistique des états on observera une accumulation massive de points sur la branche de l'intégrale singulière, qui joue le rôle d'attracteur. Au contraire, dans le premier cas, on obtiendra un nuage de points ne présentant qu'une accumulation assez floue (et non permanente) de points au voisinage du contour apparent.

La série principale dans le diagramme de Hertzsprung-Russell en statistique stellaire fournit probablement un exemple d'une intégrale singulière attractante de type 2.

En conclusion, les équations différentielles multiformes de type exceptionnel pour lesquelles l'intégrale est une vraie enveloppe de l'intégrale générale correspondent à une situation géométrique de projection de l'espace de configuration qui n'est sans doute que très rarement réalisée dans la pratique, alors que la situation décrite en 2.°, avec des branches d'intégrales singulières attractantes et répulsantes correspond sans doute à une situation dynamique beaucoup plus générale.

I.H.E.S., Bures

Conférence présentée au Colloque Elie Cartan, Université Paris VII, Juin 1971.