Les Fondements de la Théorie Spectrale des Algèbres Bornologiques*

HENRI HOGBE-NLEND

Introduction

"Il y a avantage à remplacer, dans les recherches sur le calcul symbolique, la notion d'espace localement convexe par celle, beacoup plus simple et plus maniable, d'espaces à bornés . . . En vérité, l'emploi des espaces localement convexes pose des problèmes de plus difficiles, qui n'ont rien à faire avec les buts essentiels du calcul symbolique".

J. Sebastião e Silva (1963), [17])

Le but du présent travail est de poser sous une forme cohérente, systématique et simplifiée les fondements de la théorie spectrale des algèbres bornologiques. Ces algèbres sont nées de l'idée, due à divers auteurs, principalement B. H. Arnold [5], L. Waelbroeck [20] et J. S. e Silva, d'introduire une structure bornologique (cf. [10]) sur certaines algèbres où les structures topologiques s'avèrent mal adaptées. Rappelons par exemple qu'en dehors du cas normé, les applications bilinéaires usuelles de l'Analyse et par conséquent les multiplications de diverses algèbres topologiques fondamentales sont généralement hypocontinues et non continues; elles sont cependant bornées pour les bornologies canoniques (cf. notamment les algèbres d'opérateurs). Par ailleurs les structures topologiques localement convexes séparées se comportent très mal par passage aux limites inductives arbitraires (problèmes de séparation, de complétion, de caractérisation des bornés . . .). Des algèbres aussi simples riches et usuelles que les limites inductives d'algèbres de Banach (cf. deuxième partie du présent travail) n'y trouvent pas leur cadre naturel d'étude! . . .).

Les structures bornologiques s'introduisent naturellement sur diverses algèbres usuelles de l'Analyse et permettent d'en développer une théorie spec-

---

*Recebido pela SBM em 18 de maio de 1972.

trale satisfaisante. La notion de bornologie permet une description claire des éléments d'une algèbre topologique ou bornologique E, description qui aboutit à *la partition de toute algèbre en deux "morceaux"* et la détermination des *deux étapes fondamentales de la théorie spectrale*:

Primo: Les éléments de l'algèbre E qui sont absorbés par *un* disque borné stable par la multiplication, c'est-à-dire appartiennent à une sous-algèbre normée E_B de E: ce sont les éléments réguliers. Cette définition coïncide avec les définitions usuelles de la notion d'élément régulier. Les algèbres pour lesquelles tous les éléments sont réguliers sont précisément les *algèbres bornologiques multiplicativement convexes* (*abmc*), limites inductives (bornologiques) d'algèbres semi-normées. L'étude de ces algèbres est fort simple et est l'objet de la seconde partie du présent travail. Tous les théorèmes fondamentaux de la théorie spectrale des algèbres de Banach, se généralisent aux *abmc* complèts, et dans beaucoup de cas, presque trivialement. Cette théorie s'applique à de nombreuses algèbres usuelles de l'Analyse: algèbres de fonctions, algèbres de germes de fonctions, algèbres d'opérateurs. Elle contient la théorie des algèbres topologiques à inverse continu et notamment la théorie des algèbres p-normées.

Secundo: Les éléments non réguliers de E c'est-à-dire absorbés par aucun disque borné stable pour la multiplication. L'étude spectrale de tels éléments et des algèbres contenant des éléments non réguliers est moins simple que la précédente. Nous l'abordons dans la troisième partie. Une idée fondamentale à souligner clairement, dégagée par l'analyse bornologique de la notion d'élément régulier est la suivante: *Tout élément d'une algèbre topologique ou bornologique peut être rendu régulier soit en changeant la bornologie de cette algèbre, soit en "groississant" l'espace.* Ce processus de régularisation n'est évidemment pas le même pour tous les éléments et est plus ou moins difficile suivant les cas concrets. Il signifie cependant que tous les éléments non réguliers n'ont pas le même degré d'irrégularité. Leur étude devrait se faire par "phases" et "catégories". Des travaux ultérieurs seront consacrés au développement de cette idée. Les "algèbres bornologiques probanach" introduites dans la troisième partie sont équivalents aux "algèbres topologiques localement m-convexes" d'Arens-Michael. Ce sont des algèbres qui contiennent des éléments non réguliers mais *facilement régularisables*. En effet, il existe suffisamment de

morphismes d'une telle algèbre à valeurs dans des algèbres de Banach, d'où leur intérêt.

Le présent travail est basé sur une série de conférences faites à l'Université de São Paulo (Brésil) en Janvier-Février 1972, sur l'invitation de l'Institut de Mathématiques et Statistiques de l'U.S.P.

De façon générale, on suppose connues les notions élémentaires de Bornologie (cf. [10]) et de la théorie spectrale des algèbres de Banach (cf. [6], [8], [15]). De façon générale les expressions et notations non définies sont celles de Bourbaki [6].

Première Partie

Généralités sur les Algèbres Bornologiques

1. Définition des algèbres bornologiques.

Soient $\mathbb{K}$ un corps commutatif valué et E une algèbre (associative) sur $\mathbb{K}$. On dit qu'une bornologie vectorielle sur l'espace vectoriel E est une *bornologie d'algèbre* ou qu'elle est compatible avec la structure d'algèbre de E si la multiplication $(x, y) \to xy$ de $E \times E$ dans E est bornée. Ceci exprime que le produit de deux bornés de E est encore un borné de E.

Un couple $(E, \mathscr{B})$ formé d'une algèbre E sur $\mathbb{K}$ et d'une bornologie d'algèbre $\mathscr{B}$ sur E est appelé une *algèbre bornologique sur* $\mathbb{K}$. Si E possède un élément unité noté 1, on dit que le triplet $(E, \mathscr{B}, 1)$ noté simplement E (s'il n'y a pas risque de confusion) est une *algèbre bornologique unifère* sur $\mathbb{K}$.

Un *morphisme d'algèbre bornologique* (resp. d'algèbre bornologique unifère) est un morphisme d'algèbre (resp. d'algèbre unifère) qui est borné; autrement dit une application linéaire multiplicative bornée (appliquant l'unité sur l'unité). On en déduit naturellement la notion *d'isomorphisme d'algèbres bornologiques* (unifères).

2. Opérations fondamentales sur les algèbres bornologiques

Soient $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'algèbres bornologiques sur $\mathbb{K}$ indexée par un ensemble d'indices I; E une algèbre sur $\mathbb{K}$ et pour tout $i \in I$, $u_i : E \to E_i$ un morphisme d'algèbre. La bornologie initiale sur E des bornologies des E_i pour les applications u_i est une bornologie d'algèbre. En particulier un *système projectif d'algèbres bornologiques* (resp. unifères) est un système projectif d'algèbres (resp. unifères) (E_i, π_{ij}) tel que les E_i soient des algèbres bornologiques (resp. unifères) et les π_{ij} des morphismes d'algèbres bornologiques (resp. unifères). La limite projective bornologique de ce système est l'algèbre limite projective des E_i munie de la bornologie limite projective. Un *produit d'algèbres bornologiques* (unifère) est l'algèbre produit (unifère) munie de la bornologie produit; une *sous-algèbre bornologique* (unifère) est une sous-algèbre (unifère) munie de la bornologie induite. Toute intersection ou borne supérieure de bornologies d'algèbres étant une bornologie d'algèbre on a naturellement la notion de *bornologie d'algèbre engendrée* par une famille de parties d'une algèbre.

Soient maintenant $v_i : E_i \to E$ des morphismes d'algèbres de E_i dans E. La bornologie d'algèbre engendrée par les ensembles $v_i(B_i)$ où B_i parcourt la bornologie de E_i est la bornologie d'algèbre sur E la plus fine pour laquelle les v_i sont des morphismes d'algèbres bornologiques. En particulier un *système inductif d'algèbres bornologiques* (*resp. unifères*) est un système inductif (E_i, π_{ji}) d'algèbres (resp. uniferes) indexé par un ensemble filtrant supérieurement tel que les E_i soient des algèbres bornologiques (resp. unifères) et les π_{ji} des morphismes d'algèbres bornologiques (resp. unifères). L'algèbre (unifère) limite inductive de ce système, munie de la bornologie d'algèbre la plus fine pour laquelle les applications $\pi_i : E_i \to E$ sont bornées est la limite inductive de ce système. En fait c'est la limite inductive des algèbres E_i munie de la bornologie limite inductive. Soit E une algèbre bornologique et I un idéal de E sur l'algèbre quotient E/I la bornologie quotient est une bornologie d'algèbre; E/I munie de cette bornologie est *l'algèbre bornologique quotient* de E par l'idéal I.

Soient E une algèbre bornologique et E_1 l'algèbre unifère obtenue par adjonction de l'unité à E. Rappelons que $E_1 = \mathbb{K} \times E$ munie de l'addition ordinaire, la multiplication étant définie par $(\lambda, a)(\mu, b) = (\lambda\mu, \lambda b + \mu a + ab)$. La bornologie produit sur E_1 est une bornologie d'algèbre sur E_1 c'est-à-dire compatible avec la multiplication ainsi définie. On dit que E_1 muni de cette bornologie est *l'algèbre bornologique déduite de E par adjonction bornologique de l'unité. L'opération d'adjonction bornologique de l'unité permute avec les limites inductives d'algèbres bornologiques* au sens suivant: soient (E_i, π_{ji}) un système inductif d'algèbres bornologiques et E la limite inductive bornologique de ces algèbres. Pour tout $i \in I$, soit $E_{i,1}$ l'algèbre bornologique déduite de E_i par adjonction bornologique de l'unité; les morphismes π_{ji} se prolongent en des morphismes d'algèbres bornologiques unifères notés encore π_{ji} entre les $E_{i,1}$. Si E est l'algèbre bornologique limite inductive du système (E_i, π_{ji}), E_1 est l'algèbre bornologique limite inductive du système $(E_{i,1}, \pi_{ji})$. La vérification de cette assertion est un exercice facile de maniement des limites inductives.

La M-fermeture d'une sous-algèbre (*resp. d'un idéal à gauche, ou resp. à droite*) *est encore une sous-algèbre* (*resp. un idéal à gauche, resp. à droite*). Rappelons [6] que si E est une algèbre unifère, on appelle sous-algèbre pleine de E une sous-algèbre unifère F telle que tout élément de F inversible dans E soit inversible dans F. Soit E une algèbre bornologique sur $\mathbb{K}$. Toute intersection de sous-algèbres pleines M-fermées est une sous-algèbre pleine M-fermée. Si $A \subset E$, l'intersection des sous-algèbres pleines M-fermées contenant A est *la sous-algèbre pleine* M-fermée engendrée par A. Le commutant A' de A, c'est-à-dire l'ensemble des éléments $y \in E$ et $xy = yx$ pour tout $x \in A$, est une sous-algèbre pleine M-fermée de E. Donc le bicommutant A'' de A qui contient toujours A contient la sous-algèbre pleine M-fermée engendrée par A. Si les éléments de A sont deux à deux permutables, en particulier si E est une algèbre commutative ou si A est réduit à un élément, le bicommutant A'' est une sous-algèbre commutative, pleine et M-fermée de E. Il en est donc de même de la sous-algèbre pleine M-fermée engendrée par A.

3. Algèbres bornologiques convexes.

On supposera désormais que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (bien qu'on puisse se placer dans le cas général d'un corps valué complet non discret arbitraire). Une algèbre bornologique convexe (en abrégé *abc*) sur $\mathbb{K}$ est une algèbre bornologique sur $\mathbb{K}$ possédant une base de bornologie formée de disques. Toute bornologie initiale d'algèbres bornologiques convexes est évidemment convexe. Toute limite inductive et tout quotient de bornologies d'algèbres qui sont convexes est convexe... Une *abc* est dite *complète* si l'*ebc* sous-jacent est complet.

Contrairement à ce qui se passe dans le cas des *ebc* (espaces bornologiques convexes) les *abc* ne constituent pas la meilleure extension bornologique naturelle des algèbres normées. Ceci tient au fait que *l'hypothèse de convexité sur les bornés est indépendante de la multiplication de l'algèbre* et par conséquent est insuffisamment adaptée. La bonne extension bornologique naturelle des algèbres normées est celle *d'algèbre bornologique multiplicativement convexe* que nous étudierons dans la seconde partie. Tout d'abord donnons les exemples fondamentaux d'algèbres bornologiques.

4. Exemples d'algèbres bornologiques convexes

Exemple 1: Sur toute algèbre normée E, l'ensemble des homothétiques de la boule unité définit sur E une structure d'*abc*.

Exemple 2: Soit E un espace localement convexe séparé séquentiellement complet [il suffit d'ailleurs que les disques bornés fermés soient complétants], tel que E soit muni d'une structure d'algèbre pour laquelle la multiplication est séparément continue. Alors la bornologie de von Neumann de E (parties absorbées par tout voisinage de (0)) est une bornologie d'algèbre pour laquelle E est une *abc* complète. En effet, pour tout couple de disques bornés complétants, A et B de E l'application bilinéaire

$$E_A \times E_B \to E$$

restriction de la multiplication de E est séparément continue donc continue donc bornée sur $A \times B$.

Exemple 3: Soient E un espace vectoriel topologique (localement convexe séparé) et $\mathscr{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes continus de E. Munie de la bornologie équicontinue, $\mathscr{L}(E)$ est une *abc* complète. Si E est non normable, la multiplication de l'algèbre $\mathscr{L}(E)$ ou de toute sous-algèbre contenant les opérateurs de rang fini, n'est jamais continue pour une σ-topologie.

Exemple 4: Soient E un *ebc* et $L(E)$ l'algèbre des endomorphismes bornés de E. Munie de la bornologie naturelle, $L(E)$ est une *abc* (complète si E

est un *ebc* complet). Toute algèbre bornologique convexe unifère est isomorphe à une sous-algèbre bornologique unifère de $L(E)$.

Exemple 5: Soient E un espace localement convexe et $\Lambda(E)$ l'algèbre des opérateurs fortement bornés sur E (un opérateur est dit fortement borné s'il est borné sur un voisinage de (0)). La bornologie canonique de $\Lambda(E)$ est formée de parties équibornées sur un voisinage de zéro. Alors $\Lambda(E)$ muni de cette bornologie est une *abc* (complète si E complet). Cette algèbre est même "multiplicativement convexe" (voir plus loin I, 6).

Exemple 6: Soit E un espace vectoriel topologique localement pseudo-convexe ([10] chap. X, page 101) et bornologiquement complet (par exemple semi-complet) muni d'une structure d'algèbre pour laquelle la multiplication est séparément continue. La bornologie à décroissance rapide de E (formée de partie contenues dans l'enveloppe disquée fermée d'une suite décroissance rapide) est une bornologie d'*abc* complète. ([19], prop. 5, page 28).

Exemple 7: Soient E un espace vectoriel topologique localement pseudo-convexe et bornologiquement complet; $\mathscr{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E. La bornologie à décroissance rapide associée à la bornologie équicontinue de E est une bornologie d'*abc* complète ([19] prop. 7, page 29).

Deuxieme Partie

La Théorie Spectrale de Gelfand Généralisée

Dorénavant on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ corps des complexes.

§I – *Algèbres bornologiques multiplicativement convexes.*

I. 1. Définition des algèbres bornologiques multiplicativement convexes

Une algèbre normée peut se définir comme une algèbre bornologique convexe séparée possédant un disque borné bornivore idempotent (une partie A d'une algèbre E est dite idempotente si $A^2 = A \cdot A \subset A$). En d'autres termes dans une algèbre normée *tout borné est absorbé par un disque borné idempotent*. C'est là une propriété importante qui *dans le cas des algèbres normées* résulte de l'hypothèse que la multiplication est bornée. Cette propriété n'est pas nécessairement vérifiée dans le cas d'une algèbre bornologique convexe séparée arbitraire comme il deviendra bientôt clair. Ceci conduit à l'introduction d'une classe d'algèbres bornologiques où cette condition supplémentaire devra, par hypothèse, être vérifiée: c'est la classe d'algèbres bornologiques multiplicativement convexes que nous allons définir.

Rappelons que si $\mathscr{B}$ est une bornologie vectorielle sur un espace vectoriel E, une *pseudo-base* de $\mathscr{B}$ est une sous-famille $\mathscr{B}'$ de $\mathscr{B}$ telle que tout élément de $\mathscr{B}$ soit *absorbé* par un élément de $\mathscr{B}'$.

Une bornologie d'algèbre sur une algèbre E est dite *multiplicativement convexe* si elle possède une *pseudo-base* formée de disques idempotents. *Une algèbre bornologique multiplicativement convexe, en abrégé, une abmc est une algèbre bornologique dont la bornologie est multiplicativement convexe.*

Le maniement d'une telle algèbre nécessite quelques proprietés élémentaires des ensembles idempotents.

I.2. Propriétés élémentaires des ensembles idempotents

Les assertions suivantes sont bien connues et de vérification immédiate.

– Soit E une algèbre unifère et 1 son unité. Si $B \subset E$ est indempotent, $B \cup \{1\}$ est idempotent;

– L'homothétique d'un disque idempotent n'est pas nécessairement idempotent;

– L'enveloppe convexe, l'enveloppe disquée, l'enveloppe complétante ou l^1-disquée ([10] p. 31) l'image directe ou réciproque par un morphisme d'algèbre, l'intersection arbitraire, sont des opérations qui conservent l'idempotence.

– Soit E une algèbre. On appelle enveloppe idempotente d'une partie A

de E l'intersection de tous les ensembles idempotents contenant A. C'est l'ensemble $\bigcup_{n \geq 1} A^n$ où $A^n = A \cdot A \ldots A$ (produit de n ensembles égaux à A, n entier ≥ 1).

– Soient E une algèbre *commutative*, A et B deux parties de E. L'enveloppe idempotente de $A \cup B$ est $A \cup B \cup AB$. En particulier, *si E est unifère* (ce qui implique $A \cup B \subset AB$), *la réunion de deux disques idempotents est contenue dans un disque idempotent* car il est clair que le *produit de deux disques idempotents est idempotent* (E étant commutative).

I.3. Structures des algèbres bornologiques multiplicativement convexes

Soient E une *abmc*; $\mathscr{B}$ une pseudo-base de bornologie de E formée de disques idempotents. Pour tout $B \in \mathscr{B}$, l'espace vectoriel E_B semi-normé par la jauge de E_B est une *algèbre semi-normée*, la multiplication étant induite par celle de E. Si $A \subset B$, l'injection canonique $\pi_{BA} : E_A \to E_B$ est un morphisme d'algèbre bornologique. Il est clair que l'algèbre bornologique E est limite inductive du système inductif d'algèbres bornologiques (E_A, π_{BA}). Si E est unifère, on peut supposer, en changeant éventuellement B par $B \cup \{1\}$ que les E_B sont unifères; alors les morphismes π_{BA} sont unifères.

Comme inversement il est clair que toute algèbre bornologique (unifère) limite inductive bornologique d'algèbres semi-normées (unifères) est une *abmc* (unifere) on vient d'établir le théorème fondamental de structure suivant:

THEOREME I.3.1 – *Une algèbre bornologique (resp. unifère) E est multiplicativement convexe si et seulement si E est limite inductive bornologique d'algèbres semi-normées (resp. unifères).*

Le théorème ci-dessus justifie la notation suivante, usuelle en théorie des *ebc*:

Notation: Soit E une algèbre bornologique multiplicativement convexe et $(B_i)_{i \in I}$ une pseudo-base de bornologie formée de disques idempotents. On notera $E_i = E_{B_i}$, $i \leq j$ pour $B_i \subset B_j$; $\pi_{ji} : E_i \to E_j$ l'injection canonique. Alors $E = \varinjlim_{i \in I} (E_i, \pi_{ji})$ (limite inductive) bornologique. Inversement. cette notation définira une *abmc* E, la famille $(B_i)_{i\in I}$ où B_i est la boule unité de E_i définit une pseudo-base de bornologie de E formée de disques idempotents.

Une *abmc* E est dite séparée si l'espace vectoriel bornologique E est séparé. Il revient au même de dire (th. I.3.1.) que E est limite inductive bornologique d'algèbres normées. Si l'espace bornologique convexe E est complet, l'*abmc* E est limite inductive bornologique d'algèbres de Banach car l'enveloppe complétante d'un disque borné idempotent est un disque borné idempotent. Une *abmc* sera donc dite complète si l'*ebc* E est complet: *Les abmc complètes sont les limites inductives (bornologiques) d'algèbres de Banach.*

I.4. Propriétés de stabilité des abmc

La bornologie d'algèbre quotient par un idéal d'une bornologie d'*abmc* est une bornologie d'*abmc*; tout produit *fini* d'*abmc* est une *abmc*; mais un produit infini même dénombrable d'*abmc* n'est pas nécessairement une *abmc*.

Soit E une *abmc*. L'algèbre E_1, déduite de E par adjonction bornologique d'une unité est une *abmc*. Il résulte des généralités de la première partie qui si $E = \varinjlim E_i$ (limite inductive d'algèbres seminormées E_i), alors $E_1 = \varinjlim E_{i,1}$ (limite inductive d'algèbres seminormées unifères $E_{i,1}$ obtenus par adjonction bornologique de l'unité à $E_{i,1}$).

I.5. Algèbre bornologique multiplicative convexe associée à une algèbre bornologique commutative unifère

Soit E une algèbre bornologique unifère. On dit qu'un borné B est un *borné régulier* si B est absorbé par un disque borné idempotent. Il revient au même de dire qu'il existe un disque borné idempotent A de E tel que B soit borné dans l'algèbre semi-normée E_A. On dit qu'un elément x de E est un élément régulier si l'ensemble $\{x\}$ est un borné régulier de E. La proposition suivante, donne d'autres caractérisations usuelles des éléments réguliers.

PROPOSITION I.5.1. – *Soient E une algèbre bornologique convexe et $x \in E$. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *x est un élément régulier;*

(ii) *il existe un couple (F, φ) formé d'une algèbre semi-normée F et d'un morphisme d'algèbre bornologique $\varphi : F \to E$ tels que $x = \varphi(y)$ $y \in F$;*

(iii) *il existe un scalaire $\lambda > 0$ tel que la suite x^n/λ^n soit bornée;*

(iv) *la résolvante $\lambda \to (x-\lambda)^{-1}$ de x est définie et bornée dans un voisinage de l'infini (elle est même analytique et tend vers 0 à l'infini cf. prop. II.2.1).*

Cette proposition montre que les éléments réguliers introduits ci-dessus sont exactement les éléments réguliers de L. Waelbroeck ([19]); les "eléments i-bornés" de S. Warner [21]; les "eléments bornés" de G. Allan [2] et les "eléments réguliers" de Bourbaki ([6]).

On notera $\mathscr{B}_r$ l'ensemble des bornés réguliers de E. On peut alors énoncer:

PROPOSITION I.5.2. – *Soit E une algèbre bornologique commutative unifère. Soit $E_r = \bigcup_{B\in\mathscr{B}_r} B$* (notations ci-dessus). *Alors: E_r est une sous-algèbre unifère de E et $\mathscr{B}_r$ est une bornologie d'algèbre multiplicativement convexe sur E_r dite bornologie canonique sur la sous-algèbre des éléments réguliers.*

Preuve: Il est clair que $E_r = \bigcup_{A\in\mathscr{I}} E_A$ où $\mathscr{I}$ est l'ensemble des diques bornés idempotents de E contenant l'unité. Comme $\mathscr{I}$ est filtrant supérieurement (cf. I.2), E_r est une sous-algèbre unifere de E. Il est clair que $\mathscr{B}_r$ est une bornologie d'algèbre sur E_r (I.2) de pseudo-base $\mathscr{I}$. C'est donc une bornologie d'*abmc* sur E_r, d'où la proposition.

Application – Partition canonique d'une algèbre bornologique commutative unifere: Les deux étapes de la théorie spectrale.

Soit E une algèbre bornologique commutative unifere. L'algèbre $(E_r, \mathscr{B}_r)$ est l'algèbre bornologique multiplicativement convexe *maximum* contenue avec injection bornée dans E. Elle est exactement formée de *TOUS* les éléments réguliers de E. On l'appelle l'*abmc associée à E* ou *la partie régulière de E*. Les éléments de E n'appartenant pas à E_r n'appartiennent donc à *aucune abmc* "plongée" dans E, on les appelle les *éléments non réguliers* de E. D'où une partition naturelle de E en éléments réguliers ("provenant" d'algèbres semi-normées) et éléments non réguliers (ne "provenant" d'aucune algèbre semi-normée). Il en résulte deux étapes naturelles dans le développement de la théorie spectrale:

Primo: l'étude spectrale des éléments réguliers; c'est la théorie spectrale des algèbres bornologiques multiplicativement convexes complètes et qui constitue la théorie spectrale de Gelfand généralisée. C'est l'objet essentiel de cette seconde partie.

Secundo: l'étude spectrale d'éléments non réguliers que nous aborderons dans la troisième partie.

I.6. Exemples fondamentaux d'algèbres bornologiques multiplicativement convexes complètes

Exemple 1: *Algèbres topologiques localement convexes à inverse continu* [19]

Une algèbre topologique localement convexe unifère E séquentiellment complète est dite à inverse continu si l'application $x \to x^{-1}$ est définie dans un voisinage de 1 et continue en 1. Il est bien connu que dans une telle algèbre, tout élément est régulier. L'algèbre $E = E_r$ muni de sa bornologie multiplicativement convexe canonique est une *abmc* unifère complète.

Exemple 2: *Algèbres topologiques complètes localement bornées* [22]

Une algèbre topologique (complète) est dite localement bornée si elle possède un voisinage de zéro borné. Ce sont des algèbres p-normables pour un certain $0 < p \leq 1$. On peut munir simplement de diverses manières une telle algèbre E d'une structure d'*abmc* complète; par exemple en considérant la bornologie multiplicativement convexe associée à la bornologie des *disques* bornés complétants de E.

Exemple 3: *Algèbres d'opérateurs fortement bornés* [1]

Un endomorphisme d'un espace localement convexe séparé (séquentiellement complet) E dit fortement borné s'il est borné sur un voisinage de zéro de E donc nécessairement continu. Il en est par exemple ainsi de tout endomorphisme faiblement compact, a fortiori compact, nucléaire ou ultranucléaire [11]. Pour tout voisinage de zéro V de E et pour tout disque borné fermé B de E notons $E(V, B)$ l'ensemble des endomorphismes de E appliquant V dans un homothétique de B. C'est une sous-algèbre de $\mathscr{L}(E)$ algèbre des endomorphismes continus de E. L'application

$$u \in E(V,\ B) \to \|u\| = \sup_{x \in V} \|u(x)\|_B$$

où $\|\ \|_B$ est la jauge de B est une norme d'algèbre de Banach sur $E(V,\ B)$. Mettons sur l'ensemble des couples $(V,\ B)$ l'ordre suivant:

$$(V_1\,,\ B_1) \leq (V_2\,,\ B_2) \Leftrightarrow V_1 \supset V_2 \quad \text{et} \quad B_1 \subset B_2\,.$$

On a donc une application canonique de $E(V_1\,, B_1)$ dans $E(V_2\,, B_2)$. Notons $\Lambda(E)$ l'algèbre des endomorphismes fortement bornés de E. Il est clair que $\Lambda(E)$ est la limite inductive des $E(V, B)$ pour les applications canoniques. Munie de la bornologie limite inductive correspondante, $\Lambda(E)$ est une *abmc* complète contenant des sous-algèbres importantes suivantes:

Exemple 4: *Algèbres d'opérateurs compacts* d'un espace localement convexe separé séquentiellement complet. C'est une sous-algèbre bornologique de $\Lambda(E)$. On la note $\mathscr{C}(E)$.

Exemple 5: *Algèbres d'opérateurs nucléaires* d'un espace localement convexe séparé séquentiellement complet. Les notations étant celles de l'exemple 3, soit $N(V, B)$ la sous-algèbre de $E(V, B)$ formé d'opérateurs nucléaires de $\hat{E}_V$ dans E_B et muni de la norme nucléaire correspondante. C'est une algèbre de Banach et il est clair que l'algèbre $\mathscr{N}(E)$ des endomorphismes nucléaires de E est canoniquement la limite inductive des $N(V,\ B)$. De même on construit l'algèbre des opérateurs ultranucléaires...

§ II – *Spectre et caractères d'une algèbre bornologique multiplicativement convexe*

II.1. Eléments inversibles d'une abmc

PROPOSITION II.1.1: *Soit E une abmc unifère complète. Le groupe des éléments inversibles de E est Mackey ouvert (ouvert pour τE).*

Preuve: Conséquence immédiate du résultat analogue pour les algèbres de Banach et de la définition de la topologie de la M-fermature [10].

COROLLAIRE. *Soit E une algèbre localement convexe unifère semi-complète dont la bornologie de von Neumann est multiplicativement convexe. L'ensemble des éléments inversibles de E est ouvert dans l'un ou l'autre des deux cas suivants*:
– *E est de Fréchet,*
– *E est un espace de Silva.*

PROPOPOSITION II.1.2.: *Soit E une abmc unifère complète. L'application $x \to x^{-1}$ du groupe des inversibles de E dans E est analytique* [13].

COROLLAIRE: *Soit E une abmc unifère complète. La M-fermeture de toute sous-algèbre pleine de E est une sous-algèbre pleine de E.*

Preuve: En effet, soit A une sous-algèbre pleine de E et $\bar{A}$ sa M-fermeture. Soit $x \in \bar{A}$ et x_j un ordonné filtrant de A tendant vers x pour la topologie τE. Pour j assez grand, x_j est inversible dans E et x_j^{-1} tend vers x^{-1} pour la topologie τE. Comme $x_j^{-1} \in A \subset \bar{A}$, on a donc $x_j^{-1} \in \bar{A}$. Par ailleurs il est clair que $\bar{A}$ est une sous-algèbre de E en vertu de l'invariance par translation et homothétie de la topologie τE; d'où le corollaire.

Remarque: En vertu du corollaire ci-dessus, la sous-algèbre pleine M-fermée engendrée par une partie A de E est la M-fermeture de la sous-algèbre pleine engendrée par A.

PROPOSITION II.1.3.: *Soit E une abmc unifere complète. Tout idéal maximal de E est M-fermé.*

Preuve: Un tel idéal I est disjoint du groupe M-ouvert (II.1.2) des éléments inversibles de E, donc sa M-fermeture $\bar{I}$ (qui est encore un idéal) est distincte de E, donc $I = \bar{I}$ et par suite I est M-fermé.

COROLLAIRE: *Le radical d'une abmc unifère complète est M-fermé.*

II.2. Spectre d'un élément dans une abmc : le théorème de Gelfand Mazur

LEMME II.2.1.: *Soit $E = \varinjlim_{i \in I} (E_i, \pi_{ji})$ une abmc unifère complète. Pour tout $x \in I$, soit $I(x)$, l'ensemble des indices $i \in I$ tels que $x \in E_i$. Si l'on note spx le spectre de x relativement à E_i et $sp_i x$ le spectre de x relativement à E, on a:*

$$spx = \bigcap_{i \in I(x)} sp_i x.$$

Preuve: Un élément x de E est inversible dans E si et seulement si il est inversible dans un E_i convenable, d'où le lemme.

PROPOSITION II.2.1.: *Soient E une abmc unifère complète et $x \in E$.*
(i) *Le spectre de x est une partie compacte de $\mathbb{C}$. Il est non vide si E n'est pas réduite à* (0).
(ii) *La résolvante $\lambda \to (x - \lambda)^{-1}$ de x est une fonction holomorphe de $\mathbb{C}$-spx dans E et nulle à l'infini.*

Preuve: La première assertion de (i) est claire (lemme II.2.1). Avec les notations du lemme, $\mathbb{C}\text{-}spx = \bigcup_{i \in I(x)} (\mathbb{C}\text{-}sp_i x)$. Les applications $\lambda \in \mathbb{C} - sp_i x \to E_i$ sont analytiques et nulles à l'infini [6] d'où l'assertion (ii). La première assertion de (i) est alors conséquence classiquement du théorème de Liouville.

On déduit alors, comme pour les algèbres de Banach:

PROPOSITION II.2.2.: (théorème de Gelfand-Mazur) *Tout corps E qui est une abmc unifère complète sur $\mathbb{C}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$.*

Par exemple, sur le corps des opérateurs de Mikusinski, on ne peut définir aucune bornologie d'algèbre multiplicativement convexe complète.

II.3. Caractères et idéaux maximaux dans une algèbre bornologique multiplicativement convexe

THEOREME II.3.1.: *Soit E une abmc commutative complète. Tout caractère de E est borné par 1 sur tout disqué B borné idempotent.*

Preuve: En vertu du théorème fondamental de structure (I.3.1) on peut supposer E algèbre de Banach et B sa boule unité. Le résultat est alors classique.

Remarque (II.3.1.): Soient X un espace topologique et $\mathbb{C}^X$ l'algèbre des fonctions complexes sur X (pour les opérations usuelles). Soit E une sous-algèbre de $\mathbb{C}^X$ munie d'une bornologie d'*abmc* commutative *complète*. Alors *toutes les fonctions de E sont bornées sur X*: En effet, soit $\mathscr{B}$ une pseudo-base de bornologie de E formé de disques idempotents. Pour tout $x \in X$, le caractère $\delta_x : f \in E \to f(x) \in \mathbb{C}$ est borné par 1 sur tout élément de $\mathscr{B}$. Soit alors $h \in E$, il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ et $B \in \mathscr{B}$ tels que $\lambda h \in B$. Alors:

$$|\delta_x(\lambda h)| = |\lambda h(x)| \leq 1 \quad \text{pour tout} \quad x \in X,$$

donc h est bornée sur X d'où notre assertion.

La remarque (II.3.1) fournit de nombreux exemples d'algèbres sur lesquelles aucune structure d'*abmc* commutative complète n'est définissable.

Remarque (II.3.2): Soient E une algèbre commutative; $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ deux bornologies d'*abmc* complètes sur E; $E_1 = (E, \mathscr{B}_1)$ et $E_2 = (E, \mathscr{B}_2)$. Alors $X(E_1) = X(E_2)$ algébriquement et topologiquement. (On rappelle que $X(E)$ est l'ensemble des caractéres non nuls de E et $X'(E) = X(E) \cup \{0\}$).

Lemme II.3.1.: *Soit* $E = \varinjlim (E_i, \pi_{ji})$ *une abmc commutative complète. Alors* $X'(E) = \varinjlim (X'(E_i), \pi'_{ij})$ *(limite projective topologique) où* π'_{ij} *est l'application* $X'(E_j) \to X'(E_i)$ *restriction de la transposée de* π_{ji}.

Preuve: La topologie faible permute avec les limites projectives, d'où le lemme.

Proposition II.3.1.: *Soit E une abmc commutative complète.*

(i) *$X'(E)$ est compact (et peut être réduit à (0));*

(ii) *$X(E)$ est localement compact (et peut être vide);*

(iii) *si E est unifère $X(E)$ est compact et n'est jamais vide.*

Preuve: Conséquence immédiate du lemme (II.3.1) et des résultats classiques dans le cas d'algèbres de Banach. Le fait que $X(E)$ n'est jamais vide si E est unifère se déduit également du lemme de Krull combiné avec le résultat suivant, basé sur le théorème de Gelfand-Mazur.

Proposition II.3.2.: *Soit E une abmc unifère complète. L'application* $\chi \to \ker \chi$ *est une bijection de* $X(E)$ *sur l'ensemble des idéaux maximaux de E.*

Preuve: L'application $\chi \to \ker \chi$ est toujours une bijection de $X(E)$ sur l'ensemble des idéaux de E de codimension 1; idéaux qui sont évidemment maximaux. Il suffit alors de montrer que tout idéal maximal de E est de codimension 1. C'est une conséquence de la proposition II.2.2. (théorème de Gelfand-Mazur). En effet, soit I un idéal maximal, nécessairement M-fermé (prop. II.1.3); E/I est une abmc unifère complète qui est un corps. C'est donc le corps des complexes (prop. II.2.2.) et par conséquent I est de codimension 1.

Notation: En vertu de la proposition II.3.2. on pourra désormais noter $\mathscr{M} = X(E)$ où $\mathscr{M}$ désigne l'espace des idéaux maximaux de E.

II.4. La transformation de Gelfand dans les abmc

Soit E une *abmc* commutative complete. Les assertions suivantes vraies si E est une algèbre de Banach sont encore vraies et se vérifient immédiatement.

– Pour tout $x \in E$, la transformée de Gelfand $\hat{x}$ est une fonction continue sur $\mathscr{M}$, nulle à l'infini.

– Si E est unifère $spx = \hat{x}(\mathscr{M})$. Un élément $x \in E$ est inversible si et seulement si $\hat{x}$ ne s'annule jamais (propriété de Wiener).

– Le radical de E est le noyau de la transformation de Gelfand $x \to \hat{x}$.

§ III – *Isomorphismes algébriques et Isomorphismes bornologiques d'algèbres semi-simples*

Soit F un espace bornologique convexe séparé. Rappelons qu'on dit que F possède la propriété du *graphe bornologiquement fermé* (b-fermé) ou *graphe*

Mackey-fermé (M-fermé) si toute application linéaire d'un espace de Banach E dans F dont le graphe est M-fermé dans $E \times F$ est borné. Il revient au même de supposer E espace bornologique convexe complet. Les principaux types d'*ebc* séparés possédant la propriété du graphe M-fermé sont les suivants (cf. [12]):

(i) Les *ebc* à réseau (en particulier les *ebc* complets à base dénombrable).

(ii) Les *ebc* de Souslin.

Le résultat principal que nous allons établir (connu notamment dans le cas des algèbres de Banach) est le corollaire du théorème suivant:

THEOREME III.1.: *Soient E et F deux abmc commutatives telles que E soit complète et que F appartienne à l'une quelconque des classes d'ebc suivantes*:

(i) *les ebc à réseau (en particulier les ebc complets à base dénombrable)*;

(ii) *les ebc de Souslin (topologiques).*

On suppose F semi-simple.

Tout morphisme d'algèbre $\varphi : E \to F$ est automatiquement borné.

Preuve: Il suffit de montrer que le graphe de φ est M-fermé dans $E \times F$. Soient G ce graphe, $\bar{G}$ sa M-fermeture dans $E \times F$ et $(x_0, y_0) \in \bar{G}$. Soit χ un caractère de F. Considérons l'application:

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) &\longrightarrow \chi(\varphi(x)) - \chi(y). \end{aligned}$$

Elle est continue de $\tau(E \times F)$ dans $\mathbb{C}$: en effet, c'est la somme de l'application $(x, y) \to \chi(y)$ qui est continue car χ est linéaire bornée et de l'application $(x, y) \to (\chi \circ \varphi)(x)$ qui est continue car $\chi \circ \varphi$ étant un caractère de E est nécessairement borné. Cette application est nulle sur G donc nulle sur (x_0, y_0) et par conséquent $\chi(\varphi(x_0)) = \chi(y_0)$ pour tout caractère de F. Comme F est semi-simple et que le radical de F est le noyau de la transformation de Gelfand (II.4) on en déduit que $y_0 = \varphi(x_0)$ donc $(x_0, y_0) \in G$ et le graphe de φ est M-fermé d'où le théorème.

COROLLAIRE 1: *Soient E une algèbre commutative semi-simple. $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bornologies sur E telles que (E, $\mathcal{B}_1$ et E, $\mathcal{B}_2$) soient des ebc appartenant à l'une quelconque des classes (i), (ii) du théorème ci-dessus.*
Si $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ sont des bornologies d'abmc complètes, $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.

Un cas particulier du corollaire 1 mérite une mention particulière.

COROLLAIRE 2: *Soit E une limite inductive (dans la catégorie des algèbres bornologiques) d'une suite d'algèbres de Banach commutatives. Si E est algébriquement isomorphe à une algèbre $C(K)$ de fonctions continues sur un compact, E est une algèbre de Banach.*

Remarque 1: Le corollaire 1 ci-dessus montre que malgré l'analogie des théories spectrales correspondantes, les algèbres bornologiques multiplicativement convexes ne sont généralement pas "banachisables".

Remarque 2: Dans le corollaire 1, a fortiori, dans le théorème (III.1) on ne peut supprimer l'hypothèse du type "propriété du graphe M-fermé". En effet, soient $E = C(K)$ une algèbre de Banach de dimension infinie de fonctions continues sur un compact K et E_c l'espace vectoriel E muni de la bornologie des disques compacts de $E \cdot E_c$ est une algèbre bornologique convexe complète dont tout élément est régulier. Soit F l'espace vectoriel E muni de la bornologie des disques compacts idempotents. C'est une *abmc* commutative unifère complète et semi-simple ne possédant pas la propriété du graphe M-fermé. L'identité $E \to F$ n'est pas bornée.

§ IV – *Prolongement des formes linéaires multiplicatives bornées*

Nous avons établi que dans toute *abmc* (commutative, unifère, complète) toute forme linéaire multiplicative est nécessairement bornée. Par ailleurs dans une telle algèbre les formes linéaires multiplicatives (nécessairement bornées) sont en bijection avec les idéaux maximaux (nécessairement M-fermés). Il en résulte que *toute abmc* (*commutative, unifère, complète*) *possède au moins une forme linéaire multiplicative bornée*, en particulier une bornologie d'*abmc* commutative, unifère, complète n'a jamais un dual nul, résultat remarquable. Ceci permet donc de poser le problème du prolongement des formes linéaires multiplicatives bornées: *Soient E une abmc* (*commutative, unifère, complète*) *F une sous-algèbre complète de E et f une forme linéaire bornée multiplicative sur F. A quelles conditions f se prolonge-t-elle en une forme linéaire multiplicative sur l'algèbre E toute entière?*

Comme dans le cas particulier des algèbres de Banach on va montrer qu'il suffit que le noyau de f appartienne à la "frontière de Silov" de l'algèbre F" (voir aussi § VII), frontière dont l'existence et l'unicité sont immédiates puisque $X(F)$ est compact.

En vertu de la bijection "idéaux maximaux", "formes linéaires multiplicatives bornées", le problème est équivalent à un problème de prolongement des idéaux maximaux. Le théorème peut alors s'enoncer:

THEOREME IV.1.: *Soient E une abmc* (*commutative, unifère, complète*) *et F une sous-algèbre unifère complète de E. Tout idéal maximal de F, appartenant à la frontière de Silov de X(F) se prolonge en un idéal maximal de E appartenant à la frontière de Silov de X(E).*

Preuve: Représentons E sous la forme canonique $E = \varinjlim_{i\in I} E_i$, E_i algèbre de Banach commutative unifère. Notons $\mathcal{M}$ (resp. $\mathcal{M}_i$) l'espace des caractères de E (resp. E_i); pour $x \in E$ soit $I(x)$ l'ensemble des indices $i \in I$ tels que $x \in E_i$. On a la formule:

$$(1) \qquad \sup_{\chi\in\mathcal{M}} |\hat{x}(\chi)| = \inf_{i\in I(x)} \sup_{\chi_i\in\mathcal{M}_i} |\hat{x}(\chi_i)|$$

où $\hat{x}$ dans le premier membre (resp. le second) désigne la transformée de Gelfand de x considéré comme élément de E (resp. de E_i). En effet il est clair que

$$\sup_{\chi\in\mathcal{M}} |\hat{x}(\chi)| \leq \inf_{i\in I(x)} \sup_{\chi_i\in\mathcal{M}_i} |\hat{x}(\chi_i)|.$$

Inversement, soit α un nombre réel tel que

$$\alpha \leq \sup_{\chi\in\mathcal{M}_i} |\hat{x}(\chi_i)| \qquad \text{et} \qquad \alpha > \sup_{\chi\in\mathcal{M}} |\hat{x}(\chi)|.$$

Alors le disque ouvert $\{\lambda \in \mathbb{C};\, |\lambda| < \alpha\}$ contient $spx = \bigcap_{i\in I(x)} sp_i x$ donc contient un $sp_j x$ pour au moins un $j \in I(x)$ ce qui implique que $\alpha > \sup_{\chi_j\in\mathcal{M}_j} |\hat{x}(\chi_j)|$ ce qui contredit l'hypothèse d'où la relation (1).

— Soit alors F une sous-algèbre bornologique unifère complète de E. Pour tout $x \in F$ on a:

$$(2) \qquad \sup_{\chi\in X(E)} |\hat{x}(\chi)| = \sup_{\chi\in X(F)} |\hat{x}(\chi)|.$$

En effet, $F = \varinjlim_{i\in I} F \cap E_i$ algébriquement et bornologiquement où $F \cap E_i$ est muni de la norme induite par E_i. Notons $F_i = F \cap E_i$ et appliquons la formule (1) à l'algèbre F. On obtient:

$$\sup_{\chi\in X(F)} |\hat{x}(\chi)| = \inf_{i\in I(x)} \sup_{\chi_i\in X(F_i)} |\hat{x}(\chi_i)|.$$

L'expression usuelle de la norme spectrale dans une algèbre de Banach montre que:

$$\sup_{\chi_i\in X(F_i)} |\hat{x}(\chi_i)| = \sup_{\chi_i\in X(E_i)} |\hat{x}(\chi_i)| \qquad \text{pour} \quad x \in F_i$$

d'où la relation (2).

— Soit alors $\varphi : X(E) \to X(F)$ l'application canonique de restriction qui est continue. Nous allons montrer que l'image $\varphi(\Gamma)$ de la frontière de Silov de E contient la frontière de Silov de F. Il suffit pour cela de montrer que $\varphi(\Gamma)$ est une "partie déterminante" (au sens de [8]) de $X(F)$. C'est un compact donc un fermé. Il suffit donc de montrer que pour tout $x \in F$

$$\sup_{\chi\in X(F)} |\hat{x}(\chi)| = \sup_{\chi\in\varphi(\Gamma)} |\hat{x}(\chi)|$$

ce qui est vrai, car:

$$\sup_{\chi\in\varphi(\Gamma)} |\hat{x}(\chi)| = \sup_{\chi\in\Gamma} |\hat{x}(\varphi(\chi))| = \sup_{\chi\in\Gamma} |(\hat{x}\circ\varphi)(\chi)| =$$

$$\sup_{\chi\in\Gamma} |\chi(x)| = \sup_{\chi\in\chi(E)} |\chi(x)| = \sup_{\chi\in\chi(F)} |\chi(x)|$$

d'après (2) ce qui achève la démonstration du théorème.

§ V — *Le calcul opérationnel de Gelfand général*

Nous allons étendre aux algèbres bornologiques multiplicativement convexes (*abmc*) le théorème principal du calcul fonctionnel holomorphe relatif aux algèbres de Banach (énoncé de Bourbaki [6]). La réciproque de ce théorème est vraie et intéressante. Elle montre en effet que les *abmc* complètes sont les algèbres (topologiques ou bornologiques) les plus générales pour lesquelles le calcul opérationnel de Gelfand est valable.

V.1. Enoncé du théorème général du calcul opérationnel de Gelfand

Soit E une algèbre bornologique multiplicativement convexe (commutative, unifère, complète). Pour tout système $a = (a_i)_{i \in I}$ d'éléments de E on appelle *spectre simultané* de a et on note spa ou $sp(a_i)$) l'image de $\chi(E)$ dans $\mathbb{C}^I$ par l'application continue $\chi \to (\chi(a_i))_{i \in I}$. C'est donc une partie compacte de $\mathbb{C}^I$ (puisque $\chi(E)$ est compacte). Le spectre simultané est concrètement caracterisé comme suit: un point $(\lambda_i)_{i \in I}$ de $\mathbb{C}^I$ appartient à $sp((a_i))$ si et seulement si les $(a_i - \lambda)$ engendrent un idéal propre de E.

Nous rappellerons ici les notations de Bourbaki [6]. Pour tout compact K de $\mathbb{C}^n$, n entier, on note $\vartheta(K)$ l'algèbre unifère des germes de fonctions holomorphes au voisinage de K, muni de sa bornologie usuelle d'espace de Silva nucléaire. Pour tout ensemble M et deux entiers m et n, $m \leq n$, on note

$$\pi_{m,n} : M^n \to M^m$$

la projection canonique $(a_1, \ldots, a_n) \to (a_1, \ldots, a_m)$.

Si $M = E$ et $a = (a_1, \ldots, a_n) \in E^n$ on sait que $\pi_{m,n}(spa) = sp(\pi_{m,n}(a))$ d'où un morphisme $\pi^*_{m,n} : \vartheta(sp\,\pi_{m,n}(a)) \to \vartheta(sp(a))$. On désigne par $E^{(\infty)} = \bigcup_{n \geq 1} E^n$.

Theoreme V.1.1.: *Soit E une algèbre bornologique multiplicativement convexe, commutative, unifère et complète. Il existe une application $a \to \Theta_a$ et une seule qui associe à tout $a \in E^{(\infty)}$ un morphisme d'algèbre bornologique unifère: $\Theta_a : \vartheta(spa) \to E$, ces morphismes possédant les propriétés suivantes:*

(i) *Si $a = (a_1, \ldots, a_n)$ et si $z_1, \ldots, z_n$ désignent les germes au voisinage de spa des fonctions coordonnées sur $\mathbb{C}^n$ on a*

$$\Theta_a(z_i) = a_i \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

(ii) *Si $a = (a_1 \ldots a_n)$ si $m \leq n$ et si $f \in \vartheta(sp(\pi_{m,n}(a))$ on a*

$$\Theta_a(\pi^*_{mn}(f)) = \Theta_{\pi_{m,n}(a)}(f).$$

V.2. Démonstration du théorème V.1.1

Voici le plan fort simple de la démonstration:
On sait que $E = \varinjlim (E_i, \pi_{ji})$ où E_i est une algèbre de Banach unifere et commutative, la limite inductive étant prise dans la catégorie des algèbres bornologiques unifères. Pour tout $a = a_1 \ldots a_n) \in E^n$, notons $I(a)$ l'ensemble d'indices $i \in I$ tels que $a \in E_i^n$. Pour chaque $i \in I(a)$ on a donc (par application du théorème relatif aux algèbres de Banach) un morphisme unifère borné: $\Theta_a^i : \vartheta(sp_i a) \to E_i$ où $sp_i a$ désigne le spectre simultané de a relativement à E_i. Or il est évident que $\vartheta(spa)\ \varinjlim_{i \in I(a)} \vartheta(sp_i a)$ algébriquement et bornologiquement (cf. lemme ci-dessous). D'où, si l'on montre que le système des morphismes bornés Θ_a^i est inductif, on aura un morphisme borné

$$\Theta_a = \varinjlim \Theta_a^i : \vartheta(spa) \to E$$

que sera solution du problème.

Lemme V.2.1.: *Les notations étant celles ci-dessus, on a:*

(i) $spa = \bigcap_{i \in I(a)} sp_i a$

(ii) *Pour tout couple (i, j) d''léments de $I(a)$ tels que $i \leq j$, soient*

$$\rho_{i,j} : sp_j a \to sp_i a$$

l'injection canonique et

$$\rho^*_{ji} : \vartheta(sp_i a) \to \vartheta(sp_j a)$$

le morphisme canonique déduit de ρ_{ij}. Le système $(\vartheta(sp_i a), \rho^*_{ij})$ est un système inductif d'algèbres bornologiques et l'on a

$$\vartheta(spa) = \varinjlim_{i \in I(a)} \vartheta(sp_i a, \rho^*_{ji})$$

algèbriquement et bornologiquement.

Preuve du lemme: (i) Il est clair que $spa \subset sp_i a$ pour tout $i \in I(a)$. Inversement, soit $\lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_n)$ un nombre complexe n'appartenant pas à spa. Il existe des éléments $(b_1 \ldots b_n)$ de E tels que

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i - \lambda_i) b_i = 1.$$

Soit $j \in I$ contenant les a_i et les b_i $i = 1, \ldots, n$; alors $j \in I(a)$ et $\lambda \notin sp_j a$.

(ii) En vertu de (i) et du fait que $sp_i a$ est compact, tout voisinage ouvert de spa contient au moins un $sp_i a$ d'où $\vartheta(spa) = \lim \vartheta(sp_i a)$ algébriquement et bornologiquement, d'où le lemme.

Passons alors à la construction des morphismes Θ_a. Pour tout $i \in I(a)$ soit $\Theta_a^i : \vartheta(sp_i a) \to E_i$ le calcul fonctionnel relatif à l'algèbre de Banach E_i. Pour $i \leq j$, le diagramme suivant est commutatif car les morphismes Θ_a^i permutent avec les morphismes unifères d'algèbres de Banach ([6], chap I, § 4, n.° 4 prop. 2):

$$\begin{tikzcd}
\vartheta(sp_i a) \arrow[r, "\Theta_a^i"] \arrow[d, "\rho_{ji}^*"'] & E_i \arrow[d, "\pi_{ji}"] \\
\vartheta(sp_j a) \arrow[r, "\Theta_a^j"'] & E_j
\end{tikzcd}$$

Soit alor $\Theta_a = \underset{\overrightarrow{i \in I}}{\lim} \Theta_a^i$. C'est évidemment un morphisme unifere d'algèbres bornologiques de $\vartheta(spa)$ dans E et il est immédiat que les propriétés (i) et (ii), vérifiées par les morphismes Θ_a^i sont vérifiées par Θ_a.
Reste à prouver l'unicité de l'application $a \to \Theta_a$. Soient $a \to {}'\Theta_a$ une seconde application satisfaisant aux conditions du théorème et $a = (a_i \ldots a_n) \in E^{(\infty)}$. Pour tout $i \in I(a)$ soit ${}'\Theta_a^i$ la restriction de ${}'\Theta_a$ à $\vartheta(sp_i a)$. Elle est à valeurs dans un E_j car ${}'\Theta_a$ est borné. Soit un indice k majorant i et j. Les morphismes

$$\Theta_a^i : \vartheta(sp_i a) \to E_i \to E_k$$

$$'\Theta_a^i : \vartheta(sp_i a) \to E_j \to E_k$$

coïncident sur les polynômes donc sont égales ([6] prop. 3 et lemme 10 du chap. I, § 4, n.° 5 et 6), d'où

$$\Theta_a = \underrightarrow{\lim}\, {}'\Theta_a^i = {}'\Theta_a .$$

Le théorème V.1.1. est complètement démontré.

V.3. Autres résultats

Le théorème de substitution dans le calcul fonctionnel holomorphe reste vrai et se déduit aisément, en considérant les limites inductives, du théorème correspondant pour les algèbres de Banach. Il en est de même (cf. [6] chap. I, § 4, n.° 7), du théorème du calcul fonctionnel à une variable pour une *abmc* E unifère complète *non nécessairement commutative.*

V.4. Caractérisation des algèbres du calcul opérationnel de Gelfand

THEOREME V.4.1.: *Soit E une algèbre bornologique séparée (commutative et unifère) pour laquelle le calcul opérationnel de Gelfand (théorème V.1.1) est valable (ce qui implique que tout élément de E a un spectre compact). Alors tout élément de E est régulier, et E peut être munie d'une bornologie d'abmc complète.*

Preuve: Tout élément de E est image par un morphisme d'algèbre bornologique d'un élément d'une algèbre $\vartheta(K)$ qui est une *abmc* complète (et même nucléaire). Un tel élément est donc régulier et est absorbé par un disque borné idempotent complétant (et même un disque borné à décroissance rapide!) d'où le théorème.

§ VI – *Décomposition "à la Silov" d'une algèbre bornologique en somme directe bornologique d'idéaux complets*

Une algèbre E est dite somme directe (algébrique) de deux idéaux I_1 et I_2 si l'espace vectoriel E est somme directe de ses sous-espaces I_1 et I_2. Nous allons montrer qu'une algèbre bornologique multiplicativement convexe (commutative, unifère, complète) est décomposable en somme directe de deux idéaux si et seulement si son espace des caractères $\chi(E)$ n'est pas connexe ou encore si et seulement si E possède un élément idempotent distinct de 0 et 1. C'est la généralisation d'un théorème classique des algèbres de Banach, dû à Silov. Ce sera une conséquence des propositions suivantes:

PROPOSITION VI.1.: *Soit E une abmc (commutative, unifère, complète) somme directe (algèbrique) de deux idéaux I_1 et I_2. Alors:*

(i) *I_1 et I_2 sont M-fermés dans E.*

(ii) *Soient E/I_1 et E/I_2 les abmc quocients correspondantes. Alors $X(E/I_1)$ et $X(E/I_2)$ s'identifient à deux fermés de $X(E)$ formant une partition de $X(E)$.*

Preuve: (i) En effet, soit e l'unité de E; $e = e_1 + e_2$ où e_1 est l'unité de I_1 et e_2 l'unité de I_2. Si alors x_n est une suite de I_1 tendant vers x dans E, $x_n = x_n e_1 \to x e_1 \in I_1$ donc $x e_1 = x$ et par suite $x \in I_1$.

(ii) Soient $\varphi_i : E \to E/I_i$ $i = 1, 2$ les surjections canoniques $X(E/I_i)$ s'identifie à $X(\varphi_i)(X(E/I_i)) = F_i$ muni de la topologie induite par $X(E)$ où $X(\varphi_i) : X(E/I_i) \to X(E)$ est la "transposée" de φ_i.

Or F_i est précisément l'ensemble des caractères de E nuls sur I_i d'où F_1 et F_2 sont disjoints. Par ailleurs tout caractère de E non nul sur E_2 est un caractère de E_1 donc $\chi(e) = \chi(e_1) = 1$ d'où $\chi(e_2) = 0$ et χ est nul sur F_2 (et réciproquement) ce qui établit le recouvrement.

Remarque: La démonstration de l'assertion (i) de la proposition ci-dessus établit que pour les algèbres bornologique unifères, la décomposition en somme directe *algébrique* de deux idéaux est nécessairement une décomposition en somme directe *bornologique* de ces idéaux; c'est-à-dire avec projections bornées.

PROPOSITION VI.2.: *Soit E une abmc (commutative, unifère, complète). On suppose que $X(E)$ admet une partition en deux fermés disjoints F_1 et F_2. Alors:*

Il existe un idempotent unique a de E tel que:

$$F_1 = \{\chi \in X(E);\ \chi(a) = 1\} \quad \text{et} \quad F_2 = \{\chi \in X(E);\ \chi(a) = 0\}.$$

Les ensembles $I_1 = aE$ et $I_2 = (1-a)E$ sont des idéaux M-fermés de E et E est somme directe des idéaux I_1 et I_2.

Preuve: L'espace $X(E)$ s'identifie à une partie de $\mathbb{C}^E$ par l'application $\chi \to (\chi(x))_{x\in E}$. Les parties F_1 et F_2 de l'espace uniforme $\mathbb{C}^E$ sont des compacts disjoints, donc il existe une partie finie $M = (b_1, \ldots, b_n)$ de E et des ouverts disjoints V_1 et V_2 de $\mathbb{C}^M$ telles que:

$$p(F_1) \subset V_1 \quad \text{et} \quad p(F_2) \subset V_2$$

où $p : \mathbb{C}^E \to \mathbb{C}^M$ est la projection canonique.

Identifions $\mathbb{C}^M$ à $\mathbb{C}^n$ et soit f la fonction égale à 1 sur V_1 et 0 sur V_2. On a $f \in \vartheta(V_1 \cup V_2)$ et $sp(b_1, \ldots, b_n) \subset V_1 \cup V_2$. Posons $a = f(b_1, \ldots, b_n) = \Theta_b(f)$. Comme $f^2 = f$ on a $a^2 = a$; donc a est idempotent. De plus, si $\chi \in F_1$, $\chi(a) = \chi(f(b_1, \ldots, b_n)) = f(\chi(b_1), \ldots, \chi(b_n)) = 1$ et si $\chi \in F_2$, $\chi(a) = 0$. Montrons que a est unique: soit a' un autre idempotent. Alors $r = a' - a$ est un élément du radical de E, alors $\mathscr{G}(1 - 2a - r) = 1 - 2\hat{a} - \hat{r} = 1 - 2\hat{a}$ ne s'annule jamais, donc $1 - 2a - r$ est inversible. Or $r(1 - 2a - r) = 0$ car $(a + r)^2 = (a')^2 = a' = a + r$; donc $r = 0$ et par suite $a' = a$. Il en résulte que:

$$I_1 = \{x \in E;\ ax = x\} \quad \text{et} \quad I_2 = \{x \in I;\ (1-a)x = x\}$$

d'où les dernières assertions de la proposition.

En rapprochant les deux propositions ci-dessus, on peut alors énoncer:

THEOREME VI.1.: *Soit E une abmc ((commutative, unifère, complète). Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *E est somme directe algèbrique de deux idéaux;*

(ii) *E est somme directe bornologique de deux idéaux complets;*

(iii) *E possède un idempotent distinct de 0 et 1;*

(iv) *E est bornologiquement isomorphe au produit de deux abmc (commutatives, unifères, complètes);*

(v) *$X(E)$ n'est pas connexe.*

VII.1. Généralités et exemples

On appelle *algèbre bornologique involutive*, toute algèbre bornologique munie d'une involution $x \to x^*$ bornée. Rappelons qu'une partie A d'une algèbre involutive est dite auto-adjointe si $A^* = A$. Soit E une algèbre bornologique involutive. On dit que E est une *algèbre bornologique multiplicativement convexe involutive*, en abrégé, *abmc* involutive ou $*$-*abmc*, si E possède une pseudo-base de bornologie formée de disques idempotents et auto-adjoints, en abrégé disques $*$-idempotents. Il revient au même de dire que E est limite inductive (dans la catégorie des algèbres bornologiques involutives) d'algèbres semi-normées involutives. Un disque borné B d'une algèbre bornologique involutive est dit stellaire s'il est $*$-idempotent et pour tout $x \in B$, $\|x\|_B^2 = \|x^*x\|_B$ où $\|\cdot\|_B$ est la jauge de B. Une algèbre bornologique stellaire est une algèbre bornologique involutive admettant une pseudo-base de bornologie formée de disques stellaires. Les algèbres bornologiques stellaires complètes sont les limites inductives (dans la catégorie des algèbres bornologiques involutives) d'algèbres de Banach stellaires.

Diverses algèbres involutives usuelles de fonctions à supports compacts, de fonctions bornées ou de *germes* de fonctions; des sous-algèbres *non-fermées* d'algèbres d'opérateurs sur des espaces hilbertiens sont des exemples usuels d'algèbres bornologiques stellaires non Banach.

Les disques $*$-idempotents ont des propriétés analogues aux disques idempotents:

Soit E une algèbre unifere involutive d'unité 1, si $B \subset E$ est $*$-idempotent, il en est de même de $B \cup \{1\}$. L'enveloppe disquée, l'enveloppe complétante, l'image directe ou réciproque par un morphisme d'algèbres involutives, l'intersection aribtraire... conservent l'$*$-idempotence. Si E est une algèbre commutative unifère involutive, la réunion de deux disques $*$-idempotents est contenue dans un disque $*$-idempotent.

VII.2. Fomes linéaires positives dans les $*$-abmc. Le théorème général de Bochner

Rappelons que si E est une algèbre involutive, une *forme linéaire positive* sur E est une forme linéaire f sur E telle que $f(x^*x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.

Un cas particulier important de telles formes linéaires est fourni par les distributions de type positif et les distributions multiplicativement positives [9]. Le problème central qui se pose pour les formes linéaires positives dans une algèbre involutive est de les caractériser en terme de mesures positives définies sur certains espaces topologiques. Dans le cas d'une algèbre de Banach involutive, une telle caractérisation est fournie par le théorème suivant [15]: Toute forme linéaire positive f dans une algèbre de Banach involutive unifère commutative E est donnée de manière unique par une mesure de Radon positive μ sur l'espace H des caractères hermitiens de E par la relation:

$$f(x) = \int_H \hat{x}\, d\mu.$$

On peut montrer (cf. par exemple [9]) qu'un tel résultat est faux dans le cas général des algèbres non normées.

Cependant, nous avons:

THEOREME VII.2.1.: (*Théorème général de Bochner*): *Soit E une algèbre bornologique multiplicativement convexe involutive* (*commutative, unifère, complète*). *Pour toute forme linéaire positive f sur E* (*nécessairement bornée*), *il existe une mesure de Radon positive unique μ sur l'espace H des caractères hermitiens de E telle que*

$$f(x) = \int_H \hat{x}(\chi)\, d\mu(\chi).$$

Preuve: E est limite inductive dans la catégorie des algèbres bornologiques involutives unifères d'algèbres de Banach involutives E_i (où i parcourt un ensemble filtrant d'indices I) par des morphismes injectifs

$$\pi_{ji} : E_i \to E_j.$$

Pour tout $i \in I$ soient H_i l'espace compact des caractères hermitiens de E_i. Il est clair que H est la limite projective (topologique) des H_i par les applications continues $X(\pi_{ji}) : \chi \in H_j \to \chi \circ \pi_{ji} \in H_i$.

Notons $\mathscr{G}_i$ (resp. $\mathscr{G}$) la restriction à H_i (resp. H) de la transformation de Gelfand de l'algèbre E_i (resp. E). Pour tout $x \in E_i$ et pour $i \leq j$ le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & H \arrow[dl, "X(\pi_j)"'] \arrow[dr, "X(\pi_i)"] \arrow[rr, "\mathscr{G}x"] & & \mathbb{C} \\
H_j \arrow[rr, "X(\pi_{ji})"'] \arrow[urrr, "\mathscr{G}_j x"] & & H_i \arrow[ur, "\mathscr{G}_i x"'] &
\end{tikzcd}$$

où $X(\pi_i)$ désigne la projection canonique de H sur H_i.

La restriction de f à toute algèbre de Banach involutive E_i est une forme linéaire positive sur E_i donc est donnée par une mesure de Radon positive *unique* μ_i sur H_i par la formule

$$(1) \qquad f(x) = \int_H \mathscr{G}_i x(\chi)\, d\mu_i(\chi) \qquad \text{pour tout} \quad x \in E_i.$$

La famille $(\mu_j, X(\pi_{ji}))$ est un système projectif des mesures de Radon sur le système projectif $(H_j, X(\pi_{ji}))$ d'espaces compacts. En effet, il suffit de montrer que $X(\pi_{ji})\mu_i = \mu_i$ pour tout $i \leq j$. Or en vertu du diagramme ci-dessus, pour tout $x \in E_i$:

$$\int_{H_i} (\mathscr{G}_i x)(\chi)\, d(X(\pi_{ji})\mu_j)(\chi) = \int_{H_j} [(\mathscr{G}_i x) \circ \chi(\pi_{ji})](\chi)\, d\mu_j(\chi)$$
$$= \int_{H_j} (\mathscr{G}_j x)(\chi)\, d\mu_j(\chi) = f(x),$$

d'où en vertu de l'unicité de la mesure μ_i vérifiant la formule (1) on a: $\mu_i = X(\pi_{ji})\mu_j$.

Le théorème de Prokhorov (forme classique) assure alors l'existence sur H d'une mesure de Radon positive unique μ limite projective des μ_i (cf. [7]) et plus généralement [16].

Il est clair que cette mesure répond à la question. Inversement toute mesure sur H vérifiant la condition du théorème se projette sur μH_i suivant μ_i d'ù l'unicité.

Remarques 1) Comme dans le cas d'algèbres de Banach, le théorème ci-dessus se généralise aisément au cas d'algèbres non unifères, en utilisant la notion de "forme linéaire prolongeable" [15]. Dans le cas des algèbres bornologiques stellaires, tout caractère est hermitien donc $H = X(E)$.

2) Certaines algèbres bornologiques involutives importantes ne sont pas multiplicativement convexes mais sont des sous-algèbres E_1 d'*abmc* involutives (commutatives, complètes) E telles que certaines formes linéaires positives sur E_1 se prolongent de manière unique à E. De telles formes peuvent donc être représentée par des mesures de Radon.

3) Comme dans le cas d'algèbres de Banach, la notion de forme linéaire positive dans une algèbre bornologique multiplicativement convexe involutive est équivalente à celle de représentation involutive cyclique dans une espace de Hilbert: A toute représentation (involutive) $x \to A_x$ de vecteur cyclique ξ_0 d'une algèbre involutive E dans un espace de Hilbert H correspond une forme linéaire positive $f(x) = (A_x \xi_0, \xi_0)_H$, unique à une équivalence près. Réciproquement à toute forme linéaire positive dans une algèbre bornologique stellaire correspond une représentation involutive cyclique $x \to A_x$ telle que $f(x) = (A_x \xi_0, \xi_0)$.

VII.3. Algèbres bornologiques stellaires commutatives et algèbres de fonctions continues

Soit E une algèbre bornologique stellaire complète commutative. La transformation de Gelfand est une *injection bornée dense* de E *dans* $\mathscr{C}_0(X(E))$ algèbre des fonctions continues sur $X(E)$ nulles "à l'infini". Mais, contrairement au cas des algèbres de Banach, elle *n'est pas surjective* en général en vertu par exemple du théorème des isomorphismes (§ III). L'algèbre E est cependant isomorphe algébriquement et bornologiquement à une algèbre de *classes de fonctions continues* sur son espace des caractères. C'est sous cette forme que se généralise le théorème de Gelfand-Naimarck. Décrivons cet isomorphisme:

On sait que E est limite inductive dans la catégorie des algèbres bornologiques involutives d'un système $(E_i, \pi_{ji})_{i\in I}$ d'algèbres de Banach stellaires commutatives. Notons $\mathscr{C}_0(X(E_i))$ l'algèbre de Banach involutive des fonctions complexes continues sur $X(E_i)$ nulles à l'infini. Pour $i \leq j, \pi_{ji} : E_i \to E_j$, soit $X(\pi_{ji}) : X(E_j) \to X(E_i)$ l'application continue $\chi \to \chi \circ \pi_{ji}$, et soit λ_{ji} l'application $\mathscr{C}_0(X(E_i)) \to \mathscr{C}_0(X(E_j))$ qui à $\varphi \in \mathscr{C}_0(X(E_i))$ associe $\varphi \circ X(\pi_{ji})$ qui est bien nulle sur le caractère 0 de E_i c'est-à-dire sur l'infini de $X(E_i)$. Le système $(\mathscr{C}_0(X(E_i)), \lambda_{ji})$ est un système inductif d'algèbres de Banach involutives. On notera $\tilde{\mathscr{C}}_0(X(E) = \varinjlim_{i\in I} (\mathscr{C}_0(X(E_i)), \lambda_{ji})$ la limite inductive (dans la catégorie des algèbres bornologiques involutives) de ce système. Pour tout $i \in I$ la transformation de Gelfand $\mathscr{G}_i$ est un isomorphisme isométrique de l'algèbre de Banach stellaire E_i sur l'algèbre de Banach stellaire $\mathscr{C}_0(X(E_i))$. *La limite inductive des $\mathscr{G}_i$ existe et est un isomorphisme d'algèbres bornologiques stellaires de E sur $\tilde{\mathscr{C}}_0(X(E))$.*

VII.4. Calcul fonctionnel dans les algèbres bornologiques stellaires

Pour les algèbres bornologiques stellaires on peut améliorer les résultats du § V.

PROPOSITION VII.4.1.: *Soient E une algèbre bornologique stellaire, unifère complète et $x \in E$ un élément normal de E de spectre $K = spx$. Soit $\tilde{\mathscr{C}}(K)$ l'algèbre bornologique stellaire des germes de fonctions continues au voisinage de K. Il existe un morphisme d'algèbres bornologiques involutives unique Θ de $\tilde{\mathscr{C}}(K)$ dans E tel que $\Theta(z) = x$ où z est le germe de la fonction $\lambda \to \lambda$ sur K.*

Preuve: *Soit* $\varphi \in \tilde{\mathscr{C}}(K)$ et U un voisinage ouvert de K tel que φ soit une fonction continue bornée sur U. Comme $K = \bigcap_{i\in I(x)} sp_i x$ (notations de II.2). U contient au moins un $sp_i x$. Soient φ_i la restriction de φ à $sp_i x$ et Θ_i le calcul fonctionnel pour l'algèbre de Banach stellaire E_i. L'élément de E $\Theta_i(\varphi_i)$ est indépendant de i: en effet, si U contient $sp_i x$ et $sp_j x$ il contient $sp_k x$ où $k \geq i, j$. Les applications sur $\mathscr{C}(sp_i x)$ $\psi \to \Theta_i(\psi)$ et $\psi \to \Theta_k(\psi|_{sp_k x})$

de $\mathscr{C}(sp_i x)$ dans E_k coïncident sur les polynômes en z et $\bar{z}$, denses dans $\mathscr{C}(sp_i x)$ donc sont identiques et par suite $\Theta_i(\varphi_i) = \Theta_k(\varphi_k) = \Theta_j(\varphi_j)$. Posons $\Theta(\varphi) = \Theta_i(\varphi_i)$. Il est clair que Θ répond à la question.

Remarque: Il est clair que $\vartheta(K) \subset \tilde{\mathscr{C}}(K)$ et que Θ défini dans la proposition ci-dessus prolonge le morphisme Θ du thèorème (V.1.1.).

VII.5. Prolongement des formes linéaires multiplicatives bornées dans les algèbres bornologiques stellaires

Dans le cas des algèbres bornologiques stellaires, on a le résultat suivant, remarquable dans l'étude des prolongements des formes linéaires bornées.

THEOREME VII.5.1.: *Soient E une algèbre bornologique stellaire, commutative, unifère, complète et F une sous-algèbre unifère complète de E. Toute forme linéaire multiplicative bornée sur F se prolonge en une forme linéaire multiplicative bornée sur E tout entière.*

Le théorème sera conséquence du lemme suivant et du § IV.

LEMME VII.5.1.: *La frontière de Silov d'une algèbre bornologique stellaire (commutative, unifère, complète) est l'espace tout entier de ses idéaux maximaux.*

Preuve du lemme: Il est clair qu'un point m_0 de l'espace $\mathscr{M}$ des idéaux maximaux appartient à la frontière de Silov si et seulement si pour tout voisinage de m_0 dans $\mathscr{M}$, il existe $y \in E$ tel que $|\hat{y}|$ atteigne son maximum dans U et soit strictement inférieure à ce maximum dans le complémentaire de U. Par ailleurs, l'algèbre E étant stellaire, l'image de la transformation de Gelfand est dense dans $\mathscr{C}(\mathscr{M})$ (Stone-Weierstrass). Soient alors $m_0 \in \mathscr{M}$, U un voisinage arbitraire de m_0 et $\varphi \in \mathscr{C}(\mathscr{M})$, telle que $\varphi(m_0) = 1$ et φ nulle hors de U. Il existe donc un $y \in E$, $||\hat{y} - \varphi|| \leq 1/3$. Mais, alors $|\hat{y}|$ atteint son maximum dans U et est strictement inférieure à ce maximum hors de U, donc appartient à la frontière de Silov de $\mathscr{M}$, d'où le lemme.

Troisième Partie

Algèbres Bornologiques Probanach et Complements Divers

§ I – *Algèbres bornologiques probanach*

Une algèbre bornologique multiplicativement convexe complète (partie II) est une algèbre bornologique E pour laquelle il existe "suffisamment" de morphismes d'algèbres bornologiques définis sur des algèbres de Banach *à valeurs dans E*. Pour ces algèbres la théorie de Gelfand se généralise très bien mais de nombreuses algèbres bornologiques intéressantes et usuelles ne sont pas de ce type. Elles appartiennet à une autre grande classe d'algèbres bornologiques, duale de la précédente: la classe des algèbres bornologiques probanach pour laquelle il existe "suffisamment" de morphisme *définis sur E* à valeurs dans des algèbres de Banach.

Soit E une algèbre bornologique (resp. algèbre bornologique unifère). On dit que E est une *algèbre bornologique probanach* si elle est limite projective (bornologique) d'un système projectif d'algèbres de Banach (E_i, π_{ji}) (resp. d'algèbres de Banach unifères). Les exemples usuels de telles algèbres sont: l'algèbre de fonctions continues sur un espace topologique X munie de la σ-bornologie (σ désignant les parties compactes de X); les algèbres $\mathscr{E}(\Omega)$ et $\mathscr{D}(\Omega)$ des fonctions indéfiniment dérivables sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de leur bornologie de Schwartz; l'algèbre $\vartheta(\Omega)$ des fonctions holomorphes sur on ouvert de $\mathbb{C}^n$ munie de sa bornologie usuelle . . .

Soit E une algèbre bornologique probanach, limite projective d'algèbres de Banach E_i. La topologie sur E limite projective des E_i par les morphismes d'algèbres π_{ij} possède une *famille de voisinages de zéro formée de disques idempotents* l'ensemble des homothétiques constitue une base, autrement dit c'est une "*topologie d'algèbre localement multiplicativement convexe*" [4] [14]. La bornologie de von Neumann associée à cette topologie est précisément la bornologie de E. Inversement, soit E une algèbre topologique localement multiplicativement convexe complète et $\mathscr{B}$ la bornologie de von Neumann associée à sa topologie. L'algèbre bornologique $(E, \mathscr{B})$ est probanach. Ceci montre que les *algèbres bornologiques probanach sont pratiquement "équivalentes" aux algèbres topologiques localement multiplicativement convexes complètes* introduites dès 1945 par R. Arens [4] et largement étudiées. Nous renvoyons au mémoire de Michael [14] pour l'étude de telles algèbres. Signalons que le théorème de Gelfand-Mazur est trivialement vrai pour ces algèbres et qu'on dispose pour elles d'un calcul fonctionnel holomorphe (faible) pour certaines fonctions holomorphes, notamment (trivialement) pour les fonctions entières. Mais leur théorie dans son ensemble va beaucoup moins loin que celle des algèbres bornologiques multiplicativement convexes complètes. Elle montre cependant que de nombreuses algèbres *possédant des éléments non réguliers* se conduisent relativement bien et par conséquent qu'il y a lieu de "classer" les éléments non réguliers suivant leur "degré d'irrégularité".

§ II – *Bornologies convexes complètes sur les extensions topologiques du corps des complexes*

Soit E une algèbre sur $\mathbb{C}$ qui est un corps contenant strictement $\mathbb{C}$. Il n'existe sur E aucune topologie qui soit à la fois une topologie d'algèbre localement convexe séparée et une topologie de corps.

On sait cependant construire sur certaines de ces algèbres, des topologies de corps qui soient en même temps des topologies d'algèbres métrisables complètes [19]. La bornologie des *disques* bornés fermés associée à une telle topologie est une bornologie d'algèbre, *convexe complète*, pour laquelle inversion $x \to x^{-1}$ garde de bonnes propriétés de continuité. En vertu du théorème de Gelfand-Mazur, une telle bornologie d'algèbre ne peut être ni multiplicativement convexe ni probanach. L'ensemble des éléments réguliers de cette algèbre bornologique est la droite complexe. Tout élément non régulier a un spectre compact, mais vide. Le dual bornologie de cet *ebc* est nécessairement nul.

§ III – *Extensions et limites du calcul fonctionnel holomorphe*

Le calcul fonctionnel holomorphe a pour but essentiel de construire des fonctions analytiques d'éléments d'une algèbre. On n'y arrive parfaitement que dans le cas où l'algèbre considérée est une *algèbre bornologique* *multiplicativement convexe* (commutative, unifère, complète), en particulier une algèbre de Banach. Dans ce cas, on peut prendre l'ensemble de *toutes* les fonctions analytiques au voisinage du spectre d'un système fini donné d'éléments (Partie II; § V). Dans le cas général il y a une dualité entre l'irrégularité des éléments considérés de l'algèbre et la "régularité" des fonctions analytiques opérant sur ces éléments. Les fonctions analytiques les plus régulières sont évidemment les polynômes.

L'Waelbroeck [20] a introduit des algèbres de fonctions analytiques suffisamment régulières pour construire un calcul fonctionnel holomorphe d'éléments non réguliers (cf. aussi J. S. e Silva [18]). Les applications de ce calcul malheureusement jusqu'ici fort limitées.

Il convient enfin de noter qu'un calcul fonctionnel holomorphe valable pour *toute* algèbre topologique ou bornologique (commutative, unifère, complète) et même uniquement pour *toute algèbre de Fréchet* ne peut avoir pour base qu'une algèbre de fonctions analytiques ne contenant *aucune fonction entière*! En effet, soit E l'algèbre des (classes de) fonctions complexes f sur $[0, 1]$ telles que $f \in L^p\,[0, 1]$ pour tout $p \geq 1$, munie de la topologie ou de la bornologie définie par les normes $f \to \|f\|_p$ $(p \geq 1)$. Il est connu et facile à vérifier que les seules fonctions entières opérant sur E sont les polynômes [22].

BIBLIOGRAPHIE

[1] AKKAR M.: *Sur la théorie spectrale des algèbres d'opérateurs.* Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, Bordeaux, (1972).

[2] ALLAN G. R.: *A spectral theory for locally convex algebras.* Proc. Lond. Math. Soc. (3) 15 (1965) 399-421.

[3] ALLAN G. R., DALES H. G. MCCLURE J. P.: *Pseudo-Banach algebras.* Studia Math. T. 15 (1971) p. 55-69.

[4] ARENS R.: *A generalisation of normed rings.* Pac. J. Math. 2. (1952) 455-471.

[5] ARNOLD B. H.: *Rings of operators on vector spaces.* Annals of Math. Vol. 45, n.º 1, Jan. 1944.

[6] BOURBAKI N.: Théories spectrales. Hermann, Paris (1967).

[7] BOURBAKI N.: Intégration. Hermann, Paris.

[8] GELFAND I. M.: RAIKOV D. A.: CHILOV G. E.: Les anneaux normés commutatifs, Gauthier-Villars, Paris, (1964).

[9] GELFAND I. M.; VILENKIN N. Y.: Les distributions, tome 4; Dunod, Paris, (1967).

[10] HOGBE-NLEND H.: Théorie des bornologies et applications. Springer Lectures Notes, 213, (1971).

[11] HOGBE-NLEND H.: *Sur les espaces ultranucléaires.* BOLL. U.M.I. (1972).

[12] HOGBE-NLEND H.: *Sur le théorème du graphe fermé.* Séminaire d'Analyse Fonctionnelle, Bordeaux (1971).

[13] LAZET D.: *Applications analytiques dans les espaces bornologiques.* Thèse 3e cycle, Bordeaux, (1972) (cf. aussi C.R.A.S., 273, (1971) p. 155-157.

[14] MICHAEL E. A. : Mém. AMS n.º 11, (1952).

[15] NAIMARCK M. A.: Normed rings (1964).

[16] SCHWARTZ L.: *Applications rodonifiantes,* Séminaire Ecole Polytechnique. Paris (1971).

[17] SILVA J. S. e: *Les espaces, à bornés et les réunions d'espaces normés.* Rend. Acc. Naz. dei-Lincei, Serie VIII, 34 (1963) 134-137.

[18] SILVA J. S. e.: *Sur le calcul symbolique d'opérateurs permutables . . .* Annali de Math. pura e App. (1962); p. 219-276.

[19] WAELBROECK L.: Topological vector spaces and Algebras. Springer Lectures Notes, n.º 230, (1971).

[20] WAELBROECK L.: *Etude spectrale des algèbres complètes*. Mem. Acad. Roy. Belgique cl. des Sc. 31, (1960).

[21] WARNER S.: *Inductive limits of normed algebras*.

[22] ZELASKO: Metric generalisations of Banach algebras. Lectures, Yale University (1963/1964).

Université de Bordeaux, U. E. R. de Mathématiques et d'Informatique.
Universidade de São Paulo, Instituto de Matemática e Estatística