Anneaux de Valuation D-stables

YVES LEQUAIN

1 – DEFINITIONS: Si R est un anneau commutatif possédant une unité, nous dirons qu'une application D de R dans R est une dérivation si $D(a + b) = D(a) + D(b)$ et $D(ab) = aD(b) + bD(a)$ pour tous les éléments a, b de R . Si S est un sous-anneau de R tel que $D(S) \subseteq S$, nous dirons que D est régulière sur S , ou que S est D -stable. Si les seuls idéaux D -stable de R sont (0) et (1) , nous dirons que R est D -simple. Nous écrivons $D^{(0)}(x)$ pour dénoter x , et pour $n \geq 1$, $D^{(n)}(x)$ pour dénoter $D(D^{(n-1)}(x))$, i.e. la $n^{\text{ième}}$ dérivée de x .

2 – Soit A un anneau D -simple de caractéristique 0; A est alors un domaine contenant les nombres rationnels [1, Corollaire 1.5, p. 743]. Soit K son corps des fractions, et Ω une fermeture algébrique de K ; la dérivation D peut être étendue de manière unique à une dérivation de Ω que nous appellerons D aussi [3, Corollaire 2', p. 125]. Dans [2], Seidenberg a montré que la fermeture intégrale complète de A dans K est D -stable. Ici nous proposons de déterminer tous les anneaux de valuation entre A et Ω qui sont D -stables.

LEMME: Soit $P \neq (1)$ un idéal premier de R . Soit $v: A \setminus \{0\} \rightarrow \{\text{nombres entiers}\}$ définie par $v(x) = n$ si $D^{(i)}(x) \in P$ pour $i = 0, \dots, n-1$, et $D^{(n)}(x) \notin P$;

étendons v à $K \setminus \{0\}$ par $v\left(\frac{x}{y}\right) = v(x) - v(y)$. Alors:

- (i) v est une valuation de K .
- (ii) L'anneau de valuation A_v de v est un anneau D -stable entre A et K .

THEOREME 1: Soient $\mathcal{P} = \{\text{idéaux premiers } \neq (1) \text{ de } R\}$ et $\mathcal{V} = \{\text{anneaux de valuation } D\text{-stables entre } A \text{ et } K\}$. Soit $\varphi: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{V}$ définie par $\varphi(P) = A_v$ où v est la valuation associée à P par le lemme. Alors, φ est une bijection.

THEOREME 2: Soit V un anneau de valuation entre A et Ω . Alors V est D -stable si et seulement si V est non ramifié au dessus de K et $V \cap K$ est D -stable.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Y. LEQUAIN, *Differential simplicity and complete integral closure*, Pacific J. Math. 36(1971), 741-751.
- [2] A. SEIDENBERG, *Derivations and integral closure*, Pacific J. Math. 16(1966), 167-173.
- [3] O. ZARISKI et P. SAMUEL, *Commutative Algebra*, V. 1, Van Nostrand Co., Princeton, 1958.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada — Rio de Janeiro